О ПРОДОЛЖЕНИИ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ МЕР
EXTENSION OF VECTOR-VALUED MEASURES

Абасов Н. М.

Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского, Россия, Москва; abasovn@mail.ru

Пусть X — вполне регулярное (или тихоновское) топологическое пространство, а E — некоторое K-пространство с базой B. В связи с изучением непрерывных отображений $f : X \to E$ (см. [2, 3]), естественно возникает булева компактификация Стоуна — Чеха $B^{\beta}(X)$ (см. [3]), которая, вообще говоря, отличается от компактификации Стоуна — Чеха и не совпадает с X, если даже последнее компактно.

Теорема. *Всякая регулярная E-значная борелева мера на X допускает единственное продолжение до регулярной E-значной борелевой меры на $B^{\beta}(X)$.*

Об одном применении E-значных мер см. [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абасов Н. М.* Операторная версия теоремы Рисса — Маркова // Межд. конф. «Дифф. уравнения и функц. пространства», посвященная 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева. Тез. докл. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2008. С. 284.
2. *Кутателадзе С. С., Кусраев А. Г.* Субдифференциальное исчисление: теория и приложение. М.: Наука, 2007.
3. *Абасов Н. М., Кусраев А. Г.* Циклическое компактификация и пространства непрерывных вектор-функций // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 1. С. 17–22.

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЕ НЕЖЁСТКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

ON THE TOTAL MEAN CURVATURE OF NON-RIGID SURFACES

Александров В. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
alex@math.nsc.ru

Используя формулу Грина мы преобразуем вариацию интегральной средней кривины гладкой поверхности в $\mathbb{R}^3$ к криволинейному интегралу от некоторого векторного поля. В качестве следствия мы получаем известную теорему, согласно которой интегральная средняя кривизна замкнутой гладкой поверхности в $\mathbb{R}^3$ стационарна при любом бесконечно малом изгибании.

Полученные результаты подробно изложены в [1] и [2].

Работа выполнена при частичной поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российский ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ–8526.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. А.* Об интегральной средней кривизне нежестких поверхностей // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 4. (Принята к печати.)
2. *Alexandrov V.* On the total mean curvature of non-rigid surfaces. Preprint. arXiv:0812.0053 [math.DG].

КОМПАКТНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИ ОРБИТАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ЭЙЛЕРОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

COMPACT GEODESIC ORBIT SPACES OF POSITIVE EULER CHARACTERICTIC

Алексеевский Д. В.[1], **Никоноров Ю. Г.**[2]

[1]*School of Mathematics and Maxwell Institute for Mathematical Studies, Edinburgh University, Edinburgh, United Kingdom;* `D.Aleksee@ed.ac.uk`

[2]*Рубцовский индустриальный институт (филиал) ГОУ ВПО Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова, Рубцовск, Россия;* `nik@inst.rubtsovsk.ru`

Риманово многообразие (M, g) называется геодезически орбитальным пространством, если каждая его геодезическая является орбитой однопараметрической группы движений рассматриваемого многообразия. Эта термин предложен О. Ковальским и Л. Ванхекке в работе [6], в которой положено начало систематическому изучению таких многообразий. Обзор более свежих результатов по данной тематике можно найти в [1, 3, 4].

Важную роль в различных разделах математики играют специальные подклассы класса геодезически орбитальных пространств: естественно редуктивные, нормальные однородные, слабо симметрические, δ-однородные пространства (римановы многообразия).

Этот доклад посвящен изложению основных результатов работы [2], в которой (в частности) получена классификация компактных геодезически орбитальных пространств положительной эйлеровой характеристики. Отметим, что в случае флаговых пространств такая классификация была получена ранее в работе [1]. В последней части доклада рассматриваются возможные приложения полученных результатов, в частности, их применение к классификации компактных δ-однородных римановых многообразий положительной эйлеровой характеристики [5].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по ведущим научным школам Российской Федерации (грант НШ — 5682.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alekseevsky D. V., Arvanitoyeorgos A.* Riemannian flag manifolds with homogeneous geodesics // Trans. Amer. Math. Soc. 2007. V. 359. P. 3769–3789.
2. *Alekseevsky D. V., Nikonorov Yu. G.* Compact Riemannian manifolds with homogeneous geodesics. Preprint. 2009. arXiv:0904:3592.
3. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* On δ-homogeneous Riemannian manifolds // Diff. Geom. Appl. 2008. V. 26. № 5. P. 514–535.
4. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* On δ-homogeneous Riemannian manifolds, II // Siber. Math. J., 2009. V. 50. № 2. P. 214–222.
5. *Berestovskii V. N., Nikitenko E. V., Nikonorov Yu. G.* The classification of δ-homogeneous Riemannian manifolds with positive Euler characteristic. Preprint. 2009. arXiv:0903:0457.
6. *Kowalski O., Vanhecke L.* Riemannian manifolds with homogeneous geodesics // Boll. Unione Mat. Ital. Ser. B. 1991. V. 5. № 1. P. 189–246.

МЁБИУСОВО-ИНВАРИАНТНЫЙ АНАЛОГ ВЫПУКЛОЙ ОБОЛОЧКИ КОМПАКТА

A MOEBIUS-INVARIANT ANALOG OF THE CONVEX HULL OF A COMPACT SET

Асеев В. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
btp@math.nsc.ru

Идея построения обобщенного аналога выпуклой оболочки множества, основанная на использовании вместо опорных гиперплоскостей шаров из некоторого семейства, определяемого метрическим или геометрическим условием (не допускающим использование шаров слишком малого радиуса), была выдвинута и реализована в одной из ранних работ Ю. Г. Решетняка [1]. В русле этой идеи лежат и недавние результаты, представленные В. П. Голубятниковым. Предлагаемая нами конструкция относительной выпуклой оболочки пластин конденсатора также вполне соотносится с упомянутой выше концепцией, но имеет свою особенность в том, что она приводит к мебиусово-инвариантной операции над пластинами конденсатора.

Пусть A, B — непересекающиеся компактные множества в пространстве $\bar{R}^n$, $\mathcal{Q}$ — семейство всех открытых шаров $Q \subset \bar{R}^n$ таких, что $Q \cap A = \emptyset$ и $\bar{Q} \cap B \neq \emptyset$. Множество $\tilde{A}(B) = \bar{R}^n \setminus \cup\{Q : Q \in \mathcal{Q}\}$ называем ***выпуклым раздутием множества A относительно множества B***. В частном случае, при $B = \{\infty\}$ получаем обычную выпуклую оболочку множества $A \subset R^n$.

Поведение конформной емкости конденсатора при выполнении этой операции пока удалось изучить только в размерности 2:

Теорема. *Пусть (E^-, E^+) — конденсатор со связными пластинами в $\bar{R}^2$. Тогда* $\mathrm{Cap}(\tilde{E}^-(E^+), E^+) \leq 2\ \mathrm{Cap}(E^-, E^+)$ *и* $\mathrm{Cap}(\tilde{E}^-(E^+), \tilde{E}^+(E^-)) \leq 3\ \mathrm{Cap}(E^-, E^+)$.

Вопрос о точных оценках изменения емкости при выполнении этой операции остается открытым, также как и вопрос о существовании аналогичной оценки для пространственного конденсатора со связными пластинами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Об одном обобщении выпуклых поверхностей // Мат. сб. 1956. Т. 40, № 3. С. 382–398.

ГЛОБАЛЬНО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ЛОРЕНЦЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ ГРУППАМИ ГОЛОНОМИИ

GLOBALLY HYPERBOLIC LORENTZIAN MANIFOLDS WITH SPECIAL HOLONOMY GROUPS

Базайкин Я. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
bazaikin@math.nsc.ru

Неприводимой группой голономии односвязного лоренцева многообразия N^n может быть только группа $SO(n-1,1)$. С другой стороны в лоренцевом случае, в отличие от риманова, существуют приводимые, но не разложимые группы голономии, к исследованию которых и сводится задача классификации лоренцевых групп голономии. В работах [1–3] задача классификации была решена локально. А именно, был получен список приводимых, но не разложимых подалгебр $\mathbf{g} \subset \mathbf{so}(n-1,1)$, каждая из которых может быть алгеброй голономии (неполной) локально определенной лоренцевой метрики. С каждой такой алгеброй голономии ассоциирована ее *ортогональная часть* $\mathbf{h} \subset \mathbf{so}(n-2)$, являющаяся римановой алгеброй голономии. Обратно, для любой римановой алгебры голономии $\mathbf{h} \subset \mathbf{so}(n-2)$ существует ровно четыре типа лоренцевых алгебры голономии $\mathbf{g} \subset \mathbf{so}(n-1,1)$ с данной ортогональной частью $\mathbf{h}$.

Однако вопрос о глобальном строении лоренцевых метрик со специальными голономиями до сих пор до конца не ясен. В работе [4] была предложена задача построения глобально гиперболических лоренцевых многообразий для каждого специального типа группы голономии. Кратко говоря, глобально гиперболическое лоренцево пространство — это пространство, обладающее пространственноподобной гиперповерхностью, с которой любая непродолжаемая непространственноподобная кривая пересекается ровно в одной точке. Это одно из самых сильных условий причинности, наиболее полезное для математической физики. В [4] часть специальных групп голономии (а именно тип 2) был реализован глобально гиперболическими лоренцевыми многообразиями. В [5] была доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть H — группа голономии риманова пространства, представление голономии которой не содержит в качестве прямого множителя представление изотропии кэлерова симметрического пространства ранга большего один. Тогда для любой специальной лоренцевой группы голономии G с ортогональной частью H существует глобально гиперболическое лоренцево многообразие с группой голономии G.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berard-Bergery L., Ikemakhen A.* On the holonomy of Lorentzian manifolds // In: Differential Geometry: Geometry in Mathematical Physics and Related Topics., Proc. Sympos. Pure Math. 1993. V. 54. P. 27–40.
2. *Leistner T.* On the classification of Lorentzian holonomy groups // J. Diff. Geom. 2007. V. 76, № 3. P. 423–484.
3. *Galaev A.* Metrics that realize all types of Lorentzian holonomy algebras. Preprint. 2005. arXiv:mathDG/0502575.
4. *Baum H., Muller O.* Codazzi Spinors and Globally hyperbolic Lorentzian manifolds with special holonomy I. Preprint ESI 1757, 2005.
5. *Базайкин Я. В.* Глобально гиперболические лоренцевы пространства со специальными группами голономии // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 4. С. 721–736.

О НОВЫХ ЯВНЫХ ПРИМЕРАХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК С ГРУППОЙ ГОЛОНОМИИ $SU(4)$

ON NEW EXPLICIT EXAMPLES OF RIEMANNIAN $SU(4)$-HOLONOMY METRICS

Базайкин Я. В.[1], **Малькович Е. Г.**[2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
bazaikin@math.nsc.ru

[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
malkovicheugen@ngs.ru

Пусть $M = \mathrm{SU}(3)/\mathrm{U}(1)_{1,1,-2}$ — пространство Алоффа — Уоллаха со структурой 3-сасакиева 7-мерного многообразия. На $M \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим риманову метрику следующего вида:

$$dt^2 + A_1(t)^2\eta_1^2 + A_2(t)^2\eta_2^2 + A_3(t)^2\eta_3^2 + B(t)^2(\eta_4^2 + \eta_5^2) + C(t)^2(\eta_6^2 + \eta_7^2), \quad (1)$$

где t — координата на $\mathbb{R}_+$, $\{\eta_i\}$ — ортонормированный корепер на M, согласованный с 3-сасакиевой структурой (подробности см. в [1], где изучается случай метрики (1) при $B = C$). Конусную особенность (при $t = 0$) пространства $M \times \mathbb{R}_+$ разрешим следующим образом: затянем на уровне $\{t = 0\}$ каждую отвечающую ковектору η_1 окружность в точку. Полученное многообразие, профакторизованное по $\mathbb{Z}_4$, диффеоморфно E^8 — четвертой степени канонического комплексного линейного расслоения над пространством флагов в $\mathbb{C}^3$. При исследовании (методами, аналогичными [1]) метрик вида (1) с группой голономии $\mathrm{Spin}(7)$, нами было найдено однопараметрическое семейство римановых метрик с группой голономии $\mathrm{SU}(4) \subset \mathrm{Spin}(7)$:

Теорема. *При $0 < \alpha < 1$ риманова метрика*

$$\begin{aligned} ds^2 = \tfrac{r^4(r^2-\alpha^2)(r^2+\alpha^2)}{r^8-2\alpha^4(r^4-1)-1}dr^2 + \tfrac{r^8-2\alpha^4(r^4-1)-1}{r^2(r^2-\alpha^2)(r^2+\alpha^2)}\eta_1^2 + r^2(\eta_2^2+\eta_3^2) \\ +(r^2-\alpha^2)(\eta_4^2+\eta_5^2) + (r^2+\alpha^2)(\eta_6^2+\eta_7^2) \end{aligned} \quad (2)$$

является гладкой римановой метрикой на E^8 с группой голономии $\mathrm{SU}(4)$. При $\alpha = 0$ метрика (2) изометрична метрике Калаби [2] с группой голономии $\mathrm{SU}(4)$; при $\alpha = 1$ метрика (2) изометрична метрике Калаби [2] с группой голономии $\mathrm{Sp}(2) \subset \mathrm{SU}(4)$. Метрики (2) негомотетичны при различных значениях параметра α.

Таким образом, построенное нами однопараметрическое семейство метрик «соединяет» специальную кэлерову и гиперкэлерову метрики Калаби, построенные в [2]. Отметим, что обе метрики Калаби являлись первыми явными примерами специальной кэлеровой и гиперкэлеровой метрик. Доказанная нами теорема опровергает гипотезу Джойса [3, Ch. 8.2], что в комплексной размерности $m \geq 3$ из всех римановых метрик с группой голономии $\mathrm{SU}(m)$, только метрика Калаби может быть записана явным образом в элементарных функциях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Базайкин Я. В.* О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии Spin(7) // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 11–32.
2. *Calabi E.* Metriques kahleriennes et fibres holomorphes // Ann. Ecol. Norm. Sup. 1979. V. 12. P. 269–294.
3. *Joyce D.* Compact manifolds with special holonomy. Oxford Science Publications, 2000.

О ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ T^2-МНОГООБРАЗИЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ РИЧЧИ

ON THE FOUR-DIMENSIONAL T^2-MANIFOLDS OF POSITIVE RICCI CURVATURE

Базайкин Я. В.[1], **Матвиенко И. В.**[2]

[1]*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
bazaikin@math.nsc.ru
[2]*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
ivan.matvienko@gmail.com

Любая связная сумма конечного числа экземпляров $S^2 \times S^2$, $\mathbb{C}P^2$ и $-\mathbb{C}P^2$ обладает римановой метрикой положительной кривизны Риччи [2]. С другой стороны, любая такая связная сумма допускает эффективное действие тора T^2, т. е. является T^2-многообразием. Более того, любое односвязное T^2-многообразие гомеоморфно одной из указанных связных сумм [3]. При этом в каждом классе гомеоморфизма T^2-многообразия существует, вообще говоря, бесконечное число эквивариантно различных T^2-многообразий. Данная работа положительно отвечает на вопрос о том, существует ли риманова метрика положительной секционной кривизны Риччи в каждом классе T^2-эквивариантно гомеоморфных односвязных четырехмерных T^2-многообразий [1]. А именно, доказана

Теорема. *На каждом односвязном четырехмерном T^2-многообразии существует риманова метрика положительной кривизны Риччи, относительно которой T^2 действует изометриями.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Базайкин Я. И., Матвиенко И. В.* О четырехмерных T^2-многообразиях положительной кривизны Риччи // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 973–979.
2. *Sha J., Yang D.* Positive Ricci curvature on compact simply connected 4-manifolds // Differential geometry. Part 3: Riemannian geometry. Providence, RI: American Mathematical Society. Proc. Symp. Pure Math. 1993. V. 54, Part 3. P. 529–538.
3. *Orlik P., Raymond F.* Actions of the torus on 4-manifolds. I // TAMS. 1970. V. 152. P. 531–559.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ВСПЛЕСКАМИ, ПОПЕРЕЧНИКИ ФУРЬЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

WAVELET APPROXIMATION, FOURIER WIDTHS, AND APPROXIMATE RECOVERY OF PSEUDO-DIFFERENTIAL OPERATORS ON CERTAIN CLASSES OF PERIODIC FUNCTIONS IN SEVERAL VARIABLES

Базарханов Д. Б.

Институт математики, Алматы, Казахстан; dauren@math.kz

Фиксируем $n, d \in \mathbb{N}$: $n \le d$; для произвольных $\varepsilon \subset \varepsilon_d = \{1, \dots, d\}$ ($\varnothing \ne \varepsilon = \{j_1, \dots, j_{|\varepsilon|}\}$, $1 \le j_1 < \dots < j_{|\varepsilon|} \le d$) и $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положим $x(\varepsilon) = (x_{j_1}, \dots, x_{j_{|\varepsilon|}}) \in \mathbb{R}^{|\varepsilon|}$. Далее, фиксируем разбиение $\epsilon = \{\varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)}\}$ множества ε_d (т. е. $\varepsilon_d = \cup_{i=1}^n \varepsilon^{(i)}$, $\varepsilon^{(i)} \cap \varepsilon^{(j)} = \varnothing$ при $i \ne j$, $\varepsilon^{(i)} \ne \varnothing$, $d_i := |\varepsilon^{(i)}|$, $i \in \varepsilon_n$). Для удобства для $x \in \mathbb{R}^d$ пишем $x = (x^1, \dots, x^n)$, где $x^i = x(\varepsilon^{(i)}) \in \mathbb{R}^{d_i}$, $i \in \varepsilon_n$.

Выберем бесконечно дифференцируемые функции $\eta_0^{(i)} : \mathbb{R}^{d_i} \to \mathbb{R}$ такие, что $0 \le \eta_0^{(i)}(\xi^i) \le 1$, $\xi^i \in \mathbb{R}^{d_i}$; $\eta_0^{(i)}(\xi^i) = 1$ при $|\xi^i| \le 1$; $\eta_0^{(i)}(\xi^i) = 0$ при $|\xi^i| \ge 3/2$ $(i \in \varepsilon_n)$. Положим $\eta^{(i)}(\xi^i) = \eta_0^{(i)}(2^{-1}\xi^i) - \eta_0^{(i)}(\xi^i)$, $\eta_j^{(i)}(\xi^i) = \eta^{(i)}(2^{-j+1}\xi^i)$, $j \in \mathbb{N}$; $\eta_k(\xi) = \prod_{i=1}^n \eta_{k_i}^{(i)}(\xi^i)$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$.

Пусть $L_q = L_q(\mathbb{T}^d)(1 \le q \le \infty)$ — пространство функций f, 2π - периодических по каждой переменной, суммируемых в степени q (существенно ограниченных при $q = \infty$) на $\mathbb{T}^d$, с нормой $\| f \|_q = \| f \,|\, L_q(\mathbb{T}^d) \|$ (здесь $\mathbb{T}^d$ — d-мерный тор), а $l_\theta = l_\theta(\mathbb{N}_0^n)\,(1 \le \theta \le \infty)$— пространство кратных (комплекснозначных) числовых последовательностей $\{a_k\} = \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0^n}$ со стандартной нормой $\|\{a_k\} \,|\, l_\theta\|$.

Определение. Пусть $s = (s_1, \dots, s_n) \in (0, \infty)^n$, $1 \le \theta \le \infty$. *Пространство типа Никольского — Бесова* $\mathbf{B}_{p\,\theta}^{s,\,\epsilon}(\mathbb{T}^d)$ $(1 \le p \le \infty)$ состоит из всех функций $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, для которых конечна норма

$$\| f \,|\, B \| = \| f \,|\, \mathbf{B}_{p\,\theta}^{s,\,\epsilon}(\mathbb{T}^d) \| \;=\; \|\{2^{(s,k)} \| \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^d} \eta_k(\lambda) \widehat{f}(\lambda) e^{i}(\lambda, x) \|_p\} \,|\, l_\theta\|.$$

Пространство типа Лизоркина — Трибеля $\mathbf{F}_{p\,\theta}^{s,\,\epsilon}(\mathbb{T}^d)$ $(1 \le p < \infty)$ состоит из всех функций $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, для которых конечна норма

$$\| f \,|\, F \| = \| f \,|\, \mathbf{F}_{p\,\theta}^{s,\,\epsilon}(\mathbb{T}^d) \| \;=\; \|\|\{2^{(s,k)} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}^d} \eta_k(\lambda) \widehat{f}(\lambda) e^{i(\lambda, x)}\} \,|\, l_\theta\|\|_p.$$

(Здесь $\widehat{f}(\lambda) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{T}^d} f(x) e^{-i(\lambda, x)}\, dx$ — коэффициенты Фурье функции f, $\lambda \in \mathbb{Z}^d$.)

В докладе будут рассмотрены точные в смысле порядка оценки для приближений функций из единичных шаров пространств $\mathbf{B}_{p\,\theta}^{s,\,\epsilon}(\mathbb{T}^d)$ и $\mathbf{F}_{p\,\theta}^{s,\,\epsilon}(\mathbb{T}^d)$ специальными частичными суммами разложений по кратной периодизированной системе всплесков Мейера в $L_q(\mathbb{T}^d)$ и для поперечников Фурье в ряде случаев. Кроме того, будут даны приложения этих оценок к задаче приближенного восстановления специального класса псевдодифференциальных операторов на функциях из этих пространств.

ИНВАРИАНТНЫЕ СТРУКТУРЫ НА РИМАНОВЫХ ОДНОРОДНЫХ k-СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

INVARIANT STRUCTURES ON RIEMANNIAN HOMOGENEOUS k-SYMMETRIC SPACES

Балащенко В. В.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь;
`balashchenko@bsu.by; vitbal@tut.by`

Однородные пространства, порождаемые эндоморфизмами групп Ли, были впервые рассмотрены В. И. Ведерниковым в 1964 г. как естественные объекты, возникающие при изучении им в тот период нормализованных и сопряженных связностей в главных расслоениях. Важнейшим подклассом таких пространств стали введенные Н. А. Степановым в 1967 г. *регулярные* Φ-*пространства* G/H, которые являются редуктивными и включают, в свою очередь, однородные Φ-пространства *порядка* k (*однородные* k-*симметрические пространства*), т. е. автоморфизм Φ группы Ли G имеет порядок k (случай $k = 2$ соответствует однородным симметрическим пространствам). Оказалось, что автоморфизм Φ порождает на G/H не только обобщенные «симметрии», но и инвариантные *канонические структуры* классических типов: почти комплексные J, почти произведения P, f-структуры ($f^3+f = 0$, K. Yano), h-структуры ($h^3-h = 0$). При этом как «симметрии», так и канонические структуры согласованы с естественными инвариантными (псевдо)римановыми метриками, возникающими на G/H. Классическим примером здесь стала обнаруженная еще в конце 1960-х гг. каноническая структура J на однородных 3-симметрических пространствах (Н. А. Степанов, J. A. Wolf, A. Gray), которая стала эффективным инструментом во многих конструкциях дифференциальной геометрии и глобального анализа. Отдельные новые примеры канонических структур впоследствии возникали (A. J. Ledger, O. Kowalski и др.), а полное их описание было получено в [1, 2].

Среди приложений канонических структур выделим *обобщенную эрмитову геометрию*, созданную в середине 1980-х гг. В. Ф. Кириченко (см., например, [3]) и развиваемую теперь в разных аспектах. Здесь канонические f-структуры позволили предъявить обширный ресурс инвариантных примеров для важнейших классов обобщенных почти эрмитовых структур. Аналогично, с помощью канонических структур P на однородных k-симметрических пространствах построены классы инвариантных *римановых структур почти произведения* (в соответствии с классификацией A. M. Naveira). Описание этих и других фактов, а также серии примеров как полупростого, так и разрешимого типов, содержатся в [4]. Среди недавних результатов — новые классы канонических приближенно келеровых и эрмитовых f-структур на однородных k-симметрических пространствах относительно семейства диагональных римановых метрик (А. С. Самсонов).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балащенко В. В., Степанов Н. А.* Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Φ–пространствах // Матем. сб. 1995. Т. 186, № 11. С. 3–34.
2. *Балащенко В. В.* Канонические f-структуры гиперболического типа на регулярных Φ-пространствах // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53, № 4. С. 213–214.
3. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М.: МПГУ, 2003.
4. *Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Однородные пространства: теория и приложения. Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СРЕДНЕГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ $L_{p(x),\,\omega}(R^n)$

BOUNDEDNESS OF THE GEOMETRIC MEAN OPERATOR IN THE SPACES $L_{p(x),\,\omega}(R^n)$

Бандалиев Р. А.

Институт математики и механики НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан; bandalievr@rambler.ru

В представленной работе исследуется задача о нахождении двухвесового критерия для геометрического среднего оператора в пространстве Лебега с переменным показателем суммируемости. Этот оператор имеет вид

$$Gf(x) = \exp\left(\frac{1}{|B(0,|x|)|}\int\limits_{B(0,\,|x|)} \ln f(y)\,dy\right), \quad \text{где} \quad f>0$$

и $B(0,\,|x|) = \{y : y\in R^n;\ |y|\le |x|\}$.

Определение. Через $L_{p(x),\omega}\,(R^n)$ обозначим весовое пространство измеримых функций f на R^n таких, что $\int\limits_{R^n} |f(x)\omega(x)|^{p(x)}\,dx < \infty$. Отметим, что при условиях $1\le p(x)\le p_+ < +\infty$, весовое пространство $L_{p(x),\,\omega}\,(R^n)$ является банаховым по норме (см. [1]) ($p_+ = \sup\limits_{x\in R^n} p(x)$)

$$\|f\|_{L_{p(x),\,\omega}(R^n)} = \|f\|_{L_{p(\cdot),\,\omega}} = \inf\left\{\lambda>0 :\ \int\limits_{R^n}\left|\frac{f(x)\,\omega(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx\le 1\right\}.$$

Теорема. *Пусть* $p_- = \inf\limits_{x\in R^n} p(x)$, $1<p_-\le p(x)\le q(x)\le\overline{q}<\infty$, $\dfrac{1}{r(x)} = \dfrac{1}{p_-} - \dfrac{1}{p(x)}$ *для п.в.* $x\in R^n$ *и* $\|1\|_{L_{r(\cdot)}(R^n)}<\infty$. *Предположим, что* $v(x)$ *и* $w(x)$ — *весовые функции, определенные на* R^n *и удовлетворяющие условию*:

$$D(s,p,q) = \sup_{t>0} t^{\frac{n(s-1)}{p_-}} \left\| \frac{w(\cdot)}{|\cdot|^{\frac{s}{p_-}}}\ \exp\left(\frac{1}{|B(0,\,|\cdot|)|}\int\limits_{B(0,\,|x|)} \ln\frac{1}{v(y)}dy\right)\right\|_{L_{q(\cdot)}(|\cdot|>t)}, \quad (1)$$

где $s\in(1,\,p_-)$. *Тогда для справедливости неравенства*

$$\|Gf\|_{L_{q(\cdot),\,w}(R^n)}\le C\ \|f\|_{L_{p(\cdot),\,v}(R^n)} \quad (2)$$

необходимо и достаточно выполнение условия (1). *Кроме того, если* C *наилучшая положительная постоянная в неравенстве* (2), *то*

$$\sup_{s>1}\frac{e^{\frac{s}{p_-}}\,D(s,p,q)}{\left[e^s+\frac{1}{s-1}\right]^{1/p_-}}\le C\le 2\,\left(\frac{p_-}{q_-}+\frac{q_+-p_-}{q_+}\right)^{\frac{2}{p_-}}\ \|1\|_{L_{r(\cdot)}(R^n)}\ \inf_{s>1} e^{\frac{s-1}{p_-}}\,D(s,p,q).$$

В связи с теоремой отметим работу [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $L^{p(t)}([0,1])$ // Матем. заметки. 1979. Т. 26, № 4. С. 613–637.
2. *Persson L. E., Stepanov V. D.* Weighted integral inequalities with the geometric mean operator // J. Inequal. Appl. 2002. V. 7, № 5. P. 727–746.

ВИРТУАЛЬНЫЕ УЗЛЫ И КОСЫ
VIRTUAL KNOTS AND BRAIDS

Бардаков В. Г.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
bardakov@math.nsc.ru

Виртуальные узлы как обобщение классических узлов ввел Л. Кауфман. Он же определил и группу виртуальных кос VB_n, а В. В. Вершинин нашел для нее более экономное представление. Затем Камада доказал, что всякий виртуальный узел является замыканием некоторой виртуальной косы и два виртуальных узла эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им косы связаны некоторой последовательностью преобразований. Эти теоремы являются аналогами теорем Александера и Маркова.

Как и для группы кос B_n для VB_n существует эпиморфизм на группу подстановок S_n, ядро которого называется группой крашеных виртуальных кос и обозначается VP_n. Известно [1], что VP_n при $n \geq 2$ является полупрямым произведением

$$VP_n = V_{n-1}^* \rtimes VP_{n-1},$$

где V_{n-1}^* — свободная подгруппа группы VP_n.

В работе [2] определена система инвариантов конечного типа (инварианты Гусарова — Васильева) для группы VB_n. Эта система является полной системой инвариантов тогда и только тогда, когда VP_n аппроксимируется нильпотентными группами без кручения.

Другое представление группы VP_3 найдено в [3], где доказано, что $VP_3 = G_3 * \mathbb{Z}$ и G_3 имеет представление с порождающими a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 и соотношениями

$$[a_1, b_1] = [a_2, b_2] = 1, \quad b_1^{c_1} = b_1^{a_2}, \quad a_1^{c_1} = a_1^{b_2}, \quad b_2^{c_1} = b_2^{a_1 b_2}, \quad a_2^{c_1} = a_2^{b_1 a_2}.$$

Кроме того, $G_3 = Q_3 \leftthreetimes \langle c_1 \rangle$, где Q_3 — подгруппа G_3, порожденная элементами a_1, b_1, a_2, b_2 и имеющая бесконечное множество соотношений

$$[a_i, b_i]^{c_1^k} = 1, \quad i = 1, 2, \quad k \in \mathbb{Z},$$

записанных в порождающих a_1, b_1, a_2, b_2. Используя это представление в [3] установлено, что группа VP_3 аппроксимируется нильпотентными группами без кручения.

В настоящей работе изучается группа Q_3 и доказывается

Теорема. *Ядро гомоморфизма Q_3 на прямое произведени $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ является свободной группой, т. е. существует короткая точная последовательность*

$$1 \longrightarrow F_\infty \longrightarrow Q_3 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 1,$$

где F_∞ — свободная группа счетного ранга.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта АВЦП Минобразования России «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/419).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bardakov V. G.* The virtual and universal braids // Fund. Math. 2004. V. 181. P. 1–18.
2. *Bardakov V. G., Bellingeri P.* Combinatorial properties of virtual braids. Preprint. arXiv: math/0609563v1.
3. *Bardakov V. G., Mikhailov R., Vershinin V. V., Wu J.* On the pure virtual braid group PV_3. Preprint. arXiv: math/0906.1743.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В СЕЧЕНИЯХ БАНАХОВЫХ РАССЛОЕНИЙ

INTEGRAL OPERATORS IN THE SPACES OF MEASERABLE SECTIONS

Басаева Е. К., Плиев М. А.

[1] *Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН и РСО-А, Владикавказ, Россия;* helen@smath.ru

[2] *Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН и РСО-А, Владикавказ, Россия;* plimarat@yandex.ru

Теория измеримых и непрерывных банаховых расслоений — активно развивающаяся область современного функционального анализа, см., например, [1–4]. В последние годы стали изучаться операторы, заданные на пространствах сечений [5, 6].

Перейдем к точным определениям. Банахово расслоение $\mathcal{X}$ над множеством Ω с заданной измеримой структурой $\mathcal{I}$ называют *измеримым банаховым расслоением* (ИБР) над Ω и обозначают $(\mathcal{X}, \mathcal{I})$ или короче $\mathcal{X}$.

Пусть E — идеальное пространство над $L_0(\Omega)$. Положим по определению

$$E(\mathcal{X}) := \{f \in L_0(\Omega, \Sigma, \nu, \mathcal{X}) : \ |f| \in E\}.$$

Пусть (A, Σ_1, ν) и (B, Σ_2, μ) — пространства с конечными мерами, $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — ИБР с лифтингами над (A, Σ_1, ν) и (B, Σ_2, μ) соответственно, $T : E(\mathcal{X}) \to F(\mathcal{Y})$ — линейный оператор. Рассмотрим измеримое операторное сечение K, где для любого $(s,t) \in A \times B$ линейный оператор $K(s,t)$ принадлежит $\mathcal{L}(\mathcal{X}(t), \mathcal{Y}(s))$. Кроме того, для любых измеримых сечений $f \in E(\mathcal{X})$ и $z \in L_\infty(\mathcal{Y}^\star)$ μ-почти всюду справедливо равенство

$$\langle z(s), (Tf)(s)\rangle = \int\limits_A \langle z(s), K(s,t)f(t)\rangle \, d\nu(t).$$

Тогда говорят, что определен *слабый интегральный оператор* T с ядром K.

Теорема. *Пусть $T : E(\mathcal{X}) \to F(\mathcal{Y})$ — линейный мажорируемый оператор. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) T — *слабый интегральный оператор*;

2) *для любой последовательности*

$$(f_n)_{n=1}^\infty \subset E(\mathcal{X}), \ |f_n| \leqslant g \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \ g \in E_+),$$

справедлива импликация $|f_n| \overset{(\nu)}{\to} 0 \Longrightarrow |Tf_n| \overset{(o)}{\to} 0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гутман А. Е., Рябко Д. Б.* Функциональное представление пространств Канторовича посредством булевозначных моделей // Владикавк. мат. журн. 2002. Т. 4, вып. 1. С. 34–49.
2. *Гутман А. Е., Коптев А. В, Попов А. И.* Конечная представимость в слоях просторных банаховых расслоений // Владикавк. мат. журн. 2005. Т. 7, вып. 1. С. 39–45.
3. *Гутман А. Е., Коптев А. В.* Пространства CD_0-функций и удвоение по Александрову // Владикавк. мат. журн. 2005. Т. 7, вып. 1. С. 39–45.
4. *Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы.* М.: Наука, 2003.
5. *Кусраев А. Г.* О теореме типа Штрассена для измеримых селекторов // Владикавк. мат. журн. 2006. Т. 6, вып. 8. С. 32–37.
6. *Басаева Е. К., Плиев М. А.* Субдифференциал сублинейного интегрального оператора // В печати.

О ПОРЯДКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

APPROXIMATION ORDERS OF FUNCTIONAL CLASSES IN ANISOTROPIC SPACES

Бекмаганбетов К. А.

Казахстанский филиал МГУ им. М. В. Ломоносова, Астана, Казахстан;
bekmaganbetov-ka@yandex.ru

Пусть $\mathbf{1} \le \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \le \infty$. Для функций $f \in L_{\mathbf{pr}}$ ([1]) обозначим через

$$\Delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} a_{\mathbf{k}}(f) e^{2\pi i (\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

где $\{a_{\mathbf{k}}(f)\}_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n}$ — коэффициенты Фурье функции f по кратной тригонометрической системе, $\rho(\mathbf{s}) = \{\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n : \left[2^{s_i - 1}\right] \le |k_i| < 2^{s_i}, i = 1, \dots, n\}$, $(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n k_j x_j$.

Анизотропным пространством Бесова $B^{\alpha\theta}_{\mathbf{pr}}$ ([1, 2]) называется множество функций f из $L_{\mathbf{pr}}$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{B^{\alpha\theta}_{\mathbf{pr}}} = \left\| \left\{ \mathbf{2}^{(\alpha, \mathbf{s})} \|\Delta_{\mathbf{s}}(f)\|_{L_{\mathbf{pr}}} \right\}_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^n_+} \right\|_{l_\theta},$$

где $\mathbf{0} < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{0} < \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \le \infty$, $\|\cdot\|_{l_\theta}$ — норма дискретного пространства Лебега l_θ со смешанной метрикой.

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$, где $\gamma_j > 0$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$ для всех $j = 1, \dots, n$ и

$$Q^n(\gamma, N) = \bigcup_{(\mathbf{s}, \gamma) < N} \rho(\mathbf{s}), \quad T_{Q^n(\gamma, N)} = \left\{ t(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in Q^n(\gamma, N)} b_{\mathbf{k}} e^{2\pi i (\mathbf{k}, \mathbf{x})} \right\},$$

$E_{\gamma, N}(f)_{L_{\mathbf{pr}}}$ — наилучшее приближение функции $f \in L_{\mathbf{pr}}$ полиномами из $T_{Q^n(\gamma, N)}$, $S_{\gamma, N}(f, \mathbf{x}) = \sum\limits_{\mathbf{k} \in Q^n(\gamma, N)} a_{\mathbf{k}}(f) e^{2\pi i (\mathbf{k}, \mathbf{x})}$ — частичная сумма ряда Фурье функции f.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{0} < \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) < \infty$, $\mathbf{1} < \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n) < \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) < \infty$, $\mathbf{1} \le \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n), \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n), \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \le \infty$, $\alpha_{j_0} + \dfrac{1}{q_{j_0}} - \dfrac{1}{p_{j_0}} = \min\limits_{j = 1, \dots, n} \{\alpha_j + \dfrac{1}{q_j} - \dfrac{1}{p_j}\}$ *и* $\alpha_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}} > 0$, $\gamma_j = (\alpha_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}) / (\alpha_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}})$, $j = 1, \dots, n$. *Тогда*

$$E_{\gamma, N}\left(B^{\alpha\tau}_{\mathbf{pr}}\right)_{L_{\mathbf{q}\theta}} \asymp 2^{-\left(\alpha_{j_0} + \frac{1}{q_{j_0}} - \frac{1}{p_{j_0}}\right) N} N^{\sum_{j=2}^n \left(\frac{1}{\theta_j} - \frac{1}{\tau_j}\right)_+},$$

где $E_{\gamma, N}\left(B^{\alpha\tau}_{\mathbf{p}\theta}\right)_{L_{\mathbf{q}\theta}} = \sup\limits_{\|f\|_{B^{\alpha\tau}_{\mathbf{p}\theta}} \le 1} E_{\gamma, N}(f)_{L_{\mathbf{q}\theta}}$, $(a)_+ = \max(a, 0)$.

Заметим, что данная теорема обобщает и усиливает, соответствующий результат из работы [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нурсултанов Е. Д.* Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Докл. АН. 2004. Т. 394, № 1. С. 16–19.
2. *Акишев Г. А.* Приближение функциональных классов в пространствах со смешанной нормой // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 8. С. 17–40.

ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА НА ОДНОРОДНЫХ НОРМАЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

THE LAPLACE OPERATOR ON HOMOGENEOUS NORMAL RIEMANNIAN MANIFOLDS

Берестовский В. Н.[1], Свиркин В. М.[2]

[1] *Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия;* berestov@ofim.oscsbras.ru

[2] *Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия;* svirkin@ofim.oscsbras.ru

Доклад посвящен анализу свойств и поиску спектра оператора Лапласа на вещественных функциях однородных нормальных римановых многообразий.

