Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами

Т. А. Суслина
(совместно с М. А. Дородным)

Санкт-Петербургский государственный университет

Конференция
“Уравнения с частными производными и их приложения”,
посвященная 115-летию со дня рождения С. Л. Соболева
Новосибирск, октябрь 2023

Постановка задачи

Введем обозначения:

- Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$.
- Ω — элементарная ячейка решетки Γ.

Постановка задачи

Введем обозначения:

- Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$.
- Ω — элементарная ячейка решетки Γ.
- $\widetilde{\Gamma}$ — двойственная решетка.
- $\widetilde{\Omega}$ — центральная зона Бриллюэна решетки $\widetilde{\Gamma}$.

Постановка задачи

Введем обозначения:

- Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$.
- Ω — элементарная ячейка решетки Γ.
- $\widetilde{\Gamma}$ — двойственная решетка.
- $\widetilde{\Omega}$ — центральная зона Бриллюэна решетки $\widetilde{\Gamma}$.

Пример: $\Gamma = \mathbb{Z}^d, \quad \Omega = [0,1)^d, \quad \widetilde{\Gamma} = (2\pi\mathbb{Z})^d, \quad \widetilde{\Omega} = (-\pi,\pi)^d.$

Постановка задачи

Введем обозначения:

- Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$.
- Ω — элементарная ячейка решетки Γ.
- $\widetilde{\Gamma}$ — двойственная решетка.
- $\widetilde{\Omega}$ — центральная зона Бриллюэна решетки $\widetilde{\Gamma}$.

Пример: $\Gamma = \mathbb{Z}^d, \quad \Omega = [0,1)^d, \quad \widetilde{\Gamma} = (2\pi\mathbb{Z})^d, \quad \widetilde{\Omega} = (-\pi,\pi)^d.$

Пусть $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Обозначим

$$f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right).$$

Постановка задачи

Основной объект

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *рассмотрим оператор*

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \mathbf{D} := -i\nabla.$$

Постановка задачи

Основной объект

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ *рассмотрим оператор*

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \mathbf{D} := -i\nabla.$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — Γ*-периодическая* $(m \times m)$*-матрица-функция,*

$$c' \mathbf{1}_m \leqslant g(\mathbf{x}) \leqslant c'' \mathbf{1}_m, \quad 0 < c' \leqslant c'' < \infty;$$

Постановка задачи

Основной объект

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *рассмотрим оператор*

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \mathbf{D} := -i\nabla.$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ *—* Γ*-периодическая* $(m\times m)$*-матрица-функция,*

$$c'\mathbf{1}_m \leqslant g(\mathbf{x}) \leqslant c''\mathbf{1}_m, \quad 0 < c' \leqslant c'' < \infty;$$

$b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j$ *— матричный размера* $m\times n$ *дифференциальный оператор первого порядка.*

Постановка задачи

Основной объект

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ *рассмотрим оператор*

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \mathbf{D} := -i\nabla.$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ *—* Γ*-периодическая* $(m \times m)$*-матрица-функция,*

$$c' \mathbf{1}_m \leqslant g(\mathbf{x}) \leqslant c'' \mathbf{1}_m, \quad 0 < c' \leqslant c'' < \infty;$$

$b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j$ *— матричный размера* $m \times n$ *дифференциальный оператор первого порядка.*
Предполагается, что $m \geqslant n$ *и символ* $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^d b_j \xi_j$ *имеет максимальный ранг:*

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d.$$

Постановка задачи

Точное определение оператора A_ε дается в терминах квадратичной формы

$$a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u}\rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Постановка задачи

Точное определение оператора A_ε дается в терминах квадратичной формы

$$a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u}\rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

При наших предположениях выполнены неравенства

$$c_0 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Постановка задачи

Точное определение оператора A_ε дается в терминах квадратичной формы

$$a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u}\rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

При наших предположениях выполнены неравенства

$$c_0 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Пример:

$$A_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}.$$

В этом случае $n = 1$, $m = d$ и $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$.

Постановка задачи

Цель исследования

Наша цель — изучить поведение оператор-функций

$$\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2}), \quad A_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau A_\varepsilon^{1/2}), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

при малом ε.

Постановка задачи

Цель исследования

Наша цель — изучить поведение оператор-функций

$$\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2}), \quad A_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau A_\varepsilon^{1/2}), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

при малом ε. *Результаты можно применить к задаче Коши для гиперболического уравнения:*

$$\partial_\tau^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = -(A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \ \tau \in \mathbb{R};$$
$$\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad (\partial_\tau \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}).$$

Постановка задачи

Цель исследования

Наша цель — изучить поведение оператор-функций

$$\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2}), \quad A_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau A_\varepsilon^{1/2}), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

при малом ε. *Результаты можно применить к задаче Коши для гиперболического уравнения:*

$$\partial_\tau^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = -(A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \ \tau \in \mathbb{R};$$
$$\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad (\partial_\tau \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}).$$

Решение представимо в виде

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) = \cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})\boldsymbol{\phi} + A_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau A_\varepsilon^{1/2})\boldsymbol{\psi}.$$

Эффективный оператор

Мы показываем, что в некотором смысле

$$\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2}) \sim \cos(\tau A_0^{1/2}), \quad A_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau A_\varepsilon^{1/2}) \sim A_0^{-1/2}\sin(\tau A_0^{1/2})$$

при малом ε.

Эффективный оператор

Мы показываем, что в некотором смысле

$$\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2}) \sim \cos(\tau A_0^{1/2}), \quad A_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau A_\varepsilon^{1/2}) \sim A_0^{-1/2}\sin(\tau A_0^{1/2})$$

при малом ε. Здесь A_0 — *эффективный оператор* вида

$$A_0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}).$$

Эффективный оператор

Мы показываем, что в некотором смысле

$$\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2}) \sim \cos(\tau A_0^{1/2}), \quad A_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau A_\varepsilon^{1/2}) \sim A_0^{-1/2}\sin(\tau A_0^{1/2})$$

при малом ε. Здесь A_0 — *эффективный оператор* вида

$$A_0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}).$$

Определение эффективной матрицы g^0:
Пусть $\Lambda(\mathbf{x})$ — матрица-функция размера $n \times m$, являющаяся Γ-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Эффективный оператор

Мы показываем, что в некотором смысле

$$\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2}) \sim \cos(\tau A_0^{1/2}), \quad A_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau A_\varepsilon^{1/2}) \sim A_0^{-1/2}\sin(\tau A_0^{1/2})$$

при малом ε. Здесь A_0 — *эффективный оператор* вида

$$A_0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}).$$

Определение эффективной матрицы g^0:
Пусть $\Lambda(\mathbf{x})$ — матрица-функция размера $n \times m$, являющаяся Γ-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.$$

Тогда g^0 есть $(m \times m)$-матрица вида

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \quad \widetilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m).$$

Обзор

- В 2001–2006 годах в работах **Бирмана** и **Суслиной** было изучено поведение резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ с помощью *теоретико-операторного подхода.* Установлены оценки:

$$\left\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A_0 + I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon, \quad (1)$$

$$\left\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A_0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2, \quad (2)$$

$$\left\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A_0 + I)^{-1} - \varepsilon K_1(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \quad (3)$$

Обзор

- В 2001–2006 годах в работах **Бирмана** и **Суслиной** было изучено поведение резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ с помощью *теоретико-операторного подхода*. Установлены оценки:

$$\left\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A_0 + I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon, \quad (1)$$

$$\left\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A_0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2, \quad (2)$$

$$\left\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A_0 + I)^{-1} - \varepsilon K_1(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \quad (3)$$

Здесь *корректоры* $K_1(\varepsilon)$ и $K(\varepsilon)$ заданы соотношениями

$$K_1(\varepsilon) = \Lambda^\varepsilon \Pi_\varepsilon b(\mathbf{D})(A_0 + I)^{-1},$$

$$(\Pi_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon} e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\rangle} \widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi},$$

$$K(\varepsilon) = K_1(\varepsilon) + K_1(\varepsilon)^* + K_3.$$

Обзор

- Результаты для полугруппы $e^{-A_\varepsilon \tau}$, $\tau > 0$, были получены **Суслиной** (2004, 2010) и **Василевской** (2009):

$$\left\| e^{-A_\varepsilon \tau} - e^{-A_0 \tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon, \qquad (4)$$

$$\left\| e^{-A_\varepsilon \tau} - e^{-A_0 \tau} - \varepsilon K(\varepsilon, \tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon^2, \qquad (5)$$

$$\left\| e^{-A_\varepsilon \tau} - e^{-A_0 \tau} - \varepsilon K_1(\varepsilon, \tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon. \qquad (6)$$

Обзор

- Результаты для полугруппы $e^{-A_\varepsilon \tau}$, $\tau > 0$, были получены **Суслиной** (2004, 2010) и **Василевской** (2009):

$$\left\| e^{-A_\varepsilon \tau} - e^{-A_0 \tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon, \qquad (4)$$

$$\left\| e^{-A_\varepsilon \tau} - e^{-A_0 \tau} - \varepsilon K(\varepsilon,\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon^2, \qquad (5)$$

$$\left\| e^{-A_\varepsilon \tau} - e^{-A_0 \tau} - \varepsilon K_1(\varepsilon,\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon. \qquad (6)$$

Здесь $K(\varepsilon,\tau)$ и $K_1(\varepsilon,\tau)$ — подходящие корректоры. Оценки (1)–(6) называют *операторными оценками погрешности*.

Обзор

- Результаты для полугруппы $e^{-A_\varepsilon \tau}$, $\tau > 0$, были получены **Суслиной** (2004, 2010) и **Василевской** (2009):

$$\left\| e^{-A_\varepsilon \tau} - e^{-A_0 \tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon, \qquad (4)$$

$$\left\| e^{-A_\varepsilon \tau} - e^{-A_0 \tau} - \varepsilon K(\varepsilon, \tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon^2, \qquad (5)$$

$$\left\| e^{-A_\varepsilon \tau} - e^{-A_0 \tau} - \varepsilon K_1(\varepsilon, \tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon. \qquad (6)$$

  Здесь $K(\varepsilon, \tau)$ и $K_1(\varepsilon, \tau)$ — подходящие корректоры. Оценки (1)–(6) называют *операторными оценками погрешности*.

- Другой подход к получению операторных оценок погрешности (*метод сдвига*) был предложен в 2005 г. **Жиковым** и **Пастуховой**. См. обзор Жикова и Пастуховой (УМН, 2016).

Обзор

Обсудим теперь ситуацию с усреднением уравнений *типа Шрёдингера* и *гиперболических* уравнений.

Обзор

Обсудим теперь ситуацию с усреднением уравнений *типа Шрёдингера* и *гиперболических* уравнений.

- В 2008 г. **Бирман** и **Суслина** показали, что

$$\left\| e^{-i\tau A_\varepsilon} - e^{-i\tau A_0} \right\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon, \quad (7)$$

$$\left\| \cos\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) - \cos\left(\tau A_0^{1/2}\right) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \quad (8)$$

Обзор

Обсудим теперь ситуацию с усреднением уравнений *типа Шрёдингера* и *гиперболических* уравнений.