Устанавливаются связи между спектрами двух римановых многообразий, соединенных римановой субмерсией с вполне геодезическими слоями, между спектром транзитивной группы изометрий G/H риманового многообразия и спектром группы Ли G, а также между спектром прямого произведения двух римановых многобразий $M \times N$ и спектрами его сомножителей M и N. Вследствие этих соотношений исследование спектра лапласиана сводится к случаю компактных простых связных односвязных групп Ли с биинвариантной римановой метрикой.

Указывается весьма эффективный способ вычисления спектра лапласиана указанных выше групп Ли через представления их алгебр Ли.

СЛАБО АДДИТИВНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ И ПРЯМАЯ ЗОРГЕНФРЕЯ

A WEAKLY ADDITIVE FUNCTIONAL AND THE SORGENFREI LINE

Бешимов Р. Б.[1], **Сафарова Д. Т.**[2]

[1]*Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан;* rbeshimov@mail.ru

[2]*Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан*

В настоящей работе доказано, что функтор слабо аддитивный функционал не сохраняет прямую Зоргенфрея.

Функционал $\nu : C(X) \to R$ называется:

1) слабо аддитивным, если $\nu(\varphi + c_X) = \nu(\varphi) + c$ для всех $\varphi \in C(X)$ и $c \in R$;

2) сохраняющим порядок, если для любых $\varphi, \psi \in C(X)$ из того, что $\varphi \leq \psi$ вытекает неравенство $\nu(\varphi) \leq \nu(\psi)$;

3) нормированным, если $\nu(1_X) = 1$.

Для бикомпакта X через $O(X)$ обозначим множество всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов. Элементы множества $O(X)$ для краткости назовем слабо аддитивными функционалами. Базу окрестностей слабо аддитивного функционала образуют множества вида $(\nu; \varphi_1, \ldots, \varphi_k; \varepsilon) = \{\nu^{'} \in O(X) : |\nu(\varphi_i) - \nu^{'}(\varphi_i)| < \varepsilon, i = 1, 2, \ldots, k\}$, где $\varphi \in C(X), i = 1, 2, \ldots, k$ и $\varepsilon > 0$ [1].

Пусть X, Y — тихоновские пространства, и $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Рассмотрим Стоун — Чеховское продолжение отображения f, т.е. $\beta f : \beta X \to \beta Y$. Положим $O_\beta(X) = \{\mu \in O(\beta X) : supp\ \mu \subset X\}, O_\beta(f) = O(\beta f)|_{O_\beta(X)}$. Тогда отображение $O_\beta(f) : O_\beta(X) \to O_\beta(Y)$ действует по формуле $(O_\beta(f)(\mu))(\varphi) = \mu(\varphi \circ f)$, где $\mu \in O_\beta(X), \varphi \in C_b(Y)$. Здесь через $C_b(Y)$ обозначается множество всех ограниченных, непрерывных функций, определенных на тихоновском пространстве Y.

Пусть $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел, а B — семейство всех интервалов $[x, r)$, где $x, r \in \mathbb{R}$, $x < r$ и r — рациональное число. Элементы семейства B открыто-замкнутые множества относительно топологии, порожденной базой B. Семейство B обладает базой. Пространство $\mathbb{R}$ называется прямой Зоргенфрея.

Утверждение [2]. *Прямая Зоргенфрея наследственно сепарабельна.*

Теорема. *Функтор $O_\beta : Tych \to Tych$ не сохраняет прямую Зоргенфрея.*

Следствие 1. *Функтор $O_\beta : Tych \to Tych$ не сохраняет одну стрелку П. С. Александрова.*

Следствие 2. *Функтор $P_\beta : Tych \to Tych$ не сохраняет прямую Зоргенфрея.*

Следствие 3. *Функтор exp не сохраняет прямую Зоргенфрея.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Radul T. N.* On the functor of order-preserving functionals // Comment. Math. Univ. Carol. 1998. V. 39, № 3. P. 609–615.
2. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М., 1986.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ В ОБЛАСТИ С ПИКОМ

INTEGRAL REPRESANTATION AND BOUNDARY BEHEVIOUR OF FUNCTIONS DEFINED IN A DOMAIN WITH A PEAK

Васильчик М. Ю.[1], Пупышев И. М.[2]

[1] *Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия;* lolavas@mail.ru

[2] *Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия;* iluxa1@ngs.ru

Сформулируем рассматриваемую задачу. Пусть $\varphi \in C^{0,1}([0,1])$ — такая функция, что выполняются равенства $\lim\limits_{\tau\to+0}\varphi(\tau) = \lim\limits_{\tau\to+0}\varphi'(\tau) = 0$. Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — строго липшицева область, содержащая начало координат и содержащаяся в единичном шаре $B(0',1) = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : |x'| < 1\}$. Через $G \subset \mathbb{R}^n$ обозначим область

$$G = \{X = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < x_n < 1, \frac{x'}{\varphi(x_n)} \in \omega\},$$

через S обозначим часть границы ∂G

$$S = \{X = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : X \in \partial G, 0 < x_n < 1\}.$$

Пусть на S задано семейство функций f_α, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $|\alpha| \leqslant l-1$, $l > 1$ — натуральное число. Положим $e(\tau,\rho) = \min\{\varphi(\tau), \varphi(\rho)\}$, $\sigma(\tau,\rho) = \chi\Big(\frac{|\tau-\rho|}{5e(\tau,\rho)}\Big)$, $0 < \tau, \rho < 1$, где χ — характеристическая функция интервала $(0,1)$. Для $P, Q \in S$ полагаем

$$r_\alpha(P,Q) = f_\alpha(Q) - \sum_{|\alpha+\beta|\leqslant l-1} f_{\alpha+\beta}(P)\frac{(P-Q)^\beta}{\beta!}.$$

Систему функций f_α будем обозначать через $\overline{f}$. Таким образом, $\overline{f} = \{f_\alpha\}_{|\alpha|\leqslant l-1}$. Пространство семейств $\overline{f} = \{f_\alpha\}_{|\alpha|\leqslant l-1}$, для которых конечна норма $(1 < p < \infty)$

$$\|\overline{f}\|_B = \sum_{|\alpha|\leqslant l-1}\Big\{\int\limits_S |f_\alpha(P)|^p\varphi(p_n)d\Sigma\Big\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \sum_{|\alpha|\leqslant l-1}\Big\{\int\limits_S\int\limits_S \frac{|r_\alpha(P,Q)|^p}{|P-Q|^{(l-|\alpha|)p+n-2}}\sigma(p_n,q_n)d\Sigma_P d\Sigma_Q\Big\}^{\frac{1}{p}},$$

обозначим через $B^{l-\frac{1}{p}}_{p,\varphi}(S)$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема ограничения. *Пусть $F \in W^l_p(G)$, и $f_\alpha = D^\alpha F|_S$, $|\alpha| \leqslant l-1$. Тогда $\overline{f} = \{f_\alpha\}_{|\alpha|\leqslant l-1} \in B^{l-\frac{1}{p}}_{p,\varphi}(S)$, и справедливо неравенство*

$$\|\overline{f}\|_B \leqslant C\|F\|_{W^l_p(G)},$$

где постоянная C зависит только от l, p, n и области G.

Теорема продолжения. *Пусть $\overline{f} = \{f_\alpha\}_{|\alpha| \leqslant l-1} \in B^{l-\frac{1}{p}}_{p,\varphi}(S)$. Тогда существует такая функция $F \in W^l_p(G)$, что $D^\alpha F|_S = f_\alpha$, $|\alpha| \leqslant l-1$, и справедливо неравенство*

$$\|F\|_{W^l_p(G)} \leqslant C\|\overline{f}\|_B,$$

где постоянная C зависит только от l, p, n и области G.

КОНСТАНТЫ И ФУНКЦИИ ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА ЕДИНИЧНОЙ СФЕРЕ

EMBEDDING CONSTANTS AND FUNCTIONS FOR SOBOLEV-LIKE SPACES ON THE UNIT SPHERE

Васкевич В. Л.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
vask@math.nsc.ru

Получены явные выражения норм операторов вложения пространств $X_2^r(S)$ соболевского типа на единичной сфере S в пространство $C(S)$ непрерывных функций на той же сфере (нормы такого типа принято называть «константами вложения»). Принадлежность функции исходному пространству $X_2^r(S)$ формулируется как условие суммируемости квадратов ее коэффициентов Фурье (в разложении по сферическим гармоникам всевозможных порядков k, $k = 1, 2, \dots$) с весом $\lambda_{n,k}^{2r}$, где n — размерность независимых переменных, $\lambda_{n,k} = k(n + k - 2)$, а r — число, возможно дробное, характеризующее гладкость класса. Найденные для констант вложения формулы дают их выражения в виде сумм положительных абсолютно сходящихся рядов, зависящих от r и n.

Теорема 1. *При $r > (n - 1)/4$ константа вложения пространства $X_2^r(S)$ в $C(S)$ задается равенством*

$$A_n^{(r)} = \left\{ 1 + \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\lambda_{n,k}^{2r}} \right\}^{1/2},$$

где σ_{n-1} — площадь сферы S и $\sigma(k) = (n + 2k - 2)\frac{(n+k-3)!}{k!(n-2)!}$.

Установлено также существование функций рассматриваемых вложений, т.е. таких функций $u = u(\theta)$ из $X_2^r(S)$, для которых $\|u \mid C(S)\| = A_n^{(r)} \|u \mid X_2^r(S)\|$.

Теорема 2. *При $r > (n-1)/4$ функцию вложения пространства $X_2^r(S)$ в $C(S)$ задает абсолютно сходящийся ряд вида*

$$G_{\theta_0}(\theta) = 1 + \frac{1}{\sigma_{n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma(k)}{\lambda_{n,k}^{2r}} G_k^{(n)}(\theta \cdot \theta_0), \qquad \theta \in S,$$

где θ_0 — некоторый «полюс» на сфере S, $\theta \cdot \theta_0$ — скалярное произведение векторов θ и θ_0, а $G_k^{(n)}(t)$ — нормализованный полиномом Гегенбауэра, $G_k^{(n)}(1) = 1$.

Информация о константах и функциях вложений востребована как при оценке погрешностей приближенных формул, так и при оценке их обусловленности [1–3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л., Васкевич В. Л.* Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Ин-та матем. СО РАН, 1996.
2. *Васкевич В. Л.* Константы вложения периодических пространств Соболева дробного порядка // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1019–1027.
3. *Васкевич В. Л.* О возмущениях погрешности при малых шевелениях весов кубатурной формулы // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11. Спец. выпуск. С. 19–26.

О МНОЖЕСТВЕ ОБЪЁМОВ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГОГРАННИКОВ

ON THE SET OF VOLUMES OF RIGHT-ANGLED HYPERBOLIC POLYHEDRA

Веснин А. Ю.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
vesnin@math.nsc.ru

Под *прямоугольными гиперболическими многогранниками* понимаются многогранники с прямыми двугранными углами в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$. В [1] были определены операции *декомпозиции* и *реберной хирургии* и доказана следующая универсальность введенных в [2] многогранников Лёбелля.

Теорема 1 [1]. *Пусть P_0 — прямоугольный гиперболический многогранник. Тогда существует последовательность объединений прямоугольных гиперболических многогранников $P_1, \dots, P_k$ таких, что для $i = 1, \dots, k$ множество P_i получено из P_{i-1} декомпозицией или реберной хирургией, и P_k состоит из многогранников Лёбелля. Более того,*

$$\mathrm{vol}(P_0) \geqslant \mathrm{vol}(P_1) \geqslant \mathrm{vol}(P_2) \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{vol}(P_k).$$

В [3] получены оценки объемов многогранников через число вершин.

Теорема 2 [3]. *Если P — компактный прямоугольный гиперболический многогранник с N вершинами, то*

$$(N-2) \cdot \frac{v_8}{32} \leqslant \mathrm{vol}(P) < (N-10) \cdot \frac{5v_3}{8},$$

где v_8 — объем правильного идеального октаэдра, а v_3 — объем правильного идеального тетраэдра. Существует последовательность компактных многогранников P_i с N_i вершинами такая, что $\mathrm{vol}(P_i)/N_i$ стремится к $5v_3/8$ при $i \to \infty$.

Пусть $\mathrm{vert}(R)$ — число вершин многогранника R. Величина $5v_3/8$ является двойной предельной точкой для множества $\mathrm{vol}(R)/\,\mathrm{vert}(R)$ в следующем смысле.

Теорема 3 [4]. *Для каждого целого $k \geqslant 1$ существует последовательность компактных прямоугольных гиперболических многогранников $R_k(n)$ такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{vol}(R_k(n))}{\mathrm{vert}(R_k(n))} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{5v_3}{8}.$$

Многогранники $R_k(n)$ строятся из многогранников Лёбелля, а вычисления объемов основаны на результатах [5].

Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (№ 09–01–00255) и интеграционного проекта СО РАН и УрО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Inoue T.* Organizing volumes of right-angled hyperbolic polyhedra. // Algebraic & Geometric Topology. 2008. V. 8. P. 1523–1565.
2. *Веснин А.Ю.* Трехмерные гиперболические многообразия типа Лёбелля // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28. № 5, С. 50–53.
3. *Atkinson C. K.* Volume estimates for equiangular hyperbolic Coxeter polyhedra // Algebraic & Geometric Topology. 2009. V. 9. P. 1225–1254.
4. *Repovs D., Vesnin A.* On the upper bound for volumes of right-angled hyperbolic polyhedra. Preprint. 2009.
5. *Веснин А.Ю.* Объемы трехмерных гиперболических многообразий Лёбелля // Мат. заметки. 1998. Т. 64. № 1. С. 13–24.

О РЕГУЛЯРНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ, ОБРАТНЫХ К СОБОЛЕВСКИМ

ON REGULARITY OF MAPPINGS INVERSE TO SOBOLEV MAPPINGS

Водопьянов С. К.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
vodopis@math.nsc.ru

Исследуются условия соболевских гомеоморфизмов $\varphi : D \to D'$ евклидовых областей в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, гарантирующие принадлежность обратного отображения некоторому классу Соболева. Для гомеоморфизма $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ определим множество $Z = \{x \in D : J(x,\varphi) = \det D\varphi(x) = 0\}$, и присоединенную матрицу $\operatorname{adj} D\varphi(x)$, определяемую из условия $A \operatorname{adj} A = I \det A$, если определитель $n\times n$-матрицы A отличен от нуля, и по непрерывности в топологии $\mathbb{R}^{n\times n}$ в остальных случаях. Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ имеет *конечное искажение*, если $D\varphi(x) = 0$ для почти всех точек множества Z. Введем в рассмотрение две функции искажения:

1) для отображения $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ определим

$$D \ni x \mapsto \mathcal{K}_{\varphi,p}(x) = \begin{cases} \frac{|\operatorname{adj} D\varphi(x)|}{|J(x,\varphi)|^{\frac{n-1}{p}}} & \text{при } x \in D \setminus Z, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1}$$

Заметим, что $\mathcal{K}_{\varphi,p}(x) = |\operatorname{adj} D\varphi(x)|$ при $p = \infty$ в тех точках, где $J(x,\varphi) \neq 0$;

2) для отображения $\psi : D' \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$ положим

$$D' \ni y \mapsto K_{\psi,q'}(y) = \begin{cases} \frac{|D\psi(y)|}{|J(y,\psi)|^{\frac{1}{q'}}} & \text{при } y \in D' \setminus Z', \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что $K_{\psi,q'}(y) = |D\psi(y)|$ при $q' = \infty$ в тех точках, где $J(y,\psi) \neq 0$.

В рамках работы [1] получена следующая

Теорема. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ обладает следующими свойствами:*

1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$, $n - 1 \leq q \leq \infty$,

2) $\operatorname{adj} D\varphi(x) = 0$ *почти всюду на множестве* Z,

3) $\mathcal{K}_{\varphi,p}(\cdot) \in L_\varrho(D)$, *где* $\frac{1}{\varrho} = \frac{n-1}{q} - \frac{n-1}{p}$, $n - 1 \leq q \leq p \leq \infty$ ($\varrho = \infty$ *при* $q = p$).

Тогда обратный гомеоморфизм имеет свойства:

4) $\varphi^{-1} \in W^1_{p',\mathrm{loc}}(D')$, *где* $p' = \frac{p}{p-n+1}$, $p' = 1$ *при* $p = \infty$,

5) φ^{-1} *имеет конечное искажение* ($|J(y,\varphi^{-1}| > 0$ *почти всюду в* D' *при* $n \leq q$),

6) $K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \in L_\varrho(D')$, *где* $q' = \frac{q}{q-n+1}$, $q' = \infty$ *при* $q = n - 1$.

Более того, $\|K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \mid L_\varrho(D')\| = \|\mathcal{K}_{\varphi,p}(\cdot) \in L_\varrho(D)\|$.

Условия следующего утверждения представляют собой новое определение квазиконформного отображения.

Следствие 1. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ принадлежит классу Соболева $\varphi \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$. Если для некоторого неотрицательного числа $M \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|\operatorname{adj} D\varphi(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq M|J(x,\varphi)|$ для почти всех $x \in D$, то отображение φ квазиконформно.*

Следующее утверждение при $n = 2$, $q = 1$ другими методами доказано в [2]. Кроме того, при $n > 2$, $q = n - 1$ оно усиливает теорему 1.2 из [3], в которой вместо условия «$\operatorname{adj} D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве Z» накладывается более сильное требование конечности искажения отображения φ.

Следствие 2. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ обладает следующими свойствами*:

1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$, $n - 1 \leq q \leq \infty$,

2) $\operatorname{adj} D\varphi(x) = 0$ *почти всюду на множестве* Z,

Тогда обратный гомеоморфизм имеет свойства:

3) $\varphi^{-1} \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$,

4) φ^{-1} *имеет конечное искажение* ($|J(y, \varphi^{-1}| > 0$ *почти всюду в* D' *при* $n \leq q$),

5) $K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \in L_{\frac{q}{n-1},\mathrm{loc}}(D')$, где $q' = \frac{q}{q-n+1}$, $q' = \infty$ *при* $q = n - 1$.

Отметим частный случай предыдущего следствия: *при $q = \infty$ имеем, что гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ класса Соболева $W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(D)$, обладающий свойством $\operatorname{adj} D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве Z, имеет обратный $\varphi^{-1} \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$, удовлетворяющий условию $|J(y, \varphi^{-1})| > 0$ почти всюду в D' и неравенству $|D\varphi^{-1}(y)| \leq L|J(y, \varphi^{-1})|$ для почти всех $y \in D'$.*

Следующее утверждение при $n \leq q \leq p < \infty$ другими методами доказано в [4].

Следствие 3. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ обладает следующими свойствами*:

1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$, $n - 1 \leq q \leq \infty$,

2) *отображение φ имеет конечное искажение*,

3) $K_{\varphi,p}(\cdot) \in L_{\varkappa}(D)$, где $1/\varkappa = 1/q - 1/p$, $n - 1 \leq q \leq p \leq \infty$ ($\varkappa = \infty$ *при* $q = p$).

Тогда обратный гомеоморфизм имеет свойства:

4) $\varphi^{-1} \in W^1_{p',\mathrm{loc}}(D')$, где $p' = \frac{p}{p-n+1}$, $p' = 1$ *при* $p = \infty$,

5) φ^{-1} *имеет конечное искажение* ($|J(y, \varphi^{-1}| > 0$ *почти всюду в* D' *при* $n \leq q$),

6) $K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \in L_{\varrho}(D')$, где $q' = \frac{q}{q-n+1}$, $q' = \infty$ *при* $q = n-1$, а $1/\varrho = 1/p' - 1/q'$.

Более того, $\|K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \mid L_{\varrho}(D')\| \leq \|K_{\varphi,p}(\cdot) \in L_{\varkappa}(D)\|^{n-1}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 08–01–00531–а) и Совета по грантам Президента РФ для поддержки научных школ (НШ–5682.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // Докл. АН. 2008. Т. 423, № 5. С. 592–596.
2. *Hencl S., Koskela P.* Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism // Arch. Rat. Mech. Anal. 2006. V. 180. P. 75–95.
3. *Csörnyei M., Hencl S., Malý Y.* Homeomorphisms in the Sobolev space $W^{1,n-1}$ // Charles University in Prague, Preprint MATH-KMA-2007/252, 15 p.
4. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Классы Соболева и (P, Q)-квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 776–795.

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ

ON A MATHEMATICAL MODEL OF POPULATION DINAMICS

Волокитин Е. П.[1], **Тресков С. А.**[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
volok@math.nsc.ru

[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
treskov@math.nsc.ru

Рассматривается плоская система обыкновенных дифференциальных уравнений с тремя параметрами, являющаяся моделью популяции типа «хищник-жертва» предложенную в работе [1].

Для этой системы указаны все множества локальных бифуркаций до коразмерности 3 включительно, построена полная бифуркационная диаграмма системы и перечислены все ее возможные грубые фазовые портреты.

Работа выполнена при частичной поддержке поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 09–01–00070), междисциплинарных пректов СО РАН № 107 и № 119.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Li Y., Xiao D.* Bifurcations of a predanor-prey system of Holing and Leslie types // Chaos, Solitons and Fractals. 2007. V. 44. P. 606–619.

О ПОЧТИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ТЕНЗОРАХ НА ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ С ЛЕВОИНВАРИАНТНОЙ РИМАНОВОЙ МЕТРИКОЙ

ALMOST HARMONIC TENSORS ON FOUR-DIMENSIONAL LIE GROUPS WITH A LEFT-INVARIANT RIEMANNIAN METRIC

Воронов Д. С.[1], **Гладунова О. П.**[2]

[1]*Алтайская государственная педагогическая академия, Барнаул, Россия;*
voronov_ds@mail.ru
[2]*Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия;*
gladunova_olesya@mail.ru

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [1]. В данной работе изучены четырехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и почти гармоническим (т. е. с нулевым ротором и дивергенцией) тензором Схоутена — Вейля или почти гармоническим тензором Вейля. Классифицированы четырехмерные вещественные алгебры Ли, группы Ли которых наделены левоинвариантной римановой метрикой и почти гармоническим тензором Вейля.

В качестве примера приведем одну из теорем, доказанных в работе.

Теорема. *Пусть LG — вещественная четырехмерная унимодулярная разложимая алгебра Ли группы Ли G с левоинвариантной римановой метрикой и почти гармоническим тензором Вейля. Тогда алгебра Ли LG и ее структурные константы содержатся в следующей таблице:*

Алгебра Ли	*Ненулевые структурные константы* c_{ij}^k	*Ограничения на* c_{ij}^k
$4\mathbb{A}_1$		
$\mathbb{A}_{3,6} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{12}^3 = B,\ c_{23}^1 = B$	$B > 0$
$\mathbb{A}_{3,6} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{12}^3 = C,\ c_{13}^2 = -C$	$C > 0$
$\mathbb{A}_{3,6} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{23}^1 = C,\ c_{13}^2 = -C$	$C > 0$
$\mathbb{A}_{3,9} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{12}^3 = c_{23}^1 = CL^2 + C,\ c_{13}^2 = -C,\ c_{13}^4 = CL$	$C > 0$
$\mathbb{A}_{3,9} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{12}^3 = -c_{13}^2 = BK^2 + B,\ c_{23}^1 = B,\ c_{23}^4 = -BK$	$B > 0$
$\mathbb{A}_{3,9} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c_{12}^3 = A,\ c_{12}^4 = -AM,\ c_{23}^1 = -c_{13}^2 = AM^2 + A$	$A > 0$

Замечание. Типы алгебр Ли в данной таблице соответствуют классификации Г. М. Мубаракзянова [2].

Замечание. В унимодулярном случае получена классификация четырехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и почти гармоническим тензором Схоутена — Вейля.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 08–01–98001), а также при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации(№ НШ–5682.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гладунова О. П., Родионов Е. Д., Славский В. В.* О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // Докл. АН. 2008. Т. 419, № 6. С. 735–738.
2. *Мубаракзянов Г. М.* О разрешимых алгебрах Ли // Изв. ВУЗов. Матем. 1963. Т. 32, № 1. С. 114–123.

ВНЕШНИЕ ДИСКРЕТНЫЕ КРИВИЗНЫ И АППРОКСИМАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ АЛЕКСАНДРОВА МНОГОГРАННИКАМИ

EXTRINSIC DISCRETE CURVATURES AND APPROXIMATION OF ALEXANDROV SURFACES BY POLYHEDRA

Гаранжа В. А.

Вычислительный центр РАН, Москва, Россия; garan@ccas.ru

Двумерные поверхности ПРВ (представимые разностью выпуклых функций, А. Д. Александров, 1949), наследуют многие замечательные свойства выпуклых поверхностей. В частности, известно, что почти в каждой их точке определен второй дифференциал и соприкасающийся параболоид. Множество конических точек на поверхности ПРВ не более чем счетно, а множество ребер состоит из не более чем счетного множества спрямляемых кривых. При этом множество конических точек, в которых абсолютная внешняя кривизна больше некоторого порога ε в каждой ограниченной области конечно, а множество ребер, касательный двугранный угол в которых меньше некоторого порога $\pi - \varepsilon$, представляет собой конечное число кривых с ограниченной вариацией поворота.

Площадь сферическое изображения ψ для поверхности ПРВ M представляет собой вполне аддитивную функцию борелевских множеств с ограниченной вариацией, так что для нее справедливо разложение Лебега $\psi(M) = C(M) + S(M) + D(M)$ на абсолютно непрерывную часть $C(M)$, на сингулярную часть $S(M)$, которая является сферическим изображением ребер, и на дискретную часть $D(M)$, которая является сферическим изображением конических вершин.

Таким образом, возникает естественная задача правильной аппроксимации поверхностей ПРВ, в которой на многогранниках P_k определено разложение Лебега, т.е. $\psi_k(P_k) = C_k(P_k) + S_k(P_k) + D_k(P_k)$, при этом каждый член разложения для поверхности M аппроксимируется по отдельности.

Ранее автором был предложен метод построения дискретного сферического отображения для пары многогранников двойственных (локально полярных) относительно соприкасающегося параболоида (если он существует), в котором каждой регулярной вершине p_i многогранника сопоставляется отображение ϕ_i двойственной грани Q_i на нормальное изображение вершины. Это отображение является локальной аппроксимацией сферического отображения поверхности M, а градиент отображения ϕ_i является аппроксимацией матрицы оператора формы (тензора кривизны). Регулярную вершину многогранника договоримся не называть конической, поскольку в ней однозначно определена касательная плоскость, параллельная двойственной грани. Такое же рассуждение справедливо относительно регулярных (не острых) ребер.

Для построения разложения Лебега на каждой из двойственных многогранных поверхностей, они должны склеиваться из регулярных подобластей, не содержащих конических вершин и острых ребер. При этом множество конических вершин для пары двойственных многогранников P_k и P_k совпадает, а множество острых ребер является аппроксимацией одного и того же конечного множества кривых с ограниченной вариацией поворота. Многогранные поверхности P_k и $P_k^\star$ можно выбирать так, чтобы поверхность M лежала между ними, так что построенный метод аппроксимации является родственным методу исчерпывания Архимеда.

Работа выполнена при поддержке Целевой программы 03 ОМН РАН и программы поддержки ведущих научных школ НШ-5073.2008.1

ИНВАРИАНТЫ ЗАЦЕПЛЕНИЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

INVARIANTS OF LINKS IN THE PROJECTIVE SPACE

Горковец Д. В.

ГОУ ВПО Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия;
dvgorkovets@gmail.com

Работа основана на результатах трудов Дж. Скотта Картера, который вместе с несколькими соавторами в 2001 году опубликовал статью про коциклический инвариант зацеплений. Этот инвариант был открыт через теорию когомологий группоидов. Группоид — это множество с бинарной операцией и тремя аксиомами, отражающими движения Райдемайстера. В докладе будет озвучено построение двух коциклических инвариантов для зацеплений в проективном пространстве.

Первый инвариант — *коциклический инвариант* — строится с помощью *правильной раскраски* диаграммы элементами конечного группоида и некоторого 2-коцикла, отвечающего данному конечному группоиду. Правильная раскраска диаграммы зацепления вводится автором. Таким образом, коциклический инвариант не является единственным для конкретного узла: он задается парой данных объектов — конечным группоидом и его 2-коциклом. Оказывается, построенный инвариант тесно связан с уже известным коциклическим инвариантом для зацеплений в трехмерной сфере. Если взять поднятие зацепления при накрытии из трехмерной сферы в проективное пространство, то получившийся прообраз будет зацеплением в 3-сфере. Тогда значение известного инварианта от этого зацепления будет совпадать со значением построенного инварианта от исходного зацепления.

Второй инвариант — *скрученный коциклический инвариант* — является обобщением первого инварианта. Скрученный коциклический инвариант для трехмерной сферы был открыт Дж. Скоттом Картером в 2002 году. Картер построил этот инвариант, пользуясь скрученной теорией гомологий, которая имеет более сложную структуру, чем обычная теория гомологий. Построенный в данной работе скрученный инвариант уже не является обобщением известного скрученного инварианта в силу того, что условия на начальные параметры для 2-коциклов у обоих инвариантов разные.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07–01–96026–р2007урал–а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carter S., Kamada S., Jelsovsky D., Langford ., Saito M.* Quandle Cohomology and State-sum Invariants of Knotted Curves and Surfaces. Preprint. 2001. arXiv:math/9903135.
2. *Carter S., Elhamdadi M., Saito M.* Twisted quandle homology theory and cocycle knot invariants // Algebraic & Geometric Topology. 2002. V. 2. P. 95–135.

О КВАЗИМЕТРИКАХ, ПОРОЖДЕННЫХ СИСТЕМАМИ НЕКОММУТИРУЮЩИХ БАЗИСНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

QUASIMETRICS INDUCED BY SYSTEMS OF NON-COMMUTING BASIC VECTOR FIELDS

Грешнов А. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
greshnov@math.nsc.ru

В некоторой области $O \subset \mathbb{R}^N$ рассмотрим набор C^r гладких *базисных* векторных полей $X_1, \dots, X_N$, $r \geq 1$, т. е. набор таких векторных полей, значения которых в каждой точке $g \in O$ образуют базис касательного пространства $T_g O$. Разделим векторные поля X_i, $i = 1, \dots, N$, на M непересекающихся наборов $L_{i+1} = \{X_{l_i+1}, \dots, X_{l_{i+1}}\}$, $l_i = \mathrm{const}$, $i = 0, \dots, M-1$, $l_0 = 0$. Каждому набору L_i сопоставим некоторое положительное число $\alpha_i \geq 1$; при этом полагаем, что $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ $\forall i$. Введем в рассмотрение следующую функцию $d_\alpha(v, u) = \max\limits_{j=1,\dots,N} \bigl\{ |x_j|^{1/\omega_j} \mid v = \exp(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i X_i)(u) \bigr\}$, где $\omega_j = \alpha_i$ в случае, если $X_j \in L_i$. Пусть $r + 1 \geq \frac{\alpha_M}{\alpha_1}$. Тогда справедлива следующая

Теорема 1. *Если функция d_α является квазиметрикой [1] в области O, то векторные поля удовлетворяют в области O следующей таблице коммутаторов* $[X_k, X_l] = \sum\limits_{\alpha_j \leq \alpha_k + \alpha_l} C^j_{kl} X_j, \quad C^j_{kl} \in C^{r-1}(O)$.

В некоторой области $O \subset \mathbb{R}^3$ рассмотрим векторные поля $X = (1, 0, f(x, y))$, $Y = (0, 1, g(x, y))$, $T = (0, 0, 1)$, где f, $g \in Lip(O)$ с константой Липшица L, и пусть $d(v, u) = \max\bigl\{|a|, |b|, |c|^{1/2} \mid v = \exp(aX + bY + cT)(u)\bigr\}$ $u, v \in O$. Параметризованную абсолютно непрерывную кривую $\gamma(s) \subset O$ назовем *горизонтальной*, если $\dot\gamma(s) = (\alpha_s X + \beta_s Y)(\gamma(s))$ для п. в. s.

Теорема 2. *Найдется область $\widetilde{O} \subset O$ такая, что d является квазиметрикой на $\widetilde{O}$ с константой из обобщенного неравенства треугольника, равной $2L$.*

Рассмотрим квазипространство $(\widetilde{O}, d)$. Так как f, g всего лишь липшицевы, то гарантировать существование нильпотентного касательного конуса, см., например, [2], в произвольной точке $u = (u_1, u_2, u_3) \in (\widetilde{O}, d)$ невозможно. Пусть $M(s_0, u) = \frac{1}{s_0} \int\limits_0^{s_0} K(s, s_0, u)\, ds$, где

$$K(s, s_0, u) = \frac{g(u_1 + s_0, u_2 + s) - g(u_1, u_2 + s) - f(u_1 + s, u_2 + s_0) + f(u_1 + s, u_2)}{s_0}.$$

Теорема 3. *Пусть в некоторой точке $u \in \widetilde{O}$ выполняется $M(s_0, u) \neq 0$ для некоторого достаточно малого числа s_0. Тогда найдется окрестность O_u точки u такая, что любые две точки a, $b \in O_u$ можно соединить абсолютно непрерывной горизонтальной кривой.*

Замечание. Если же найдется положительная константа h такая, что $h < |M(s, v)|$ $\forall s \in (0, s_0]$ $\forall v \in O_u$, то для квазипространства $(\widetilde{O}, d)$ справедлив аналог известной теоремы Ball-Box.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stein E. I.* Harmonic analysis: Real-variables methods, ortogonality, and oscillatory integrals. Prineston: Prineston Univ. Press, 1993.
2. *Водопьянов С. К., Карманова М. Б.* Субриманова геометрия при минимальной гладкости векторных полей // Докл. АН. 2008. Т. 422, № 5. С. 583–588.

ПРИНЦИП ОГРАНИЧЕННОСТИ ДЛЯ РЕШЕТОЧНО НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

BOUNDEDNESS PRINCIPLE FOR LATTICE-NORMED SPACES

Гутман А. Е.[1], **Лисовская С. А.**[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
gutman@math.nsc.ru

[2] *Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;*
lisovskaya_sveta@ngs.ru

В работе рассматриваются три классических факта теории нормированных пространств: принцип ограниченности, теорема Банаха — Штейнгауза и принцип ограниченности на выпуклом компакте. С помощью методов булевозначного анализа [1] доказываются сформулированные ниже точные аналоги этих принципов для случая решеточно нормированных пространств [2] над расширенным пространством Канторовича E.

Для E-нормированных пространств X и Y символом $\mathcal{L}(X,Y)$ обозначается множество всех линейных операторов $T : X \to Y$ таких, что $(\exists\, c \in E^+)\,(\forall\, x \in X)$ $\lvert Tx\rvert \leqslant c\,\lvert x\rvert$. При этом $\lvert T\rvert := \inf\{c \in E^+ : (\forall\, x \in X)\ \lvert Tx\rvert \leq c\,\lvert x\rvert\}$. Подмножество $U \subset X$ называется *всюду плотным*, если $\inf\{\lvert x-u\rvert : u \in U\} = 0$ для всех $x \in X$. Подмножество $K \subset X$ называется mix-*компактным*, если K mix-полно и для любой последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ существует элемент $x \in K$ такой, что $\inf\limits_{n\geqslant k} \lvert x_n - x\rvert = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Пусть X и Y — E-нормированные пространства, причем X является полным, и пусть $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Если множество $\{\lvert Tx\rvert : T \in \mathcal{T}\}$ порядково ограничено для каждого элемента $x \in X$, то множество $\{\lvert T\rvert : T \in \mathcal{T}\}$ порядково ограничено.*

Теорема 2. *Пусть X и Y — E-нормированные пространства, причем Y является полным. Пусть, кроме того, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$, U — всюду плотное подмножество X, для каждого элемента $u \in U$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} T_n u \in Y$ и имеется такой элемент $c \in E^+$, что $\lvert T_n\rvert \leqslant c$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует такой оператор $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, что $\lvert T\rvert \leqslant c$ и $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx$ для всех $x \in X$.*

Теорема 3. *Пусть X и Y — E-нормированные пространства, $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ и пусть K — выпуклое* mix*-компактное подмножество пространства X. Если множество $\{\lvert Tx\rvert : T \in \mathcal{T}\}$ порядково ограничено для каждого элемента $x \in K$, то множество $\{\lvert Tx\rvert : T \in \mathcal{T},\ x \in K\}$ порядково ограничено.*

Теоремы 1–3, полученные методом «спуска», усиливают и обобщают аналогичные результаты [3], установленные для случая пространств Банаха — Канторовича над решеткой измеримых функций. (Доказательства, приведенные в [3], основаны на специфической технике теории измеримых банаховых расслоений с лифтингом и не задействуют методы булевозначного анализа.)

Работа выполнена при поддержке Фонда содействия отечественной науке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ. М.: Наука, 2005.
2. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
3. *Ганиев И. Г., Кудайбергенов К. К.* Принцип равномерной ограниченности Банаха — Штейнгауза для операторов в пространствах Банаха — Канторовича над L^0 // Математические труды. 2006. Т. 9, № 1. С. 21–33.

ГЕОМЕТРИЯ ЛЕСНЫХ КАТАСТРОФ
GEOMETRY OF FOREST CATASTROPHES

Гуц А. К.[1], Володченкова Л. А.[2]

[1] *Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск, Россия;* aguts@mail.ru

[2] *Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск, Россия;* volodchenkova@cmm.univer.omsk.su

При решении самых различных научных проблем свою эффективность неоднократно демонстрировала геометрия. Обращение к геометрии дает возможность представить многие задачи в той или иной пространственной форме, что позволяет помимо чисто аналитических вычислительных методов привлекать синтетические наглядно геометрические методы.

Одной из важнейших современных научных проблем является задача описания экологических катастроф, которым подвержены лесные биоценозы.

В докладе предлагается модель лесной экосистемы, которая строится в предположении о наличии ярусно-мозаичной структуры леса (четыре или, если усложнить модель, — пять или шесть ярусов) с учетом влажности — внешний фактор w и принципа конкурентного исключения — внешний фактор l. Действенность фактора мозаичности определяется управляющим параметром u. Антропогенный фактор — это управляющий параметр v.

Показано, что динамика доброкачественности леса x описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} V(x, l, u, v, w),$$

где

$$V(x, l, u, v, w) = \frac{k_0}{n} x^n + lx^4 + ux^3 + vx^2 + wx \tag{1}$$

и $(n-2)$ — это число ярусов леса $(n-2 = 4, 5, 6)$.

Нетрудно видеть, что потенциальная функция (1) в точности отвечает элементарной катастрофе «бабочка» при $n = 6$, катастрофе «вигвам» $(n = 7)$ и, наконец, катастрофе «звезда» $(n = 8)$. При этом модель 4-ярусного леса структурно устойчива, а две другие не являются структурно устойчивыми.

Таким образом, экологические лесные катастрофы, вызываемые засухой, вымоканием леса, полными вырубками, разливом нефти, засолением почвы — это скачкообразные смены стационарных равновесных состояний леса, с которыми связаны бифуркационные многообразия в пространстве внешних управляющих параметров. Поскольку геометрия этих многообразий достаточно хорошо изучена, то экологические катастрофы интерпретируются как пересечения бифуркационных многообразий траекториями изменяющихся управляющих параметров (см. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Woodcock A., Poston T.* A geometrical study of the elementary catastrophes // Lectures Notes in Math. № 373. Springer, 1974. P. 1–257.

ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

TAYLOR'S FORMULA FOR DISCRETE ANALYTIC FUNCTIONS OF SEVERAL COMPLEX VARIABLES

Данилов О. А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
odanilov@ngs.ru

Целью настоящей работы является доказательство формулы Тейлора для дискретных аналитических функций многих комплексных переменных. Пусть $\mathbb{G}^+$ обозначает множество целочисленных точек положительного октанта гауссова пространства
$\mathbb{G}^+ = \{x + iy : x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n), x_j, y_j \in \mathbb{Z}^+, j = 1, \ldots, n\}$.
Обозначим $\mathcal{A}(\mathbb{C}^n)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ множества аналитических функций в $\mathbb{C}^n$ и множество дискретных аналитических функций в $\mathbb{G}^+$, соответственно. Следуя Д. Зайбергеру [3] определим систему псевдостепеней $\{\pi_k(z)\}$ в $\mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$.

Следующая теорема была доказана в [1].

Теорема. *Пусть* $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$. *Тогда существует* $F(\xi) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k \frac{\xi^k}{(1+i)^{|k|}} \in \mathcal{A}(\mathbb{C}^n)$ *такая что* $f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k \pi_k(z)$ *и ряд абсолютно сходится для всех* $z \in \mathbb{G}^+$. *В этом случае для всех* $z = x + iy \in \mathbb{G}^+$ *мы имеем*

$$f(z) = \sum_{s=-y}^{x} c(x, y, s) F(s),$$

где

$$c(x, y, s) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{[(1+i)\xi_j - i]^{x_j} [(1-i)\xi_j^{-1} + i]^{y_j}}{\xi_j^{s_j+1}} d\xi,$$

а Γ — *остов любого полидиска, содержащий внутри* 0. *Более того, для всех целых* $s \in \mathbb{Z}_+^n$, *справедливы равенства*

$$F(s) = (1 - i)^{-|s|} \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} (-i)^{|k|} f(k),$$

$$F(-s) = (1 + i)^{-|s|} \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} i^{|k|} f(ik).$$

В статье [2] теорема доказана для одномерного случая.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта APVV SK–RU–0007–07 и гранта АВЦП «Развитие научного потенциала Высшей школы» 2.1.1/3707.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Данилов О. А., Медных А. Д.* Дискретные аналитические функции многих переменных и формула Тейлора // Вестник НГУ. Сер.: Мат., мех., инф. 2009. Т. 9, вып. 2. С. 38–46.
2. *Медных А. Д.* Дискретные аналитические функции и ряд Тейлора // В кн.: Теория отображений, ее обобщения и приложения. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка. 1982. С. 137–144.
3. *Zeilberger D.* A New Basis for Discrete Analytic Polynomials // J. Austral. Math. Soc. 1977. V. 23 (Ser. A). P. 95–104.

ОБ ОДНОМ ОТОБРАЖЕНИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУР НА $SU(2) \times SU(2)$

ON ONE MAPPING IN THE SPACE OF LEFT-INVARIANT ALMOST COMPLEX STRUCTURES ON $SU(2) \times SU(2)$

Даурцева Н. А.

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия;
natali0112@ngs.ru

Пусть M — 6-мерное многообразие и $\psi \in \Lambda^3(M)$. В статье [2] описана следующая конструкция построения эндоморфизма K на M по дифференциальной 3-форме: $\psi \longrightarrow K \in \mathrm{End}(TM) \otimes \Lambda^6$, $K(X) = A(i_X\psi \wedge \psi)$. Здесь $A : \Lambda^5(M) \longrightarrow TM \otimes \Lambda^6$ — изоморфизм, определенный по формуле $\varphi = i_{A(\varphi)}Vol$, для 5-формы $\varphi \in \Lambda^5(M)$ и формы объема Vol на M. Известно, что $K^2 = Id \otimes \tau(\psi)$, где $\tau(\psi) = \frac{1}{6}\mathrm{tr}K^2$. Если выполняется условие $\tau(\psi) < 0$, то на M можно определить почти комплексную структуру $J = \frac{1}{\kappa}K$, где $\kappa = \sqrt{-\tau(\psi)}$.

Дополнительно, если на M задана дифференциальная 2-форма ω, и выполнены следующие условия:

1. $\omega \wedge \psi = 0$;
2. $\omega \wedge \omega \wedge \omega \neq 0$;
3. $\psi = \frac{1}{3}d\omega$;
4. $(X, Y) \mapsto g(X, Y) = \omega(X, JY) > 0$, X, Y — векторные поля на M;
5. $d\phi = -2\mu\omega \wedge \omega$, $\mu \in \mathbb{R}$, $i_{JX}\phi = i_X\psi$,

то структура (ω, g, J) является приблизительно келеровой.

В статье [1] на $SU(2) \times SU(2)$ использована данная конструкция и найдена единственная приблизительно келерова структура.

Пусть теперь B — левоинвариантная метрика, индуцированная формой Киллинга — Картана на $SU(2) \times SU(2)$, $\mathcal{AO}_B^+$ — множество всех левоинвариантных почти комплексных структур на $SU(2) \times SU(2)$ ортогональных относительно метрики B и определяющих фиксированную ориентацию. Тогда $\forall I \in \mathcal{AO}_B^+ \longrightarrow \omega_I(X, Y) = B(IX, Y)$, каждой 2-форме ω_I соответсвует свой оператор K_I: $\omega_I \longrightarrow d\omega_I \longrightarrow K_I$: $K_I(X) = A(i_X d\omega_I \wedge d\omega_I)$. В работе найдено условие, при котором оператор K_I определяет почти комплексную структуру J_I на $SU(2) \times SU(2)$. Найден явный вид таких почти комплексных структур в стандартном базисе алгебры Ли $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$, изучены их свойства. Найдена проекция структуры J_I на $\mathcal{AO}_B^+$, т. е. такая почти комплексная структура $I' \in \mathcal{AO}_B^+$, что J_I инвариантна относительно $\omega_{I'}$ и удовлетворяет условию $\omega_{I'}(X, J_I X) > 0$ для ненулевых $X \in \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$. Показано, что результатом повторного отображения: $I' \longrightarrow d\omega_{I'} \longrightarrow J_{I'}$ является приблизительно келерова структура.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Butruille J. B.* Homogeneous nearly Kähler manifolds. Preprint. 2006, p. 25. arXiv:math.DG/0612655v1; http:\\ xxx.lanl.gov.
2. *Hitchin N.* Stable forms and special metrics. Preprint. 2001, p. 31. arXiv:math.DG//0107101v1; http:\\xxx.lanl.gov.

О КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРАХ В R^n
ON QUASIELLIPTIC OPERATORS IN R^n

Демиденко Г. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
demidenk@math.nsc.ru

Работа посвящена теории матричных квазиэллиптических операторов

$$\mathcal{L}(D_x) = (l_{kj}(D_x))$$

во всем пространстве R^n. Рассматриваемый нами класс операторов входит в класс квазиэллиптических операторов, введенных Л. Р. Волевичем [1], и содержит, в частности, однородные эллиптические операторы, эллиптические и параболические операторы по Петровскому, эллиптические операторы по Дуглису – Ниренбергу и др. Для этих операторов мы устанавливаем теоремы об изоморфизме в специальных шкалах весовых соболевских пространств [2]:

$$\mathcal{L}(D_x): \ W^r_{p,\sigma}(R^n) \to W^s_{p,\sigma}(R^n).$$

Из этих результатов вытекает ряд известных теорем об изоморфизме для эллиптических операторов, а также ряд новых теорем об изоморфизме для эллиптических и параболических операторов в R^n [3–5]. Теоремы об изоморфизме имеют приложения в теории систем соболевского типа [6].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07–01-000289) и Сибирского отделения Российской академии наук (№ 85).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волевич Л. Р.* Локальные свойства решений квазиэллиптических систем // Матем. сб. 1962. Т. 59, № 3. С. 3–52.
2. *Демиденко Г. В.* О весовых соболевских пространствах и интегральных операторах, определяемых квазиэллиптическими уравнениями // Докл. АН. 1994. Т. 334, № 4. С. 420–423.
3. *Demidenko G. V.* Mapping properties of quasielliptic operators and applications // Int. J. Dynamical Systems and Differential Equations. 2007. Vol. 1, No. 1. P. 58–67.
4. *Демиденко Г. В.* Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1064–1076.
5. *Демиденко Г. В.* Квазиэллиптические операторы и уравнения соболевского типа. II // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50 (в печати).
6. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ

EMBEDDING THEOREMS FOR FUNCTIONAL SPACES AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF FUNCTIONS

Денисова Т. Е.

Московский городской психолого-педагогический университет, Москва, Россия;
tdenissova@mail.ru

Пусть функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ определена на цилиндрическом множестве $R^+ \times g$, где g — ограниченная область ($g \subset R^n$) с гладкой $(n-1)$-мерной границей.

Цель доклада — показать связь между порядком гладкости этой функции по выделенной переменной x_1, степенью роста нормы $\|\widehat{D^k_{x_1} f}(\gamma, x_2, \ldots, x_{n+1}), W_2^m(g)\|$ (здесь $\widehat{D^k_{x_1} f}(\gamma, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\gamma x_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1$ — преобразование Лапласа, рассматриваемое при $\gamma \in R$, $\gamma > 0$) и асимптотическим поведением функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ по переменной x_1 на бесконечности $+\infty$.

Существенную роль в установлении данной взаимосвязи играет поведение преобразования Лапласа $\widehat{D^k_{x_1} f}(\gamma, x_2, \ldots, x_{n+1})$ в правой полуокрестности нуля параметра γ.

Для решения поставленной задачи вводятся в рассмотрение функциональные пространства $V_1^{m,N}(R^+) = \{f \in C^N(R^+) \mid D^k f = O(x^{m-1} + 1)$ при $x \in R^+$ $\forall k \in \{0, 1, \ldots, N\}\}$, $\|f, V_1^{m,N}(R^+)\| = \sum\limits_{k=0}^{N} \int\limits_0^{+\infty} \frac{|D^k f(x)|}{x^{m+1}+1}\, dx$, $QV_1^{m,N}(R^+) = \{f \in V_1^{m,N}(R^+) \mid \exists \sup\limits_{(0,1]} \hat{f}(\gamma) \in R\}$, $\|f, QV_1^{m,N}(R^+)\| = \|f, V_1^{m,N}(R^+)\| + \sum\limits_{k=0}^{N} \sup\limits_{(0,1]} |\widehat{D^k f}(\gamma)|$, $W_1^{m,N}(R^+ \times g) = \{f \in C^N_{x_1}(R^+)\ \forall (x_2, \ldots, x_{n+1}) \in g \mid \forall k \in \{0, 1, \ldots, N\}\ D^k_{x_1} f \in W_2^m(g)\ \forall x_1 \in R^+$, $\widehat{D^k_{x_1} f} \in W_2^m(g)\ \forall \gamma \in R$, $\gamma > 0$ и $\|D^k_{x_1} f, W_2^m(g)\| = O(x_1^{m-1} + 1)$ при $x_1 \in R^+\}$, $QW_1^{m,N}(R^+ \times g) = \{f \in W_1^{m,N}(R^+ \times g) \mid \exists \sup\limits_{(0,1]} \|\hat{f}, W_2^m(g)\| \in R\}$, $\|f, QW_1^{m,N}(R^+ \times g)\| = \|f, W_1^{m,N}(R^+ \times g)\| + \sum\limits_{k=0}^{N} \sup\limits_{(0,1]} \|\widehat{D^k_{x_1} f}, W_2^m(g)\|$, для которых получен, в частности, следующий результат.

Если $m \le N$, то для любого мультииндекса $\rho = (\rho_2, \ldots, \rho_{n+1})$ такого, что $\sum\limits_{i=2}^{n+1} \rho_i < m - \frac{n}{2}$ выполнено вложение $D^{\rho_2, \ldots, \rho_{n+1}}_{x_2, \ldots, x_{n+1}} D^k_{x_1} W_1^{m,N}(R^+ \times g) \subset QV_1^{m,N-k}(R^+)$ при любом $(x_2, \ldots, x_{n+1}) \in g$ и при всех $k \in \{m, \ldots, N\}$.

Из этого утверждения следует, что если $f \in W_1^{m,N}(R^+ \times g)$ при $m \le N$, то функция $y = D^{\rho_2, \ldots, \rho_{n+1}}_{x_2, \ldots, x_{n+1}} D^m_{x_1} f$ в любой точке области g либо суммируемая, либо осциллирующая на полуоси R^+. Устанавливаются некоторые достаточные условия осцилляции функции, а также стабилизации функции к нулю в произвольной точке области g.

Обсуждается возможность применения этого результата для описания качественных свойств решений уравнений соболевского типа с ростом времени.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07–01–00289).

ОБЪЁМ КУБА ЛАМБЕРТА В СФЕРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

THE VOLUME OF THE LAMBERT CUBE IN THE SPHERICAL SPACE

Деревнин Д. А.[1], **Медных А. Д.**[2]

[1] *Тюменский государственный архитектурно-строительный университет;*
derevnin@mail.ru
[2] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;*
mednykh@math.nsc.ru

Вычисление объема многогранника — это классическая задача, известная со времен Евклида и не потерявшая актуальность в наши дни. Основные принципы вычисления объемов в неевклидовых геометриях были даны Лобачевским и Шлефли. В частности, они нашли объемы бипрямоугольных тетраэдров (ортосхем) в размерности три. Известно, что всякий многогранник может быть разложен на конечное число ортосхем. Это дает принципиальную возможность найти объем произвольного многогранника. Отметим, что для практического применения такой метод мало эффективен, поскольку разбиение на ортосхемы сама по себе — не простая задача.

Простейшим обобщением понятия ортосхемы является куб Ламберта $Q(\alpha,\beta,\gamma)$. Напомним, что $Q(\alpha,\beta,\gamma)$ – это комбинаторный куб с (существенными) двугранными углами α,β и γ при трех некомпланарных ребрах и с прямыми углами при всех остальных ребрах

Куб Ламберта $Q(\alpha,\beta,\gamma)$ может быть реализован в гиперболическом пространстве ([2, 1]) при $0<\alpha,\beta,\gamma<\frac{\pi}{2}$ и в сферическом пространстве [4] при $\frac{\pi}{2}<\alpha,\beta,\gamma<\pi$.

Объем гиперболического куба Ламберта был найден в [2] и [3] в терминах функции Лобачевского

$$\Lambda(x) = -\int\limits_0^x \log|2\sin t|\,dt.$$

В настоящей работе вычисляется объем сферического куба Ламберта. Он выражается в терминах функции $\delta\left(\alpha,\theta\right)$, которая служит сферическим аналогом функции

$$\Delta\left(\alpha,\theta\right) = \Lambda\left(\alpha+\theta\right) - \Lambda\left(\alpha-\theta\right).$$

Главным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Объем сферического куба Ламберта $Q(\alpha,\beta,\gamma)$ с существенными углами α,β и γ, $\frac{\pi}{2}<\alpha,\beta,\gamma<\pi$, находится по формуле*

$$V(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{4}\left(\delta\left(\alpha,\theta\right)+\delta\left(\beta,\theta\right)+\delta\left(\gamma,\theta\right)-2\delta\left(\frac{\pi}{2},\theta\right)-\delta\left(0,\theta\right)\right),$$

где

$$\delta\left(\alpha,\theta\right) = \int\limits_\theta^{\frac{\pi}{2}} \log\left(1-\cos 2\alpha\cos 2\tau\right)\frac{d\tau}{\cos 2\tau},$$

а θ, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, — *основной параметр, определяемый равенствами*

$$\tan^2\theta = -K + \sqrt{K^2 + A^2B^2C^2},$$
$$K = \frac{A^2 + B^2 + C^2 + 1}{2},$$
$$A = \tan\alpha,\ B = \tan\beta,\ C = \tan\gamma.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hilden H. M., Lozano M. T., Montesinos-Amilibia J. M.* On the Borromean orbifolds: geometry and arithmetic // In: Topology'90. Eds. Apanasov B., Newmann W., Reid A., Siebenmann L. Berlin: de Gruyter, 1992. P. 133–167.
2. *Kellerhals R.* On the volume of hyperbolic polyhedra // Math. Ann. 1989. V. 285. P. 541–569.
3. *Mednykh A.* On hyperbolic and spherical volumes for link cone-manifolds // In: Kleinian Groups and Hyperbolic 3-Manifolds. Proc. of the Warwick Workshop, September 2001. Lond. Math. Soc. Lec. Notes. V. 299. Eds. Komori Y., Markovic V., Series C. Cambridge Univ. Press, 2003. P. 145–163.
4. *Diaz R.* A characterization of Gram matrices of polytopes // Discrete Comput. Geom. 1999. V. 21. P. 581–601.

ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ПОЛУАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

THE TENSOR PRODUCT OF SEMIADDITIVE FUNCTIONALS

Джаббаров Г. Ф.

Ташкентский государственный педагогический университет им. Низамии, Ташкент, Узбекистан; rbeshimov@mail.ru

Настоящая работа посвящена изучению тензорного произведения полуаддитивных функционалов.

Пусть X — компакт. Через $C(X)$ обозначим множество всех непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}$ с обычными (поточечными) операциями и sup-нормой.

Определение [1]. Функционал $\nu : C(X) \to \mathbb{R}$ называется:

1) *слабо аддитивным*, если для всех $c \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C(X)$ выполняется равенство $\nu(\varphi + c_X) = \nu(\varphi) + c \cdot \nu(1_X)$;

2) *сохраняющим порядок*, если для функций $\varphi, \psi \in C(X)$ из $\varphi \le \psi$ вытекает $\nu(\varphi) \le \nu(\psi)$;

3) *нормированным*, если $\nu(1_X) = 1$.

4) *положительно-однородным*, если $\nu(t\varphi) = t\nu(\varphi)$, для всех $\varphi \in C(X)$, $t \in \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

5) *полуаддитивным*, если $\nu(f + g) \le \nu(f) + \nu(g)$ для всех $f, g \in C(X)$.

Для компакта X через $OS(X)$ обозначается множество всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных, положительно-однородных, полуаддитивных функционалов. Элементы множества $OS(X)$ для краткости назовем полуаддитивными функционалами. Это множество снабжается топологией поточечной сходимости. Базу окрестностей функционала $\nu \in OS(X)$ образует множества вида

$$\langle \nu; \varphi_1, \ldots, \varphi_k; \varepsilon \rangle = \{\nu' \in OS(X) : |\nu'(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon,\ i = \overline{1,k}\},$$

где $\varphi_i \in C(X)$, $i = \overline{1,k}$, $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$.

Пусть $P(X)$ — пространство всех положительных нормированных линейных функционалов на $C(X)$, A — непустое подмножество $P(X)$ и $f \in C(X)$. Тогда $|\mu(f)| \le \|f\|$ для любого $\mu \in A$, и поэтому множество $\{\mu(f) : \mu \in A\}$ ограничено сверху. Следовательно, для любого $f \in C(X)$ существует

$$\nu_A(f) = \sup\{\mu(f) : \mu \in A\}, \quad f \in C(X). \tag{1}$$

Теорема 1 [2]. *Для всякого $\nu \in OS(X)$ существует непустой выпуклый компакт A в $P(X)$ такой, что $\nu = \nu_A$, где ν_A — функционал вида (1), при этом для каждого $f \in C(X)$ существует $\mu \in A$ такой, что $\nu(f) = \mu(f)$.*

Теорема 2 [2]. *Если A и B — непустые выпуклые компакты в $P(X)$, то $\nu_A = \nu_B$ тогда и только тогда, когда $A = B$.*

Пусть X и Y — компакты. Возьмем $\mu = \mu_A \in OS(X)$, $\nu = \nu_B \in OS(Y)$, где $A = \partial(\mu) = \{\lambda \in P(X) : \lambda \le \mu\}$ и $B = \{\lambda' \in P(Y) : \lambda' \le \nu\}$. Положим $A \otimes B = \{\lambda_\alpha \otimes \lambda_\beta : \lambda_\alpha \in A, \lambda_\beta \in B\} \subset P(X \times Y)$ и $\mu_A \otimes_s \nu_B = \mu_{A \otimes B}$, т.е. $\mu_A \otimes_s \nu_B(f) = \sup\{(\lambda_\alpha \otimes \lambda_\beta)(f) : \lambda_\alpha \otimes \lambda_\beta \in A \otimes B\}, g \in C_+(X \times Y)$.

Функционал $\mu_A \otimes_s \nu_B$ назовем тензорным произведением полуаддитивных функционалов μ_A и ν_B.

Теорема 3. *Пусть $\mu_A \otimes_s \nu_B$ тензорное произведение полуаддитивных функционалов μ_A и ν_B. Тогда для $\varphi \in C_+(X), \psi \in C_+(Y)$ имеет место*

$$(\mu_A \otimes_s \nu_B)(\varphi \times \psi) = \mu_A(\varphi) \cdot \nu_B(\psi).$$

Пусть $p_X : X \times Y \to X$ и $p_Y : X \times Y \to Y$ проекции.

Теорема 4. *Имеет место следующая формула $OS(p_X)(\mu_A \otimes_s \nu_B) = \mu_A$ и $OS(p_Y)(\mu_A \otimes_s \nu_B) = \nu_B$.*

Замечание. Если $\mu_A \in P(X)$ и $\nu_A \in P(Y)$, то $A = \{\mu\}$ и $B = \{\nu\}$ одноточечные множества, и поэтому $\mu_A \otimes_s \nu_B = \mu \otimes \nu$. Это означает, что произведение $\mu_A \otimes_s \nu_B$ совпадает с тензорным произведением линейных функционалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шапиро Л. Б.* Об операторах продолжения функций и нормальных функторах // Вест. МГУ. Сер. матем.-мех. 1992. № 1. С. 35–42.
1. *Davletov D. E., Djabbarov G. F.* Functor of semiadditive functionals // Methods of Functional Analysis and Topology. 2008, V. 16, № 4. P. 317–324.

МЕТОД СИММЕТРИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ О КРИТИЧЕСКИХ ТОЧКАХ И КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЯХ ПОЛИНОМОВ

SYMMETRIZATION APPROACH TO THE PROBLEMS RELATED TO CRITICAL POINTS AND VALUES OF COMPLEX POLYNOMIALS

Дубинин В. Н.

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;
dubinin@iam.dvo.ru

Рассматриваются приложения симметризации и диссимметризации конденсаторов [1] в задачах о нулях, критических точках и критических значениях полиномов [2]. В часности, обсуждаются следующие утверждения для алгебраических полиномов, навеянные известной гипотезой Смейла о среднем значении [3].

Теорема 1. *Если $P(z) = z^n + \ldots + c_1 z$, то справедливо неравенство*

$$\min\{|P(\zeta)| : P'(\zeta) = 0\} \leqslant (n-1)|c_1/n|^{n(n-1)}.$$

Равенство достигается для полиномов вида $P(z) = z^n + c_1 z$, где c_1 - произвольное комплексное число.

Теорема 2. *Пусть $\zeta_\nu,\ \nu = 1, \ldots, n-1$, - критические точки полинома $P(z) = z^n + \ldots + c_1 z$, и пусть все нули этого полинома, отличные от $z = 0$, расположены на $n-1$ лучах, выходящих из точки $z = 0$ под равными углами величины $2\pi/(n-1)$ так, что каждый луч содержит один и только один нуль. Тогда*

$$\sqrt[n-1]{\prod_{\nu=1}^{n-1} \left|\frac{P(\zeta_\nu)}{c_1 \zeta_\nu}\right|} \geqslant \frac{n-1}{n}.$$

Равенство достигается для полиномов $P(z) = z^n + c_1 z,\ c_1 \neq 0$.

Напомним, что если все нули полинома из теоремы 2, отличные от $z = 0$, имеют одинаковый модуль, то справедливо противоположное неравенство [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00028) и Дальневосточного отделения Российской академии наук (проект № 09–I–П4–02).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубинин В. Н.* Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 1. С. 3–76.
2. *Дубинин В. Н.* Неравенства для критических значений полиномов // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 8. С. 63–72.
3. *Smale S.* The fundamental theorem of algebra and complexity theory // Bull. Amer. Math. Soc. 1981. V. 4, № 1. P. 1–36.
4. *Tischler D.* Critical points and values of complex polynomials // J. of Complexity. 1989. V. 5, № 4. P. 438–456.

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ЁМКОСТИ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ИНТЕРВАЛОВ

TWO-SIDED BOUNDS FOR THE LOGARITHMIC CAPACITY OF MULTIPLE INTERVALS

Дубинин В. Н.[1], **Карп Д. Б.**[2]

[1]*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;*
dubinin@iam.dvo.ru
[2]*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;*
dimkrp@gmail.com

Теория потенциала на дополнении конечного набора интервалов до комплексной сферы привлекает активное внимание специалистов как по теории функций, так и по прикладной математике (в частности, по анализу сигналов). В докладе мы касаемся одного аспекта этой теории: логарифмической емкости замкнутых подмножеств действительной оси. Мы приводим простые, но весьма точные верхние и нижние оценки для емкости конечного набора интервалов и нижнюю оценку справедливую также для множеств, состоящих из счетного набора интервалов. Мы обсуждаем известные методы точного вычисления емкости набора интервалов и демонстрируем результаты численного сравнения наших оценок с точными значениями емкости. Главными инструментами доказательств приводимых неравенств являются разделяющее преобразование и диссиметризация, введенные В. Н. Дубининым и версия последней, разработанная К. Халисте, плюс некоторые классические результаты о монотонности логарифмической емкости под действием симметризации и проектирования. Неравенства, представленные в докладе, представляют собой улучшение предыдущих результатов А. Ю. Солынина и К. Шифермайра.

Работа поддержана ДВО РАН (гранты 09–III–A–01–008 и 09–II–CO–01–003), РФФИ (грант 08–01–00028–a) и программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ–2810.2008.1).

ОБОБЩЁННЫЕ ЁМКОСТИ И МОДУЛИ ПОЛИКОНДЕНСАТОРОВ

GENERALIZED CAPACITIES AND MODULI OF POLYCONDENSERS

Дымченко Ю. В.[1], **Шлык В. А.**[2]

[1]*Дальневосточный государственный университет, Владивосток, Россия;*
dymch@mail.ru
[2]*Дальневосточный государственный университет, Владивосток, Россия;*
shlyknv@yandex.ru

Пусть $1 < p \leq \infty$ и $w(x)$ — вес Макенхаупта класса A_p в R^n, $n \geq 2$; $A(x)$ — положительно определённая симметрическая $(n \times n)$-матрица с измеримыми по Лебегу компонентами $a_{ij}(x)$ на открытом множестве $G \subset R^n$. такая, что

$$c_0^{-2} w(x)^{2/p} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq c_0^2 w(x)^{2/p} |\xi|^2$$

для любого $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$ и $x \in G$, $c_0 \geq 1$.

Аналогично [1] задаётся понятие поликонденсатора в G с пластинами на $\bar{G}$. С помощью матрицы $A(x)$ и методов работы [2] вводятся обобщённые ёмкости и модули поликонденсатора, устанавливаются между ними соотношения. В частности, из них следуют классические результаты о связи ёмкости конденсатора с модулем семейства кривых, соединяющих пластины конденсатора, и с модулем семейства поверхностей, отделяющих пластины конденсатора в G.

Отмечается, что устранимые множества для весовых соболевских пространств $L^1_{p,w}(G)$, $FD^{p,w}(G)$ не влияют на соответствующие ёмкости и модули поликонденсатора.

Применяя построения из [3], данные результаты можно распространить на поликонденсаторы на группах Карно.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00028), ведущих научных школ РФ (грант НШ-2810.2008.1) и ДВО РАН (грант № 09-СО-01-009).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асеев В. В., Султанов Б Ю.* Модули поликонденсаторов и изоморфизмы пространств следов непрерывных функций класса W_n^1 // Препринт АН СССР, Сибирское отделение. Институт математики, № 31. Новосибирск, 1989. 22 с.
2. *Aikawa H, Ohtsuka M.* Extremal length of vector measures // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1999. V. 24. P. 61–88.
3. *Markina I.* p-module of vector measures in domains with intrinsic metric on Carnot groups // Tonoku Math. J. 2004. V. 56, № 4. P. 553–570.

СЛАБАЯ ЗАМКНУТОСТЬ КЛАССА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО НЕРАВЕНСТВА С КВАЗИВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИЕЙ И НУЛЬ-ЛАГРАНЖИАНОМ

WEAK CLOSEDNESS OF THE CLASS OF SOLUTIONS OF A DIFFERENTIAL INEQUALITY WITH A QUASICONVEX FUNCTION AND A NULL LAGRANGIAN

Егоров А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
yegorov@math.nsc.ru

Пусть $k, m, n \in \mathbb{N}$, $2 \le k \le \min\{m, n\}$. Пусть V — область в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим класс решений $v \in W^{1,k}_{\mathrm{loc}}(V; \mathbb{R}^m)$ дифференциального неравенства

$$F(v'(x)) \le K(x) G(v'(x)) \quad \text{п.в. в } V. \tag{1}$$

Здесь $F : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ — квазивыпуклая функция, $G : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ — нуль-лагранжиан, $K : V \to [1, +\infty)$ — конечно измеримая функция. Предположим, что $0 \le F(\zeta) \le C|\zeta|^k$, $G(t\zeta) = t^k G(\zeta)$, $\sup\{K \ge 0 : F(\zeta) \ge KG(\zeta),\ \zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}\} = 1$. Доказано, что если последовательность $(v_l \in W^{1,k}_{\mathrm{loc}}(V; \mathbb{R}^m))_{l\in\mathbb{N}}$ решений неравенства (1) слабо сходится в пространстве $W^{1,k}_{\mathrm{loc}}(V; \mathbb{R}^m)$ к отображению $v_0 \in W^{1,k}_{\mathrm{loc}}(V; \mathbb{R}^m)$, то предельное отображение v_0 также является решением неравенства (1). Это обобщает результат Ф. Геринга и Т. Иванца [1] (см. также работу Б. Яна [2]) о пределе слабо сходящейся последовательности отображений с конечным искажением, который, в свою очередь, является аналогом теоремы Ю. Г. Решетняка [3] о замкнутости относительно слабой сходимости класса отображений с ограниченным искажением.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 08–01–00531–а) и Совета по грантам Президента РФ для поддержки научных школ (НШ–5682.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gehring F., Iwaniec T.* The limit of mappings with finite distortion // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 1999. V. 24. P. 253–264.
2. *Yan B.* On the weak limit of mappings with finite distortion // Proc. Am. Math. Soc. 2000. V. 128. P. 3335–3340.
3. *Решетняк Ю. Г.* Отображения с ограниченным искажением как экстремали интегралов типа Дирихле // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 3. С. 652–666.

ОБ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ АППРОКСИМАЦИОННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ON ONE VARIATIONAL PROBLEM OF THE APPROXIMATION MODELING OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Егоршин А. О.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
egorshin@math.nsc.ru

Рассматриваются некоторые вопросы решения и исследования следующей задачи приближения в $L_2 = L_2(I_T)$ $(I_T = [0,T])$: минимизировать

$$\mathbf{J_z} = \|\mathbf{z} - \mathbf{\hat{z}}\|^2 \quad \text{при} \quad \hat{z} \in M_\mathbf{a} \quad (M_\mathbf{a} = \ker D_\mathbf{a},\ D_\mathbf{a} = \textstyle\sum_0^n \mathbf{a_i} p^i,\ p = d/dt). \tag{1}$$

Здесь и далее $\|\cdots\|$ — норма в L_2, $\mathbf{z}$ и $\mathbf{\hat{z}}$ — соответственно заданная и аппроксимирующая функции. Ясно, что $\dim M_\mathbf{a} = n$, $D_\mathbf{a} : C_{L_2}^{(n)}/M_\mathbf{a} \to C_{L_2}$ — линейный дифференциальный оператор. Вектор коэффициентов $\mathbf{a}$ оператора $D_\mathbf{a}$ может принадлежать либо сфере, либо почти (т.ч. $\mathbf{a_n} \neq 0$) произвольной гиперплоскости $\dim = n$, не проходящей через ноль в R^{n+1}. Коэффициенты оператора $D_\mathbf{a}$ предполагаются постоянными и могут быть неизвестными. В этом случае они, как и координаты функции $\mathbf{\hat{z}}$ в $M_\mathbf{a}$ (или, что эквивалентно, начальные условия решения $\mathbf{\hat{z}}$ дифференциального уравнения $D_\mathbf{a}\mathbf{\hat{z}} = 0$), подлежат оптимизации по критерию J.

Таким образом, речь идет об аппроксимации заданной функции из L_2 в конечном интервале переходным процессом линейного дифференциального уравнения с постоянными, возможно неизвестными коэффициентами и начальными условиями. В частности, это задача аппроксимации функции суммой экспонент как с действительными, так и с комплексными взаимно сопряженными показателями и действительными коэффициентами. Изучаемую задачу можно также рассматривать, как задачу синтеза дифференциального уравнения данного вида по заданному его решению в конечном интервале. К рассматриваемому типу задач относятся прикладные задачи математического моделирования и идентификации, обнаружения, распознавания, диагностики и другие разнообразные задачи анализа, синтеза и аппроксимации сложных динамических процессов.

Нетрудно видеть, что задача (1) есть обобщение класической задачи аппроксимации функции полиномом порядка $n-1$. В этом случае $D_\mathbf{a} = p^n$.

Поиск $\mathbf{a}$ существляется минимизацией длины перпендикуляра ρ от $\mathbf{z}$ до $M_\mathbf{a}$. Предлагаются рекуррентные алгоритмы встречной ортогонализации для вычисления проекций, а также специальная итерационная поцедура минимизации ρ, быстро сходящаяся и для больших начальных уклонений $\mathbf{a}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (проект № 85).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоршин А. О.* Идентификация стационарных моделей в унитарном пространстве // Автоматика и телемеханика. 2004. Т. 65, № 12. С. 29–48.
2. *Егоршин А. О.* Об одном способе оценки коэффициентов моделирующих уравнений для последовательностей // Сиб. журн. индустр. мат. 2000. Т. III. № 2(6). С. 78–96.
3. *Egorshin(Yegorshin) A. O.* On One Variational Problem of the Mathematical Modeling and Parametrical Identification // Proc. of the IASTED Intern. Conf. «Automation, Control, and Information Technology (ACIT–2002)», June, 10–13, 2002. Novosibirsk, Russia. Anaheim, Calgary, Zurich: ACTA Press, 2002. P. 267–272.

ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ (2+1)-МЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ШРЁДИНГЕРА

PARTIAL SOLUTIONS TO A (2+1)-DIMENSIONAL NONLINEAR SCHRÖDINGER-TYPE EQUATION

Есмаханова К. Р.

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан; myrzakul@rambler.ru

Рассматривается $(2+1)$-мерное нелинейное уравнение типа Шрёдингера следующего вида:

$$iq_t + M_1 q + vq = 0, \quad ip_t - M_1 p - vp = 0, \quad M_2 v = -2M_1(pq), \tag{1}$$

где p, q и v являются произвольными комплексными функциями. Здесь $M_1 = 4(a^2-2ab-b)\partial^2_{xx}+4\alpha(b-a)\partial^2_{xy}+\alpha^2\partial^2_{yy}$, $\quad M_2 = 4a(a+1)\partial^2_{xx}-2\alpha(2a+1)\partial^2_{xy}+\alpha^2\partial^2_{yy}$, где a, b — действительные постоянные и α — комплексная постояннная. Решение системы (1) ищем для граничных условий: $q \to 0, \quad p \to 0, \quad v \to 0, \quad$ при $x, y \to \pm\infty$. Для построения решений необходимо рассматривать матричную $\bar{\partial}$-проблему вида

$$\frac{\partial W(\lambda,\bar{\lambda})}{\partial\bar{\lambda}} = \iint\limits_G W(\mu,\bar{\mu})R(\mu,\bar{\mu};\lambda,\bar{\lambda})d\mu\wedge d\bar{\mu} + W^{'}(\lambda,\bar{\lambda}), \tag{2}$$

где W, W' и R являются матричными функциями, определенными на ограниченной области G. Интегральное матричное уравнение, соответствующее уравнению (2), имеет вид:

$$W(\lambda,\bar{\lambda}) = V(\lambda,\bar{\lambda}) + \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_G \frac{d\lambda'\wedge d\bar{\lambda}'}{\lambda'-\lambda}\iint\limits_G W(\mu,\bar{\mu})R(\mu,\bar{\mu};\lambda',\bar{\lambda}')d\mu\wedge d\bar{\mu}, \tag{3}$$

где символ $\wedge$ означает внешнее произведение и $W' = \frac{\partial V}{\partial\bar{\lambda}}$. Наша задача построить матричные функции W и R, удовлетворяющие (3). Рассмотрим (3) в классах $V(\lambda,\bar{\lambda}) \in L_q(G), \quad q \geq \frac{p}{p-1}, \quad p > 2, \quad R(\mu,\bar{\mu};\lambda^{'},\bar{\lambda}^{'}) \in L_p(G), \quad p > 2$ по μ, $\bar{\mu}$ и $L_1(G)$ по λ , $\bar{\lambda}$ $\ 1 \leq q < 2, \quad W \in L_q(G), \qquad q \geq \frac{p}{p-1} \Rightarrow \quad 1 \leq q < 2$. Связь между уравнением (1) и интегральным уравненем (3) задается формулами $q = -2i(W_{-1})_{12}, \quad p = 2i(W_{-1})_{21}, \quad v = i(C_2 - C_1), \quad C_1 = i(W_{-1})_{11}, \quad C_2 = i(W_{-1})_{22}$.

Конкретный вид решения уравнения (1) зависит от выбора ядра R, что позволяет находить различные частные решения, в том числе солитонного типа [2–3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блиев Н. К., Есмаханова К. Р.* Метод-проблемы для $(2+1)$-мерного нелинейного уравнения Шрёдингера // Известия МОН РК. Сер. физ.-матем. 2007. № 5. С. 43–48.
2. *Есмаханова К. Р.* Солитонные решения (2+1)-мерных нелинейных уравнений типа Шрёдингера // Автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. 2008. С. 18.

ДВОЙСТВЕННОСТЬ ДЛЯ НЕКОММУТАТИВНЫХ L^p-ПРОСТРАНСТВ, АССОЦИИРОВАННЫХ СО СЛЕДОМ МАГАРАМ

DUALITY OF NON-COMMUTATIVE L^p-SPACES ASSOCIATED WITH MAHARAM TRACE

Закиров Б. С. [1], **Чилин В. И.** [2]

[1] *Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, Ташкент, Узбекистан;* botirzakirov@list.ru

[2] *Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;* chilin@ucd.uz

Пусть M — произвольная алгебра фон Неймана, $S(M)$ — $*$-алгебра всех измеримых операторов, присоединенных к M, $t(M)$ – топология сходимости локально по мере в $S(M)$. Рассмотрим на M точный нормальный след Φ со значениями в $S(\mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ — коммутативная алгебра фон Неймана. Говорят, что Φ есть след Магарам, если для любых $0 \le x \in M,\ 0 \le b \le \Phi(x),\ b \in S(\mathcal{B})$, существует такое $0 \le y \in M$, что $y \le x$ и $\Phi(y) = b$.

В этом случае, существует подалгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ в центре алгебры M, $*$-изоморфная алгебре фон Неймана $\mathcal{B}$. Оператор $x \in S(M)$ назовем $\mathcal{A}$-ограниченным, если $|x| \le a$ для некоторого $a \in S(\mathcal{A})$. Множество $L^\infty(M,\Phi)$ всех $\mathcal{A}$-ограниченных операторов из $S(M)$ является заполненной $*$-подалгеброй в $S(M)$ и $\|x\|_{\infty,\Phi} = \inf\{a : |x| \le a,\ a \in S(\mathcal{A})\}$ наделяет $L^\infty(M,\Phi)$ структурой пространства Банаха-Канторовича.

Оператор $x \in S(M)$ называется Φ-интегрируемым, если найдется такая последовательность $\{x_n\} \subset M$, что $x_n \xrightarrow{t(M)} x$ и $\Phi(|x_n - x_m|) \xrightarrow{t(\mathcal{B})} 0$; в этом случае, существует такой элемент $\widehat{\Phi}(x) \in S(\mathcal{B})$, что $\Phi(x_n) \xrightarrow{t(\mathcal{B})} \widehat{\Phi}(x)$.

Пусть $L^1(M,\Phi)$ — множество всех Φ-интегрируемых операторов из $S(M)$ и $\|x\|_{1,\Phi} = \widehat{\Phi}(|x|),\ x \in L^1(M,\Phi)$. Для $p > 1$ положим $L^p(M,\Phi) = \{x \in S(M) : |x|^p \in L^1(M,\Phi)\}$ и $\|x\|_{p,\Phi} = (\widehat{\Phi}(|x|^p))^{\frac{1}{p}},\ x \in L^p(M,\Phi)$. Пара $(L^p(M,\Phi), \|\cdot\|_{p,\Phi})$ является пространством Банаха — Канторовича для всех $p \ge 1$.

Линейное отображение $T : L^p(M,\Phi) \to S(\mathcal{B})$ называется $S(\mathcal{B})$-ограниченным, если $\|T\| = \sup\{|Tx| : \|x\|_{p,\Phi} \le \mathbf{1}\} \in S(\mathcal{B})$, где $\mathbf{1}$ — единица алгебры $\mathcal{B}$.

Теорема. *Пусть* $p \ge 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Тогда*

(i) $xy \in L^1(M,\Phi)$ *для всех* $x \in L^p(M,\Phi),\ y \in L^q(M,\Phi)$, *при этом, линейный оператор* $T_y(x) = \widehat{\Phi}(xy)$ *является* $S(\mathcal{B})$*-ограниченным и* $\|T_y\| = \|y\|_{q,\Phi}$;

(ii) *для каждого линейного* $S(\mathcal{B})$*-ограниченного отображения* $T : L^p(M,\Phi) \to S(\mathcal{B})$ *существует единственное* $y \in L^q(M,\Phi)$, *такое, что* $T = T_y$.

О ДИСКАХ, ВЛОЖЕННЫХ В ВЫПУКЛЫЕ ПОВЕРХНОСТИ
DISKS IMBEDDED IN CONVEX SURFACES

Ионин В. К.

Российский государственный университет, Москва, Россия; vkionin@mail.ru

Диском в n-мерном ($n \geq 3$) евклидовом пространстве будем называть замкнутый k-мерный ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$) шар. Радиус этого шара называется радиусом соответствующего диска, а число k — его размерностью. Одномерный диск — прямолинейный отрезок, а двумерный диск — плоский круг. Будем говорить, что диск вложен в замкнутую поверхность, если он принадлежит области, ограниченной этой поверхностью.

Зафиксируем $(n-1)$-мерную дважды непрерывно дифференцируемую замкнутую выпуклую поверхность S так, чтобы в каждой ее точке все главные нормальные кривизны были положительными числами. Для каждой гладкой замкнутой поверхности Φ гауссово отображение $\gamma : \Phi \to S$ определяется следующим образом: если $p \in \Phi$, то единичный нормальный вектор к Φ в точке p равен единичному нормальному вектору к S в точке $\gamma(p)$. Если Φ — замкнутая строго выпуклая поверхность, то γ — биективное отображение. Обозначим S' множество всех дважды непрерывно дифференцируемых замкнутых поверхностей Φ, удовлетворяющих условию: гауссова кривизна Φ в каждой точке $p \in \Phi$ не меньше гауссовой кривизны S в точке $\gamma(p)$. Ясно, что Φ — строго выпуклая поверхность.

Множество k-мерных дисков называется ограниченным сверху, если множество всех их радиусов есть ограниченное сверху числовое множество.

Следующее предложение дополняет результаты статьи [1].

Предложение. *Для того чтобы множество всех k-мерных дисков, вложенных в поверхности множества S' было ограниченным сверху, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*: $2k \geq n - 1$.

В случае, когда $n = 3$ и S — сфера радиуса A, это предложение следует из теоремы Бонне [2], утверждающей, что диаметр замкнутой выпуклой поверхности меньше πA, если в каждой её точке гауссова кривизна не меньше A^{-1}.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ионин В. К.* О диаметрах выпуклых поверхностей с ограниченной снизу гауссовой кривизной // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 1. С. 93–101.
2. *Бляшке В.* Круг и шар. М.: Наука, 1967.

3-МНОГООБРАЗИЯ, ПОЛУЧАЕМЫЕ СКЛЕЙКОЙ ГРАНЕЙ ДВУХ КУБОВ

3-MANIFLIDS OBTAINED BY GLUING FACES OF TWO CUBES

Казаков А. А.

ГОУ ВПО Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия;
Alex_8_5@mail.ru

В 2008 году Д. Амендола показал, что любое многообразие может быть представлено в виде склейки граней кубов и ввел новую сложность — кубическую сложность.

Определение. Кубическая сложность многообразия равна k, если его можно представить склейкой граней k кубов, и нельзя представить склейкой меньшего числа кубов.

В своих работах Д. Амендола нашел все многообразия, кубической сложности 1. Цель данной работы — составление полного перечня замкнутых ориентируемых многообразий, кубическая сложность которых равна 2.

Оказалось, что всего таких многообразий 95: 17 линзовых пространств, 36 многообразий Зейферта, 11 граф-многообразий, 4 гиперболических и 27 приводимых многообразий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матвеев С. В.* Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий. М.: МЦНМО, 2007.

ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ГЁЛЬДЕРОВЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ВНУТРЕННИХ МЕТРИК ОТОБРАЖЕНИЙ ОБЛАСТЕЙ

BOUNDARY BEHAVIOR OF MAPPINGS OF DOMAINS THAT ARE HÖLDER WITH RESPECT TO THE INNER METRICS

Кармазин А. П.[1], **Мухутдинова Д. Р.**[2]

[1] *Сургутский государственный университет, Сургут, Россия;*
`kap@kpm.surgu.ru`
[2] *Сургутский государственный университет, Сургут, Россия;*
`manilin@mail.ru`

Пусть $\{D\}$ есть семейство всех гомеоморфных шару областей евклидова пространства R^n, $n \geq 2$; $\lambda_D(x, y)$ — некоторая внутренняя метрика области $D \in \{D\}$. Гомеоморфизм $f : D \to G$ областей $D, G \in \{D\}$ назовем *λ-бигельдеровым с показателем* $\alpha \in (0, 1]$, если существует константа $K \in [1, \infty)$ такая, что для любых точек $x, y \in D$ справедливо неравенство:

$$\frac{1}{K}\lambda_D^{1/\alpha}(x, y) \leq \lambda_G(f(x), f(y)) \leq K\lambda_D^{\alpha}(x, y)$$

При $\alpha = 1$ гомеоморфизм f называется *λ-квазиизометрией* областей D, G.

В работе устанавливается, что граничные элементы различных видов, построенные в теории λ-предконцов областей из $\{D\}$ (см. [1]) и инвариантные при λ-квазиизометриях, остаются инвариантными и при λ-бигёльдеровых гомеоморфизмах с показателем $\alpha < 1$.

Пусть $D \in \{D\}$; $[D]_0$ — множество простых λ-концов D; $V_0[D]$ — множество простых λ-предконцов D; $\Phi[D]$ — множество граничных элементов D, полученных при факторизации λ-предконцов по их общему цоколю, $\Phi_0[D]$ — множество минимальных элементов $\Phi[D]$; $M[D]$ — множество молекул D, ее граничных элементов, построенных с помощью полных брусков, специальных элементов $\Phi[D]$ (см. [1]).

Теорема. *Пусть $f : D \to G$ есть λ-бигельдеровый с показателем $\alpha \in (0, 1]$ гомеоморфизм областей $D, G \in \{D\}$. Тогда f продолжается до гомеоморфизмов пополнений $D \cup [D]_0$, $D \cup V_0[D]$, $D \cup \Phi_0[D]$, $D \cup M[D]$ области D на соответствующие пополнения области G.*

Кроме того, в силу результатов теории λ-предконцов из [1], *любая область $D \in \{D\}$ секвенциально предкомпактна в пространстве $D \cup \Phi_0[D]$, а пополнение $D \cup M[D]$ еще и хаусдорфово.*

Отметим, что некоторые свойства областей из $\{D\}$, инвариантные при λ-квазиизометриях, не сохраняются при λ-бигельдеровых с показателем $\alpha < 1$ гомеоморфизмах. Например, если за $\lambda_D(x, y)$ взять метрику Римана $\rho_D(x, y)$ или метрику Мазуркевича $\delta_D(x, y)$, то, в отличие от случаев ρ- или δ-квазиизометрий, спрямляемые кривые из области D при ρ- или δ-бигельдеровом гомеоморфизме $f : D \to G$ с показателем $\alpha < 1$ могут перейти в неспрямляемые кривые области G; или при отображении f нулевой внутренний угол на границе D может перейти в ненулевой угол на границе области G. Однако многие свойства элементов $[D]_0$, $V_0[D]$, $\Phi_0[D]$ и $M[D]$, инвариантные при λ-квазиизометриях областей из $\{D\}$, сохраняются и при λ-бигёльдеровых гомеоморфизмах с показателем $\alpha < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кармазин А. П.* Квазиизометрии, теория предконцов и метрические структуры пространственных областей. Применения теории предконцов. Сургут: Изд-во СурГУ, 2008.

УСИЛЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КОБАЯСИ О МЁБИУСОВЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

A STRENGTHENING Of KOBAYASHI'S THEOREM ON MOEBIUS TRANSFORMATIONS

Кергилова Т. А.

Горно-алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия;
kergyl@gmail.com

В работе [1] было доказано, что любая аналитическая однолистная функция в области $D \subset \mathbb{C}$ является мебиусовым преобразованием тогда и только тогда, когда образ любой аполлониевой четверки точек в D также является аполлониевой.

В 2007 г. Кобаяси [2], используя ангармоническое отношение четверки точек, получил следующий признак мебиусовости отображения:

Теорема 1 (Кобаяси, 2007). *Пусть $\lambda \in \mathbb{C}\backslash R$. Пусть $f : U \to \mathbb{C}$–непрерывное инъективное отображение класса C^1 области U комплексной плоскости такое, что для любой четверки точек $\{z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4\} \in U$ с ангармоническим отношением*

$$[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)} = \lambda$$

выполняется

$$[f(z_1) : f(z_2) : f(z_3) : f(z_4)] = \frac{(f(z_1) - f(z_3))(f(z_2) - f(z_4))}{(f(z_3) - f(z_2))(f(z_4) - f(z_1))} = \lambda.$$

Тогда f-мебиусово преобразование.

Мы показываем, что теорема Кобаяси остается верной при любом $\lambda \notin \{0,\ 1,\ \infty\}$ без требования гладкости и инъективности f. При этом, если $\lambda \notin \mathbb{R}$, то f либо константа, либо дробно-линейное преобразование.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Haruki H., Rassias T. M.* A new characteristic of Moebius transformations by use of Appolonius points of triangle // J. Math. Anal. Appl. 1996. V. 197. P. 14–22.
2. *Kobayashi O.* Apollonius points and anharmonic ratios // Tokyo J. Math. 2007. V. 30. P. 117–119.

ДИНАМИКА ИСКРИВЛЕННЫХ ВИХРЕЙ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ПОЛЯ

DYNAMICS OF CURVED VORTICES IN NONRELATIVISTIC FIELD THEORETICAL MODELS

Кожевников А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
kozhev@math.nsc.ru

Рассматривается динамика вихрей в модели теории поля с действием

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x \left\{ \frac{\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2}{4\pi} - g(|\psi|^2 - n_0)^2 + 2\psi^*(i\partial_t + a_0)\psi - |(i\nabla + \mathbf{A} - \mathbf{a})\,\psi|^2 \right\}.$$

$\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$, $\mathbf{H} = \nabla\times\mathbf{A}$, $a_\mu \equiv (a_0, \mathbf{a}) = -\partial_\mu\chi_s$. Вихри заданы линиями $\mathbf{X}_a \equiv \mathbf{X}_a(\sigma_a, t)$ сингулярной фазы χ_s скалярного поля $\psi = \sqrt{n_0}e^{i\chi_s}$,

$$\nabla\times\nabla\chi_s = 2\pi\sum_a \int d\sigma_a \mathbf{X}'_a \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{X}_a).$$

Из соотношения $\delta\int d^4x a_0 = -2\pi\int dt d\sigma \delta\mathbf{X}[\dot{\mathbf{X}}\times\mathbf{X}']$ и равенства нулю первой вариационной производной действия вихря с энергией на единицу длины ε_{v}

$$\delta S_0 = \delta\left[-\frac{1}{8\lambda^2}\int dt d\sigma_1 d\sigma_2 \frac{\mathbf{X}'_1\mathbf{X}'_2}{|\mathbf{X}_{12}|}e^{-|\mathbf{X}_{12}|/\lambda} + n_0\int d^4x a_0\right] = 0$$

следует уравнение движения $\dot{\mathbf{X}}\times\mathbf{X}' = \gamma\mathbf{X}''$ ($\lambda^{-2} = 4\pi n_0$, $\gamma = \varepsilon_{\mathrm{v}}/2\pi n_0$). Отсюда и из уравнений Френе — Серре находятся производные по времени как от тройки $(\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{X}')$ соответственно векторов нормали, бинормали и касательного вектора в терминах кривизны κ и кручения τ,

$$\dot{\mathbf{n}} = \gamma\left[\kappa\tau\mathbf{X}' + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - \tau^2\right)\mathbf{b}\right], \dot{\mathbf{b}} = -\gamma\left[\kappa'\mathbf{X}' + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - \tau^2\right)\mathbf{n}\right], \dot{\mathbf{X}}' = \gamma(\kappa'\mathbf{b} - \kappa\tau\mathbf{n}),$$

так и производные по времени от кривизны и кручения: $\dot{\kappa} = -\gamma(2\kappa'\tau + \kappa\tau')$, $\dot{\tau} = \gamma\left[\kappa\kappa' + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - \tau^2\right)'\right]$. Магнитная спиральность (инвариант Хопфа) [1,2] выражается через райзинг Wr и коэффициент зацепления Lk контуров [3]:

$$h_A = \int d^3x\mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{A} = (2\pi)^2\left(\sum_a \mathrm{Wr}[a] + 2\sum_{a<b}\mathrm{Lk}[a,b]\right).$$

Вариация райзинга $\delta\mathrm{Wr} = (2\pi)^{-1}\int d\sigma\delta\mathbf{X}\cdot[\mathbf{X}'\times\mathbf{X}''']$ позволяет найти производную по времени от спиральности: $\dot{h}_A = 2\pi\sum_a\int d\sigma_a\dot{\mathbf{X}}_a[\mathbf{X}'_a\times\mathbf{X}'''_a]$. Показано, что (1) $\dot{\mathrm{Wr}} = 0$, $\dot{\mathrm{Tw}} = 0$, $\dot{h}_A = 0$ на уравнениях движения вихря и (2) имеется топологическое препятствие к выбору поперечной калибровки вихря: локально $\dot{\mathbf{X}}\mathbf{X}' = 0$, но $\int d\sigma\dot{\mathbf{X}}\mathbf{X}' = 2\pi\mathrm{Wr} = 2\pi(\mathrm{Sl} - \mathrm{Tw})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arnold V. I., Khesin B. A.* Topological Methods in Hydrodynamics. New York: Springer, 1998.
2. *Berger M., Field G. B.* The topological properties of magnetic helicity // J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 133.
3. *Kozhevnikov A. A.* Relation between helicity, linking, and writhing numbers of the closed Nielsen–Olesen strings // Physical Review D. 1995. V. 52. P. 6043.

КОНИЧЕСКИЕ РАССЛОЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

POSITEVELY CURVED FIBRIFOLDS

Колпаков А. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
kolpakov.alexander@gmail.com

Следуя работе [1], будем называть коническое многообразие расслоенным, если его пространство-носитель является расслоением Зейферта. При этом компоненты сингулярного множества являются неособыми либо особыми слоями. Отметим, что одно из условий теоремы жесткости [2] в случае конических многообразий со сферической структурой требует, чтобы соответствующее коническое многообразие не было расслоенным.

Обозначим $\mathcal{H}_n$ зацепление, состоящее из $n > 2$ слоев расслоения Хопфа. Каждые две компоненты такого зацепления образуют зацепление Хопфа. Через $\mathcal{H}_n(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ обозначим коническое многообразие с носителем трехмерная сфера $\mathbb{S}_3$ и сингулярным множеством зацепление $\mathcal{H}_n$ и коническими углами α_i, $i = 1, \ldots, n$ вокруг его компонент.

Теорема. *Если коническое многообразие $\mathcal{H}_n(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ с $n > 2$ сингулярными компонентами имеет сферическую структуру, то длины всех его сингулярных компонент равны между собой и выражаются формулой:*

$$\ell_n = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j - \pi(n-2).$$

Объем конического многообразия $\mathcal{H}_n(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $n > 2$, равен

$$\operatorname{Vol} \mathcal{H}_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j - \pi(n-2)\right)^2.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 09–01–00255) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (2.1.1/3707).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Porti J.* Regenerating hyperbolic and spherical cone structures from Euclidean ones // Topology. 1998. V. 37, № 2. P. 365–392.
2. *Weiss H.* Global rigidity of 3-dimensional cone-manifolds // J. Diff. Geom. 2007. V. 76, № 3. P. 495–523.

РЕШЕНИЯ-УТКИ В СИНГУЛЯРНЫХ ПЛОСКИХ СИСТЕМАХ

CANARDS IN SINGULAR PLANAR SYSTEMS

Кононенко Л. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия;
volok@math.nsc.ru

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y, \varepsilon), \\ \varepsilon\dot{y} &= g(x, y, \varepsilon), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$, ε — малый положительный параметр, f, g — достаточно гладкие функции, $\dot{x}$, $\dot{y}$ — производные по времени.

При качественном анализе сингулярно возмущенной системы (1) наибольший интерес вызывают возникновение релаксационных колебаний и наличие решений-уток [1, 2].

Теорема. *Пусть выполняются следующие условия*:

1) a) *функция* $g(x, y, \varepsilon) = (\varphi_1(x) - y)(\varphi_2(x) - y)(\varphi_3(x) - y)$; *где* $y = \varphi_i(x)$ — *листы медленной поверхности системы* (1), $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi_i \in C^\infty(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, 3$;

b) $\varphi_3(x) \le \varphi_2(x) \le \varphi_1(x)$, $x \in [a, b]$;

c) $\frac{\partial g}{\partial y}(a, \varphi_2(a), 0) = \frac{\partial g}{\partial y}(a, \varphi_3(a), 0) = 0$, $\frac{\partial g}{\partial y}(b, \varphi_1(b), 0) = \frac{\partial g}{\partial y}(b, \varphi_2(b), 0) = 0$; $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \neq 0$;

d) $-(\varphi_2 - \varphi_1)(\varphi_3 - \varphi_1) < 0$, $-(\varphi_3 - \varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_2) > 0$, $-(\varphi_1 - \varphi_3)(\varphi_2 - \varphi_3) < 0$, *где* $\varphi_1 = \varphi_1(x)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x)$, $\varphi_3 = \varphi_3(x)$, $x \in [a, b]$, *где* a, b — *абсциссы точек срыва*;

2) *существует семейство уток* u_ε *в системе* (1);

3) *на неустойчивом листе медленного многообразия, описываемом уравнением* $y = \varphi(x, \varepsilon)$, *нет положений равновесия*;

4) $\lim_{\varepsilon \to \varepsilon_1} T_{AB}(\varepsilon) = 0$, *где* $T_{AB}(\varepsilon) = \int_{AB} \frac{dx}{f(x,y)} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{f(x,\varphi(x,\varepsilon))}$, x_1, x_2 — *абсциссы точек* A, B, *причем* B — *точка срыва*.

Тогда в системе (1) *существует релаксационное колебание* r_{ε_1}; *при этом* $u_\varepsilon(t) \to r_{\varepsilon_1}(t)$ *при* $\varepsilon \to \varepsilon_1$ *равномерно по* t, $t_0 \le t \le T$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_1 < \varepsilon_0 \ll 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный интеграционный проект № 107) и Российского фонда фундаментальных исследований (№ 09–01–00070–а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Звонкин А. К., Шубин М. А.* Нестандартный анализ и сингулярные возмущения // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39, № 2(236). С. 77–127.
2. *Кононенко Л. И.* Релаксационные колебания и решения-утки в сингулярных системах на плоскости // Сиб. журн. индустр. мат. 2009. Т. XII, № 2(38). С. 58–64.

АККУРАТНО ПОКРЫВАЕМЫЕ СХОДЯЩИЕСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

NEATLY COVERABLE CONVERGENT SEQUENCES

Коптев А. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
koptev@math.nsc.ru

Пусть Q — регулярное топологическое пространство и пусть последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Q$ сходится к точке $q \in Q$. Назовем (q_n) *аккуратно покрываемой*, если каждому $k \in \mathbb{N}$ можно сопоставить замкнутую окрестность U_k точки q_k так, чтобы $U_i \cap \operatorname{cl} \bigcup\limits_{n\neq i} U_n = \varnothing$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и

$$\Big(\operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{q\},$$

где cl — оператор замыкания. Как несложно видеть из определения, такая последовательность (q_n) является *правильной*, т. е. $q_i \neq q_j$ при $i \neq j$ и $q_n \neq q$ для всех n.

Понятие аккуратно покрываемой последовательности естественным образом возникает в теории банаховых расслоений при построении некоторых отображений с наперед заданными значениями в точках q_n (например, в [1]), и автору известны случаи, когда аккуратная покрываемость последовательности (q_n) существенна для наличия таких отображений.

Для банахова пространства X символами B_X и X' обозначаются его замкнутый единичный шар и сопряженное банахово пространство соответственно. Предполагается, что X' и $B_{X'}$ наделены $*$-слабой топологией.

Если банахово пространство X сепарабельно, то в X' и в $B_{X'}$, как в подпространстве X', правильные сходящиеся последовательности аккуратно покрываемы. Если же X не является сепарабельным, то в X' нет аккуратно покрываемых последовательностей, а про $B_{X'}$ можно сказать следующее.

Теорема 1. *Пусть X — несепарабельное банахово пространство. Если последовательность $(f_n) \subset B_{X'}$ аккуратно покрываема, то $\|f_n\| \to 1$ при $n \to \infty$.*

Теорема 2. *Предположим, что X — равномерно гладкое*[2] *банахово пространство. Тогда для аккуратной покрываемости правильной последовательности $(f_n) \subset B_{X'}$ достаточно, чтобы $\|f_n\| \to 1$ при $n \to \infty$.*

Теорема 3. *Существует ненулевое банахово пространство X такое, что шар $B_{X'}$ не содержит ни одной аккуратно покрываемой последовательности.*

Имеются также аналоги этих утверждений для случая слабой топологии в X. Доказательство теоремы 2 опирается на тот факт, что сопряженное к равномерно гладкому пространству является равномерно выпуклым (см., например, [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гутман А. Е., Коптев А. В.* Сопряженное банахово расслоение // Нестандартный анализ и векторные решетки. Изд. 2-е. Под ред. С. С. Кутателадзе. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005. С. 125–201.
2. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств: Избранные главы. Киев: Вища школа, 1980.

[2] Определение см., например, в [2]. Таковыми, в частности, являются гильбертовы пространства и функциональные пространства класса L_p при $1 < p < \infty$.

ОДНОЗНАЧНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ОБЛАСТЕЙ И МОДУЛИ СЕМЕЙСТВ КРИВЫХ

UNIQUE DETERMINATION OF DOMAINS AND THE MODULI OF FAMILIES OF CURVES

Копылов А. П.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
kopylov@math.nsc.ru

Излагаются результаты, полученные в последние годы при исследовании проблем однозначной определенности областей в евклидовых пространствах.

О МНОГООБРАЗИЯХ РОДА 2
GENUS-TWO MANIFOLDS

Кораблёв Ф. Г.

ГОУ ВПО Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия;
korablev@csu.ru

В этой работе мы выделяем три серии граф-многообразий рода 2, характеризующиеся схожестью структуры их разбиений Хегора. Оказывается, что множество всех рассматриваемых многообразий покрывает множество всех полностью ориентируемых граф-многообразий рода 2 и содержит еще одну бесконечную серию. Рассматриваемые серии описываются следующими тремя теоремами.

Теорема 1. *Любое граф-многообразие, допускающее разбиение Хегора рода 2, при котором поверхность разбиения в каждой JSJ-ячейке изотопна послойной поверхности, имеет один из двух видов*:

1. *Многообразие вида* $(D^2;(p_1,q_1),(p_2,q_2)) \cup_\varphi (D^2;(p_3,q_3),(p_4,q_4))$, $p_i > 1$.
2. *Многообразие вида* $(A^2;(p_1,q_1),(p_2,q_2))/_\varphi$. $p_i > 1$.

Здесь $\varphi\colon T^2 \to T^2$ *гомеоморфизм тора, заданный в естественных на краях многообразий Зейферта системах координат матрицей* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Теорема 2. *Если граф-многообразие рода 2 содержит в качестве JSJ-ячейки многообразие Зейферта вида* $(A^2;(p,1))$, $p \geqslant 1$, *то это граф-многообразие имеет один из трех видов*:

1. *Многообразие вида* $(A^2;(p,1))/_{\psi_b}$.
2. *Многообразие вида*

   $(D^2;(p_1,q_1),(p_2,q_2)) \cup_\varphi (A^2;(p,1)) \cup_\varphi (D^2;(p_3,q_3),(p_4,q_4))$, $p_i > 1$.
3. *Многообразие вида* $(A^2;(p,1)) \cup_{\varphi,\varphi} (A^2;(p_1,q_1),(p_2,q_2))$, $p_i > 1$.

Здесь $\psi_b\colon T^2 \to T^2$ — *гомеоморфизм тора, заданный матрицей* $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, где $b \in \mathbb{Z}$.

Теорема 3. *Если граф-многообразие рода 2 содержит в качестве JSJ-ячейки многообразие Зейферта вида* $(D^2;(2,q),(2k{+}1,k))$, $k \geqslant 1$, *то это граф-многообразие имеет один из трех видов*:

1. *Многообразие вида* $(D^2;(2,q_1),(2,q_2)) \cup_{\psi_b} (D^2;(2,q),(2k+1,k))$.
2. *Многообразие вида* $(D^2;(p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3)) \cup_\varphi (D^2;(2,q),(2k+1,k))$, $p_i{>}1$.
3. *Многообразие вида* $(M^2;(p_1,q_1),(p_2,q_2)) \cup_\varphi (D^2;(2,q),(2k+1,k))$, $p_i \geqslant 1$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 08–01–00162).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Boileau M., Zieschang H.* Heegaard genus of closed orientable Seifert 3-manifolds // Inventiones mathematicae. 1984. V. 76. P. 455–468.
2. *Schultens J.* Heegaard splittings of graph manifolds // Geometry and Topology. 2004. V. 8. P. 831–876.
3. *Moriah Y., Schultens J.* Irreducible Heegaard splittings of Seifert fibered spaces are either vertical or horizontal // Topology. 1998. V. 37, № 5. P. 1089–112.

ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК И АДИАБАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЕЛЫ

LATTICE POINTS DISTRIBUTION PROBLEMS AND ADIABATIC LIMITS

Кордюков Ю. А.[1], **Яковлев А. А.**[2]

[1] *Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия;* yurikor@matem.anrb.ru

[2] *Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия;* yakovlevandrey@yandex.ru

Для фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим линейное преобразование $T_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, определяемое в базисе

$$\vec{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \right), \quad \vec{f} = \left(-\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \right).$$

на плоскости $\mathbb{R}^2$, формулами

$$T_\varepsilon \vec{e} = \vec{e}, \quad T_\varepsilon \vec{f} = \varepsilon^{-1} \vec{f}.$$

Для любого открытого множества $S \subset \mathbb{R}^2$ и для любого $\varepsilon > 0$ обозначим через $n_\varepsilon(S)$ число всех точек решетки $\mathbb{Z}^2$, принадлежащих множеству $T_\varepsilon(S)$.

Теорема. *Для любого ограниченного открытого множества $S \subset \mathbb{R}^2$ имеют место следующие формулы*:

1. *Для $\alpha \notin \mathbb{Q}$*:

$$n_\varepsilon(S) = \varepsilon^{-1} \mathrm{area}(S) + o(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon \to 0,$$

где $\mathrm{area}(S)$ *обозначает площадь множества S.*

2. *Для $\alpha \in \mathbb{Q}$ вида $\alpha = \frac{p}{q}$, где p и q взаимно просты*:

$$n_\varepsilon(S) = \varepsilon^{-1} \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |S \cap \ell_k| + o(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon \to 0,$$

где ℓ_k обозначает прямую на плоскости, определяемую уравнением $qx+py-k=0$ и $|S \cap \ell_k|$ обозначает длину множества $S \cap \ell_k$.

Доказательство теоремы использует сведение данной задачи к исследованию асимптотического поведения спектра дифференциальных операторов на двумерном торе $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ в адиабатическом пределе, ассоциированном с линейным слоением F_α. (Слоение F_α на $\mathbb{T}^2$ определяется параллельными прямыми на плоскости с угловым коэффициентом α.)

Аналогичное утверждение справедливо для любого открытого множества в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 09–01–00389).

ГЕОМЕТРИЯ 1-ФОРМ НА ГРУППАХ ЛИ
GEOMETRY OF 1-FORMS ON LIE GROUPS

Корнев Е. С.

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия; q148@mail.ru

Пусть G — связная группа Ли размерности n, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, а α — левоинвариантная 1-форма на G. Ядро формы α является левоинвариантным распределением на группе G и имеет размерность $n-1$.

Радикалом 1-формы α называется подпространство $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ такое, что для всех $X \in \mathfrak{r}$ и $Y \in \mathfrak{g}, d\alpha(X,Y) = 0$. Из этого определения и тождества Якоби следует, что радикал 1-формы является подалгеброй в $\mathfrak{g}$.

Теорема 1. *Если α незамкнутая 1-форма на группе G размерности n, а m — размерность ее радикала $\mathfrak{r}$, тогда: если n четно, то m также четно и $0 \leq m \leq n-2$, а если n нечетно, то m также нечетно и $1 \leq m \leq n-2$.*

Если $m = 0$, то $d\alpha$ — симплектическая форма, если $m = 1$, то α — контактная форма.

Обозначим через R связную подгруппу порожденную радикалом $\mathfrak{r}$. Эта подгруппа называется подгруппой радикала.

Теорема 2. *Подгруппа радикала R 1-формы α совпадает с подгруппой изотропии формы α. т. е. $\mathrm{Ad}_R\alpha = \alpha$.*

Обозначим через D фиксированное дополнение радикала $\mathfrak{r}$ в $\mathfrak{g}$. Тогда D является левоинвариантным распределением на группе G, и $\mathfrak{g} = D \oplus \mathfrak{r}$.

Пусть β — левоинвариантная симметричная неотрицательная 2-форма на группе G такая, что для всех $X \in D$ и $Y \in \mathfrak{g}, \beta(X,Y) = 0$, а ограничение формы β на радикал $\mathfrak{r}$ невырождено. Тогда сужение формы β на R задает левоинвариантную риманову метрику на подгруппе R. Форма β называется метрикой радикала.

Теорема 3. *Если форма β является Ad_R-инвариантной, то распределение D инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы R.*

Теорема 4. *Если подгруппа радикала R — компактная унимодулярная подгруппа в G, то распределение D инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы R.*

Следствие. Если подгруппа R является максимальным тором в группе G, то распределение D инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы R.

Если считать, что подгруппа R действует на группе G справа, то можно рассматривать расслоение $P(G/R, \pi, G)$ со слоем R, где π –естественная проекция группы G на G/R.

Теорема 5. *Пусть R — подгруппа радикала 1-формы α на группе G, β — левоинвариантная метрика радикала и подгруппа R является максимальным тором в G. Тогда*

(1) *распределение D является связностью в расслоении P;*

(2) *если $e_1, \ldots, e_m$ — ортонормированный базис радикала $\mathfrak{r}$, то форма связности D имеет вид*

$$\omega(X) = \sum_{i=1}^{m} \beta(X, e_i)\, e_i;$$

(3) *связность D является плоской (т. е. ее форма кривизны равна нулю) тогда и только тогда, когда распределение D инволютивно.*

Замечание. Теорема 5 остается справедливой и в том случае, когда R — некомпактная коммутативная подгруппа в G.

Теорема 6. *Пусть G — связная односвязная группа Ли и R подгруппа радикала левоинвариантной 1-формы α на G. Тогда, если R — нормальная подгруппа в G, то $G \cong G/R \rtimes R$ и расслоение $P(G/R, \pi, G)$ тривиально.*

СВОЙСТВА ОДНОЙ 6-МЕРНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ ЛИ

PROPERTIES OF ONE 6-DIMENSIONAL NILPOTENT LIE GROUP

Коровин Е. Н.

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия;
ezhen84@yandex.ru

В работе [1] найдены левоинвариантные симплектические структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли. В данной работе работе рассматривается группа $G_{6,14}$ классификационного списка [1]. Ее алгебра Ли $A_{6,13}$ задается следующими ненулевыми скобками Ли: $[X_1, X_2] = X_4, [X_1, X_4] = X_6, [X_1, X_3] = X_5$. На группе $G_{6,14}$ существует три различных симплектических структуры $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Они задаются 2-формами: $\omega_1 = \alpha_1 \wedge \alpha_6 + \alpha_2 \wedge \alpha_4 + \alpha_3 \wedge \alpha_5$, $\omega_2 = \alpha_1 \wedge \alpha_6 - \alpha_2 \wedge \alpha_4 + \alpha_5 \wedge \alpha_4$, $\omega_3 = \alpha_1 \wedge \alpha_6 + \alpha_2 \wedge \alpha_5 + \alpha_3 \wedge \alpha_4$.

В работе [2] найдены левоинвариантные комплексные структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли. В данной работе работе рассматривается комплексные структуры на группа $G_{6,14}$, ассоциированные с симплектическими структурами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Почти комплексная структура J на симплектическом многообразии (M, ω) называется ассоциированной с ω, если $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$, для любых векторных полей X, Y на M. В этом случае 2-форма $g_J(X, Y) = \omega(X, JY)$ является симметричной и, поэтому, определяет псевдориманову метрику на M. В этом случае метрика будет почти эрмитовой, т. е. будет выполняться условие $g(JX, JY) = g(X, Y)$. Если J — интегрируемая почти комплексная структура, то тройка (g_J, J, ω) определяет (псевдо)келерову структуру на M.

В данной работе показано, что левоинвариантные ассоциированные комплексные структуры на группе $G_{6,14}$ существуют только для симплектической структуры ω_3 и образуют 8-параметрическое семейство. Для данного случая найдены ассоциированные комплексные структуры и псевдо-римановы метрики. Все они имеют сигнатуру $\{-, -, +, +, +, +\}$. Кроме того вычислены тензоры кривизны и Риччи для ассоциированных (псевдо)келеровых структур на $G_{6,13}$. Тензор кривизны является нулевым, его псевдориманова норма равна нулю при любых значениях параметров. Тензор Риччи является нулевым при любых значениях параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khakimdjanov Yu., Goze M., Medina A.* Symplectic or Contact Structures on Lie Groups. Preprint. 2002. arXiv.org/math.DG/0205290.
2. *Magnin L.* Complex Structures on Indecomposable 6-dimensional Nilpotent Real Lie Algebras. Preprint. 2006. u-bourgogne.fr/monge/l.magnin.

СИГНАТУРА КРИВИЗНЫ РИЧЧИ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ РИМАНОВЫХ МЕТРИК НА ГРУППАХ ЛИ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

THE SIGNATURE OF THE RICCI CURVATURE OF LEFT-INVARIANT RIEMANNIAN METRICS ON LOW-DIMENSIONAL LIE GROUPS

Кремлёв А. Г.

Рубцовский индустриальный институт (филиал) ГОУ ВПО Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова, Рубцовск, Россия; kremant@mail.ru

Хорошо известно, что различные ограничения на кривизну риманова многообразия позволяют получить информацию о его геометрическом и топологическом строении. Ярким примером этого является теорема Майерса, утверждающая, что полное риманово многообразие с положительной кривизной Риччи является компактным и имеет конечную фундаментальную группу.

Для однородных римановых многообразий кривизна Риччи еще более информативна. Например, согласно теореме Бохнера однородное риманово многообразие отрицательной кривизны Риччи обязано быть некомпактным. Для заданного однородного пространства G/H (где H — компактная подгруппа группы Ли G) естественно попытаться отыскать общие свойства оператора Риччи для всевозможных G-инвариантных римановых метрик на пространстве G/H. Эту проблему можно уточнить и конкретизировать разными способами. Один из возможных вариантов — рассмотреть следующий вопрос: каковы возможные сигнатуры операторов Риччи G-инвариантных римановых метрик на однородном пространстве G/H? Благодаря работе Дж. Милнора мы знаем ответ на этот вопрос в размерности не больше 3. Работы М. Патрангенару, Л. Берара-Бержери и С. Исихары дают ответ на поставленный вопрос для всех четырехмерных однородных пространств, отличных от групп Ли.

Данная работа посвящена изучению возможных сигнатур оператора Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли и пятимерных нильпотентных группах Ли.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по ведущим научным школам Российской Федерации (грант НШ–5682.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г.* Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды. 2008. Т. 11. № 2. С. 115–147.
2. *Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г.* Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. 2009. Т. 12. № 1. С. 40–116.
3. *Milnor J.* Curvature of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. 1976. V. 21. P. 293–329.