- В 2008 г. **Бирман** и **Суслина** показали, что

$$\left\| e^{-i\tau A_\varepsilon} - e^{-i\tau A_0} \right\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon, \quad (7)$$

$$\left\| \cos\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) - \cos\left(\tau A_0^{1/2}\right) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \quad (8)$$

- В 2019 г. **Мешкова** получила аналогичный результат для оператора $A_\varepsilon^{-1/2}\sin\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right)$ вместе с приближением по энергетической норме:

$$\left\| A_\varepsilon^{-1/2}\sin\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) - A_0^{-1/2}\sin\left(\tau A_0^{1/2}\right) \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon,$$

$$\left\| A_\varepsilon^{-1/2}\sin\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) - A_0^{-1/2}\sin\left(\tau A_0^{1/2}\right) - \varepsilon\tilde{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon.$$

Обзор

- В работах **Суслиной** (2017), **Дородного** (2021), **Дородного** и **Суслиной** (2018, 2020) была подтверждена точность этих результатов в общем случае, как по типу нормы, так и в отношении зависимости оценок от τ.

Обзор

- В работах **Суслиной** (2017), **Дородного** (2021), **Дородного** и **Суслиной** (2018, 2020) была подтверждена точность этих результатов в общем случае, как по типу нормы, так и в отношении зависимости оценок от τ.
- Однако, в тех же работах при некоторых дополнительных предположениях результаты были усилены и в том, и в другом отношении.

Обзор

- В работах **Суслиной** (2017), **Дородного** (2021), **Дородного** и **Суслиной** (2018, 2020) была подтверждена точность этих результатов в общем случае, как по типу нормы, так и в отношении зависимости оценок от τ.
- Однако, в тех же работах при некоторых дополнительных предположениях результаты были усилены и в том, и в другом отношении.
- В 2022 г. **Суслина** получила аппроксимации с корректорами для "подправленной экспоненты" $e^{-i\tau A_\varepsilon}(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)$ по $(H^s\to L_2)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ и по $(H^s\to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ (при подходящих показателях s).

Основные вопросы

Проблема

- *Возможно ли аппроксимировать операторы* $\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})$ *и* $A_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau A_\varepsilon^{1/2})$ *по* $(H^s \to L_2)$*-норме с точностью* $O(\varepsilon^2)$*?*
- *Можно ли приблизить оператор* $\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})$ *по* $(H^s \to H^1)$*-норме с погрешностью* $O(\varepsilon)$*?*

Основные вопросы

Проблема

- *Возможно ли аппроксимировать операторы* $\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})$ *и* $A_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau A_\varepsilon^{1/2})$ *по* $(H^s \to L_2)$*-норме с точностью* $O(\varepsilon^2)$*?*
- *Можно ли приблизить оператор* $\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})$ *по* $(H^s \to H^1)$*-норме с погрешностью* $O(\varepsilon)$*?*

Результаты:

- Для оператора $A_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau A_\varepsilon^{1/2})$ ответ на первый вопрос положителен. Такая аппроксимация была найдена в рукописи **Мешковой** (2018). Мы получили другой вариант приближения.
- Получены требуемые аппроксимации не для косинуса $\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})$, а для "подправленного косинуса" $\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})\,(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)$.

Основные вопросы

Результаты могут быть применены к задаче Коши с начальными данными из специального класса:

$$\partial_\tau^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = -(A_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,\ \tau \in \mathbb{R};$$
$$\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) + \varepsilon \Lambda^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon \boldsymbol{\phi})(\mathbf{x}), \quad (\partial_\tau \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}).$$

Решение представляется в виде

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) = \cos(\tau A_\varepsilon^{1/2}) \left(I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon\right) \boldsymbol{\phi} + A_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau A_\varepsilon^{1/2}) \boldsymbol{\psi}.$$

Редукция 1: масштабное преобразование

Мы применяем теоретико-операторный подход, основанный на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений.

Редукция 1: масштабное преобразование

Мы применяем теоретико-операторный подход, основанный на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений.

С помощью масштабного преобразования изучение операторов $\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})$ и $A_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau A_\varepsilon^{1/2})$ сводится к изучению операторов

$$\cos(\tau\varepsilon^{-1}A^{1/2}), \quad \varepsilon A^{-1/2}\sin(\tau\varepsilon^{-1}A^{1/2}),$$

где $A = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$.

Редукция 2: разложение в прямой интеграл

Используя теорию Флоке–Блоха, разложим оператор A в прямой интеграл:

$$A \sim \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus A(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}.$$

Редукция 2: разложение в прямой интеграл

Используя теорию Флоке–Блоха, разложим оператор A в прямой интеграл:

$$A \sim \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus A(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}.$$

Оператор $A(\mathbf{k})$ действует в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ и задается выражением

$$A(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k})$$

при периодических граничных условиях.

Редукция 2: разложение в прямой интеграл

Используя теорию Флоке–Блоха, разложим оператор A в прямой интеграл:

$$A \sim \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus A(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}.$$

Оператор $A(\mathbf{k})$ действует в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ и задается выражением

$$A(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$$

при периодических граничных условиях.
Нам нужно аппроксимировать операторы

$$\cos(\tau\varepsilon^{-1}A(\mathbf{k})), \quad \varepsilon A(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\tau\varepsilon^{-1}A(\mathbf{k}))$$

равномерно по $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$.

Аналитическая теория возмущений

Оператор $A(\mathbf{k})$ является эллиптическим оператором в ограниченной области; его спектр дискретен.

Аналитическая теория возмущений

Оператор $A(\mathbf{k})$ является эллиптическим оператором в ограниченной области; его спектр дискретен.
Мы рассматриваем $A(0)$ как невозмущенный оператор и $A(\mathbf{k})$ (при малом $\mathbf{k}$) — как возмущенный.