ОБ УСЛОВИЯХ ГОЛОМОРФНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ С ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ

ON CONDITIONS OF HOLOMORPHIC CONTINUATION OF FUNCTIONS FROM THE BOUNDARY OF A DOMAIN

Кузоватов В. И.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;
kuzovatov@yandex.ru

Данная работа посвящена результату, связанному с голоморфным продолжением функций, заданных на границе многомерной ограниченной области, в данную область. Речь идет о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль семейств комплексных прямых. В работе показано, что семейство комплексных прямых, пересекающих росток комплексной гиперповерхности, является достаточным для голоморфного продолжения. Доказательство основано на использовании интегрального представления Бохнера — Мартинелли и его анализе.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛЕЖАНДРА КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА

LEGENDRE TRANSFORMATION OF A FINITE SET

Куркина М. В.[1], Пономарёв И. В.[2]

[1] *Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия;*
mavi@inbox.ru

[2] *Алтайская государственная педагогическая академия, Барнаул, Россия;*
igorpon@mail.ru

Преобразование Лежандра применяется в самых различных разделах чистой и прикладной математики: выпуклый анализ, механика, вариационное исчисление, геометрия, уравнения математической физики. В данной работе определяется и исследуется обобщенное преобразование Лежандра для произвольного конечного подмножества евклидова пространства (в частности плоскости).

Пусть $M = \{A_i\,(x_i, y_i) : i = 1, \ldots, N\}$ — конечное множество точек на плоскости, пару функций

$$f^+\,(p) = \max\{x_i p - y_i : i = 1, \ldots, N\}, \quad f^-\,(p) = \min\{x_i p - y_i : i = 1, \ldots, N\},$$

назовем преобразованием Лежандра множества M. В случае когда M вершины выпуклого многоугольника на плоскости пара функций $\{f^+, f^-\}$ однозначно определяет множество M. Фиксируем число $0 < \alpha < 1$. Пусть $p = [\alpha N]$ — целая часть числа αN, и $\{c_i\}_{i=1}^N$ — конечное числовое семейство. Обозначим через

$$\mathtt{MAX}_\alpha\left[\{c_i\}_{i=1}^N\right] = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} c_{i_k}, \quad \mathtt{MIN}_\alpha\left[\{c_i\}_{i=1}^N\right] = \frac{1}{p}\sum_{k=N-p+1}^{N} c_{i_k},$$

где $\{c_{i_k}\}_{k=1}^N$ перестановка последовательности $\{c_i\}_{i=1}^N$ в порядке убывания

$$c_{i_1} \geq c_{i_2} \geq \ldots \geq c_{i_p} \geq \ldots \geq c_{i_N}.$$

Назовем обобщенным преобразованием Лежандра множества M пару функций:

$$f_\alpha^+\,(p) = \mathtt{MAX}_\alpha\,\{x_i p - y_i : i = 1, \ldots, N\}, \quad f_\alpha^-\,(p) = \mathtt{MIN}_\alpha\,\{x_i p - y_i : i = 1, \ldots, N\}.$$

Данное понятие используется в некоторых задачах, связанных с динамическим программированием и линейной регрессии [1–2].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 08–01–98001–р_сибирь_а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Славская М. В.* Многомерная линейная модель распределения ресурсов с ограничениями // Вестник БГПУ. 2001. Т. 1. С. 41–44.
2. *Пономарев И. В.* Геометрический подход к модели нечеткой регрессии // Вестник БГПУ. 2008. Т. 8. С. 79–81.

ОПЕРАТОРЫ КОНЕЧНОГО РАНГА КАК ФИНИТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

FINITE-RANK OPERATORS AS FINITE ELEMENTS

Кусраева З. А.[1], **Плиев М. А.**[2]

[1] *Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Россия;* kusraev@smath.ru

[2] *Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН и РСО-А, Владикавказ, Россия;* plimarat@yandex.ru

Теория решеточно нормированных пространств (РНП), разработанная А. Г. Кусраевым и учениками [1], позволяет рассматривать многие проблемы с единых концептуальных позиций. В частности понятие финитного элемента, изученное в серии работ [2–6] легко может быть расширено до более широкого контекста, что приводит к появлению новых примеров и расширению аналитической интуиции. Перейдем к точныи определениям.

Рассмотрим некоторое РНП (V, E). Элемент $\varphi \in V$ называется *финитным*, если существует такой элемент $z \in E_+$, что для любого $x \in V$ существует $\lambda_x \in \mathbb{R}_+$, что справедливо следующее неравенство

$$|\!|x|\!| \wedge n\, |\!|\varphi|\!| \leq \lambda_x z \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Множество финитных элементов (V, E) обозначается через $\Phi_1(V, E)$ или просто $\Phi_1(V)$.

Пусть E и F— векторные решетки. Говорят, что оператор $T : F \to W$ *ортогонально аддитивен*, если $T(f_1 + f_2) = Tf_1 + Tf_2$ для дизъюнктных f_1 и f_2. Ортогонально аддитивный оператор T называется *порядково ограниченным*, если он переводит порядково ограниченные множества в порядково ограниченные множества. Порядково ограниченный, ортогонально аддитивный оператор $T : E \to F$ называется *абстрактным оператором Урысона*. Множество всех абстрактных операторов Урысона из E в F обозначается $\mathcal{U}(E, F)$.

Теорема. *Пусть E и F — банаховы решетки, F порядкова полна и оператор $T \in \mathcal{U}(E, F)$ имеет вид $T = \psi \otimes g$ где $\psi \in \mathcal{U}(E, \mathbb{R})$, $g \in F$. Тогда если $T \in \Phi_1(\mathcal{U}(E, F))$, то $\psi \in \Phi_1(\mathcal{U}(E, \mathbb{R}))$ и $g \in \Phi_1(F)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
2. *Chen Z. L., Weber M. R.* On finite elements in vector lattices and Banach lattices // Math. Nachr. 2006. Vol. 279, № 5/6. P. 495–501.
3. *Chen Z. L., Weber M. R.* On finite elements in sublattices Banach lattices // Math. Nachr. 2007. Vol. 280, № 5/6. P. 485–494.
4. *Chen Z. L., Weber M. R.* On finite elements in lattices regular operators // Positivity. 2007. Vol. 11. P. 563–574.
5. *Hahn N., Hahn S., Weber M. R.* On some vector lattices of operators and their finite elements // Positivity. 2008. Vol. 12. P. 485–494.
6. *Weber M. R.* On finite and totally finite elements in vector lattices // Analysis Mathematica. 1995. Vol. 21. P. 237–244.

ГЕОМЕТРИЯ ЕВКЛИДА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

GEOMETRY OF EUCLID AND FUNCTIONAL EQUATIONS

Кыров В. А.

Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск, Россия;
kfizika@gasu.ru

На многообразии M, $\dim M = m$, гладкая *метрическая функция* $f : S_f \to R$, где $S_f \subset M \times M$ — открытая область определения, задает *феноменологически симметричную геометрию*, если выполняются аксиомы [3]:

А. Для любых $m+1$ точек $i, i_1, \dots, i_m \in M$, таких что $\langle ii_1 \rangle, \dots, \langle ii_m \rangle \in S_f$, $\langle i_1 i \rangle, \dots, \langle i_m i \rangle \in S_f$:

$$\frac{\partial(f(ii_1), \dots, f(ii_m))}{\partial\big(x_i^1, \dots, x_i^m\big)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f(i_1 i), \dots, f(i_m i))}{\partial\big(x_i^1, \dots, x_i^m\big)} \neq 0,$$

где $\big(x_i^1, \dots, x_i^m\big)$ — координаты точки $i \in M$.

Б. Существует группа движений, т.е. преобразований $\lambda : M \to M$, для которых выполняется равенство $f(\lambda(i), \lambda(j)) = f(ij)$, причем $\langle ij \rangle \in S_f$ и $\langle \lambda(i)\lambda(j) \rangle \in S_f$.

Множество всех движений образует группу Ли. Размерность группы движений m-мерной феноменологически симметричной геометрии равна $m(m+1)/2$. Двухточечным инвариантом такой группы является метрическая функция, по которому она восстанавливается [1].

Феноменологически симметричной n-мерной геометрией является геометрия Евклида с метрической функцией:

$$\theta = \theta(ij) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \big(x_i^k - x_j^k\big)^2, \quad \varepsilon_k = 1, -1.$$

Теорема. *Если метрическая функция*

$$f(ij) = f(\theta = \theta(ij) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \big(x_i^k - x_j^k\big)^2, \varepsilon_k = 1, -1, z_i, z_j) = f(\theta, z_i, z_j).$$

задает $n+1$-мерную феноменологически симметричную геометрию, то в подходящих координатах и специальном масштабном преобразовании (функция от метрической) она имеет вид:

$$f(ij) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \big(x_i^k - x_j^k\big)^2 + \alpha(z_i - z_j)^2, \quad \varepsilon_k, \alpha = 1, -1,$$

$$f(ij) = \left[\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \big(x_i^k - x_j^k\big)^2\right] e^{2z_i + 2z_j}, \quad \varepsilon_k = 1, -1.$$

Задача сводится к решению функциональных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайличенко Г. Г.* Полиметрические геометрии. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2001.

ПОВЕРХНОСТИ И КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

SURFACES AND QUASIHYPERBOLIC MAPPINGS

Латфуллин Т. Г.[1]**, Подшивалова А. Н.**[2]

[1] *Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия;*
tlatfullin@yandex.ru

[2] *Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия;*
apodshivalova@mail.ru

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — открытый круг, h — гиперболическая метрика в D с линейным элементом $ds = |dz|/(1 - |z|^2)$. Для $a \in D$, $r > 0$, $B(a, r) = \{z \in D : h(z, a) < r$ — гиперболический круг.

Определение 1. Пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ — измеримая функция, $|\mu(z)| \leq q < 1$ (коэффициент Бельтрами), для $z_1, z_2 \in D$ определим метрику

$$\rho(z_1, z_2) = \inf \int\limits_{\gamma} |dz + \mu(z)\overline{dz}\,|,$$

где точная нижняя грань берется по всем спрямляемым кривым, соединяющим точки z_1 и z_2 в D.

Круг D с метрикой ρ обозначим через S, метрическое пространство S назовем поверхностью.

Определение 2. Гомеоморфизм $\varphi : D \to S$ назовем квазигиперболическим, если существует постоянная $C \geq 1$ такая, что любой точки $a \in D$ справедливы оценки

$$0 < \sup \frac{\rho(\varphi(z_1), \varphi(z_2))}{|z_1 - z_2|} \leq K(a) < \infty,$$

$$0 < \inf \frac{\rho(\varphi(z_1), \varphi(z_2))}{|z_1 - z_2|} \geq k(a) < \infty,$$

где sup и inf берутся по всем $z_1, z_2 \in B(a, 1)$, и $\dfrac{K(a)}{k(a)} \leq C$.

(По поводу определения см. [1, с. 612])

Определение 3. Гомеоморфизм $\psi : D \to S$ назовем конформным, если для почти всех $x \in D$ существует конечный, не равный нулю, предел

$$\lim_{y \in x} \frac{\rho(\psi(x), \psi(y))}{|x - y|}.$$

Для данного коэффициента Бельтрами $\mu : D \to \mathbb{C}$ через φ_μ обозначим гомеоморфное решение уравнения Бельтрами $\varphi_{\overline{z}} = \mu \cdot \varphi_z$ [2, с. 89].

Теорема 1. *Пусть $\mu : D \to \mathbb{C}$ — коэффициент Бельтрами. Если гомеоморфное решение уравнения Бельтрами φ_μ является квазигиперболическим, то конформное отображение $\varphi : D \to S$ также является квазигиперболическим.*

Теорема 2. *Если коэффициент Бельтрами непрерывен, то поверхность S является римановым пространством.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Латфуллин Т. Г.* Критерий квазигиперболичности отображений // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 3. С. 610–615.
2. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.

ГРУППЫ ЛИ $U(p,q)$ МАТРИЦ РАЗМЕРА $p+q$ КАК ЕДИНАЯ СИСТЕМА, ОСНОВАННАЯ НА ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ: I. ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ И СЛУЧАИ $p+q=2,\ 3$

LIE GROUPS $U(p,q)$ OF MATRICES OF DIMENSION $p+q$ AS A SINGLE SYSTEM BASED ON LINEAR FRACTIONAL TRANSFORMATIONS: I. GENERAL CONSIDERATIONS AND $p+q=2,\ 3$ CASES

Левичев А. В.[1], **Свидерский О. С.**[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;* levit@math.nsc.ru

[2] *West Virginia State University, Institute, WV, USA;* osviders@wvstateu.edu

В хронометрии Сигала (см. монографию [4] или обзор [2]) частицы и их взаимодействия моделируются в терминах векторных расслоений над пространством-временем, при этом группа Ли $D = U(2)$ является аналогом векторной группы мира Минковского M специальной теории относительности. Именно на группе D основана теория Вайнберга-Салама, объединившая электромагнитные и слабые взаимодействия. В развиваемой первым из авторов DLF-теории, f — это алгебра Ли $u(1,1)$, а l — алгебра Ли осциллятора. Рассматриваемые как подалгебры конформной алгебры Ли $su(2,2)$, подпространства d, f, l, m задают горизонтальные подрасслоения и параллелизующие подгруппы; здесь $m = M$, абелева. Переход между этими параллелизациями осуществляется на основе линейных изоморфизмов (не являющихся изоморфизмами алгебр Ли). Таковым, в частности, является знаменитое соответствие между m и d, осуществляемое в терминах матриц Паули. Мы вводим аналогичные (канонические) соответствия между d и f, l и d, l и f. Выбор этих алгебр Ли (из бесконечного списка всех четырёхмерных вещественных алгебр Ли) был сделан в [1], где исследовалась аксиоматика Александрова специальной теории относительности. Понятно, что алгебрами Ли $u(2)$ и $u(1,1)$ исчерпывается случай $p+q=2$. В докладе рассматривается общий случай классических алгебр Ли $u(p,q)$, $p+q=n \geq 2$. Вводятся канонические отображения между алгебрами Ли и соответствующие им вложения групп Ли $U(p,q)$ в $U(n)$, переплетающие аналоги отображения Кэли. Доказываются некоторые свойства этих отображений и вложений (в терминах топологии, конформной геометрии и Ли-алгебраической теории). В частности, задаются вложения алгебр d, f и l в $u(2,1)$ как образов сопряжённых подалгебр в $u(3)$. На соответствующих четырёхмерных подгруппах вводятся инвариантные лоренцевы метрики. Доказывается конформность канонических отображений между этими подгруппами. Продолжено исследование деформаций рассматриваемых алгебр Ли друг к другу, начатое в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуц А. К., Левичев А. В.* К основам теории относительности // ДАН СССР. 1984. Т. 277, № 6. С. 253–257.
2. *Левичев А. В.* Хронометрическая теория И. Сигала как завершение специальной теории относительности // Изв. ВУЗов. Физика. 1993. № 8. С. 84–89.
3. *Levichev A., Sviderskiy O.* Contractions of certain subalgebras of the conformal Lie algebra su(2,2) in the context of the DLF-theory // International Conference Dedicated to the 100th Anniversary of the Birthday of Sergei L. Sobolev. Novosibirsk: October 12–14, 2008. P. 392.
4. *Segal I.* Mathematical cosmology and extragalactic astronomy // Pure and Applied Mathematics. Vol. 68. New York: Academic Press, 1976.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ СУБЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛИНДЕНШТРАУССА

UNIVERSAL SPACES AND SUBDIFFERETIALS OF SUBLINEAR OPERATORS WITH VALUES IN LINDENSTRAUSS SPACES

Линке Ю. Э.

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия; linke@icc.ru

Универсальное пространство — это топологическое пространство, которое содержит гомеоморфные образы топологических пространств определенного класса. Задачу об универсальных пространствах поставил ещё М. Фреше в 20-ые годы прошлого столетия. В докладе развивается метод нахождения универсальных пространств линейных операторов, которые содержат гомеоморфные образы субдифференциалов в нуле непрерывных сублинейных операторов $P : V \to Y$, где V — любое сепарабельное банахово пространство, а Y — некоторое пространство Линденштраусса, т. е. предвойственное $L_1(\mu)$ для некоторой меры μ.

С прикладной точки зрения важно, чтобы при вложении субдифференциала сублинейного оператора в универсальное пространство его образ снова был бы субдифференциалом какого-то сублинейного оператора. Все пространства линейных непрерывных операторов $L(V, Y)$ и их подпространства $L^c(V, Y)$, состоящее из компактных операторов, наделяются далее топологией простой сходимости [1]. Для компактного сублинейного оператора P его компактный субдифференциал $\partial^c P$ по определению состоит из компактных линейных операторов, входящих в его субдифференциал ∂P, т.е. $\partial^c P = \partial P \bigcap L^c(V, Y)$. Пусть ℓ^2 — сепарабельное гильбертово пространство. Основным результатом является

Теорема. *Пространство $L^c(\ell^2, Y)$ компактных линейных операторов универсально в равносильных смыслах*: 1. *Для каждого непрерывного сублинейного оператора $P : V \to Y$ найдется компактный сублинейный оператор $Q : \ell_2 \to Y$ такой, что их субдифференциалы ∂P и $\partial^c Q$ будут операторно-аффинно гомеоморфными.* 2. *Для каждого непрерывного сублинейного оператора $P : V \to Y$ найдется компактный сублинейный оператор $Q : \ell_2 \to Y$ такой, что их субдифференциалы ∂P и $\partial^c Q$ будут аффинно гомеоморфными.*

Доказательство универсальности $L^c(\ell^2, Y)$ базируется на работах автора о представлении сублинейных операторов многозначными отображениями [2, 3], а также одной теореме Кли [4] о том, что выпуклый компакт в линейном топологическом пространстве, для которого существует счетная система непрерывных линейных функционалов, разделяющая точки этого компакта, аффинно гомеоморфен выпуклому компакту гильбертова пространства ℓ^2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.
2. *Линке Ю. Э.* Сублинейные операторы и пространства Линденштраусса // Докл. АН. 1977. Т. 234, № 1. С. 26–29.
3. *Линке Ю. Э.* Метод сублинейных операторов // Докл. АН. 1996. Т. 347, № 4. С. 446–448.
4. *Klee V. L.* Some topological properties of convex sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1955. V. 78. P. 30–45.

ЗАМЫКАНИЕ НЕЧЕТКОГО ТОЛЕРАНТНОГО ОТНОШЕНИЯ

THE CLOSURE OF A TOLERANT FUZZY RELATION

Львова М. А.

Алтайская государственная педагогическая академия, Барнаул, Россия;
lvova_masha@ngs.ru

Определение. *Нечетким отношением толерантности* на множестве X называется функция $\lambda : X \to [0,1]$ обладающая свойствами:

- $\lambda(x,x) = 1$, $x \in X$ (рефлексивность);
- $\lambda(x,y) = \lambda(y,x)$, $x, y \in X$ (симметричность).

Значение $\lambda(x,y)$ интерпретируется как мера сходства элементов $x, y \in X$. Нечеткое отношение толерантности называется *нечетким отношением эквивалентности*, если выполнено

- $\lambda(x,y) \geq \min\{\lambda(x,z), \lambda(z,y)\}$, $x, y, z \in X$ (транзитивность).

Если X — конечное множество содержащие n элементов, то функцию $\lambda(x,y)$ удобно представлять в виде симметричной матрицы $A = \|\lambda_{ij}\|_{i,j=1,\ldots,n}$. Транзитивным замыканием нечеткого отношения толерантности A называется наименьшее нечеткое отношение эквивалентности $\overline{A} \supset A$, $\overline{A} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A^k$. Практическое использование введенных понятий можно схематично описать следующим образом: требуется построить классификацию некоторых объектов составляющих множество X, для этого вначале каким-либо образом на множестве X определяется нечеткое отношение толерантности A, затем берется его транзитивное замыкание $\overline{A}$, которое и определяет искомую классификацию объектов множество X. Так как имеется произвол в выборе первоначального нечеткого отношения толерантности A, связанный со многими причинами, в том числе со случайными погрешностями, то возникает естественная проблема изучения как зависит $\overline{A}$ от этих случайностей.

Теорема. *Пусть λ_{ij}, $i < j$, — случайные независимо распределенные величины с функций распределения $F(x)$. Тогда величины $\overline{\lambda}_{ij}$, $i < j$, одинаково распределены с функцией распределения $G(x) = P_n[F(x)]$, где $P_n[u]$ — полином от u степени $\frac{n(n-1)}{2}$. Для $n \leq 7$ они равны*:

$$P_3 = (2-u)u^2,$$
$$P_4 = u^3\left(2u^3 - 5u^2 + 2u + 2\right),$$
$$P_5 = -u^4\left(6u^6 - 18u^5 + 12u^4 + 7u^3 - 6u^2 - 2\right),$$
$$P_6 = u^5\left(24u^{10} - 84u^9 + 78u^8 + 20u^7 - 44u^6 - 3u^4 + 8u^3 + 2\right),$$
$$P_7 = u^6(2 + 10u^4 - 11u^5 + 20u^6 - 70u^8 - 80u^{10} + 340u^{11} - 570u^{13} + 480u^{14} - 120u^{15}.$$

Данные исследования поддержаны Советом по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ–5682.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Das M., Chakraborty M. K., Ghoshal T. K.* Fuzzy tolerance relation, fuzzy tolerance space and basis // Fuzzy Sets and Systems. 1998. V. 97, № 3. P. 361–369.

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

LINEAR DIFFERENTIAL PURSUIT GAMES WITH INTEGRAL CONSTRAINTS ON THE CONTROLS OF THE PARTICIPANTS

Мамадалиев Н.

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан; `M_numana59@mail.ru`

В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ движется точка z согласно системе линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\dot{z}\,(t) = Az\,(t) + Bz\,(t-h) - Cu\,(t) + Dv\,(t)\,, \tag{1}$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $u \in \mathbb{R}^p$, $v \in \mathbb{R}^q$; h — фиксированное действительное число; A, B — постоянные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, C, D — постоянные матрицы порядка $(n \times p)$, $(n \times q)$. Векторы u, v называются *управляющими параметрами* преследователя и убегающего, соответственно, $\|u(\cdot)\|_{L_2} \leq \rho$, $\|v(\cdot)\|_{L_2} \leq \sigma$, где ρ, σ — неотрицательные константы.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено терминальное множество M в виде $M = M_0 + M_1$, где M_0 — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1 — выпуклое компактное подмножество подпространства L, ортогонального дополнения M_0 в $\mathbb{R}^n$ (т. е. $M_0 \oplus L = \mathbb{R}^n$). Преследование начинается в момент $t = 0$ из положения $z_0\,(\cdot) \in X$, где $X = \{z_0(t) : t \in [-h, 0],\ z_0(0) \in R^n \setminus M\}$, и считается законченным в момент $T = T(z_0(\cdot))$, когда фазовая точка $z(T)$ впервые попадает на множество M. Начальным состоянием для системы (1) является n-мерная абсолютно непрерывная функция $z_0(t)$, определенная на отрезке $[-h, 0]$. Цель убегающего игрока при этом состоит в том, чтобы оттянуть окончание игры. Через $K\,(\tau)$, $-\infty\ < \tau \leq T$, обозначим матричную функцию, обладающая следующими свойствами: а) $K\,(\tau) = \tilde{0}$, $\tau < 0$, $\tilde{0}$ — нулевая матрица порядка n; б) $K\,(0) = E$, E — единичная матрица порядка n; в) элементы матрицы $K\,(\tau)$, $0 \leq \tau \leq T$, принадлежат классу $C\,[0, T]$; г) $K\,(\tau)$ удовлетворяет уравнению $\dot{K}\,(\tau) = AK\,(\tau) + BK\,(\tau - h)$ при $0 < \tau \leq T$. Обозначим через π матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на L.

Предположение 1. Существуют матричная функция $F(t) : L \to L$, $t \in [\,0, T]$ полунепрерывно сверху зависящая от t, некоторая константа $\alpha \in [0, \frac{\rho}{\sigma})$, число $T > 0$, $\mu(t)$, $0 \leq t \leq T$, — суммируемая с квадратом неотрицательная скалярная функция, удовлетворяющая условию $\int_0^T \mu^2(t)\,dt \leq (\rho - \alpha\sigma)^2$, и измеримое замкнутозначное многозначное отображение $M(t) \subset L$, $0 \leq t \leq T$, и некоторая константа $\delta \in [0, 1)$, $\int_0^T M(t)\,dt \subset \delta M_1$, такие, что для всех $t \in [0, T]$ непусто множество $\widehat{w}(t) = \cap\{[M(t) + \pi K(t) C S_{\alpha|v| + \mu(t)}] - F(t)\pi K(t) Dv\}$, где пересечение берется по всем векторам $v \in \mathbb{R}^q$, $S_{\alpha|v|+\mu(t)}$ — p-мерный замкнутый шар радиуса $\alpha|v| + \mu(t)$, с центром в начале координат. Пусть $\zeta(T, \eta, z_0(\cdot)) = \pi K(T) z_0(0) + \int_{-h}^0 \pi K(T - t - h) B z_0(t) dt + \eta - \int_0^T w(T-t)\,dt$, где $w(t) \in \widehat{w}(t)$, $0 \leq t \leq T$. Определим числовую функцию $\lambda(z_0(\cdot), \eta, T, t, v)$ следующим образом: $\lambda(z_0(\cdot), \eta, T, t, v) = \sup\{\lambda \geq 0 : \lambda\zeta(T, \eta, z_0(\cdot)) \in M(T-t) + \pi K(T-t) C S_{\alpha|v|+\mu(T-t)} - F(T-t)\pi K(T-t) Dv - w(T-t)\}$ при $\zeta(T, \eta, z_0(\cdot)) \neq 0$, $\lambda(z_0(\cdot), T, \eta, t, v) = T^{-1}$, при $\zeta(T, \eta, z_0(\cdot)) = 0$.

Предположение 2. а) Для любого начального положения $z_0(\cdot) \in X$ существует число $T > 0$ такое, что справедливо неравенство $\inf \int_0^T \lambda(z_0(\cdot), T, \eta, t, v(t))\, dt > 1$, где точная нижняя граница берется по всем измеримым функциям $v(\cdot)$ таким, что $\|v(\cdot)\|_{L_2} \le \sigma$.

б) Для любого допустимого управления $v = v(t)$, $0 \le t < \infty$, убегающего существует вектор $\eta \in L$ такой, что выполнено включение $\int_0^T [E - F(T-t)]\pi K(T-t) D v(t)\, dt \in \eta + (1-\delta) M_1$.

Теорема. *Если для начального положения $z_0(\cdot) \in X$ выполнены предположения 1 и 2, то из начального положения $z_0(\cdot) \in X$ возможно завершение преследования за время $T = T(z(\cdot))$.*

ВЕСОВЫЕ СОБОЛЕВСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

WEIGHTED SOBOLEV SPACES AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SOBOLEV TYPE SYSTEMS

Матвеева И. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
matveeva@math.nsc.ru

Исследования задачи Коши и смешанных краевых задач в четверти пространства $R^{n+1}_{++} = \{(t,x): \ t > 0, \ x \in R^n_+\}$ для систем соболевского типа показали [1], что, зачастую, не удается установить разрешимость во всей шкале весовых соболевских пространств $W^l_{p,\gamma}$ с экспоненциальным весом $e^{-\gamma t}$. Как правило, возникают ограничения на показатель суммируемости вида $p > p^*$, где число $p^* > 1$ зависит от порядка системы и размерности n. В случае, когда $p \le p^*$, для разрешимости краевых задач необходимо требовать, чтобы данные удовлетворяли дополнительным условиям типа условий ортогональности некоторым полиномам (см., например, [1, 2]). Такие ограничения возникают при получении L_p-оценок решений, при этом для различных компонент решения ограничения на показатель суммируемости могут быть разными, т. е. L_p-оценки решений имеют анизотропный характер не только по гладкости, но и по степени суммируемости. Поэтому при исследовании разрешимости краевых задач для систем соболевского типа нужно учитывать такую анизотропную суммируемость и использовать функциональные пространства, более адаптированные к краевым задачам для таких систем.

В настоящей работе мы будем рассматривать специальную шкалу весовых соболевских пространств $W^l_{p,\gamma,\sigma}$, введенных в [3], с экспоненциальным весом по t и степенными весами по x. Мы покажем, как, управляя весовым параметром σ, т. е. выбирая подходящее функциональное пространство (см., например, [1, 4–6]), можно не только ослабить требования на данные, но и в ряде случаев установить безусловную разрешимость во всей шкале пространств $W^l_{p,\gamma,\sigma}$, $1 < p < \infty$.

Работа выполнена при поддержке Сибирского отделения Российской академии наук (№ 85).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. *Матвеева И. И.* Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для систем не типа Коши – Ковалевской // Сиб. журн. индустр. мат. 2001. Т. 4, № 2. С. 184–204.
3. *Демиденко Г. В.* Задача Коши для уравнений и систем соболевского типа // В кн.: Краевые задачи для уравнений с частными производными. Новосибирск: Ин-т математики АН СССР. Сиб. отд-ние, 1986. С. 69–84.
4. *Matveeva I. I.* On a class of boundary value problems for systems of Sobolev type // J. Anal. Appl. 2005. Vol. 3, No. 2. P. 129–150.
5. *Матвеева И. И.* О разрешимости задачи Коши для псевдопараболических систем в весовых соболевских пространствах // В кн.: Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Ин-т матем. СО РАН, 2005. С. 177–185.
6. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* О смешанных краевых задачах для псевдопараболических систем // Сиб. журн. индустр. мат. 2005. Т. 8, № 4. С. 34–50.

ДИВЕРГЕНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ДРУГИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ

THE DIVERGENCE REPRESENTATION AND OTHER FORMULAS FOR THE GAUSSIAN CURVATURE

Меграбов А. Г.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия; mag@sscc.ru

Представленные результаты опубликованы в [1]. Символы $(\,\cdot\,)$ и $(\times)$ обозначают скалярное и векторное произведение векторов, ∇ — оператор Гамильтона («набла»), $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $g \stackrel{\text{def}}{=} u_x^2 + u_y^2$, $\alpha = \alpha(x,y)$ — угол наклона вектора $\operatorname{grad} u(x,y)$ к оси Ox, так что $\cos\alpha = u_x/\sqrt{g}$, $\sin\alpha = u_y/\sqrt{g}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орты по осям x, y, z.

1. **Теорема 1.** *Для гауссовой кривизны $K(x,y)$ поверхности в трехмерном евклидовом пространстве с графиком $z = u(x,y)$, определяемой известной* [2, с. 90] *формулой $K(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} (u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2)/(1+u_x^2+u_y^2)^2$, справедливо представление $K(x,y) = \operatorname{div}\vec{V}_1$, где $\vec{V}_1 = -\vec{V}/\{2(1+g)\}$, $\vec{V} = (1/2)\operatorname{grad}(u_x^2+u_y^2) - \Delta u \operatorname{grad} u = -(u_x^2+u_y^2)\operatorname{rot}(\alpha\vec{k}) = (u_y u_{xy} - u_x u_{yy})\,\vec{i} + (u_x u_{xy} - u_y u_{xx})\vec{j} = (\operatorname{grad} u \times \nabla) \times \operatorname{grad} u$.*

Заметим, что для средней кривизны $H(x,y)$ поверхности $z = u(x,y)$ дивергентное представление известно [2, с. 92]: $H(x,y) = \operatorname{div}\{\operatorname{grad} u/\sqrt{1+g}\,\}$.

Следствие. *Условия постоянства кривизны $K = \text{const}$ (нулевой кривизны $K = 0$) и $\operatorname{div}\vec{V}_1 = \text{const}$ (соленоидальность поля $\vec{V}_1$ или условие $(\operatorname{grad} g \cdot \operatorname{rot}(\alpha\vec{k})) = 0$) эквивалентны. Справедливо равенство $\iint\limits_D K(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_S (\vec{V}_1 \cdot \vec{\eta})\,ds$, где D — область на плоскости (x,y) с кусочно-гладкой границей S, $\vec{\eta}$ — единичная внешняя нормаль к S. Следовательно, двойной интеграл от гауссовой кривизны $K(x,y)$ поверхности $z = u(x,y)$ по проекции ее ограниченного куска на плоскость x,y, как и полная его кривизна, зависит только от значений функции u и ее частных производных на границе этого куска.*

Аналогичные формулы получены для гауссовой кривизны поверхности в трехмерном псевдоевклидовом пространстве с графиком $t = u(x,y)$.

2. Пусть Ω — поверхность в трехмерном евклидовом пространстве с линейным элементом (римановой метрикой) $ds^2 = n^2(x,y)(dx^2+dy^2)$, Σ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей на поверхности Ω, D — проекция Σ на плоскость x,y.

Теорема 2. *Пусть $u(x,y) \in C^3(D)$, $n(x,y) \in C^2(D)$. Гауссова кривизна $K(x,y)$ поверхности Ω выражается через первый и второй дифференциальные параметры Бельтрами $\Delta_1 u \stackrel{\text{def}}{=} n^{-2}(u_x^2+u_y^2)$ и $\Delta_2 u \stackrel{\text{def}}{=} n^{-2}\Delta u$ произвольной функции $u(x,y) \in C^3(D)$ для Ω по формуле $K(x,y) = \Delta_2 \ln\sqrt{\Delta_1 u} - n^{-2}\operatorname{div}\vec{Q} \Rightarrow K(x,y)n^2(x,y) = -\Delta \ln n^2/2 = \operatorname{div}\{\operatorname{grad}\ln\sqrt{\Delta_1 u} - \vec{Q}\}$, где $\vec{Q} \stackrel{\text{def}}{=} (\Delta_2 u/\Delta_1 u)\operatorname{grad} u = (\Delta u/g)\operatorname{grad} u$.*

Отсюда следует формула для полной (интегральной) кривизны области Σ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меграбов А. Г.* Дифференциальные тождества, связывающие лапласиан скалярной функции, модуль ее градиента и угол его направления // Докл. АН. 2009. Т. 424, № 5. С. 599–603.
2. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.

ГРУППЫ-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

DISTRIBUTION GROUPS IN LOCALLY CONVEX SPACES

Мельников Е. В.

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск, Россия;
Melnikov_E_V@mail.ru

Понятия полугруппы-распределения и группы-распределения были определены Ж. Л. Лионсом [1] для банаховых пространств. Изучением их свойств, в основном в банаховых пространствах, занимались и занимаются многие математики. Для банаховых пространств полугруппа-распределение совпадает с фундаментальным решением соответствующей абстрактной задачи Коши в смысле векторнозначных распределений. В случае локально выпуклых пространств для полугрупп-распределений по Лионсу это было уже не так. Это несоответствие было устранено после введения В. В. Ивановым [2] другого понятия полугруппы-распределения. В работе [3] дано определение полугруппы-распределения, немного отличное от определения в [2], на основе которого автор определил группу-распределение по типу Лионса и изучил некоторые её свойства. В определении Лионса группа-распределение «склеивается» из двух полугрупп-распределений, что не очень естественно, так как обычные полугруппа и группа операторов определяются независимо друг от друга. Ян Кизинский в работе [4] для группы-распределения в банаховом пространстве получил два условия, каждое из которых равносильно условию «склеивания» и, тем самым, установил возможность «независимого» определения группы-распределения.

Автор предлагает новое определение группы-распределения. Это понятие, определяемое для локально выпуклых пространств, согласуется с предыдущими, но не связано условием «склеивания» и не зависит от определения полугруппы-распределения (хотя, как и в случае полугрупп и групп операторов, сходство в определениях этих двух понятий безусловно есть). Для групп-распределений установлены свойства, как обобщающие уже известные, так и новые.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lions J. L.* Les semi groupes distributions // Portugal. Math. 1960. V. 19, № 3–4. P. 141–164.
2. *Иванов В. В.* Линейные эволюционные уравнения и полугруппы-распределения // Оптимизация: Тр. Ин-та матем. Новосибирск: Изд. Ин-та матем., 1990. Вып. 48(65). С. 63–70.
3. *Мельников Е. В.* Векторнозначные обобщенные функции и обобщенная корректность абстрактной задачи Коши // Омск. гос. ун-т. Деп. в ВИНИТИ 27.07.88, 1988. № 6088-В88. 79 с.
4. *Kisynski J.* Representations of the convolution algebra $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ and distribution groups // Preprint IM PAS. 2003. № 644. 27 p.

КОНЕЧНОЗОННЫЕ МИНИМАЛЬНЫЕ ЛАГРАНЖЕВЫ ПОВЕРХНОСТИ В $\mathbb{C}P^2$

FINITE-GAP MINIMAL LAGRANGIAN SURFACES IN $\mathbb{C}P^2$

Миронов А. Е.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
mironov@math.nsc.ru

Мы укажем новый метод построения минимальных лагранжевых (**ML**) поверхностей в $\mathbb{C}P^2$ в терминах функций Бейкера — Ахиезера алгебраических кривых.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПУТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПСЕВДООРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ

EQUIVALENCE OF PATHS UNDER THE ACTION OF A SPECIAL PSEUDO-ORPHOGONAL GROUP

Муминов М. К.

Университет мировой экономики и дипломатии, Ташкент, Узбекистан;
murod_m@rambler.ru

Пусть $V = \mathbb{C}^n$ — n-мерное векторное пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, $GL(n,\mathbb{C})$ — группа всех обратимых линейных преобразований V и $G = SO(p,q,\mathbb{C}) = \{g \in GL(n,\mathbb{C}) : g^T J g = g J g^T = J,\ \det g = 1\}$ — специальная псевдоортогональная подгруппа в $GL(n,\mathbb{C})$, где $p+q=n$, $p,q \in \mathbb{N}$, $J = (J_{ij})_{i,j=1}^n$, $J_{ii} = 1$, если $i = \overline{1,p}$, $J_{ii} = -1$, если $i = \overline{p+1,n}$, $J_{ij} = 0$ в остальных случаях. Для векторов $x = \{x_i\}_{i=1}^n$, $y = \{y_i\}_{i=1}^n$ из V рассмотрим псевдоортогональное произведение $[x,y] = x_1y_1 + \ldots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \ldots - x_ny_n$.

Рассмотрим левое действие $(g,x) \to gx$ группы G в V, т. е. обычное умножение матрицы g на столбец x.

Путем $x(t)$ в V называется бесконечно дифференцируемое отображение x из отрезка $[0,1$ в V, т. е. $x(t) = \{x_i(t)\}_{i=1}^n$, где $x_i : [0,1] \to V$. Говорят, что два пути $x(t)$ и $y(t)$ эквивалентны, если существует такой элемент $g \in G$, что $y(t) = g(t)$ для любого $t \in [0,1]$. Для пути $x(t) = \{x_i(t)\}_{i=1}^n$ через $C\langle x\rangle^G$ обозначим дифференциальное поле всех G-инвариантных дифференциально рациональных функций от счетного числа переменных $x_1,\ldots,x_n,x_1',\ldots,x_n',\ldots,x_1^{(r)},\ldots,x_n^{(r)},\ldots$, где $x_i^{(r)}$ — производная r-го порядка от $x_i(t)$. Кроме того, через $M(x)$ будем обозначать $n\times n$-матрицу, в которой r-м столбцом служит вектор $(x_1^{(r-1)},\ldots,x_n^{(r-1)})$. В дальнейшем считаем, что путь $x(t)$ регулярен, т. е. $\det M(x)(t) \neq 0$ для всех $t \in [0,1]$. Через $M^T(x)$ обозначаем матрицу, транспонированную к матрице $M(x)$, а через $M'(x)$ — $n\times n$-матрицу с r-м столбцом $(x_1^{(r)},\ldots,x_n^{(r)})$.

Теорема 1. *В дифференциальном поле $C\langle x\rangle^G$ следующие дифференциальные многочлены являются его образующими: $f_m\langle x\rangle = [x^{(m)},x^{(m)}]$, $m = \overline{0,n-2}$, и $\varphi\langle x\rangle = \det M(x)$.*

В следующей теореме дается критерий для $SO(p,q,\mathbb{C})$-эквивалентности путей в V.

Теорема 2. *Пусть $x(t)$, $y(t)$ — регулярные пути в V. Следующие условия эквивалентны*:

(i) $(M(x))^{-1}M'(x) = (M(y))^{-1}M'(y)$, $M^T(x)JM(x) = M^T(y)JM(y)$, $\det M(x) = \det M(y)$;

(ii) $[x^{(m)}(t),x^{(m)}(t)] = [y^{(m)}(t),y^{(m)}(t)]$ *и* $\det M(x)(t) = \det M(y)(t)$ *для всех* $t \in [0,1]$, $m = \overline{0,n-2}$;

(iii) *пути* $x(t)$ *и* $y(t)$ $SO(p,q,\mathbb{C})$-*эквивалентны.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хаджиев Дж. Х.* Приложение теории инвариантов к дифференциальной геометрии кривых. Ташкент: ФАН, 1988.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СИМПЛЕКСА, СОДЕРЖАЩЕГО КУБ

ON SOME PROPERTY OF A SIMPLEX WHICH CONTAINS A CUBE

Невский М. В.

Ярославский государственный университет, Ярославль, Россия;
mnevsk@uniyar.ac.ru

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $Q_n := [0,1]^n$. Элемент $x \in \mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$. Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$. Через $d_i(S)$ обозначим максимальную длину отрезка, принадлежащего S и параллельного оси x_i. Положим также

$$\xi(S) := \min\{\sigma \geq 1 : Q_n \subset \sigma S\}.$$

Здесь σS есть результат гомотетии S относительно центра тяжести с коэффициентом σ. Основным содержанием настоящего доклада является следующее доказанное автором утверждение [1].

Теорема. *Для любого невырожденного симплекса $S \subset \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} \leq \xi(S). \tag{1}$$

Включение $Q_n \subset S$ эквивалентно равенству $\xi(S) = 1$. Поэтому из (1) следует, что если $Q_n \subset S$, то для некоторого $i = 1, \ldots, n$ симплекс S содержит отрезок длины n, параллельный i-й координатной оси. Число n здесь не может быть увеличено (достаточно рассмотреть симплекс, ограниченный гиперплоскостями $x_k = 0$ и гиперплоскостью $\sum x_k = n$). Это свойство симплекса, содержащего куб, и имеется в виду в заголовке.

Приведём примеры других следствий теоремы. По поводу тематики следствия 1 см. [2]. Результат чисто геометрического следствия 2 известен — ранее он был получен М. Лассаком [3]. Через $C(Q_n)$ обозначается пространство непрерывных функций $f : Q_n \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{C(Q_n)} := \max_{x \in Q_n} |f(x)|$, а через $\Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — совокупность многочленов от n переменных общей степени ≤ 1.

Следствие 1. *Пусть $P : C(Q_n) \to \Pi_1(\mathbb{R}^n)$ — интерполяционный проектор, узлы которого совпадают с вершинами симплекса S. Справедливо неравенство*

$$\|P\| \geq \frac{2}{n+1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i(S)} - 1 \right) + 1.$$

Здесь $\|P\|$ — норма P как оператора из $C(Q_n)$ в $C(Q_n)$.

Следствие 2. *Пусть симплекс $S^* \subset Q_n$ имеет максимальный возможный объём из всех симплексов, принадлежащих Q_n. Тогда для каждого $i = 1, \ldots, n$ симплекс S^* содержит ровно один отрезок длины 1, параллельный оси x_i.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Невский М. В.* Об одном свойстве n-мерного симплекса // (в печати).
2. *Невский М. В.* Об одном соотношении для минимальной нормы интерполяционного проектора // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16, № 1. С. 24–43.
3. *Lassak M.* Parallelotopes of maximum volume in a simplex // Discrete Comput. Geom. 1999. V. 21. P. 449–462.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ В ОБРАТНОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

DIFFERENTIAL RELATIONS IN THE INVERSE KINEMATIC PROBLEM

Нещадим М. В.

Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия;
neshch@math.nsc.ru

Пусть (M,g) — компактное n-мерное риманово многообразие с непустым краем ∂M, g — метрика. Будем далее предполагать риманово многообразие M простым, то есть любые две точки $y,z \in M$ соединяются единственной геодезической $\gamma(y,z)$, все точки которой, за исключением быть может точек y, z принадлежат дополнению $M \setminus \partial M$ и которая гладко зависит от концов y, z. Рассмотрим функцию

$$w(y,z) = \int_{\gamma(y,z)} ds,$$

где y, z — произвольные точки многообразия M, s — натуральный параметр вдоль геодезической $\gamma(y,z)$. Функция $w(y,z)$ называется годографом метрики g.

Обратная задача определения метрики по годографу ставится следующим образом. Известна функция $w(y,z)$ для любых точек $y,z \in \partial M$. Найти метрику $g(x)$, $x \in M$.

Если $\mathbf{R}^n$ — n-мерное вещественное евклидово пространство переменных $x = (x^1,\dots,x^n)$, M — компактная область в $\mathbf{R}^n$ с конформно-евклидовой метрикой $ds^2 = \lambda^2|dx|^2$, где $\lambda(x) > 0$ — некоторая достаточно гладкая функция, то рассматриваемая задача определения $\lambda(x)$ называется обратной кинематической задачей.

В данной работе получены дифференциальные соотношения на метрику $g(x)$, $x \in M$, и годограф $w(y,z)$, $y,z \in \partial M$, которые выполняются или нет одновременно. Метрика $g(x)$ имеет произвольный вид.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09–01–00422а), Интеграционного гранта СО РАН (проект № 93).

$\overline{\partial}$- и $\overline{\partial}\partial$-УРАВНЕНИЯ НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ ПОТОКЕ THE $\overline{\partial}$- AND $\overline{\partial}\partial$-EQUATION ON A POSITIVE CURRENT

Никитина Т. Н.

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия;
e-mail1AANick@yandex.ru

Пусть M — комплексное многообразие и T — положительный поток на M. Если u и f — гладкие дифференциальные формы на M, говорят, что $\overline{\partial}\partial u = f$ на T, если $\overline{\partial}\partial u \wedge T = f \wedge T$. В этой статье изучается вопрос: можно ли разрешить $\overline{\partial}\partial$-уравнение на T и если это так, какого рода оценки можно найти для решения.

Разрешимость $\overline{\partial}\partial$-уравнений является классической (см. [1–3]).

Если ω — гладкая положительная $(1,1)$-форма, определим меру следа σ_T положительного потока биразмерности (p,p) относительно ω $\sigma_T := T \wedge \omega_p$, где $\omega_p = \omega^p/p!$.

Теорема 1. *Пусть T — положительный поток биразмерности (p,p) в открытом множестве D из $\mathbb{C}^n$. Предположим, что T L^2-нормальный и что $i\partial\overline{\partial}(T \wedge \omega^{p-2}) \leq 0$. Пусть φ — гладкая строго плюрисубгармоническая функция в D. Тогда для любой $(p-1,p)$-формы F в $L^2_{loc}(T)$ существует $(p-1,p-1)$-форма u в $L^2(T)$ такая, что* $\overline{\partial}\partial u \wedge T = -\partial F \wedge T$ *и* $||u||_\varphi \leq ||F||_\varphi$.

Определение. k-форма f является *примитивной* на T, если $k \leq n$ и $f \wedge \omega_{n-k+1} \wedge T = 0$.

Предложение 1. *Пусть $f \in \Lambda^{q,2}_T$. Тогда существуют однозначно определенные примитивные формы $f_0 \in \Lambda^{q-2,0}_T$, $f_1 \in \Lambda^{q-1,1}_T$ и $f_2 \in \Lambda^{q,2}_T$ такие, что $f = f_0 \wedge \omega_2 + f_1 \wedge \omega + f_2$.*

Следующее предложение является решающим в доказательстве априорного неравенства для $\overline{\partial}\partial$ и $\overline{\partial}$ (в случае $p = 1$ см. [4[).

Предложение 2. *Квадратичная форма определенная на пространстве примитивных форм из $\Lambda^{p,q}_T$ $[\gamma,\gamma]\sigma_T = c_{q+p}\gamma \wedge \overline{\gamma} \wedge \omega_{n-q-p} \wedge T$ разлагается на положительно определенные $[\sigma_r,\sigma_r]\sigma_T$, если $(-1)^{p^2+r^2} = -1$, и отрицательно определенные $[\tau,\tau]\sigma_T$, $[\sigma_r,\sigma_r]\sigma_T$, если $(-1)^{p^2+r^2} = 1$, формы, $0 \leq r \leq p-1$ и $r \geq 1$ при $p \leq 2$. (В случае $p = 0$ форма $[\tau,\tau]\sigma_T$ является положительно определенной, при $p = 1$ форма $[\sigma_0,\sigma_0]\sigma_T$ является отрицательно, а при $p = 2$ — положительно определенной.)*

Работа выполнена при поддержке гранта СФУ по НМ проекту (№ 45.2007).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белошапка В. К.* Функции, плюригармонические на многообразии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42, № 3. С. 475–483.
2. *Чирка Е. М.* Потоки и некоторые их применения // В кн.: Харви Р. Голоморфные цепи и их границы. М.: Мир, 1979. С. 122–158.
3. *Никитина Т. Н.* Устранимые особенности на границе и $\overline{\partial}$-замкнутое продолжение CR-форм с особенностями на порождающем многообразии. Новосибирск: Наука, 2008.
4. *Berndtsson B., Sibony N.* The $\overline{\partial}$-equation on a positive current // Invent. math. 2002. V. 147. P. 371–428.

ТОЖДЕСТВО КРЕЙНА — СОБОЛЕВА И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

THE KREIN–SOBOLEV IDENTITY AND NONLINEAR EQUATIONS

Новиков Д. П.

Омский государственный технический университет, Омск, Россия;
nvdmpr@mail.ru

1. С методом обратной задачи рассеяния связаны некоторые вопросы теории интегральных уравнений. В [1,2] были найдены тождества для резольвентного ядра $R(x,y)$

$$R(x,y)-\int_s^t K(x,z)R(z,y)dz=K(x,y)$$

при условиях независимости $K(x,z)$ от переменных s,t и единственности решения R:

$$\partial R(x,y)/\partial t=R(x,t)R(t,y),\quad \partial R(x,y)/\partial s=-R(x,s)R(s,y). \tag{1}$$

Тем же способом, при условиях независимости $K(x,z)$ от переменных t_i и единственности решения R уравнения

$$R(x,y)-\Big(\int_{a_1}^{t_1}+\int_{a_2}^{t_2}+\int_{a_3}^{t_3}\Big)K(x,z)R(z,y)dz=K(x,y)$$

получаем из (1) решения $\varphi_{ij}=R(x,y)|_{x=t_i,y=t_j}$ замкнутой нелинейной системы

$$\partial\varphi_{ij}/\partial t_k=\varphi_{ik}\varphi_{kj},$$

где индексы $i,j,k\in\{1,2,3\}$ попарно различны.

2. Решение 6-го уравнения Пенлеве через определитель Фредгольма было получено в [3]. Результат того же рода следует из тождества (1) для уравнения

$$\psi^{\pm}(x)-\Big(\lambda_1\int_{l_1}+\lambda_2\int_{l_2}\Big)\frac{x^{\alpha}y^{-\alpha}-x^{-\alpha}y^{\alpha}}{x-y}\psi^{\pm}(y)dy=x^{\pm\alpha}$$

(где l_1, l_2 — негомотопные пути от 1 до t, не задевающие 0 и ∞, а коэффициенты λ_1, λ_2 не зависят от t), если учесть теорему [4] о ядре резольвенты:

$$R(x,y)=(x-y)^{-1}[\psi^{+}(x)\psi^{-}(y)-\psi^{-}(x)\psi^{+}(y)]$$

и соотношения $\psi^{\pm}(tx;t,\lambda_1,\lambda_2)=t^{\pm\alpha}\psi^{\pm}(x;t^{-1},-\lambda_1,-\lambda_2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн М. Г.* Об интегральных уравнениях, порождающих дифференциальные уравнения 2-го порядка // Докл. АН. 1954. Т. 97. № 1. С. 21–24.
2. *Соболев С. Л.* Некоторые замечания о численном решении интегральных уравнений // Успехи мат. наук. 1954. Т. 9, № 3, С. 234–235.
3. *Jimbo M., Miwa T.* Studies on Holonomic Quantum Fields. XVII // Proc. Japan Acad., Ser. A. 1980. V. 56, №. 9, P. 405–410.
4. *Its A. R., Izergin A. G., Korepin V. E.* Temperature Correlators of the Impenetrable Bose Gas as an Integrable System // Commun. Math. Phys. 1990. V. 129, № 1, P. 205–222.

ЗНАЧЕНИЯ t-ИНВАРИАНТА ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ ЗЕЙФЕРТА

VALUES OF THE t-INVARIANT FOR SEIFERT MANIFOLDS

Овчинников М. А.

ГОУ ВПО Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия;
ovch@csu.ru

Двумерный полиэдр *простой*, если линк любой его особой точки является полным графом с четырьмя вершинами или графом с тремя простыми ребрами и двумя вершинами. Особые точки первого типа называются *вершинами полиэдра. Спайном* компактного трехмерного многообразия называется двумерный полиэдр в многообразии, если дополнение к нему гомеоморфно прямому произведению края многообразия и полуинтервала, если край непуст, либо открытому трехмерному шару, если многообразие замкнутое. *Спайн простой*, если он является простым полиэдром.

t-*Инвариант* компактного 3-многообразия M определяется по произвольному простому спайну P многообразия формулой

$$t(M) = \sum_{Q \subset P} (-\varepsilon)^{-v(Q)} \varepsilon^{\chi(Q)},$$

где Q обозначает простой подполиэдр, возможно пустой, в простом спайне P, $v(Q)$ обозначает число вершин подполиэдра Q, $\chi(Q)$ — эйлерова характеристика подполиэдра, ε — корень уравнения $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$.

t-Инвариант является топологическим инвариантом многообразия, потому что его значение не зависит от выбора простого спайна P в многообразии M ([2]).

Известно, что t-инвариант можно рассматривать как небольшую модификацию инварианта Тураева — Виро уровня 5. Модификация состоит в том, чтобы при вычислении инварианта принимать во внимание только целые цвета ([1]).

В данной работе полностью решается задача нахождения формул, дающих значения t-инварианта зейфертового многообразия по параметрам многообразия.

Решение существенно использует специальный способ построения простых спайнов зейфертовых многообразий ([3]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 08–01–00162) и интеграционного проекта УрО — СО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Turaev V. G., Viro O. Y.* State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols // Topology. 1992, № 31. C. 865–902
2. *Matveev S. V., Ovchinnikov M. A., Sokolov M. V.* Construction and properties of the t-invariant // Notes of PDMI. 2000. V. 267, № 1. P. 207–219.
3. *Овчинников М. А.* Построение простых спайнов многообразий Вальдхаузена // Тр. межд. конф. «Маломерная топология и комбинаторная теория групп. Челябинск, 1999». Киев: Ин-т матем. НАН Украины, 2000. С. 65–86.

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ РАСПРЯМЛЯЕМОСТЬ ПОВЕРХНОСТЕЙ

FUNCTIONAL FLATTENABILITY OF SURFACES

Парфёнов А. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
pai79@sibmail.ru

Пусть дана липшицева функция $\omega : \mathbb{R}^\nu \to \mathbb{R}$, где $\nu \in \mathbb{N}$. Пусть $n = \nu + 1$,

$$\Omega_\omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_n > \omega(x')\} \quad \text{и} \quad \Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_n > 0\}.$$

Нас интересует описание всех тех ω, для которых выполнено условие:

(i) Существует такой билипшицев C^∞-диффеоморфизм $g : \Omega_0 \to \Omega_\omega$, что $g(\xi, 0+) = (\xi, \omega(\xi))$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^\nu$ и правило $u \mapsto u \circ g$ композиции задает изоморфизм пространства $F^s_{pq}(\mathbb{R}^n)\Big|_{\Omega_\omega}$ на $F^s_{pq}(\mathbb{R}^n)\Big|_{\Omega_0}$.

Здесь $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ и $\frac{1}{p} < s < \infty$; $F^s_{pq}(\mathbb{R}^n)$ — пространство Лизоркина — Трибеля; $F^s_{pq}(\mathbb{R}^n)\Big|_X$ — сужение $F^s_{pq}(\mathbb{R}^n)$ на открытое множество X в смысле теории распределений. Если $1 < p < \infty$, то пространство $F^s_{pp}(\mathbb{R}^n)$ — это пространство Слободецкого, а пространство $F^s_{p2}(\mathbb{R}^n)$ с $s \in \mathbb{N}$ — это пространство Соболева $W^s_p(\mathbb{R}^n)$. Условие (i) есть некоторая формализация понятия «достаточно гладкая граница $\partial\Omega_\omega$» в интересах эллиптических дифференциальных уравнений в Ω_ω.

Продолжением по непрерывности определен оператор следа $\mathrm{tr}_\omega : F^s_{pq}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^\nu)$ такой, что $\mathrm{tr}_\omega f(\xi) = f(\xi, \omega(\xi))$ для $\xi \in \mathbb{R}^\nu$, если f шварцева. Для $j \in \mathbb{N}_0$ пусть семейство $\mathcal{D}_j$ состоит из кубов вида $I = [0, l_I]^\nu + l_I a$, где $a \in \mathbb{Z}^\nu$ и $l_I = 2^{-j}$. Пусть $\mathcal{D} = \bigcup_{j=0}^\infty \mathcal{D}_j$ (диадическое семейство). Через $2I$ обозначим куб с тем же центром, что у I, и ребром $2l_I$. Обозначим $\mathrm{osc}^M_r \omega(2I) = (2l_I)^{-\nu/r} \inf \|\omega - \gamma\|_{L_r(2I)}$, где inf берется по всем многочленам γ степени не выше M в $\mathbb{R}^\nu$. Для $I \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_0$ пусть (единственный) куб $I' \in \mathcal{D}$ таков, что $l_{I'} = 2l_I$ и $I' \supset I$. При $I \in \mathcal{D}_0$ формально считаем $\beta_{I'} = 0$.

Теорема 1. *Имеем (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) для следующих условий*:

(ii) Пространства $\mathrm{tr}_\omega F^s_{pq}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{tr}_0 F^s_{pq}(\mathbb{R}^n)$ измеримых функций над $\mathbb{R}^\nu$ равны, а их фактор-квазинормы эквивалентны.

(iii) Возьмем целое $M > s - 1 - \frac{1}{p}$ и такое $r \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$, что $s > \frac{n}{p} - \frac{\nu}{r}$. Тогда существует $C > 0$ такое, что для любых $\beta_I \in \mathbb{R}$, $I \in \mathcal{D}$, имеем

$$\sum_{I \in \mathcal{D}} l_I^{n-sp} \mathrm{osc}^M_r \omega(2I)^p |\beta_I|^p \leqslant C \sum_{I \in \mathcal{D}} l_I^{n-sp+p} |\beta_I - \beta_{I'}|^p.$$

Доказательство некоторых утверждений теоремы 1 содержится в работе [1]. В теореме 2.2 из [1] дан явный критерий справедливости условия (iii), а тем самым и условия (i).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Парфенов А. И.* Критерии распрямляемости липшицевой поверхности по Лизоркину — Трибелю. I // Матем. труды. 2009. Т. 12, № 1. С. 144–204.

ПРИМЕНЕНИЕ КВАЗИКОНФОРМНОСТИ В ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ

THE USE OF QUASICONFORMALITY IN THE ERROR THEORY

Пешкичев Ю. А.

ООО Интеллект-Сервис, Новосибирск, Россия; peshyur@inbox.ru

В течение последних четырёх десятилетий независимо друг от друга развивались теория устойчивости квазиконформных отображений и теория устойчивости систем линейных алгебраических уравнений, хотя у них была общая составляющая: обусловленность квадратной матрицы и её свойства. Например, рассуждения [1, с. 116] типичны для квазиконформных отображений, а определение квазиконформности [2, с. 18] основано на специальном понятии обусловленности.

1. Квазиконформная обусловленность. Кроме числа обусловленности $\operatorname{cond} A$ квадратной матрицы A порядка n по спектральной норме, рассмотрим коэффициент $q(A, m)$ искажения m-площадей [1] и число обусловленности $Q(A, m)$ [4]. При этом

$$1/q(A, m) \le Q(A, m) \le q(A, m), \quad q(A, m) \le (\operatorname{cond} A)^m.$$

2. Угловая мера обусловленности. Обозначим через $\varphi(i)$ угол между вектором-столбцом $a(i)$ матрицы A и векторным произведением $A(i)$ остальных $n-1$ векторов-столбцов A. Если $\operatorname{cond} A$ — число обусловленности A по евклидовой норме, то

$$(\operatorname{cond} A)^2 \ge \sum 1/\sin^{\varphi}(i).$$

Для $n = 2$ такое неравенство было получено в работе автора [5]. На возможность такой трактовки меры обусловленности указано в учебном пособии [1, с. 116]. Там же отмечен только необходимый характер условия $\min \sin \varphi(i) \ge 1/q$ $(q \ge 1)$. Достаточное условие приведено в работе автора [3].

3. Логарифмический градиент дифференцируемой матрицы. Для квадратной матрицы $A(x)$ рассмотрим логарифмический градиент $\operatorname{grad} A(x)/\|A(x)\|$, евклидова норма которого при умножении на $|\Delta x|$ даёт предельную относительную погрешность вычисления $\Delta A = A(x + \Delta x) - A(x)$. При этом даётся верхняя оценка модуля логарифмического градиента $\det A$, конечно-разностный вариант которой известен по монографии [6, с. 150]. Возможно подобное исследование и других скалярных функций от $A(x)$, например, $\operatorname{cond} A(x)$.

Рассмотренные применения квазиконформности — составная часть исследования квазирегулярных векторных полей, программа исследования которых в плоском случае была представлена автором на сайте международной научной конференции «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», посвящённой памяти академика А. А. Самарского в связи с 90-летием со дня его рождения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беклемишев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983.
2. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Наука, 1982.
3. *Пешкичев Ю. А.* Многомерный градиент и квазиконформные отображения // Вопросы метрической теории отображений и её применение. Киев: Наукова думка, 1978. С. 99–109.
4. *Пешкичев Ю. А.* Отображения с ограниченным искажением в многомерном пространстве кратной размерности // Экстремальные задачи теории функций. 8. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1990. С. 22–28.
5. *Пешкичев Ю. А.* Об искажении углов при квазиконформных отображениях // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11, № 5. С. 1191–1192.
6. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.

РАВНОМЕРНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ В ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ СЕЧЕНИЙ

UNIFORM CONVEXITY IN THE SPACES OF MEASURABLE SECTIONS

Плиев М. А.

Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН и РСО-А, Владикавказ, Россия; plimarat@yandex.ru

В последние годы теория банаховых расслоений все больше привлекает внимание исследователей [1–5]. Векторные пространства таких сечений при определенных условиях являются банаховыми пространствами. Вызывает интерес изучение геометрии этих пространств. Первые шаги в этом направлении сделаны в [6, 7]. Перейдем к точным определениям. Банахово расслоение $\mathcal{X}$ над множеством Ω с заданной измеримой структурой называют *измеримым банаховым расслоением* над Ω и обозначают $(\mathcal{X}, \mathcal{I})$.

Пусть E — идеальное пространство над $L_0(\Omega)$. Положим по определению

$$E(\mathcal{X}) := \{v \in L_0(\Omega, \Sigma, \nu, \mathcal{X}) : \|v(\omega)\|_{\mathcal{X}_\omega} \in E\}.$$

Напомним, что для произвольного банахова пространства X через B_X и S_X обозначаются замкнутый единичный шар и единичная сфера соответственно. Напомним, что для произвольного банахова пространства X через B_X и S_X обозначаются замкнутый единичный шар и единичная сфера соответственно. Банахово пространство X называется *равномерно выпуклым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что из условия x_1, $x_2 \in S_X$

$$1 - \frac{1}{2}\|x_1 + x_2\| \geq \delta$$

следует, что

$$\|x_1 - x_2\| \geq \varepsilon.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть E — банахово идеальное пространство над $L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$, где (Ω, Σ, μ) — пространство с конечной мерой, и $(\mathcal{X}, \mathcal{I})$ — измеримое банахово расслоение над Ω. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *Банахово пространство $E(\mathcal{X})$ равномерно выпукло.*

2) *E — равномерно выпукло и для почти всех $\omega \in \Omega$ банаховы пространства $\mathcal{X}_\omega$ — равномерно выпуклы.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ганиев И. Г.* Решеточные гомоморфизмы в пространствах Банаха — Канторовича // Владикавк. мат. журн. 2004. Т. 6, вып. 1. С. 37–41.
2. *Гутман А. Е., Коптев А. В, Попов А. И.* Конечная представимость в слоях просторных банаховых расслоений // Владикавк. мат. журн. 2005. Т. 7, вып. 1. С. 39–45.
3. *Гутман А. Е., Коптев А. В.* Пространства CD_0-функций и удвоение по Александрову // Владикавк. мат. журн. 2005. Т. 7, вып. 1. С. 39–45.
4. *Кусраев А. Г.* О теореме типа Штрассена для измеримых селекторов // Владикавк. мат. журн. 2006. Т. 6, вып. 8. С. 32–37.
5. *Чилин В. И., Ганиев И. Г., Кудайбергенов К. К.* ГНС-представление $C^\star$-алгебр над кольцом измеримых функций // Владикавк. мат. журн. 2007. Т. 9, вып. 2. С. 33–39.
6. *Плиев М. А.* О крайних точках единичного шара пространства $E(\mathcal{X})$ // В печати.
7. *Плиев М. А.* Строго выпуклые пространства $E(\mathcal{X})$ // В печати.

МАРТИНГАЛЬНО-ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ АТОМИЧЕСКИХ σ-АЛГЕБР

THE MARTINGALE ERGODIC THEOREM FOR ATOMIC σ-ALGEBRAS

Подвигин И. В.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
vak@gorodok.net

Введенные А. Г. Качуровским мартингально-эргодические и эргодико-мартингальные стохастические процессы

$$X_{n,m} = \mathrm{E}_m A_n f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{E}(f\circ\tau^k|\mathfrak{F}_m), \quad Y_{n,m} = A_n \mathrm{E}_m f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{E}(f|\mathfrak{F}_m)\circ\tau^k,$$

где τ — автоморфизм вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$, $f \in L_1(\Omega)$ и $\mathfrak{F}_m$ — монотонная последовательность σ-подалгебр σ-алгебры $\mathfrak{F}$, унифицируют (содержат как частные вырожденные случаи) эргодические средние и регулярные мартингалы. Для этих процессов были доказаны теоремы сходимости п.в. и по норме [1,2]. Однако, при доказательстве теорем сходимости п.в. использовалось условие интегрируемости супремума $\sup_n |A_n f|$ и $\sup_m |\mathrm{E}(f|\mathfrak{F}_m)|$ соответственно, которого нет ни в теоремах о сходимости мартингалов, ни в индивидуальной эргодической теореме. Г. Аргирис и Дж.М. Розенблатт показали в своей работе [3], что убрать это условие без дополнительных допущений нельзя. Оказывается, в случае убывающей последовательности атомических σ-алгебр $\mathfrak{F}_m$ достаточным для сходимости является предложенное А. Г. Качуровским условие коммутируемости операторов условного математического ожидания и операторов эргодического усреднения. В этом случае эргодико-мартингальные процессы совпадают с мартингально-эргодическими, а унификация остается в силе. Таким образом справедлива

Теорема. *Пусть $\{\mathfrak{F}_n\}_{n\geq 1}$ — убывающая последовательность атомических σ-подалгебр σ-алгебры $\mathfrak{F}$. Тогда, если $\mathrm{E}(f\circ\tau|\mathfrak{F}_m) = \mathrm{E}(f|\mathfrak{F}_m)\circ\tau$ для любого m, то $X_{n,m} (= Y_{n,m})$ сходится п.в. при $n, m \to \infty$ для любой $f \in L_1(\Omega)$.*

Важным оказался тот факт, что условие коммутируемости в теореме эквивалентно условию $\tau^{-1}\mathfrak{F}_m = \mathfrak{F}_m$. Геометрически для атомических σ-алгебр это означает, что все атомы $\mathfrak{F}_m$ разбиваются на τ-орбиты, являющиеся атомами σ-алгебры $\mathfrak{F}_m \cap \mathfrak{J}$, где $\mathfrak{J}$ — σ-алгебра τ-инвариантных множеств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качуровский А. Г.* Мартингально-эргодическая теорема // Матем. заметки. 1998. Т. 64, № 2. С. 311–314.
2. *Качуровский А. Г.* Единые теории, унифицирующие эргодические средние и мартингалы // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 2007. Т. 256, С. 172–200.
3. *Argiris G., Rosenblatt J. M.* Forcing divergence when the supremum is not integrable // Positivity. 2006. V. 10, № 2. P. 261–284.

ОДНОРОДНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ПОРОЖДАЮЩИЕ МНОЖЕСТВА

HOMOGENEOUS MAPPINGS AND GENERATING SETS

Поликанова И. В.,

Алтайская государственная педагогическая академия, Барнаул, Россия;
Anirix1@yandex.ru

Предлагается определение однородного степени n отображения f из X в Y относительно действий группы G на множествах X и Y, обобщающее понятие однородной функции и совпадающее при $n = 1$ с понятием эквивариантного отображения. Устанавливается критерий однородности отображения в случае коммутативного действия группы G на Y, заключающийся в выполнении равенства $f(g * x) = g^n * f(x)$ для всех $x \in X$ и всех $g \in H$ на более узком, чем в определении ($H = G$), множестве $H \subset G$. Таким множеством является множество образующих группы G. Исследуются порождающие множества мультипликативной группы R^+ положительных действительных чисел в целях выявления некоторого «стандартного» порождающего множества, из которого остальные могли бы быть получены в результате некоторых конструкций, приводящих вновь к порождающим множествам, таких как, например, мажорирование множества или «расслоение» множества посредством эпиморфизмов вида $\varphi_n(x) = x^n$. Выяснено, что всякое положительное действительное число представимо в виде произведения не более двух целых степеней трансцендентных чисел из заданного промежутка $[a, b] \subset R^+$. Это означает, что множество трансцендентных чисел произвольного промежутка $[a, b] \subset R^+$ порождает группу R^+. Как следствие получаем, что не существует «стандартного» порождающего множества группы R^+, из которого все остальные порождающие множества могли бы быть получены в результате одной лишь конструкции «расслоения», применённой сколь угодно число раз. Другим следствием является следующий критерий однородности отображения $f : R^n \to R$ [1].

Теорема. *Отображение $f : R^n \to R$ является положительно однородным степени n, если равенство $f(tx) = t^n f(x)$ справедливо для всех $x \in R^n$ и для всех трансцендентных чисел из произвольного промежутка $[a, b] \subset R^+$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Поликанова И. В.* Некоторые критерии однородности функции // Вестник БГПУ. 2008. № 8. С. 73–78.

О КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ

ON CONFORMAL MAPPINGS OF NON-OVERLAPPING DOMAINS

Прилепкина Е. Г.

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;
pril-elena@yandex.ru

Задачи о конформных отображениях неналегающих областей восходят к М. А. Лаврентьеву и имеют богатую историю. Классический результат Лаврентьева (см., например, [1]), касается конформных и однолистных отображений $f_1(z)$, $f_2(z)$ единичного круга на две неналегающие области B_1, B_2 и заключается в неравенстве

$$|f_1'(0)f_2'(0)| \le |f_1(0) - f_2(0)|^2.$$

Для конечносвязной области B без вырожденных граничных точек обозначим символом $\varphi_B(z; a, b)$ конформное и однолистное отображение области B на плоскость с радиальными разрезами, причем такое, что заданные различные конечные точки a, b переходят соответственно в 0 и ∞, и в окрестности b имеет место разложение $1/(z-b)+a_0+a_1(z-b)+\ldots$. Пусть B_m, $m = 1, \ldots, n$, — попарно неналегающие конечносвязные области, $a_m, b_m \in B_m$ и $\varphi_m(z) := \varphi_{B_m}(z; a_m, b_m)$. В настоящем докладе рассматриваются неравенства для модулей производных $|\varphi_m'(a_m)|$, полученные с помощью техники обобщенных конденсаторов. В частности, доказано неравенство

$$\prod_{m=1}^{n} |\varphi_m'(a_m)| \le \frac{\prod' |a_i - a_j||b_i - b_j|}{\prod |a_i - b_j|^2},$$

где $'$ у произведения означает отсутствие нулевого множителя и $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 08–01–00028).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ОПЕРАТОРА РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ, СОДЕРЖАЩИЕ СУПРЕМУМ

INEQUALITIES FOR THE RIEMANN–LIOUVILLE OPERATOR INVOLVING SUPREMA

Прохоров Д. В.

Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, Россия; prohorov@as.khb.ru

Обозначим через $\mathfrak{M}$ класс всех неотрицательных измеримых по Лебегу на $(0,\infty)$ функций. В последнее время в ряде работ исследуются операторы, содержащие супремум (см. [1, 2]). Так, например, в работе [1] получены критерии ограниченности в весовых пространствах Лебега оператора Харди, содержащего супремум. В данной работе рассматривается весовое неравенство

$$\left(\int_0^\infty [(R_\alpha f)(x)]^q w(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left(\int_0^\infty f(x)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f\in\mathfrak{M},$$

характеризующее $L^p - L^q(w)$ ограниченность оператора R_α вида

$$(R_\alpha f)(t) = \sup_{t\le s<\infty} u(s)\int_0^s \frac{f(y)v(y)\,dy}{(s-y)^{1-\alpha}},$$

где $\alpha\in(0,1)$, $w,v\in\mathfrak{M}$ и u — непрерывная неотрицательная функция на $(0,\infty)$. Получены критерии выполнения этого неравенства в случае невозрастания на $(0,\infty)$ либо функции u, либо функции v.

Работа частично поддержана грантами РФФИ (проекты 07–01–00054–а и 09–01–98516–р_восток_а) и Фондом содействия отечественной науке.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gogatishvili A., Opic B., Pick L.* Weighted inequalities for Hardy-type operators involving suprema // Collect. Math. 2006. V. 57, № 3. P. 227–255.
2. *Gogatishvili A., Pick L.* A reduction theorem for supremum operators // J. Comput. Appl. Math. 2007. V. 208, № 1. P. 270–279.

НОСИТЕЛЬ ДИФФУЗИИ В КЛАСТЕРНОМ ПУАССОНОВСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

THE SUPPORT OF DIFFUSION IN THE CLUSTER POISSON SPACE

Пугачёв О. В.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия; opugachev@yandex.ru

Пусть Γ — пространство конфигураций (локально конечных множеств) на $\mathbb{R}^d$; $\ddot{\Gamma}$ — пространство конфигураций с кратными точками. Кластерная пуассоновская конфигурация γ — случайное множество в $\mathbb{R}^d$, строится так: каждая из точек пуассоновской конфигурации γ_c с мерой интенсивности σ_c независимо порождает пуассоновскую конфигурацию γ_x с мерой интенсивности $\sigma_x = \sigma_0(\cdot - x)$; наконец,

$$\gamma = \bigcup_{x \in \gamma_c} \gamma_x.$$

Предположим, что мера σ_0 конечна, и что выполнено одно из двух условий:
а) для всякого компакта $K \subset \mathbb{R}^d$ имеем $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^d} \sigma_c(K - x) < \infty$;
б) носитель меры σ_0 ограничен.

Тогда (см. [2]) кластерная пуассоновская конфигурация почти всегда локально конечна ($\gamma \in \ddot{\Gamma}$). Если меры σ_c и σ_0 имеют плотности ρ_c и ρ_0 относительно меры Лебега, то почти всегда $\gamma \in \Gamma$.

В [2] был построен диффузионный процесс $\{\gamma(t)\}$ на $\ddot{\Gamma}$ со стационарной мерой, соответствующей кластерному пуассоновскому распределению. Хотя мера множества $\ddot{\Gamma} \backslash \Gamma$ равна нулю, из этого не следует, что почти все траектории диффузионного процесса будут лежать в Γ. Чтобы доказать это утверждение, требуется оценка емкости, порожденной соболевским классом $W^{1,2}$:

$$C_{1,2}(\ddot{\Gamma} \backslash \Gamma) = 0.$$

Такую оценку удалось получить при дополнительном условии $\rho_0 \in L^1(dx) \cap L^2(dx)$. Таким образом, в этом случае можно считать $\{\gamma(t)\}$ диффузионным процессом на Γ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Röckner M.* Analysis and geometry on configuration spaces // J. Funct. Anal. 1998. V. 154, № 2. P. 444–500.
2. *Bogachev L., Daletskii A.* Poisson cluster measures: Quasi-invariance, integration by parts and equilibrium stochastic dynamics // J. Funct. Anal. 2009. V. 256, № 1. P. 432–478.
3. *Röckner M., Schmuland B.* A support property for infinite-dimensional interacting diffusion processes // C. R. Acad. Sci. Paris, Série I. 1998. V. 326. P. 359–364.

РЕШЕТКИ ПРАВЫХ ДЕЛИТЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

LATTICES OF RIGHT DIVISORS OF LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL OPERATORS

Пургин А. В.

Красноярский государственный педагогический университет, Красноярск, Россия; pav1972@yandex.ru

Рассматриваются некоторые алгебраические вопросы теории факторизации линейных обыкновенных дифференциальных операторов (ЛОДО) с коэффициентами из поля рациональных функций $Q(x)$, [1–3]. Для исследования структуры всех возможных правых делителей ЛОДО используются методы теории решеток. Символом P будем обозначать линейный обыкновенный дифференциальный оператор $P = D^n + f_1(x)D^{n-1} + \ldots + f_n(x), \quad D = d/dx$, где $f_s(x)$ принадлежат полю $Q(x)$. Введем отношение частичного порядка на множестве всех правых делителей произвольного ЛОДО P следующим образом: пусть P_1 и P_2 — некоторые правые делители оператора P, будем говорить, что $P_1 \leqslant P_2$, если оператор P_1 является правым делителем оператора P_2. Частично упорядоченное множество правых делителей произвольного ЛОДО P является решеткой с операциями взятия точной нижней грани $\inf\{P_1, P_2\} = \mathrm{rGCD}(P_1, P_2)$ и точной верхней грани $\sup\{P_1, P_2\} = \mathrm{rLCM}(P_1, P_2)$, где $\mathrm{rGCD}(P_1, P_2)$ обозначает оператор, являющийся правым наибольшим общим делителем ненулевых операторов P_1 и P_2, а $\mathrm{rLCM}(P_1, P_2)$ — оператор, являющийся их правым наименьшим общим кратным. Пусть $P = P_1 \circ P_2 \circ \ldots P_i \circ P_{i+1} \circ P_{i+2} \circ \ldots \circ P_k$ — некоторая факторизация линейного обыкновенного дифференциального оператора P на неприводимые множители P_i. Для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$ обозначим символом $\langle P_i \rangle$ следующий оператор: $\langle P_i \rangle = P_i \circ P_{i+1} \circ P_{i+2} \circ \ldots \circ P_k$ — именно он и является элементом решетки правых делителей оператора.