Аналитическая теория возмущений

Оператор $A(\mathbf{k})$ является эллиптическим оператором в ограниченной области; его спектр дискретен.
Мы рассматриваем $A(0)$ как невозмущенный оператор и $A(\mathbf{k})$ (при малом $\mathbf{k}$) — как возмущенный. Имеем:

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A(0) = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) : \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}.$$

Аналитическая теория возмущений

Оператор $A(\mathbf{k})$ является эллиптическим оператором в ограниченной области; его спектр дискретен.
Мы рассматриваем $A(0)$ как невозмущенный оператор и $A(\mathbf{k})$ (при малом $\mathbf{k}$) — как возмущенный. Имеем:

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A(0) = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) : \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}.$$

Пусть P — ортопроектор на $\mathfrak{N}$:

$$P\mathbf{u} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Аналитическая теория возмущений

Оператор $A(\mathbf{k})$ является эллиптическим оператором в ограниченной области; его спектр дискретен.
Мы рассматриваем $A(0)$ как невозмущенный оператор и $A(\mathbf{k})$ (при малом $\mathbf{k}$) — как возмущенный. Имеем:

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A(0) = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) : \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}.$$

Пусть P — ортопроектор на $\mathfrak{N}$:

$$P\mathbf{u} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Таким образом, точка $\lambda_0 = 0$ является n-кратным изолированным собственным значением оператора $A(0)$.

Аналитическая теория возмущений

Оператор $A(\mathbf{k})$ является эллиптическим оператором в ограниченной области; его спектр дискретен.
Мы рассматриваем $A(0)$ как невозмущенный оператор и $A(\mathbf{k})$ (при малом $\mathbf{k}$) — как возмущенный. Имеем:

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A(0) = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) : \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}.$$

Пусть P — ортопроектор на $\mathfrak{N}$:

$$P\mathbf{u} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Таким образом, точка $\lambda_0 = 0$ является n-кратным изолированным собственным значением оператора $A(0)$. Тогда при $|\mathbf{k}| \leqslant t_0$ возмущенный оператор $A(\mathbf{k})$ имеет ровно n собственных значений $\lambda_1(\mathbf{k}), \dots, \lambda_n(\mathbf{k})$ на интервале $[0, \delta]$, а интервал $(\delta, 3\delta)$ свободен от спектра.

Аналитическая теория возмущений

Положим $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}$, $t = |\mathbf{k}|$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Изучаем семейство

$$A(\mathbf{k}) = A(t\boldsymbol{\theta}) =: A(t, \boldsymbol{\theta})$$

методами *аналитической теории возмущений* по параметру t.

Аналитическая теория возмущений

Положим $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}$, $t = |\mathbf{k}|$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Изучаем семейство

$$A(\mathbf{k}) = A(t\boldsymbol{\theta}) =: A(t, \boldsymbol{\theta})$$

методами *аналитической теории возмущений* по параметру t. В силу теоремы Като–Реллиха существуют вещественно аналитические ветви собственных значений и собственных элементов оператора $A(t, \boldsymbol{\theta})$:

$$A(t, \boldsymbol{\theta})\varphi_l(t, \boldsymbol{\theta}) = \lambda_l(t, \boldsymbol{\theta})\varphi_l(t, \boldsymbol{\theta}), \quad l = 1, \ldots, n, \quad t \leqslant t_0,$$

причем набор $\{\varphi_l(t, \boldsymbol{\theta})\}$ образует ортонормированный базис в собственном подпространстве оператора $A(t, \boldsymbol{\theta})$, отвечающем промежутку $[0, \delta]$.

Аналитическая теория возмущений

При малом t выполнены степенные разложения

$$\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \mu_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \nu_l(\boldsymbol{\theta})t^4 + \ldots, \tag{9}$$

$$\varphi_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \omega_l(\boldsymbol{\theta}) + t\varphi_l^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) + \ldots, \tag{10}$$

$l = 1, \ldots, n$.

Аналитическая теория возмущений

При малом t выполнены степенные разложения

$$\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \mu_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \nu_l(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots, \tag{9}$$

$$\varphi_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \omega_l(\boldsymbol{\theta}) + t\varphi_l^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) + \dots, \tag{10}$$

$l = 1, \dots, n$. Здесь $\gamma_l(\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_* > 0$ и $\mu_l(\boldsymbol{\theta}), \nu_l(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}$. Зародыши $\omega_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \omega_n(\boldsymbol{\theta})$ образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$.

Аналитическая теория возмущений

При малом t выполнены степенные разложения

$$\lambda_l(t, \boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta}) t^2 + \mu_l(\boldsymbol{\theta}) t^3 + \nu_l(\boldsymbol{\theta}) t^4 + \dots, \tag{9}$$

$$\varphi_l(t, \boldsymbol{\theta}) = \omega_l(\boldsymbol{\theta}) + t \varphi_l^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) + \dots, \tag{10}$$

$l = 1, \dots, n$. Здесь $\gamma_l(\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_* > 0$ и $\mu_l(\boldsymbol{\theta}), \nu_l(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}$. Зародыши $\omega_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \omega_n(\boldsymbol{\theta})$ образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$.

Пусть $F(t, \boldsymbol{\theta})$ — спектральный проектор оператора $A(t, \boldsymbol{\theta})$ для интервала $[0, \delta]$. Справедливы аппроксимации при малом t:

$$F(t, \boldsymbol{\theta}) = P + t F_1(\boldsymbol{\theta}) + O(t^2), \tag{11}$$

$$A(t, \boldsymbol{\theta}) F(t, \boldsymbol{\theta}) = t^2 S(\boldsymbol{\theta}) P + t^3 K(\boldsymbol{\theta}) + O(t^4). \tag{12}$$

Аналитическая теория возмущений

При малом t выполнены степенные разложения

$$\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \mu_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \nu_l(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots, \tag{9}$$

$$\varphi_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \omega_l(\boldsymbol{\theta}) + t\varphi_l^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) + \dots, \tag{10}$$