Теорема 1. *Для ЛОДО P следующие условия эквивалентны:* 1. *Решетка правых делителей ЛОДО P дистрибутивна;* 2. *Все факторы оператора P непараметризованы.*

Теорема 2. *Пусть L — произвольная конечная дистрибутивная решетка высоты n. Тогда существует линейный обыкновенный дифференциальный оператор P порядка n (не обязательно единственный) с коэффициентами из дифференциального поля рациональных функций $Q(x)$ такой, что решетка L_P его правых делителей изоморфна L.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *van Hoeij M.* Factorization of differential operators with rational functions coefficients // J. Symbolic Comput. 1997. V. 24. P. 537–561.
2. *Tsarev S. P.* An algorithm for complete enumeration of all factorizations of a linear ordinary differential operator // Proc. of ISSAC'96. ACM Press, 1996. P. 226–231.
3. *Абрамов С. А., Царев С. П.* О периферийной факторизации линейных дифференциальных операторов // Программирование. 1997. №1. С. 59–67.

КОНФОРМНО-ПЛОСКИЕ СПЛАЙНЫ CONFORMALLY FLAT SPLINES

Родионов Е. Д.[1], Славский В. В.[2]

[1]*Алтайская государственная педагогическая академия, Барнаул, Россия;* edr2002_ds@mail.ru

[2]*Югорский научно-исследовательский институт информационных технологий, Ханты-Мансийск, Россия;* slavsky_ds@uriit.ru

В данной работе мы применяем полиэдральные конформно-плоские метрики для построения специального типа сплайнов. Построение сплайнов основано на связи между конформно-плоскими метриками ограниченной кривизны и выпуклыми подмножествами в пространстве Лобачевского. Поясним специфику построения конформно-плоских сплайнов на примере построения кусочно-линейных выпуклых вверх функций согласно формуле

$$f(x) = \min_i \{\lambda_i(x) : i = 1, \dots, m\},$$

где $\lambda_i(x)$ — линейные функции. Особенностью данной формулы является то, что для вычисления $f(x)$ не требуется сетка разбиения области определения. Конформно-плоский сплайн определяется аналогичной формулой

$$g(x) = \min_i [\kappa] \{\mu_i(x) : i = 1, \dots, m\},$$

где $\mu_i(x)$ — квадратичные функции вида $\mu_i(x) = a_i||x||^2 + 2\langle b_i, x\rangle + c_i$ определяющие конформно-плоские метрики $ds^2 = \frac{dx^2}{\mu_i^2(x)}$ постоянной кривизны $\kappa_i > 0$, $i = 1, \dots, m$. Оператор $\min[\kappa]$ соответствует взятию выпуклой оболочки в пространстве Лобачевского кривизны $(-\kappa)$, где $\kappa = \max_i \kappa_i$. Построение сплайна $g(x)$ также не требует сетки разбиения области определения, $g(x)$ имеет гладкость $C^{1,1}$ в отличие от $f(x)$. Кроме того, любая функция класса C^2 может быть аппроксимирована таким сплайном в метрике C^1. Вычислительная сложность сплайна $g(x)$ аналогична $f(x)$ и пропорциональна m. Формула для сплайна $g(x)$ позволяет также эффективно вычислять градиент $g(x)$.

Данные исследования поддержаны РФФИ(проект № 08–01–98001), а также Советом по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ–5682.2008.1).

ОТОБРАЖЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

SOBOLEV TYPE MAPPINGS BETWEEN METRIC SPACES

Романов А. С.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
asrom@math.nsc.ru

В настоящее время весьма активно изучаются [1] различные классы функций соболевского типа $f : X \to R$, с областью определения в метрическом пространстве (X, ρ), на котором задана борелевская мера μ. Определение таких классов основано на сопоставлении измеримой функции f некоторой суммируемой по мере μ функции g, которая в каком-либо смысле выполняет роль «метрического аналога модуля градиента» функции f.

С другой стороны, Ю. Г. Решетняком [2, 3] дано весьма универсальное определение для соболевских отображений, действующих из областей евклидова пространства R^n в метрическом пространстве (Y, d). Это определение практически без изменений переносится и на случай отображений метрических пространств, что позволяет определить классы отображений соболевского типа, которые действуют из метрического пространства (X, ρ) в метрическое пространство (Y, d).

Для таких отображений соболевского типа выполняются теоремы вложения аналогичные доказанным в [2, 3]. В случае, когда метрические пространства (X, ρ) и (Y, d) являются s-регулярными, отображение, у которого «метрический аналог модуля градиента» принадлежит пространству Лоренца $L_{s,1}$, оказывается s-абсолютно непрерывным и обладает N-свойством Лузина.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 08–01–00531–a), Совета по грантам Президента РФ для поддержки научных школ (НШ–5682.2008.1) и Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Franchi B., Hajlasz P., Koskela P.* Definitions of Sobolev classes on metric spaces // Ann. Inst. Fourier. 1999. V. 49, № 6. P. 1903–1924.
2. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997, Т. 38, № 3. С. 657–675.
3. *Решетняк Ю. Г.* К теории соболевских классов функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 2006, Т. 47, № 1. С. 146–168.

ОБ ОЦЕНКАХ НОРМ БЕСОВА РЕШЕНИЙ СУБЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

ESTIMATES OF THE BESOV NORMS OF SOLUTIONS TO SUBELLIPTIC EQUATIONS

Романовский Н. Н.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
nnrom@math.nsc.ru

В течении нескольких последних десятилетий интенсивно развивается теория субэллиптических уравнений. Мы изучаем слабые решения линейных субэллиптических уравнений и, соответственно, записываем рассматриваемые уравнения в дивергентном виде

$$\sum_{i=1}^{m}\left(X_i\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(x)X_ju(x)+X_i(b_i(x)u(x))\right)=\sum_{i=1}^{m}X_if_i(x),\quad x\in\Omega\subset\mathbb{R}^n,$$

где $X_1,\dots,X_m$ — система гладких векторных полей, удовлетворяющая условиям Хермандера ($m<n$). Мы рассматриваем наиболее простой, модельный случай субэллиптических уравнений, часто возникающий в приложениях: $n=3$, $m=2$, $X_1=\frac{\partial}{\partial x_1}+2x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$, $X_2=\frac{\partial}{\partial x_2}-2x_1\frac{\partial}{\partial x_3}$. Легко видеть, что $[X_1,X_2]=-4\frac{\partial}{\partial x_3}$. Поля X_1, X_2 и $\frac{\partial}{\partial x_3}$ образуют стандартный базис алгебры Ли лево-инвариантных векторных полей группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1$. Наряду с векторными полями X_1, X_2 рассмотрим поля $\tilde{X}_1=\frac{\partial}{\partial x_1}-2x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$, $\tilde{X}_2=\frac{\partial}{\partial x_2}+2x_1\frac{\partial}{\partial x_3}$. Векторные поля $\tilde{X}_1$ и $\tilde{X}_2$ право-инвариантны относительно группового умножения на $\mathbb{H}^1$, кроме того, они перестановочны с полями X_1, X_2.

Известно, что оценки Шаудера играют важную роль в теории линейных и квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка. В силу некоторых геометрических аспектов пока не удалось доказать прямого аналога глобальных оценок Шаудера для решений субэллиптических уравнений. Наш подход состоит в том, что вместо того, чтобы оценить решения субэллиптических уравнений по нормам пространств функций, удовлетворяющих условию Гельдера, мы оцениваем их по нормам пространств функций, разностные отношения которых удовлетворяют некоторым интегральным условиям (пространств Бесова). При определении подходящих пространств Бесова мы требуем, чтобы производные рассматриваемых функций вдоль полей $\tilde{X}_1$ и $\tilde{X}_2$ принадлежали пространству Бесова в смысле разностных отношений вдоль векторных полей X_1, X_2 с «дифференцируемостью» $0\le s\le 1$. Оценки решений задачи Дирихле для изучаемого уравнения мы выводим по норме пространства Бесова с показателем суммируемости $p=2$. Коэффициенты рассматриваемого уравнения при этом должны принадлежать пространствам Бесова с более высокими показателями суммируемости. Для a_{ij} должен быть показатель суммируемости $p_1>\frac{4}{s}$, для b_i — $p_2>\frac{4}{1+s}$. Область Ω предполагается ограниченной, с гладкой границей. Попутно мы доказываем теоремы вложения для рассматриваемых пространств Бесова, аналогичные теоремам вложения Соболева, а также интерполяционные неравенства аналогичны интерполяционным неравенствам для пространств функций, удовлетворяющих условию Гельдера. Также мы доказываем ограниченость сингулярных интегральных операторов левой свертки по нормам рассматриваемых пространств Бесова.

НУЛИ ПРОИЗВОДНЫХ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, ОТВЕЧАЮЩИХ УРАВНЕНИЯМ ЧАПЛЫГИНА

THE ZEROS OF THE DERIVATIVES OF THE QUASICONFORMAL MAPPINGS CORRESPONDING TO THE CHAPLYGIN EQUATIONS

Рылов А. И.

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск, Россия;
rylov@math.nsc.ru

В работе демонстрируются возможности нелинейных уравнений Чаплыгина, в отличие от более общих уравнений Бельтрами [1], для выявления некоторых общих свойств, касающихся всей рассматриваемой области квазиконформного отображения, в частности, для вычисления суммарного показателя нулей производных.

Рассмотрим нелинейные уравнения Чаплыгина на плоскости потенциала (1) и некоторый их аналог (2) [2-4]

$$kz_\varphi + \theta_\psi = 0, \quad z_\psi - \theta_\varphi = 0 \tag{1}$$

$$kU_\varphi - V_\psi = 0, \qquad U_\psi + V_\varphi = 0 \tag{2}$$

$$z = \int \frac{\rho dq}{q}, \quad k = \frac{1-M^2}{\rho^2}, \quad U = \frac{z_\varphi}{kz_\varphi^2 + \theta_\varphi^2}, \quad V = \frac{\theta_\varphi}{kz_\varphi^2 + \theta_\varphi^2},$$

φ, ψ — потенциал и функция тока, ρ — плотность, q, θ — модуль и угол наклона вектора скорости, M — число Маха.

Система (2) позволяет сделать следующие выводы о свойствах линий нулевых значений компонент вектора ускорения в дозвуковых течениях.

На линиях $U = z_\varphi = 0$ и $V = \theta_\varphi = 0$, выходящих из нуля производных (из точки $z_\varphi = z_\psi = \theta_\varphi = \theta_\psi = 0$), вне исходной точки $\theta_\varphi \neq 0$ и $z_\varphi \neq 0$ соответственно. Следовательно, указанные линии, вышедшие из одного нуля, не могут прийти в другой нуль производных [3, 4]. Иными словами, свойства линий нулевых значений компонент вектора ускорения квазиконформных отображений, описываемых уравнениями Чаплыгина (1) и их аналогом (2) в значительной степени идентичны свойствам таким же линий в конформных отображениях.

Далее, локальный анализ нулей производных, в том числе и бесконечно удаленной точки, дает зависимость числа линий $U = z_\varphi = 0$ и $V = \theta_\varphi = 0$, выходящих из нуля, от степени нуля.

Рассмотрим для определенности дозвуковое обтекание тела конечных размеров равномерным потоком с параметрами на бесконечности $q = q_\infty, \theta = 0$ (течение слева направо), при котором точки растекания и схода находятся на теле и, тем самым исключены точки торможения $q = 0, z = -\infty$ вне обтекаемого тела. Обозначим через N суммарный показатель нулей производных в области решения вне тела. Тогда новый результат формулируется следующим образом.

Теорема. *При круговом обходе обтекаемого тела по часовой стрелке вектор ускорения совершает N оборотов по часовой стрелке относительно линии тока.*

Последняя оговорка важна при анализе поведения вектора ускорения в окрестности точек растекания и схода.

Замечание. Теорема допускает обобщения на случай иных границ, включением в рассмотрение, помимо нулей производных, внутренних точек торможения, а также использованием некоторого более общего семейства линий уровня, включающего в себя линии $U = z_\varphi = 0$ и $V = \theta_\varphi = 0$.

В заключение отметим, что в известной теореме из ТФКП о логарифмических вычетах вычисление оборотов вектора зависимых переменных приводится для иллюстрации полученной в теореме формулы [5]. В то же время в настоящей работе нахождение числа оборотов вектора ускорения с использованием анализа линий уровня нулевых значений компонент вектора ускрения является самостоятельным и, скорее всего, единственным алгоритмом нахождения числа нулей производных квазиконформных отображений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Сибирского отделения Российской академии наук (проект № 103, постановление № 10 2009 г.)

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир. 1966.
2. *Рылов А. И.* О свойствах однородных систем уравнений газовой динамики для компонент вектора ускорения // Сиб. журн. индустр. мат. 1998. Т. I, № 2. С. 169–174.
3. *Рылов А. И.* Топология линий нулевых значений компонент вектора ускорения // Прикл. матем. и мех. 2006. Т. 70, вып. 3. С. 400–411.
4. *Рылов А. И.* Геометрические свойства нулей производных квазилинейных уравнений Чаплыгина в области эллиптичности // Докл. АН. 2006. Т. 409, № 2. С. 598–600.
5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука. 1973.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ C^1-ГЛАДКИХ НОРМАЛЬНЫХ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

AN ANALYTIC DESCRIPTION OF C^1-SMOOTH NORMAL ENVELOPING SURFACES

Сабитов И. Х.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; isabitov@mail.ru

Класс нормальных развертывающихся поверхностей был введен С. З. Шефелем. По его определению, это C^1-гладкие поверхности, от которых нельзя отрезать горбушку, и у которых через каждую точку проходит прямолинейный отрезок со стационарной вдоль него касательной плоскостью к поверхности. Он же доказал, что такие поверхности имеют локально евклидовую метрику и являются поверхностями ограниченной внешней положительной кривизны в смысле Ю. Д. Бураго (ОВПКБ). Верно и обратное: C^1-гладкие поверхности класса ОВПКБ с локально евклидовой метрикой являются нормальными развертывающимися поверхностями. Эта теория, развитая в 70-е годы прошлого века в работах Ю. Д. Бураго и С. З. Шефеля, не имеет, однако, аналитического аппарата и она дает чисто качественно-геометрическое описание объекта исследования. Пусть, например, мы знаем, что C^1-гладкая поверхность имеет линейчатое строение, но мы не можем проверить, является ли нормаль постоянной вдоль образующих, так как даже для поверхностей класса C^∞ может быть, что направления образующих не имеют первой производной, и поэтому мы не можем даже вычислить нормаль к поверхности. В докладе будет показано, что на самом деле существует такое представление радиус-вектора поверхности, через которое можно получить необходимое и достаточное условие ее принадлежности к классу нормальных развертывающихся поверхностей.

Содержание доклада изложено более детально в статье [1].

Работа автора над данным докладом частично поддержана грантами РФФИ, № 09–01–00179, и Минобразования РФ, РНП 2.1.1.3704.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сабитов И. Х.* Линейчатые развертывающиеся поверхности с малой гладкостью // Сиб. мат. журн. Т. 51, № 5 (в печати).

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА С ОСОБЕННОСТЬЮ ИНДЕКСА

ON THE SOLVABILITY OF THE RIEMANN–HILBERT BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH SINGULARITIES OF THE INDEX

Салимов Р. Б.[1]**, Шабалин П. Л.**[2]

[1]*Казанский архитектурно-строительный университет, Казань, Россия;*
`Pavel.Shabalin@mail.ru`

[2]*Казанский архитектурно-строительный университет, Казань, Россия;*
`Pavel.Shabalin@mail.ru`

Рассмотрена задача об определении аналитической в верхней полуплоскости D функции $F(z)$ по краевому условию $a(t)\mathrm{Re}F(t)-b(t)\mathrm{Im}F(t)=c(t)$, где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — заданные функции точки контура $L=\partial D$, в некоторых случаях обращения индекса задачи (т. е. деленного на π полного приращения функции $\nu(t)=\arg G(t)$, $G(t)=a(t)-ib(t)$ при обходе вещественной оси в положительном направлении) в бесконечность. Описаны картины разрешимости задачи в ситуации, когда непрерывная составляющая $\varphi(t)$ функции $\nu(t)$ имеет вид $\varphi(t)=\nu^- t^\rho+\tilde\varphi(t),\ t>0$, и $\varphi(t)=\nu^+|t|^\rho+\tilde\varphi(t),\ t<0$, где ν^-, ν^+, ρ — постоянные, ${\nu^-}^2+{\nu^+}^2\neq 0$, $\tilde\varphi(t)$, $c(t)/|G(t)|$ — функции класса $H_L(\mu)$, а функция скачков $\varphi_1(t)=\nu(t)-\varphi(t)$ имеет разрывы первого рода в монотонных последовательностях точек $\{t_k\}$, $t_k>0$, и $\{t_{-k}\}$, $t_{-k}<0$, $k=\overline{1,\infty}$, $\lim_{k\to\infty}t_k=\infty$, $\lim_{k\to\infty}t_{-k}=-\infty$, причем ряды, составленные из дробных частей $\kappa_k>0$, $\kappa_{-k}>0$ скачков функции $\nu(t)/\pi$ в точках t_k, t_{-k} соответственно, расходятся. Решение этой задачи ищется в классе аналитических в верхней полуплоскости функций, ограниченных, либо допускающих интегрируемые особенности в точках t_k, t_{-k} и имеющих определенное поведение в окрестности бесконечно удаленной точки. Предполагаем, что последовательности точек разрыва коэффициентов и функции $n_+^*(t)=\sum_{j=1}^k\kappa_j,\ t\in(t_k,t_{k+1})$, $n_-^*(t)=\sum_{j=1}^k\kappa_j,\ t\in(-t_{-k+1},-t_{-k})$, удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{t_k}<\infty,\ \lim_{t\to+\infty}\frac{n_+^*(t)}{t^{\kappa_+}}=\Delta_+,\ 2n_+^*(t_k)=\Delta_+(t_{k+1}^{\kappa_+}+t_k^{\kappa_+}),\tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{-t_{-k}}<\infty,\ \lim_{t\to+\infty}\frac{n_-^*(t)}{t^{\kappa_-}}=\Delta_-,\ 2n_-^*(t_k)=\Delta_-((-t_{-(k+1)})^{\kappa_-}+(-t_{-k})^{\kappa_-}).\tag{2}$$

При различных значениях параметров ρ, κ_+^*, κ_-^* исследованы вопросы существования и числа решений задачи. Например, справедливы

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1), (2), *причем* $\max\{\kappa_+^*,\kappa_-^*\}<\rho<1/2$. *Если* a) $\nu^-\cos(\pi\rho)>\nu^+$, $\nu^+\cos(\pi\rho)<\nu^-$, *то неоднородная задача безусловно разрешима в классе ограниченных функций,а однородная имеет бесконечное множество линейно независимых решений;* b) *если* $\nu^-\cos(\pi\rho)<\nu^+$, *либо* $\nu^+\cos(\pi\rho)>\nu^-$, *то однородная краевая задача не имеет нетривиальных ограниченных решений.*

Теорема 2. *Если выполнены условия* (1), (2), $\rho<\max\{\kappa_+^*,\kappa_-^*\}$, *то однородная задача не имеет нетривиальных ограниченных решений.*

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТОВ К ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

APPLICATION OF THE THEORY OF GEOMETRICAL INVARIANTS TO DIGITAL HANDLING OF IMAGES

Самарина О. В.[1], **Славский В. В.**[2]

[1]*Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия;* SamarinaOV@admhmao.ru

[2]*Югорский научно-исследовательский институт информационных технологий, Ханты-Мансийск, Россия;* slavsky2004@mail.ru

Инварианты изображения относительно различных групп преобразований являются эффективными характеристиками изображения, которые можно использовать в самых различных прикладных задачах анализа и обработки изображений [1, 2]. В математической постановке N-канальное изображение представляет собой N неотрицательных функций в некоторой области на плоскости. Будем предполагать, что функции 1-раз непрерывно дифференцируемы, тогда справедливо разложение Тейлора 1-го порядка с центром в произвольной точке области. Рассмотрим группу P_M проективных преобразований плоскости с неподвижной точкой M. Предположим, что снимок подвергся проективному преобразованию из P_M и калибровке каналов (каждый канал умножился на свой коэффициент нормировки). Преобразования такого типа образуют некоммутативную группу Ли G изоморфную группе $P_M \times R^N$ действующую в пространстве $J^1\left(R^2_M, R^N\right)$ 1-струй (усеченных тейлоровских разложений) размерности $3N$.

Теорема 1. *Размерность пространства I функционально независимых инвариантов относительно группы преобразований G совпадает с размерностью Грасманова многообразия двумерных плоскостей в R^N:*

$$\dim(I) = 2 \cdot (N-2),$$

где N — число каналов. В случае трехканального изображения $\dim(I) = 2$. В работе указан явный вид таких инвариантов.

Данные исследования поддержаны Советом по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ–5682.2008.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mundy J. L., Zisserman A.* Geometric Invariance in Computer Vision. Boston: MIT Press, 1992.
2. *Самарина О. В., Славский В. В.* Инварианты многоканального изображения // Изв. ОрелГТУ. Сер. «Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологий: информационные системы и технологии». Орел. 2007. № 4–2/268(535). С. 47–56.

О КОНСТАНТАХ ОЦЕНОК СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ ФОН НЕЙМАНА

ON THE CONSTANTS IN THE ESTIMATES OF THE CONVERGENCE SPEED IN THE VON NEUMANN ERGODIC THEOREM

Седалищев В. В.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
vvs1988@yandex.ru

Пусть (Ω, λ) — пространство с вероятностной мерой, T — его автоморфизм. Для $f \in L_2(\Omega)$, $\omega \in \Omega$ обозначим $A_n f(\omega) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega)$. Через U_T обозначим унитарный оператор, действующий в $L_2(\Omega)$ по формуле $U_T f = f \circ T$. Тогда статистическая эргодическая теорема фон Неймана утверждает существование предела в $L_2(\Omega)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U_T^k f = \lim_{n\to\infty} A_n f = f^*,$$

причём f^* оказывается ортогональной проекцией f на подпространство неподвижных векторов оператора U_T. Введём обозначение для корреляционных коэффициентов: $b_k f = (U_T^k f, f)$. Наконец, через σ_f обозначим спектральную меру, т.е. такую конечную борелевскую меру на единичной окружности, что $b_k f = \int\limits_{(-\pi,\pi]} e^{ikx} d\sigma_f(x)$ для всех целых k.

Как было показано А. Г. Качуровским в обзоре [1], степенная скорость сходимости в эргодической теореме фон Неймана эквивалентна наличию степенной же особенности в нуле спектральной меры соответствующей динамической системы, причём вопрос об асимптотике этих эквивалентных друг другу параметров эргодической теоремы обсуждался в терминах «O» и «o» без выписывания связывающих их конкретных констант. Уточнением этого результата в направлении установления функциональных связей между соответствующими константами является следующая

Теорема. *Пусть* $\alpha \in [0, 2)$. *Тогда:* 1) *Если спектральная мера* σ_{f-f^*} *имеет степенную особенность в нуле, т.е. если для некоторой положительной константы* A *при всех* $\delta \in (0, \pi]$ *выполняется неравенство* $\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] \le A\delta^\alpha$, *то скорость сходимости эргодических средних* $A_n f$ *— степенная, т. е. для любого натурального* n *будет* $\|A_n f - f^*\|_2^2 \le A\pi^\alpha \left(1 + \frac{8}{2-\alpha}\right) n^{-\alpha}$. 2) *Если скорость сходимости эргодических средних* $A_n f$ *— степенная, т. е. если для некоторой положительной константы* B *при всех натуральных* n *выполняется неравенство* $\|A_n f - f^*\|_2^2 \le Bn^{-\alpha}$, *то спектральная мера* σ_{f-f^*} *имеет степенную особенность в нуле, т. е. для любого* $\delta \in (0, \pi]$ *будет* $\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] \le B\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2-\alpha}\delta^\alpha$.

Замечание. В случае $\alpha = 2$ аналог теоремы не имеет места, ни с какими константами [1], а скорости сходимости с $\alpha > 2$ при $f - f^* \not\equiv 0$, как было показано в [2], просто не бывает.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качуровский А. Г.* Скорости сходимости в эргодических теоремах // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 4. С. 73–124.
2. *Гапошкин В.Ф.* Сходимость рядов, связанных со стационарными последовательностями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39, № 6. С. 1366–1392.

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ КАРТИН ЛИНИЙ ТОКА НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

ON THE GEOMETRICAL CLASSIFICATION OF THE STREAMLINES ON A RIEMANN SURFACE

Семенко Е. В.

Новосибирский государственный педагогический университет, Новосибирск, Россия; semenko54@mail.ru

При моделировании сложных картин плоских течений можно использовать перевод части потока на второй лист римановой поверхности, подобно классической схеме Эфроса [1] или методам В.М.Шурыгина [2]. При этом риманова поверхность представляет собой поверхность с дублем $D = D^+ \cup D^- \cup L$, D^- — дубль D^+, $L = \partial D^+ = \partial D^-$. Комплексная скорость однозначно определяется ρ+3 вещественными параметрами, где ρ – род D [3]. Ясно, что картина линий тока (схема течения) определяется набором параметров. Таким образом встает задача классификации различных топологически не эквивалентных картин линий тока в зависимости от значений параметров.

Рассматривается подобная задача для поверхности рода один (тора), число параметров равно четырем. Здесь можно считать D^+ двусвязной областью комплексной плоскости, комплексная скорость $f(z)$ аналитична в D^+, включая бесконечность, $f(\infty)$ физически интерпретируется как комплексная скорость набегающего потока [4]. В качестве задающих течение параметров используем $f(\infty) = A+iB$ (два параметра) и циркуляции вектора скорости вокруг компонент связности границы $\gamma_{1,2} = \int\limits_{L_{1,2}} f(z)\,dz$, $L_1 \cup L_2 = \partial D^+$. Осуществляется переход в плоскость комплексного потенциала специального вида, в которой область течения представляет собой плоскость с двумя разрезами по отрезкам вещественной оси. В этой плоскости можно непосредственно выразить комплексную скорость с помощью иррациональных функций комплексного переменного с коэффициентами, зависящими от параметров. Явный вид решения позволяет проанализировать вид линий тока в зависимости от значений задающих параметров. В результате все множество параметров $X = \{\, M = (A, B, \gamma_1, \gamma_2)\,\}$ конечным числом гладких поверхностей Y_j разделяется на конечное число областей, каждой из которых соответствует одна (с точностью до топологической эквивалентности) схема течения. Точки самих этих поверхностей $M \in Y_j$ будут точками бифуркации, при этом им тоже соответствуют определеные схемы. Точками бифуркации этих схем в свою очередь будут линии пересечения двух разделяющих поверхностей $M \in S_{jk} = Y_j \cap Y_k$ и, наконец, их точки бифуркации – точки пересечения трех поверхностей $M_{jkl} = Y_j \cap Y_k \cap Y_l$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биркгоф Г., Сарантонелло Э.* Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964.
2. *Шурыгин В. М.* Аэродинамика тел со струями. М.: Машиностроение, 1977.
3. *Семенко Е. В.* Краевые задачи обтекания на римановой поверхности // В сб. «Гидродинамика больших скоростей и численное моделирование». Материалы III международной летней научной школы. Кемерово, 2006. С. 511–515.
4. *Семенко Е. В.* Течения на римановой поверхности: классификация течений на торе // Сиб. журн. индустр. мат. 2009. Т. XII, № 1(37). С. 136–150.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ ГИДРОДИНАМИКИ

INTEGRAL IDENTITIES FOR SOLENOIDAL VECTOR FIELDS AND THEIR APPLICATIONS TO HYDRODYNAMICS PROBLEMS

Семёнов В. И.

Кузбасский региональный институт повышения квалификации и переподготовки работников образования, Кемерово, Россия;
visemenov@rambler.ru

Разложение пространства векторных полей $L_2(\Omega) = J(\Omega) \oplus G(\Omega)$ в прямую сумму соленоидальных и потенциальных полей (см. [1]) дает пример одного из интегральных тождеств, которое необходимо для обоснования разрешимости уравнений Навье — Стокса. На самом деле, из условия соленоидальности выводятся принципиально новые интегральные тождества, которые позволяют, более глубоко, исследовать как уравнения Навье — Стокса, так и уравнения Эйлера, динамику несжимаемой жидкости. Например, для любой тройки соленоидальных и финитных векторных полей, независимо от размерности пространства, справедливо следующее равенство:

$$\int (w_{i,\,j} + w_{j,\,i})c_{ki}(v)c_{kj}(u)\,dx = -\int w_i(c_{ki}(u)\triangle v_k + c_{ki}(v)\triangle u_k)\,dx.$$

Здесь по повторяющимся индексам в произведениях выполняется суммирование, символ $w_{i,\,j}$ означает дифференцирование i-ой координаты по переменной x_j, $c_{ki}(u) = u_{k,\,i} - u_{i,\,k}$. Отсюда в размерности $n = 2$ имеем интегральное тождество:

$$\int u_i u_{k,\,i} \triangle u_k\,dx = 0. \tag{1}$$

В качестве следствия выводим, независящую от вязкости, априорную оценку

$$\|\nabla u\|_2 \le \|\nabla\varphi\|_2 + \int_0^t \|\nabla f\|_2\,dt$$

(из результатов [1] это не следует) для решений задачи Коши и начально-краевой задачи:

$$D_t u_k + \sum_{i=1}^n u_i u_{k,\,i} = \nu\Delta u_k + f_k - p_{,\,k},\ k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{3}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u(t,x)\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4}$$

Независимость априорной оценки от вязкости объясняет простоту плоскопараллельных течений, обеспечивает существование глобального слабого решения для уравнений Эйлера на плоскости и объясняет, почему это свойство верно для уравнений Навье — Стокса на плоскости (факт существования глобального решения впервые доказан О. А. Ладыженской).

Другая серия интегральных тождеств связана с работами [2] и [3]. В них показывается, что если решения задачи Коши имеют определенную асимптотику, то справедливы равенства:

$$\int u_j u_k \, dx = \frac{\delta_{jk}}{n} \|u\|_2^2, \quad j,k = 1, \ldots, n,$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. На самом деле, эти равенства есть следствие соленоидальности поля u, если потенциальная составляющая поля $u_i u_{,\,i}$ суммируема. Еще одна серия тождеств связана с импульсом жидкости $P = \frac{1}{2}\int x \times rot\ u dx$ и полным моментом импульса жидкости $M = \int x \times u \, dx$.

Доказательство последней серии тождеств проводится с применением однопараметрических групп квазиизометрических отображений [4] и дается в [5].

Если размерность $n \geq 3$, то интеграл в (1) может быть отличным от нуля. Более того, он выражается через тензор напряжений векторного поля. Это создает качественно иную ситуацию по сравнению с плоским случаем, но дает основную идею изучения обеих задач (2)–(4) в пространстве. Так как для решений системы (2)–(4) соответствующей гладкости справедливо равенство:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2 = \int u_i u_{k,\,i} \triangle u_k dx - \nu \|\triangle u\|_2^2,$$

то роль знака интеграла становится понятной.

Автор изменил конструкцию построения решений из [1] для обеих задач (2)–(4). Считая начальную скорость $\varphi \in W_2^3$, определим число и функционал формулами:

$$T_0 = 3^{-4}\frac{4\nu^3}{\|\nabla\varphi\|_2^4},\ l(\varphi) = \|\varphi\|_2 \cdot \|\nabla\varphi\|_2.$$

Введем основные параметры λ, μ, ε:

$$\lambda = \frac{4}{9}\frac{\nu^2}{l(\varphi)},\ \mu = \frac{T_*}{T_0},\ \lim_{t \to T_0} \|u(t,\cdot)\|_2^2 = \|\varphi\|_2^2(1 - \varepsilon\lambda^2),$$

где $[0, T_*)$ — наибольший промежуток существования решения класса $L_{p,\,q}$ и параметр ε определяется для значения $\lambda < 1$. При отсутствии внешних сил решение определено на промежутке $[0, T_0)$ в обеих задачах, движение жидкости в целом определяется универсальным числом. Оно зависит от коэффициента вязкости, начальной скорости и ее градиента. На турбулентность влияет величина диссипации ε кинетической энергии, по крайней мере в тех областях (ограниченных и неограниченных) с кусочно-гладкой границей, где каждая замкнутая кривая стягивается в точку. Здесь указывается промежуток существования решения в зависимости от параметра ε.

Описываются условия, для которых глобальные решения в обеих задачах (2)–(4) из класса $L_{p,\,q}$, $3/p + 2/q \leq 1$, существуют и не существуют. Указывается промежуток blow up для этих решений (оценка параметра μ).

В [6] О. А. Ладыженская написала, что она поставила бы основной вопрос (вопрос о существовании глобального решения) иначе: «Дают ли уравнения Навье — Стокса вместе с начальными и краевыми условиями детерминистическое описание динамики жидкости или не дают?» Все изложенное выше говорит о детерминизме уравнений Навье — Стокса. Но здесь следует добавить, что турбулентность наступает лишь тогда, когда значение кинетической энергии в момент времени T_0 удовлетворяет оценке: $\lim_{t\to T_0}\|u(t,\cdot)\|_2^2 \leq \|\varphi\|_2^2(1 - \lambda^2/2)$. Так как для всех решений справедливо неравенство $\lim_{t\to T_0}\|u(t,\cdot)\|_2^2 \geq \|\varphi\|_2^2(1 - \lambda^2)$, то с физической точки зрения наступление коллапса при минимальных значениях кинетической энергии естественно.

Опираясь на равномерные относительно t оценки различных норм решений задач (2)–(4), полученных автором, изложенные результаты, в основном, можно перенести на начальные данные φ из класса W_2^1. Т. е. известным результатам О. А. Ладыженской можно дать универсальную форму и дополнить их независимыми и качественно новыми оценками.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. 2-е изд. М: Наука, 1970.
2. *Доброхотов С. Ю., Шафаревич А. И.* О поведении на бесконечности поля скоростей несжимаемой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1996. № 4. С. 38–42.
3. *Brandolese L.* On the localization of symmetric and asymmetric solutions of the Navier–Stokes equations in R^n // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 2001. V. 332. P. 125–130.
4. *Семенов В. И.* Квазиконформные потоки в пространствах Мебиуса // Мат. сборник. 1982. Т. 119(161), № 3. С. 325–339.
5. *Семенов В. И.* Некоторые общие свойства соленоидальных векторных полей и их приложения к уравнениям Эйлера и Навье — Стокса на плоскости // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. 2008. Вып. 15, № 13(53). С. 109–129.
6. *Ладыженская О. А.* Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье — Стокса, существование и гладкость // Успехи мат. наук. 2003. Т. 58, № 2. С. 45–78.

КОГОМОЛОГИИ ОБОБЩЁННЫХ ПРОСТРАНСТВ ФЛАГОВ

COHOMOLOGY OF GENERALIZED FLAG SPASES

Скурихин Е. Е.

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;
eesku@iam.dvo.ru

Пусть (K, τ) — сайт Гротендика, D — предпучок множеств на K, $K_{D,\tau}$ — совокупность всех τ-замкнутых подпредпучков D [1, 3]. Для предпучка $A \in K_{D,\tau}$ через A' обозначаем элемент дуального упорядоченного множества $(K_{D,\tau})^o$, так что $A' \leq B' \Leftrightarrow B \subset A$.

Под обобщёнными пространствами флагов будем понимать различные множества конечных цепочек вида $A'_0 \leq A'_1 \leq \ldots \leq A'_n$, где $A'_i \in (K_{D,\tau})^o$. На каждом таком пространстве F задаётся топология Гротендика [2, 3]. Возникающие когомологии Гротендика F сравниваются с когомологиями Гротендика предпучка D. А именно, доказывается существование спектральной последовательности, связывающей когомологии F с когомологиями D. Поскольку когомологии обобщённого пространства флагов определяют длины входящих в него цепочек [2, 3], то тем самым устанавливается связь между когомологиями D и длинами цепочек, входящих в F.

Работа выполнена при поддержке гранта ДВО РАН 09–1–ОМН–06 и гранта НШ 2810.2008.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Скурихин Е. Е.* Пучковые когомологии и размерность упорядоченных множеств // Тр. Матем. ин-та им. В. А.Стеклова РАН. 2002. Т. 239. С. 289–317.
2. *Скурихин Е. Е., Сухонос А. Г.* Топологии Гротендика на пространствах Чу // Матем. труды. 2008. Т. 11, № 2. С. 159–186.
3. *Скурихин Е. Е.* Когомологии и размерности топологических и равномерных пространств. Владивосток: Дальнаука, 2008.

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ K-КОНТАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ НА 5-МЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ

LEFT INVARIANT STRUCTURES ON 5-DIMENSIONAL LIE GROUPS

Славолюбова Я. В.

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия;
jar1984@mail.ru

Контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) на многообразии M^{2n+1} называется K-контактной структурой, если поле Риба ξ порождает группу изометрий метрики g, т. е. поле Риба ξ является киллинговым относительно метрики g [1]. Если в качестве многообразия рассматривается группа Ли G^{2n+1}, то естественно рассматривать левоинвариантные контактные структуры. В этом случае контактная форма η, векторное поле Риба ξ, аффинор φ и ассоциированная метрика g задаются своими значениями в единице. Однопараметрическая подгруппа $a_t = exp(t\xi)$ действует на группе Ли G справа. Поскольку форма η является левоинвариантной, то из $\mathcal{L}_\xi \eta = 0$ следует, что $Ad^*_{a_t}\eta = \eta$ и $ad^*_\xi \eta = 0$. Рассмотрим замкнутую подгруппу F, которая сохраняет контактную форму η: $F = \{g \in G : \ Ad^*_g(\eta) = \eta\}$. В работе [3] показано, что подгруппа F является одномерной, контактная форма η является формой связности главного расслоения $\pi : G \to G/F$ и $d\eta$ – форма кривизны. При этом, форма $d\eta$ опускается на однородное пространство G/F и является там симплектической формой ω, $\pi^*(\omega) = d\eta$. Легко видеть, что поле Риба ξ левоинвариантной K-контактной структуры (η, ξ, φ, g) на группе Ли G порождает связную компоненту F_0 подгруппы изотропии F формы η. Поскольку $\mathcal{L}_\xi g = 0$ и $\mathcal{L}_\xi \varphi = 0$, то при проекции $\pi : G \to M = G/F_0$ метрика g и аффинор φ опускаются на M и образуют там почти кэлерову структуру (g_M, ω, J). Проекция $\pi : G \to M = G/F_0$ задает риманову субмерсию. Свойства контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) тесно связаны со свойствами почти кэлеровой структуры (g_M, ω, J) на базе $M = G/F_0$. В алгебре Ли группы G выберем ортонормированный базис $E_1, \ldots, E_{2n+1}$, первые $2n$ векторов которого лежат в контактном распределении D, а вектор E_{2n+1} определяет поле Риба ξ.