$l = 1,\dots,n$. Здесь $\gamma_l(\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_* > 0$ и $\mu_l(\boldsymbol{\theta}), \nu_l(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}$. Зародыши $\omega_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,\omega_n(\boldsymbol{\theta})$ образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$. Пусть $F(t,\boldsymbol{\theta})$ — спектральный проектор оператора $A(t,\boldsymbol{\theta})$ для интервала $[0,\delta]$. Справедливы аппроксимации при малом t:

$$F(t,\boldsymbol{\theta}) = P + tF_1(\boldsymbol{\theta}) + O(t^2), \tag{11}$$

$$A(t,\boldsymbol{\theta})F(t,\boldsymbol{\theta}) = t^2 S(\boldsymbol{\theta})P + t^3 K(\boldsymbol{\theta}) + O(t^4). \tag{12}$$

Операторы $F_1(\boldsymbol{\theta})$, $S(\boldsymbol{\theta})$ и $K(\boldsymbol{\theta})$ допускают инвариантное описание, а также описание в терминах коэффициентов степенных разложений для $\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta})$ и $\varphi_l(t,\boldsymbol{\theta})$.

Аналитическая теория возмущений

При малом t выполнены степенные разложения

$$\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \mu_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \nu_l(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots, \tag{9}$$

$$\varphi_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \omega_l(\boldsymbol{\theta}) + t\varphi_l^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) + \dots, \tag{10}$$

$l = 1,\dots,n$. Здесь $\gamma_l(\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_* > 0$ и $\mu_l(\boldsymbol{\theta}), \nu_l(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}$. Зародыши $\omega_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,\omega_n(\boldsymbol{\theta})$ образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$.
Пусть $F(t,\boldsymbol{\theta})$ — спектральный проектор оператора $A(t,\boldsymbol{\theta})$ для интервала $[0,\delta]$. Справедливы аппроксимации при малом t:

$$F(t,\boldsymbol{\theta}) = P + tF_1(\boldsymbol{\theta}) + O(t^2), \tag{11}$$

$$A(t,\boldsymbol{\theta})F(t,\boldsymbol{\theta}) = t^2 S(\boldsymbol{\theta})P + t^3 K(\boldsymbol{\theta}) + O(t^4). \tag{12}$$

Операторы $F_1(\boldsymbol{\theta})$, $S(\boldsymbol{\theta})$ и $K(\boldsymbol{\theta})$ допускают инвариантное описание, а также описание в терминах коэффициентов степенных разложений для $\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta})$ и $\varphi_l(t,\boldsymbol{\theta})$. Имеем:
$F_1(\boldsymbol{\theta}) = [\Lambda]b(\boldsymbol{\theta})P + ([\Lambda]b(\boldsymbol{\theta})P)^*$.

Аналитическая теория возмущений

Оператор $S(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta})$ называется *спектральным ростком* операторного семейства $A(t, \boldsymbol{\theta})$ при $t = 0$. При этом

$$S(\boldsymbol{\theta})\omega_l(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})\omega_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1, \ldots, n.$$

Аналитическая теория возмущений

Оператор $S(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta})$ называется *спектральным ростком* операторного семейства $A(t, \boldsymbol{\theta})$ при $t = 0$. При этом

$$S(\boldsymbol{\theta})\omega_l(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})\omega_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1, \ldots, n.$$

Далее, нам понадобится оператор $N(\boldsymbol{\theta}) = PK(\boldsymbol{\theta})P$.

Аналитическая теория возмущений

Оператор $S(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta})$ называется *спектральным ростком* операторного семейства $A(t,\boldsymbol{\theta})$ при $t=0$. При этом

$$S(\boldsymbol{\theta})\omega_l(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})\omega_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1,\dots,n.$$

Далее, нам понадобится оператор $N(\boldsymbol{\theta}) = PK(\boldsymbol{\theta})P$. Имеем:

$$N(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta}) P,$$

$$L(\boldsymbol{\theta}) := |\Omega|^{-1} \int_\Omega \left(\Lambda(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x}.$$

Аналитическая теория возмущений

Оператор $S(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta})$ называется *спектральным ростком* операторного семейства $A(t, \boldsymbol{\theta})$ при $t = 0$. При этом

$$S(\boldsymbol{\theta})\omega_l(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})\omega_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1, \dots, n.$$

Далее, нам понадобится оператор $N(\boldsymbol{\theta}) = PK(\boldsymbol{\theta})P$. Имеем:

$$N(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta}) P,$$

$$L(\boldsymbol{\theta}) := |\Omega|^{-1} \int_\Omega \left(\Lambda(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda(\mathbf{x})\right) d\mathbf{x}.$$

В терминах коэффициентов: $N(\boldsymbol{\theta}) = N_0(\boldsymbol{\theta}) + N_*(\boldsymbol{\theta})$,

$$N_0(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=1}^{n} \mu_l(\boldsymbol{\theta})(\cdot, \omega_l(\boldsymbol{\theta}))\omega_l(\boldsymbol{\theta}),$$

$$N_*(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=1}^{n} \gamma_l(\boldsymbol{\theta})\Big((\cdot, P\varphi_l^{(1)}(\boldsymbol{\theta}))\omega_l(\boldsymbol{\theta}) + (\cdot, \omega_l(\boldsymbol{\theta}))P\varphi_l^{(1)}(\boldsymbol{\theta})\Big).$$

Результаты

Теорема 1 [Бирман и Суслина, 2008]

При $\varepsilon > 0$ *и* $\tau \in \mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$\left\| \cos\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) - \cos\left(\tau A_0^{1/2}\right) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon.$$

Результаты

Теорема 1 [Бирман и Суслина, 2008]

При $\varepsilon > 0$ *и* $\tau \in \mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$\left\| \cos\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) - \cos\left(\tau A_0^{1/2}\right) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1 + |\tau|)\varepsilon.$$

Теорема 2 [Мешкова, 2019]

При $\varepsilon > 0$ *и* $\tau \in \mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$\left\| A_\varepsilon^{-1/2} \sin\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) - A_0^{-1/2} \sin\left(\tau A_0^{1/2}\right) \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1 + |\tau|)\varepsilon.$$

Результаты с корректором

Теорема 3 [Дородный и Суслина, 2023]

При $\varepsilon > 0$ *и* $\tau \in \mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$\left\| \cos\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) \left(I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon\right) - \cos\left(\tau A_0^{1/2}\right) - \varepsilon \mathcal{K}(\varepsilon, \tau) \right\|_{H^4 \to L_2}$$
$$\leqslant C(1 + |\tau|)^2 \varepsilon^2,$$

Результаты с корректором

Теорема 3 [Дородный и Суслина, 2023]

При $\varepsilon > 0$ *и* $\tau \in \mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$\left\| \cos\bigl(\tau A_\varepsilon^{1/2}\bigr)\left(I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\right) - \cos\bigl(\tau A_0^{1/2}\bigr) - \varepsilon \mathcal{K}(\varepsilon,\tau) \right\|_{H^4 \to L_2} \leqslant C(1+|\tau|)^2 \varepsilon^2,$$

$$\mathcal{K}(\varepsilon,\tau) = \mathcal{K}_1(\varepsilon,\tau) + \mathcal{K}_2(\tau), \ \ \mathcal{K}_1(\varepsilon,\tau) := [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \cos\bigl(\tau A_0^{1/2}\bigr),$$

$$\mathcal{K}_2(\tau) := -\int_0^\tau \cos\bigl((\tau-\rho)A_0^{1/2}\bigr) G(\mathbf{D}) \sin\bigl(\rho A_0^{1/2}\bigr)\, d\rho - \int_0^\tau \sin\bigl((\tau-\rho)A_0^{1/2}\bigr) G(\mathbf{D}) \cos\bigl(\rho A_0^{1/2}\bigr)\, d\rho,$$

а $G(\mathbf{D})$ *— ПДО второго порядка с символом*
$G(\boldsymbol{\xi}) := \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (S(\boldsymbol{\xi}) + \zeta I)^{-1} b(\boldsymbol{\xi})^* L(\boldsymbol{\xi}) b(\boldsymbol{\xi}) (S(\boldsymbol{\xi}) + \zeta I)^{-1} \zeta^{1/2}\, d\zeta.$

Результаты с корректором

Теорема 4 [Дородный и Суслина, 2023]

При $\varepsilon > 0$ *и* $\tau \in \mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$\left\| A_\varepsilon^{-1/2} \sin\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) - A_0^{-1/2} \sin\left(\tau A_0^{1/2}\right) - \varepsilon \tilde{\mathcal{K}}(\varepsilon, \tau) \right\|_{H^3 \to L_2} \leqslant C(1 + |\tau|)^2 \varepsilon^2,$$

Результаты с корректором

Теорема 4 [Дородный и Суслина, 2023]

При $\varepsilon > 0$ *и* $\tau \in \mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$\left\| A_\varepsilon^{-1/2} \sin\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) - A_0^{-1/2} \sin\left(\tau A_0^{1/2}\right) - \varepsilon \tilde{\mathcal{K}}(\varepsilon, \tau) \right\|_{H^3 \to L_2}$$
$$\leqslant C(1 + |\tau|)^2 \varepsilon^2, \quad \tilde{\mathcal{K}}(\varepsilon, \tau) = \tilde{\mathcal{K}}_1(\varepsilon, \tau) + \tilde{\mathcal{K}}_2(\tau) + \tilde{\mathcal{K}}_3(\tau),$$

Результаты с корректором

Теорема 4 [Дородный и Суслина, 2023]

При $\varepsilon > 0$ *и* $\tau \in \mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$\Big\| A_\varepsilon^{-1/2} \sin\big(\tau A_\varepsilon^{1/2}\big) - A_0^{-1/2} \sin\big(\tau A_0^{1/2}\big) - \varepsilon \tilde{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau) \Big\|_{H^3 \to L_2}$$

$$\leqslant C(1+|\tau|)^2 \varepsilon^2, \quad \tilde{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau) = \tilde{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau) + \tilde{\mathcal{K}}_2(\tau) + \tilde{\mathcal{K}}_3(\tau),$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau) := [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon A_0^{-1/2} \sin\big(\tau A_0^{1/2}\big), \; \tilde{\mathcal{K}}_2(\tau) := -\tilde{G}(\mathbf{D}) \sin\big(\tau A_0^{1/2}\big),$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_3(\tau) := A_0^{-1/2} \int_0^\tau \cos\big((\tau-\rho) A_0^{1/2}\big) G(\mathbf{D}) \cos\big(\rho A_0^{1/2}\big)\, d\rho$$

$$- A_0^{-1/2} \int_0^\tau \sin\big((\tau-\rho) A_0^{1/2}\big) G(\mathbf{D}) \sin\big(\rho A_0^{1/2}\big)\, d\rho,$$

а $\tilde{G}(\mathbf{D})$ — *ПДО нулевого порядка с символом*
$\tilde{G}(\boldsymbol{\xi}) := \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (S(\boldsymbol{\xi}) + \zeta I)^{-1} b(\boldsymbol{\xi})^* L(\boldsymbol{\xi}) b(\boldsymbol{\xi}) (S(\boldsymbol{\xi}) + \zeta I)^{-1} \zeta^{-1/2}\, d\zeta.$

Результаты с корректором

Другой вариант теоремы 4 был ранее получен **Мешковой**.

Теорема 5 [Дородный и Суслина, 2023]

При $\varepsilon > 0$ *и* $\tau \in \mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$\left\| \cos\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) \left(I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon\right) - \cos\left(\tau A_0^{1/2}\right) - \varepsilon \mathcal{K}_1(\varepsilon, \tau) \right\|_{H^3 \to H^1} \leqslant C(1 + |\tau|)\varepsilon.$$

Здесь

$$\mathcal{K}_1(\varepsilon, \tau) = [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon \cos\left(\tau A_0^{1/2}\right).$$

Обсуждение

Не представляется возможным аппроксимировать оператор $\varepsilon\cos\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right)[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon$ в терминах спектральных характеристик на краю спектра.

Обсуждение

Не представляется возможным аппроксимировать оператор $\varepsilon \cos\big(\tau A_\varepsilon^{1/2}\big)[\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon$ в терминах спектральных характеристик на краю спектра. Действительно, после масштабного преобразования и разложения в прямой интеграл этот оператор превращается в семейство операторов $\cos\big(\tau\varepsilon^{-1}A(\mathbf{k})^{1/2}\big)[\Lambda]b(\mathbf{k})P$, действующих в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$.

Обсуждение

Не представляется возможным аппроксимировать оператор $\varepsilon \cos\bigl(\tau A_\varepsilon^{1/2}\bigr)[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon$ в терминах спектральных характеристик на краю спектра. Действительно, после масштабного преобразования и разложения в прямой интеграл этот оператор превращается в семейство операторов $\cos\bigl(\tau\varepsilon^{-1}A(\mathbf{k})^{1/2}\bigr)[\Lambda]b(\mathbf{k})P$, действующих в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Поскольку $[\Lambda]P = P^\perp[\Lambda]P$, то мы имеем дело с оператором $\cos\bigl(\tau\varepsilon^{-1}A(\mathbf{k})^{1/2}\bigr)P^\perp$, который близок к $\cos\bigl(\tau\varepsilon^{-1}A(\mathbf{k})^{1/2}\bigr)F(\mathbf{k})^\perp$ (в пределах допустимой погрешности).

Обсуждение

Не представляется возможным аппроксимировать оператор $\varepsilon \cos\big(\tau A_\varepsilon^{1/2}\big)[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon$ в терминах спектральных характеристик на краю спектра. Действительно, после масштабного преобразования и разложения в прямой интеграл этот оператор превращается в семейство операторов $\cos\big(\tau\varepsilon^{-1}A(\mathbf{k})^{1/2}\big)[\Lambda]b(\mathbf{k})P$, действующих в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Поскольку $[\Lambda]P = P^\perp[\Lambda]P$, то мы имеем дело с оператором $\cos\big(\tau\varepsilon^{-1}A(\mathbf{k})^{1/2}\big)P^\perp$, который близок к $\cos\big(\tau\varepsilon^{-1}A(\mathbf{k})^{1/2}\big)F(\mathbf{k})^\perp$ (в пределах допустимой погрешности). Здесь $F(\mathbf{k})^\perp$ — спектральный проектор оператора $A(\mathbf{k})$, отвечающий интервалу $[3\delta,\infty)$. Следовательно, эта часть спектра отвечает за поведение этого оператора.

Результаты с корректором

Теорема 6 [Мешкова, 2019]

При $\varepsilon > 0$ *и* $\tau \in \mathbb{R}$ *справедлива оценка*

$$\left\| A_\varepsilon^{-1/2} \sin\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) - A_0^{-1/2} \sin\left(\tau A_0^{1/2}\right) - \varepsilon \tilde{\mathcal{K}}_1(\varepsilon, \tau) \right\|_{H^2 \to H^1} \leqslant C(1 + |\tau|)\varepsilon.$$

Здесь

$$\tilde{\mathcal{K}}_1(\varepsilon, \tau) := [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon A_0^{-1/2} \sin\left(\tau A_0^{1/2}\right).$$

Усиление результатов при дополнительных предположениях

Результаты допускают усиление при следующем условии.

Условие 1

Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений:
1°. $N(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.
2°. $N_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ (*то есть,* $\mu_l(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$ *при* $l = 1, \ldots, n$) *и, кроме того, кратность спектра ростка* $S(\boldsymbol{\theta})$ *не зависит от* $\boldsymbol{\theta}$.

Усиление результатов при дополнительных предположениях

Результаты допускают усиление при следующем условии.

Условие 1

Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений:
1°. $N(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.
2°. $N_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ *(то есть,* $\mu_l(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$ *при* $l = 1, \ldots, n$*) и, кроме того, кратность спектра ростка* $S(\boldsymbol{\theta})$ *не зависит от* $\boldsymbol{\theta}$.

Замечание. Если $A_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$, где $g(\mathbf{x})$ — матрица с вещественными элементами, то $N(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$.

Усиление результатов при дополнительных предположениях

Теорема 7 [Дородный и Суслина, 2020]

Предположим, что выполнено условие 1. *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *и* $\tau \in \mathbb{R}$ *справедливы оценки*

$$\left\| \cos\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) - \cos\left(\tau A_0^{1/2}\right) \right\|_{H^{3/2} \to L_2} \leqslant C(1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon, \tag{13}$$

$$\left\| A_\varepsilon^{-1/2} \sin\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) - A_0^{-1/2} \sin\left(\tau A_0^{1/2}\right) \right\|_{H^{1/2} \to L_2} \leqslant C(1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon. \tag{14}$$

Усиление результатов при дополнительных предположениях

Теорема 8 [Дородный и Суслина, 2023]

Предположим, что выполнено условие 1. *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *и* $\tau \in \mathbb{R}$ *справедливы оценки*

$$\Big\| \cos\big(\tau A_\varepsilon^{1/2}\big)\left(I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\right) - \cos\big(\tau A_0^{1/2}\big) - \varepsilon \mathcal{K}(\varepsilon,\tau) \Big\|_{H^3 \to L_2} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon^2,$$

$$\Big\| A_\varepsilon^{-1/2} \sin\big(\tau A_\varepsilon^{1/2}\big) - A_0^{-1/2} \sin\big(\tau A_0^{1/2}\big) - \varepsilon \tilde{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau) \Big\|_{H^2 \to L_2} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon^2.$$

Усиление результатов при дополнительных предположениях

Теорема 9 [Дородный и Суслина, 2020, 2023]

Предположим, что выполнено условие 1. *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *и* $\tau \in \mathbb{R}$ *справедливы оценки*

$$\left\| \cos\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) \left(I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon\right) - \cos\left(\tau A_0^{1/2}\right) - \varepsilon \mathcal{K}_1(\varepsilon, \tau) \right\|_{H^{5/2} \to H^1} \leqslant C(1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon,$$

$$\left\| A_\varepsilon^{-1/2} \sin\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) - A_0^{-1/2} \sin\left(\tau A_0^{1/2}\right) - \varepsilon \tilde{\mathcal{K}}_1(\varepsilon, \tau) \right\|_{H^{3/2} \to H^1} \leqslant C(1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon.$$

Точность результатов

Теорема 10 [Дородный и Суслина, 2020]

Предположим, что $N_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *при некотором* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, *то есть* $\mu_l(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *для некоторого* l.

Точность результатов

Теорема 10 [Дородный и Суслина, 2020]

Предположим, что $N_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *при некотором* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, *то есть* $\mu_l(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *для некоторого* l.

1) *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $s < 2$. *Тогда не существует константы* $C(\tau) > 0$, *такой что при всех достаточно малых* ε *выполнено*

$$\left\| \cos\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) - \cos\left(\tau A_0^{1/2}\right) \right\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon.$$

Точность результатов

Теорема 10 [Дородный и Суслина, 2020]

Предположим, что $N_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *при некотором* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, *то есть* $\mu_l(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *для некоторого* l.

1) *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $s < 2$. *Тогда не существует константы* $C(\tau) > 0$, *такой что при всех достаточно малых* ε *выполнено*

$$\left\| \cos\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) - \cos\left(\tau A_0^{1/2}\right) \right\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon.$$

2) *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $s < 1$. *Тогда не существует константы* $C(\tau) > 0$, *такой что при всех достаточно малых* ε *выполнено*

$$\left\| A_\varepsilon^{-1/2} \sin\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) - A_0^{-1/2} \sin\left(\tau A_0^{1/2}\right) \right\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon.$$

Точность результатов

Теорема 11 [Дородный и Суслина, 2020]

Предположим, что $N_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *при некотором* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, *то есть* $\mu_l(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *для некоторого* l.

1) *Пусть* $s \geqslant 2$. *Тогда не существует положительной функции* $C(\tau) > 0$, *такой что* $\lim_{|\tau| \to \infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ *и при всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малых* ε *выполнено*

$$\left\| \cos\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) - \cos\left(\tau A_0^{1/2}\right) \right\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon.$$

Точность результатов

Теорема 11 [Дородный и Суслина, 2020]

Предположим, что $N_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *при некотором* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, *то есть* $\mu_l(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *для некоторого* l.

1) *Пусть* $s \geqslant 2$. *Тогда не существует положительной функции* $C(\tau) > 0$, *такой что* $\lim_{|\tau|\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ *и при всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малых* ε *выполнено*

$$\left\| \cos\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) - \cos\left(\tau A_0^{1/2}\right) \right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon.$$

2) *Пусть* $s \geqslant 1$. *Тогда не существует положительной функции* $C(\tau)$, *такой что* $\lim_{|\tau|\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ *и при всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малых* ε *выполнено*

$$\left\| A_\varepsilon^{-1/2} \sin\left(\tau A_\varepsilon^{1/2}\right) - A_0^{-1/2} \sin\left(\tau A_0^{1/2}\right) \right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon.$$

Точность результатов

Теоремы 10 и 11 подтверждают точность теорем 1 и 2, как в отношении типа операторной нормы, так и в отношении зависимости оценок от τ.

Точность результатов

Теоремы 10 и 11 подтверждают точность теорем 1 и 2, как в отношении типа операторной нормы, так и в отношении зависимости оценок от τ.
Результаты с корректорами также точны.

Теорема 12 [Дородный и Суслина, 2023]

Предположим, что $N_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *при некотором* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, *то есть* $\mu_l(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *для некоторого* l. *Тогда результаты теорем* 3–6 *точны как в отношении типа нормы, так и в отношении зависимости оценок от* τ.

Точность результатов

Наконец, мы подтверждаем, что усиленные результаты (справедливые при условии 1) тоже точны.

Теорема 13 [Дородный и Суслина, 2020, 2023]

Предположим, что $N_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, *то есть* $\mu_l(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$ *при* $l = 1, \dots, n$. *Предположим, что* $\nu_j(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *при некоторых* j *и* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. *Тогда результаты теорем* 7–9 *точны как в отношении типа нормы, так и в отношении зависимости оценок от* τ.

Литература

- Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ **20** (2008), №6.
- Meshkova Yu. M., *On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coefficients*, J. Spectr. Theory **11** (2021), no. 2.
- Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients*, J. Diff. Equ. **264** (2018), no. 12.
- Мешкова Ю. М., *Усреднение периодических гиперболических систем при учете корректора по $L_2(\mathbb{R}^d)$-норме*, рукопись (2018).

Литература

- Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами в* $\mathbb{R}^d$*: точность результатов*, Алгебра и анализ **32** (2020), №4.
- Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений: операторные оценки при учете корректоров*, Функц. анализ и его прил. **57** (2023), №4.
- Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами: результаты с корректорами*, готовится к печати.