Теорема. *Если левоинвариантная контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) на группе Ли G является K-контактной, то в базисе $E_1, \ldots, E_{2n+1}$ тензор Риччи Ric имеет следующую структуру:*

$$Ric_{ij} = Ric_{M\,ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}, \quad Ric_{2n+1,2n+1} = \frac{n}{2},$$

$$Ric_{i,2n+1} = \frac{1}{4}\sum_{j,s=1}^{2n}(C^j_{sj}C^{2n+1}_{si} + (C^s_{ji} + C^i_{sj} + C^j_{si})C^{2n+1}_{js}),$$

$i, j = 1, \ldots, 2n$, где Ric_M *— тензор Риччи факторпространства $M = G/F_0$ и C^k_{ij} — структурные константы алгебры Ли группы G.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blair D. E.* Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer–Verlag, , 1976.
2. *Diatta A.* Left invariant contact structures on Lie groups. Preprint. 2004. arXiv:math.DG/0403555, v2.
3. *Khakimdjanov Yu.*, *Goze M.*, *Medina A.* Symplectic or Contact Structures on Lie Groups. Preprint. 2002. arXiv.org/math.DG/0205290.
4. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.

ОБ АЛГОРИТМИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О РАСПОЗНАВАНИИ ИЗГИБАЕМЫХ ОКТАЭДРОВ

ON AN ALGORITHMIC SOLUTION OF A PROBLEM OF RECOGNITION OF FLEXIBLE OCTAHEDRA

Слуцкий Д. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия;
slutski@ngs.ru

Многогранник (точнее, многогранная поверхность) называется изгибаемым, если его пространственную форму можно изменить такой непрерывной во времени деформацией, при которой каждая грань не изменяет своих размеров (т. е. движется как твёрдое тело), а деформация осуществляется только за счёт непрерывного изменения двугранных углов. Для нас октаэдром является любой многогранник (возможно, с самопересечениями), который комбинаторно эквивалентен правильному октаэдру. Все изгибаемые октаэдры были построены Р. Брикаром [1]. Они сыграли свою роль в конструкции Р. Коннелли [2]. Однако классификация Брикара не всегда позволяет по длинам рёбер узнать, является ли октаэдр изгибаемым. Поэтому до настоящего времени продолжаются поиски чисто метрического описания всех изгибаемых октаэдров, в частности, внимание геометров привлекают алгоритмы по распознаванию изгибаемых октаэдров [3].

Мы предлагаем следующий алгоритм для распознавания изгибаемых октаэдров в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$.

Шаг 1. Выберем произвольным образом две противоположные вершины октаэдра и назовём их северным и южным полюсами, а оставшиеся четыре вершины (вместе с рёбрами, их соединяющими) — экватором. Северной (южной) шапочкой называем звезду северного (южного) полюса.

Шаг 2. Дополним шапочки диагоналями, соединяющими противолежащие вершины экватора. Квадраты длин получившихся рёбер обозначим через t и s соответственно. Теперь шапочки рассматриваемого октаэдра по своему комбинаторному строению являются четырёхмерными симплексами, вложенными в $\mathbb{E}^3$. Стало быть, их объём в пространстве $\mathbb{E}^4$ равен 0.

Шаг 3. Строим определитель Кэли — Менгера, соответствующие объёму четырёхмерного симплекса (см. [4]), для северной и южной шапочек. Пусть многочлен $P(t,s)$ есть наибольший общий делитель этих двух полиномов.

Если степень $P(t,s)$ больше, либо равна 1 хотя бы для одного из трёх возможных экваторов октаэдра, то среди всех возможных изометрических реализаций 1-скелета изучаемого многогранника найдётся хотя бы один изгибаемый октаэдр.

Работа выполнена при частичной поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации (грант НШ–5682.2008.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ 08–01–00531–а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bricard R.* Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé // J. Math. Pur. Appl. 1897. No. 3. P. 113–148.
2. *Connelly R.* Conjectures and open questions in rigidity // Proc. Int. Congr. Math. Helsinki, 1978. Vol. 1. Helsinki: Acad. Scient. Fennica, 1980. P. 407–414.
3. *Сабитов И. Х.* Алгоритмическая проверка изгибаемости подвесок // Укр. геом. сб. 1987. Вып. 30. С. 109–112.
4. *Д'Андреа К., Сомбра М.* Определитель Кэли — Менгера неприводим при $n \geq 3$ // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 1. С. 90–97.

ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ РАЗНЫХ МЕТРИК ДЛЯ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ИЗ ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА С ВЕСОМ ЭРМИТА

AN EMBEDDING THEOREM FOR DIFFERENT METRICS FOR CLASSES OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES OF THE LEBESGUE SPASE WITH THE HERMITE WEIGHT

Смаилов Е. С.[1], Омарова А. Т.[2]

[1]*РГКП Институт прикладной математики МОН РК, Караганда, Казахстан;*
esmailov@mail.ru

[2]*РГКП Институт прикладной математики МОН РК, Караганда, Казахстан;*
altynaiom@mail.ru

Интегральные свойства функций в терминах наилучших приближений периодических функций посредством тригонометрических многочленов исследованы в работах А. А. Конюшкова, П. Л. Ульянова, М. Ф. Тимана, Э. А. Стороженко, М. К. Потапова, В. И. Коляды и многих других. Теория приближения алгебраическими многочленами Эрмита достаточно развита в работах М. К. Потапова, В. А. Абилова, М. В. Абилова, В. М. Федорова, Д. В. Алексеева и т. д.

В настоящей работе исследованы интегральные свойства элементов лебегова пространства $L_{p,\rho}(\mathbb{R}_n)$ с весом Чебышева — Эрмита. Пусть $L_{p,\rho}(\mathbb{R}_n)$, $1 \le p < +\infty$, — пространство измеримых в смысле Лебега на $\mathbb{R}_n$ функций $f(\bar{x})$, удовлетворяющих условию $\|f\|_{p,\rho} = \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}_n} |f(\bar{x})\rho(\bar{x})|^p \, d\bar{x} \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty$. Здесь $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n$, $|\bar{x}| = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\rho(\bar{x}) = e^{-\frac{|\bar{x}|^2}{2}}$ — вес Чебышева — Эрмита. Пусть $E_{m_1,\ldots,m_n}(f)_{p,\rho}$, $1 \le p < +\infty$, — полное наилучшее приближение функций $f(\bar{x})$ в метрике $L_{p,\rho}(\mathbb{R}_n)$ посредством алгебраических многочленов многих переменных. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_{p,\rho}(\mathbb{R}_n)$, $1 \le p < +\infty$. *Если для некоторого* q, $p < q < +\infty$, *ряд*

$$\sum_{m=1}^{+\infty} m^{q\left(\frac{n}{2p} - \frac{n}{2q}\right) - 1} E^q_{m,\ldots,m}(f)_{p,\rho} < +\infty$$

сходится, то $f \in L_{q,\rho}(\mathbb{R}_n)$ *и при этом имеет место неравенство*

$$\|f\|_{q,\rho} \le C_{pqn} \left\{ \|f\|_{p,\rho} + \left[\sum_{m=1}^{+\infty} m^{q\left(\frac{n}{2p} - \frac{n}{2q}\right) - 1} E^q_{m,\ldots,m}(f)_{p,\rho} \right]^{\frac{1}{q}} \right\}.$$

Постоянная $C_{pqn} > 0$ *зависит только от указанных параметров.*

Неулучшаемость данного утверждения показана на классах $E^{(n)}_{p,\rho}(\lambda) := \{f \in L_{p,\rho}(\mathbb{R}_n) \,|\, E_{m,\ldots,m}(f)_{p,\rho} \le \lambda_m, \forall m \in \mathbb{N}; \lambda = \{\lambda_m\}_{m=1}^{+\infty}$ — заданная последовательность положительных чисел, монотонно убывающая к нулю$\}$.

Теорема 2. *Пусть* $1 \le p < q < +\infty$. *Для того, чтобы имело место вложение* $E^{(n)}_{p,\rho}(\lambda) \subset L_{q,\rho}(\mathbb{R}_n)$, *необходимо и достаточно, чтобы ряд* $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} m^{q\left(\frac{n}{2p} - \frac{n}{2q}\right) - 1} \lambda_m^q$ *сходился.*

О ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУРАХ КЭЛИ НА ШЕСТИМЕРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ СФЕР

ALMOST COMPLEX CAYLEY STRUCTURES ON 6-DIMENSIONAL PRODUCTS OF SPHERES

Смоленцев Н. К.

Кемеровский государственный университет, Кемерово, Россия;
smolen@kuzbass.net

Хорошо известно [2], что на ориентируемом шестимерном подмногообразии M в алгебре $\mathbb{C}$a чисел Кэли может быль определена почти комплексная структура при помощи векторного произведения. А именно, если $M \subset \mathbb{R}^8$ — шестимерное ориентируемое подмногообразие и n_1, n_2 — локально определенный ортонормированный базис нормального расслоения к подмногообразию M, то почти комплексная структура на M определяется формулой $J_x(X_x) = P(n_1(x), n_2(x), X_x)$, $X_x \in T_xM$, где $P(n_1, n_2, X)$ — трехместное векторное произведение [2] на $\mathbb{C}$a. Такая структура Кэли достаточно активно изучается в случае сферы $S^6 \subset \mathbb{R}^7 = Im(\mathbb{C}\mathrm{a})$. В работе [4] показано, что структуры Кэли на шестимерных произведениях сфер $S^1 \times S^5$, $S^2 \times S^4$ и $S^3 \times S^3$, стандартно вложенных в $\mathbb{C}\mathrm{a} = \mathbb{R}^8$, являются неинтегрируемыми. Получены выражения фундаментальной формы $\omega(X, Y) = \langle JX, Y\rangle$ и тензора Нейенхейса. Поскольку указанные выше произведения сфер не являются симплектическими, то $\Omega = d\omega \neq 0$. В работе [3] определен функционал $\lambda(\Omega)$ на пространстве 3-форм Ω на шестимерном пространстве V и и для каждой 3-формы Ω определен оператор $K_\Omega : V \to V$ обладающий свойством $K_\Omega^2 = \lambda(\Omega) \cdot Id$. Если $\lambda(\Omega) < 0$, то оператор $J_\Omega = \frac{1}{\sqrt{-\lambda(\Omega)}} K_\Omega$ определяет комплексную структуру на V. Данная конструкция позволяет определить новую почти комплексную структуру J_Ω на произведениях сфер, когда Ω есть внешний дифференциал фундаментальной формы ω структуры Кэли, $\Omega = d\omega$. В случае сферы S^6 несложное вычисление показывает, что почти комплексная структура J_Ω совпадает со структурой Кэли J. В работе [1] найдена почти комплексная структура J_Ω на произведении $S^3 \times S^3$. В данной работе вычислена функция $\lambda(\Omega)$ и найдена J_Ω для случаев $S^1 \times S^5$ и $S^2 \times S^4$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Butruille J. B.* Homogeneous nearly Kahler manifolds. Preprint. 21 Dec. 2006. 25 P. arXiv:math/0612655v1 [math.DG].
2. *Gray A.* Vector cross products on manifolds // Trans AMS. 1969. V. 141. P. 465-504.
3. *Hitchin N. J.* The geometry of three-forms in six dimensions // Diff. Geom. 2001. V. 55. P. 547-576.
4. *Смоленцев Н. К.* О почти комплексных структурах Кэли на шестимерных роизведениях сфер // Гиперкомпл. числа в геом. и физ. 2008. Т. 5, № 2(10). С. 160–172.

ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ ОПЕРАТОРОВ ХАРДИ — СТЕКЛОВА И ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СРЕДНЕГО

WEIGHTED ESTIMATES OF HARDY–STEKLOV AND GEOMETRIC MEAN OPERATORS

Степанов В. Д.

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия;
vstepanov@sci.pfu.edu.ru

Оператором Харди — Стеклова мы называем преобразование

$$\mathcal{H}f(x) := w(x) \int_{a(x)}^{b(x)} f(y)v(y)dy, \quad x > 0,$$

где $w(x)$ и $v(y)$ — локально суммируемые неотрицательные весовые функции на полуоси. Устанавливаются критерии $L_p(0,\infty) - L_q(0,\infty)$ ограниченности данных операторов при условии, что граничные функции $a(x)$ и $b(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

(i) $a(x)$ и $b(x)$ дифференцируемы и строго возрастают на $(0,\infty)$;
(ii) $a(0) = b(0) = 0$, $a(x) < b(x)$ для $0 < x < \infty$, $a(\infty) = b(\infty) = \infty$.

Аналогичная задача решается для операторов геометрического среднего вида

$$\mathcal{G}f(x) := \exp\left(\frac{1}{b(x) - a(x)} \int_{a(x)}^{b(x)} \log f(y)dy\right), \qquad f(y) \geq 0.$$

ПРЕПЯТСТВИЯ К УСТОЙЧИВОСТИ C_0-ПОЛУГРУППЫ

OBSTRUCTIONS TO THE STABILITY OF A C_0-SEMIGROUP

Сторожук К. В

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
stork@math.nsc.ru

Пусть $T_t : X \to X$ — C_0-полугруппа, $A : D(A) \to X$ — ее генератор. Положим $\omega_1(T) = \sup\limits_{x\in D(A)} \{\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{\ln\|T_t x\|}{t}\}$; $\omega_0(T) = \sup\limits_{x\in X}\{\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{\ln\|T_t x\|}{t}\} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{\ln\|T_t\|}{t}$.

Полугруппа называется (равномерно) экспоненциально устойчивой, если $\omega_1 < 0$ ($\omega_0 < 0$). Введем еще две характеристики роста полугруппы: $s(A)$ — правая граница спектра, $s_0(A)$ — абсцисса равномерной ограниченности резольвенты A. Имеют место неравенства:

$$\begin{array}{ccc}\omega_1 & \leftarrow & \omega_0\\ \downarrow & \nwarrow & \downarrow\\ s & \leftarrow & s_0\end{array}$$

(здесь «$\leftarrow$» означает «$\le$»). Для типичных полугрупп $s = \omega_0$. Однако, каждая стрелка бывает строгой.

В бесконечномерном случае полугруппа может не быть экспоненциально устойчивой, даже если $T_t x \to 0$ для каждого $x \in X$. Базовый пример — полугруппа сдвигов на $L_2(\mathbb{R}_+)$. Тем не менее, отсутствие равномерной экспоненциальной устойчивости у полугруппы влечет существование векторов, орбиты которых если и стремятся к нулю, то делают это «очень медленно». Для слабой топологии этот принцип можно (неформально) сформулировать так: существует гиперплоскость, к которой орбита некоторого вектора приближается «плохо».

Теорема 1. *Пусть $\gamma_k \to 0$ и $0 < m_1 < m_2 < \cdots$. Если $s_0(A) \ge 0$, то найдутся $x' \in X'$, $x \in X$ такие, что для каждого $k = 1, 2, \ldots$ существует множество $U_k \subset \mathbb{R}_+$ такое, что $\mu(U_k) \ge m_k$,*

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall t \in U_k \quad |\langle x', T_t x\rangle| > \gamma_k.$$

Следствие. *Если $s_0 \ge 0$, то*

(1) для каждой неубывающей функции $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ существуют $x \in X$ и функционал $x' \in X'$ такие, что $\int_0^\infty h(|\langle x', T_t x\rangle|)\, dt = \infty$;

(2) существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $m > 0$ найдутся единичные вектор $x \in X$ и функционал $x' \in X'$ такие, что $m < \operatorname{mes}\{t \mid |\langle x', T(t)x\rangle| \ge \varepsilon\}$.

Утверждения следствия (1) и (2) были получены в [1] (теоремы 4.6.3(i) и 4.6.4) в предположениях, что полугруппа ограничена и того, что $\omega_0 \ge 0$.

Если граница спектра достигается, то x можно выбрать «бесконечно гладким»:

Теорема 2.. *Предположим, что $s(A) \ge 0$ $(i\mathbb{R}+s)\cap\sigma(A) \ne \emptyset$. Тогда существуют $x' \in X'$, $x \in D(A^\infty)$, удовлетворяющие условиям теоремы* 1.

Работа выполнена при поддержке совета по грантам Президента Российской Федерации (грант НШ–5682.2008.1) и интеграционного проекта СО РАН № 30 за 2009–2011 гг.

ЛИТЕРАТУРА

1. *van Neerven J. M. A. M.* The asymptotic behavior of semigroups of linear operators. Basel: Birkhauser, 1996.

КОГОМОЛОГИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДЛИНЫ И ШИРИНЫ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННОГО МНОЖЕСТВА

A COHOMOLOGICAL CHARACTERISTIC FOR THE LENGTH AND WIDTH OF A PARTIALLY ORDERED SET

Сухонос А. Г.

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток, Россия;
agsukh@mail.ru

В данной работе с каждым частично упорядоченным множеством (ЧУМ) ассоциируется нижняя полурешетка, на которой задается топология Гротендика τ [1–4]. Показывается, что τ-размерность асоциированной полурешетки совпадает с длиной ЧУМ. Доказывается, что τ-когомологии Гротендика и Александрова–Чеха изоморфны и дается когомологическая характеристика τ-размерности, а значит и длины ЧУМ.

Пусть $(E, \leq)$ — ЧУМ. Говорят, что длина (ширина) ЧУМ равна n, если существует цепь (антицепь), содержащая $n+1$ элемент, и нет цепи (антицепи), содержащей большее количество элементов. Множество всех цепей в $(E, \leq)$ будем обозначать $\mathcal{C}(E, \leq)$ или просто $\mathcal{C}(E)$. Через множество $\mathcal{PC}(E)$ будем обозначать множество всех подмножеств $\mathcal{C}(E)$. Очевидно, что множество $\mathcal{PC}(E)$ является решеткой относительно операций $\cap$ и $\cup$.

Введем топологию Гротендика τ на $\mathcal{PC}(E)$. Определим класс $\tau(a)$, полагая $\alpha = \{a_i \in \mathcal{PC}(E) \mid i \in I\} \in \tau(a)$ в том и только том случае, когда $\{\mathcal{C}^a_{\cup b} \mid b \subseteq a\} \prec \alpha$ и $a_i \leq a$ для любого $i \in I$. Через β_E будем обозначать $\{\mathcal{C}^a_e \mid e \in E\}$. Через β_E будем обозначать $\{\mathcal{C}^a_e \mid e \in E\}$.

Если K — нижняя полурешетка с нулем, то *кратностью* крα семейства $\alpha = \{a_i \in K | i \in I\}$ называется минимальное целое число n такое, что если мощность множества $\sigma \subseteq I$ больше n, то $\cap\{a_i \mid i \in \sigma\} = \varnothing$. Число n называется *τ-размерностью* a [2, 3], если в каждое τ-покрытие можно вписать τ-покрытие a кратности $\leq n+1$, и имеется τ-покрытие a кратности $n+1$, в которое нельзя вписать τ-покрытие a меньшей кратности.

Если $(E, \leq)$ — ЧУМ, τ — топология Гротендика на $\mathcal{PC}(E)$, $a \in \mathcal{PC}(E)$, то τ-размерность элемента a будем обозначать, через $\tau Dima$. Число $\tau Dim\mathcal{C}(E)$ назовем τ-размерностью ЧУМ $(E, \leq)$. Если $\alpha = \{a_i \in \mathcal{PC}(E) | i \in I\} \in \tau(a)$, то кратностью кр$_c\alpha$ семейства α в $c \in \mathcal{C}(E)$ назовем мощность множества $\{i \in I \mid c \in a_i\}$.

Теорема 1. *Для ЧУМ $(E, \leq)$ следующие условия эквивалентны*:
1) *длина $(E, \leq)$ равна n;*
2) $\tau Dim\mathcal{C}(E) = n$;
3) кр$\beta_E = n+1$.

Для ЧУМ $(E, \leq)$ определим когомологическую размерность элемента $a \in \mathcal{PC}(E)$ следующим образом:

$c\tau Da \leq n \Leftrightarrow \widehat{H}^{n+k}_\tau(a, \mathcal{A}) = 0$ для любых предпучков $\mathcal{A}$ и $k > 0$.

Теорема 2. *Если $(E, \leq)$ — ЧУМ, то существует предпучок $\mathcal{A}$ на $\mathcal{PC}(E)$ такой, что $H^n(\beta_E, \mathcal{A}) \neq 0$ и $\tau Dim\mathcal{C}(E) = c\tau D\mathcal{C}(E)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artin M.* Grothendieck topologies. American Mathematical Society, 1962.
2. *Скурихин Е. Е.* Пучковые когомологии и размерность частично упорядоченных множеств // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2002. Т. 239. С. 289–317.
3. *Скурихин Е. Е., Сухонос А. Г.* Когомологии и размерность пространств Чу // Дальневосточный мат. журн. № 6. Владивосток: Дальнаука, 2005. С. 14–23.
4. *Скурихин Е. Е., Сухонос А. Г.* Топология гротендика на пространствах Чу // Матем. труды. 2008. Т. 11, № 2. С. 159–186.

САМОПОДОБНЫЕ ФРАКТАЛЫ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

SELF-SIMILAR FRACTALS IN TOPOLOGICAL SPACES

Тетенов А. В.

Горно-Алтайский госуниверситет, Горно-Алтайск, Россия; atet@mail.ru

Определение 1. Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство, а G — полугруппа непрерывных отображений $g : X \to X$. Говорят, что G обладает свойством (P), если для некоторого замкнутого подмножества $P \subset X$, $G(P) \subset P$ и для любой последовательности $g_1, g_2, \ldots \in G$ последовательность подмножеств $g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_n(P)$ сходится к одноточечному множеству.

Говорят, что на компактном топологическом пространстве K задана *самоподобная структура*, если на K действует конечно-порожденная обладающая свойством (P) полугруппа G непрерывных инъективных отображений $g : K \to K$ такая, что $G(K) = K$.

Теорема 1. *Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство. Пусть G — конечнопорожденная полугруппа непрерывных инъективных отображений $g : X \to X$ с набором порождающих $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_m\}$, удовлетворяющая условию (P). Тогда оператор $T : C(X) \to C(X)$, который определяется равенством $T(A) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i(A)$ имеет единственную неподвижную точку $K \in C(X)$, и для любого непустого $A \subset X$, последовательность $T^n(A)$ сходится к топологическому пределу K. При этом множество K есть единственное компактное подмножество в X такое, что $G(K) = K$.*

Нами построены примеры полугрупп, действующих в неметризуемых топологических пространствах, удовлетворяющих условию (P).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 09–01–90202).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hutchinson J.* Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J. 1981. V. 30, № 5. P. 713–747.
2. *Kigami J.* Analysis on fractals. Cambridge Tracts in Mathematics 143. Cambridge University Press, 2001.

НЕЛИНЕЙНАЯ ПРОДОЛЖИМОСТЬ БИЛИПШИЦЕВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

NONLINEAR EXTENDABILITY OF BI-LIPSCHITZ MAPS

Троценко Д. А.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
trotsenk@math.nsc.ru

В [1] Ю. Г. Решетняк доказал, что любое $(1+\varepsilon)$-квазиконформное отображение $f : U \to R^n$ области $U \subset R^n$ $(n > 2)$, удовлетворяющей условию Ф. Джона, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ аппроксимируется мёбиусовым отображением с точностью $C\varepsilon \operatorname{diam} U$. Свойство аппроксимируемости стандартными отображениями (изометриями, подобиями, мебиусовыми отображениями) — важнейшее в задачах устойчивости и продолжимости отображений. Оно повлекло за собой ряд важных результатов. Можно отвлечься от дифференциальных свойств отображений, используя аппроксимируемость при определении классов отображений.

Множество $A \subset R^n$ считаем обладающим свойством $(\delta(\varepsilon), \varepsilon_0)$-продолжимости билипшицевых (BL) отображений, если любое $(1+\varepsilon)$-BL отображение $f : A \to R^n$ при $\varepsilon \le \varepsilon_0$ продолжается до $(1 + \delta(\varepsilon))$-BL отображения $F : R^n \to R^n$. Класс подмножеств R^n, обладающих свойством $(\delta(\varepsilon), \varepsilon_0)$-продолжимости, обозначим через $\mathbf{U}^n(\delta(\varepsilon), \varepsilon_0)$. Классы подмножеств плоскости, обладающих линейным свойством продолжимости, то есть классы $\mathbf{U}^2(C\varepsilon, \varepsilon_0)$, описаны в [3]. Здесь мы укажем два подхода к исследованию других классов.

Теорема 1. *Найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и $C_0 < \infty$ такие, что классы $\mathbf{U}^2(\delta(\varepsilon), \varepsilon_0)$ не совпадают ни для каких различных монотонно неубывающих положительных непрерывных функций $\delta(\varepsilon) \ge C_0\sqrt{\varepsilon}$.*

Невозможность продолжить отображение и обилие классов вызвано тем, что изометрии, аппроксимирующие данное отображение на разных шарах, могут иметь противоположную ориентацию, чего не допускает отображение всего пространства. Аналогично условию положительности якобиана при определении квазирегулярных отображений, естественно наложить условие одинаковой ориентированности аппроксимирующих отображений. Такое сужение класса отображений принципиально меняет ситуацию.

Определение. $(1+\varepsilon)$-BL отображение назовем *ориентированным*, если все аппроксимирующие изометрии можно выбрать одинаково ориентированными.

Из [3] следует, что линейное свойство продолжимости обеспечивает одинаковую ориентацию всех аппроксимирующих отображений.

Теорема 2. *Найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и $C < \infty$ такие, что для произвольных $A \subset R^2$ и произвольного ориентированного $(1+\varepsilon)$-BL отображения при $\varepsilon \le \varepsilon_0$ найдется его продолжение $F : R^2 \to R^2$, $F|_A = f$, являющееся $(1 + \delta(\varepsilon))$-BL при $\delta(\varepsilon) = \frac{C}{\ln(1/\varepsilon)}$. Оценка точна.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Решетняк Ю. Г.* Устойчивость в теореме Лиувилля о конформных отображениях пространств для областей с негладкой границей // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 2. С. 361–369.
2. *Alestalo P., Trotsenko D. A., Vaisala J.* Isometric approximation // Israel Journal of Mathematics. 2001. V. 125. P. 61–82.
3. *Алестало П., Троценко Д. А., Вяйсяля Ю.* Линейное свойство продолжимости билипшицевых отображений // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 6. С. 1226–1239.

НЕУЛУЧШАЕМЫЕ ВЛОЖЕНИЯ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА НА АНИЗОТРОПНЫХ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ОБЛАСТЯХ

UNIMPROVABLE EMBEDDING OF WEIGHTED SOBOLEV SPACES ON ANISOTROPIC IRREGULAR DOMAINS

Трушин Б. И.

Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Россия; trushinbv@gmail.com

В работе введен новый класс областей — области с λ-анизотропным условием гибкого σ-конуса — который, по сути, является детализацией класса областей с условием гибкого σ-конуса. Однако, эта детализация позволяет существенно усилить известные ранее результаты о непрерывности и компактности весового вложения пространства Соболева в пространство Лебега.

Для введенного класса областей построена теория весовых вложений пространств Соболева в пространства Лебега и в пространство непрерывных функций со степенными весами.

Установлены достаточные условия компактности изученных вложений в случае почти степенных весов.

В невесовом случае при $s = 1$ доказано, что вложение пространства Соболева в пространство Лебега невозможно ни при каких параметрах суммируемости, если область имеет «нулевые углы» более чем степенного порядка вырождения.

Для всех полученных результатов доказана их неулучшаемость на рассматриваемом классе областей.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 08–01–00443), гранта Президента РФ «Ведущие научные школы» (№ НШ–3810.2008.1), АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (№ 2.1.1/1662).

КРИВИЗНА РИЧЧИ НЕУНИМОДУЛЯРНЫХ РАЗРЕШИМЫХ МЕТРИЧЕСКИХ АЛГЕБР ЛИ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

THE RICCI CURVATURE OF NON-UNIMODULAR SOLVABLE METRIC LIE ALGEBRAS OF LOW DIMENSIONS

Чебарыков М. С.

Рубцовский индустриальный институт (филиал) ГОУ ВПО Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова, Рубцовск, Россия; Chebarikov@yandex.ru

Одной из важных проблем теории однородных римановых многообразий является задача определения возможных значений сигнатуры кривизны Риччи инвариантных метрик на заданном однородном пространстве.

Хорошо известен ряд принципиальных результатов в этом направлении, в частности, сформулированная задача полностью решена для однородных пространств размерности ≤ 4 (см. работы [1,2] и процитированные в них источники). Например, Дж. Милнор в работе [3] определил возможные сигнатуры оператора Риччи левоинвариантных римановых метрик на всех группах Ли размерности ≤ 3. В статьях [1] и [2] А.Г. Кремлев и Ю.Г. Никоноров получили аналогичный результат для групп Ли размерности 4.

Исследование левоинвариантных римановых метрик на группах Ли удобно производить в терминах метрических алгебр Ли, чем мы и пользуемся.

Авторы работы [2] показали в частности, что оператор Риччи произвольной неунимодулярной разрешимой метрической алгебры Ли размерности ≤ 4 имеет как минимум два отрицательных собственных значения. В этой же работе была выдвинута гипотеза о том, что тем же свойством обладает оператор Риччи неунимодулярной разрешимой метрической алгебры Ли *произвольной размерности.* Настоящая работа посвящена частичному подтверждению этой гипотезы, а именно, справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{s}$ – неунимодулярная разрешимая алгебра Ли имеет производную алгебру $\mathfrak{n} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ размерности ≤ 5. Тогда для произвольного скалярного произведения Q на $\mathfrak{s}$ оператор Риччи метрической алгебры Ли $(\mathfrak{s}, Q)$ имеет по крайней мере два отрицательных собственных значения.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{s}$ – неунимодулярная разрешимая алгебра Ли размерности ≤ 6. Тогда для произвольного скалярного произведения Q на $\mathfrak{s}$ оператор Риччи метрической алгебры Ли $(\mathfrak{s}, Q)$ имеет по крайней мере два отрицательных собственных значения.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г.* Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай // Мат. труды. 2008. Т. 11, № 2. С. 155–147.
2. *Кремлев А. Г., Никоноров Ю. Г.* Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай // Мат. труды. 2009. Т. 12, № 1. С. 40–116.
3. *Milnor J.* Curvature of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. 1976. V. 21. P. 293–329.

АБСОЛЮТНЫЙ ω-РЕТРАКТ ОБЛАДАЕТ СВОЙСТВОМ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

AN ABSOLUTE ω-RETRACT POSSESSES THE FIXED POINT PROPERTY

Черников П. В.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Замкнутое подмножество A бикомпакта X называется ω-ретрактом X, если для всякого открытого покрытия α множества A существует такое непрерывное отображение $r_\alpha : X \to A$, что отображения $r_\alpha|A$ и id_A α-близки.

Бикомпакт Y называется абсолютным ω-ретрактом, если всякое замкнутое подмножество A любого бикомпакта X, гомеоморфное Y, является ω-ретрактом X.

Теорема. *Если бикомпакт X является абсолютным ω-ретрактом, то любое непрерывное отображение $f : X \to X$ имеет неподвижную точку.*

Сформулированная теорема обобщает теорему 4.1 из [1], согласно которой метризуемый абсолютный ω-ретракт обладает свойством неподвижной точки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Noguchi H.* A generalization of absolute neighborhood retracts // Ködai Math. Sem. Rep. 1953. V. 5, № 1. P. 20–22.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ МИНИМАЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ В КОНФОРМНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

SURFACE WAVES OF MINIMAL SMOOTHNESS IN CONFORMAL VARIABLES

Шамин Р. В.

Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва, Россия;
roman@shamin.ru

В работе рассматриваются нелинейные эволюционные уравнения, описывающие динамку идеальной жидкости со свободной поверхностью в конформных переменных. Эти уравнения эквивалентны плоской системе уравнений Эйлера в случае потенциального течения. Использование конформных переменных позволяет получить уравнения, которые являются очень эффективными как для теоретического анализа, так и для проведения численных расчетов.

Применение конформных преобразований в задачах со свободной границей позволяет описывать поверхностные волны минимальной гладкости (свободная поверхность должна быть лишь кривой Жордана). Для этого в работе используются специальные функциональные пространства аналитических функций. Вводится понятие формальных и физических решений. Доказано, что физические решения всегда являются и формальным решения, для которых существуют результаты о единственной разрешимости на любом временном интервале. Таким образом, решения, описывающие динамику поверхностных волн идеальной жидкости, существуют вплоть до момента нарушения условий «физичности», т. е. до нарушения непрерывности или возникновения самопересечений.

Полученные результаты используются при моделировании поверхностных волн экстремальной амплитуды, так называемых волн-убийц в океане.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шамин Р. В.* Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. М.: Наука, 2008.
2. *Шамин Р. В.* Динамика идеальной жидкости со свободной поверхностью в конформных переменных // Современная математика. Фундаментальные направления. 2008. Т. 28, С. 3–144.

ЛОКАЛЬНАЯ СЛЫШИМОСТЬ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МЕТРИКИ

LOCAL AUDIBILITY OF A HYPERBOLIC METRIC

Шарафутдинов В. А.

Институт математики СО РАН, Новосибирск, Россия; sharaf@math.nsc.ru

Риманова метрика g на компактном многообразии без края называется локально слышимой, если для достаточно близких к ней метрик g' справедливо утверждение: изоспектральность метрик g и g' влечет их изометричность. Доказана локальная слышимость локально симметрической метрики отрицательной секционной кривизны.

PARAMETRIC ARGUMENT PRINCIPLE AND TESTING CR FUNCTIONS AND MANIFOLDS ON CURVES

Agranovsky M. L.

Bar-Ilan University, Ramat-Gan, Israel; agranovs@macs.biu.ac.il

The classical argument principle implies that if a function, holomorphic in the unit dics Δ and smooth up to its boundary, maps the unit circle to a homologically trivial loop, then the function is constant. Analogous result holds for holomorphic mappings from Δ ito $\mathbb{C}^n$. We find a parametric version of this fact, for varieties of holomorphic mappings from Δ to $\mathbb{C}^n$, or more generally, to a Stein manifold. Conditions for these varieties are found, under which homological triviality of the boundary image implies dimensional collapse of the image of the interior. We show how this parametric argument principle leads to solution, in generic case, of known problems on characterization of holomorphic and CR functions by moment conditions on families of curves (strip-problem, Globevnik-Stout conjecture), which till recently were solved only in special cases. Moreover, we solve more general problem of estimating from below, in terms of zero complex moments on families of curves, of the dimensions of complex tangent subbundles of real manifolds in $\mathbb{C}^n$. The solutions of the above problems about functions correspond to the case when the manifolds are graphs.

NEW APPROACH TO NONSTANDARD PROBLEMS OF INTEGRAL GEOMETRY AND DIFFERENTIAL EQUATIONS

Anikonov D. S.

Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Novosibirsk, Russia;
anik@math.nsc.ru

It is considered a complex relationship between known and unknown data. The main idea in the approach consists in separation a simple part from the complex expression and determination of a part of unknown information at least. Other parts of unknown information may be analyzed further (or never, if it is unimportant or too difficult). First this approach was used for one inverse problem for the transport equation [1] and further was developed in [2,3]. Generally speaking the pointed separation can be realized by various methods on the base of different properties of different parts of the given relationship. In the examples in this paper this procedure is provided by separation bounded and unbounded parts from the given relationship. Particularly, let us consider an usual situation in integral geometry when an unknown function is integrated over a straight line passing in every direction through an arbitrary point belonging to a bounded domain in n-dimensional space. The function under the integral may be multiplied with a known weight function depending on points of the domain and additionally on the variables describing the straight lines. The traditional setting of a problem of integral geometry consists in determination of the unknown part of the integrand by the given integrals. This problem is rather important for many problems of differential equations, particularly, for inverse problems. However, the obtained results concern with only certain special cases containing specific restrictions generated by used methods of investigation. A new approach indicated in the title for a similar problem is the following. Let the integrand is an unknown function which depends on the points of the domain and on the variables characterizing the straight lines. Let this function has nonzero jumps with respect to points of the domain on some surfaces within the same domain. The new setting of the problem consists in determination of the surfaces of discontinuity of the integrand by the given integrals. Thus, only a part of unknown information is sought for. Just such a setting of the problem proved to be fruitful for research. The problem was reduced to investigation of a singular integral equation of an indefinite type. By using of unboundedness of singular integrals the theorem of uniqueness for such a problem of integral geometry was proved without any specific restrictions [4,5]. Also the similar theorem was proved for the singular integral equation. The obtained results of integral geometry are easily generalized for cases when integrating is produced over unknown pencils of lines or sets of curves. Perhaps this approach has wide prospects at least for integral geometry and inverse problems of differential equations.

REFERENCES

1. *Anikonov D. S.*, “The inverse problem of determination of a body for a transport equation,” Differential Equations, **12**, No. 1, 567–570 (1976).
2. *Anikonov D. S.*, “Stephan type problem for the transport equation,” Dokl. of RAS, **338**, No. 1, 25–28 (1994).
3. *Anikonov D. S.*, “Integro-differentiation indicator of non-homogeneity in a tomography problem,” J. Inv. and Ill-Posed Probl., **7**, No. 1, 17–59 (1999).
4. *Anikonov D. S.*, “A Special Problem of Integral Geometry,” Doklady Mathematics, **76**, No. 1, 483–485 (2007).
5. *Anikonov D. S.*, “Indicator of contact boundaries for problem of integral geometry,” Siberian Math. Jour., **49**, No. 4, 739–755 (2008).

THE CLASSIFICATION OF δ-HOMOGENEOUS RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH POSITIVE EULER CHARECTERISTIC

Berestovskiĭ V. N.[1], **Nikitenko E. V.**[2], **Nikonorov Yu. G.**[3]

[1] *Omsk Branch of Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Omsk, Russia;* berestov@ofim.oscsbras.ru

[2] *Rubtsovsk Industrial Institute, Rubtsovsk, Russia;* nikit@inst.rubtsovsk.ru

[3] *Rubtsovsk Industrial Institute, Rubtsovsk, Russia;* nik@inst.rubtsovsk.ru

We study δ-homogeneous Riemannian manifolds, which can be considered as a nearest metric generalization of normal homogeneous spaces. A general definition of δ-homogeneity may be applied to an arbitrary metric space: a metric space (M, ρ_M) is *δ-homogeneous* if for any two points x and y from M, there exists an isometry f of the space M onto itself which moves x to y and has the maximal displacement at the point x (this means that $f(x) = y$ and $\rho_M(x, f(x)) \geq \rho_M(z, f(z))$ for all points $z \in M$) [1]. Let us indicate some general properties of δ-homogeneous Riemannian manifold, which have been discussed in [2] and proven in [3]. Any such manifold has nonnegative sectional curvature and is a direct metric product of an Euclidean space and compact indecomposable δ-homogeneous Riemannian manifolds (with possible omission of the mentioned factors). Conversely, any direct metric product of δ-homogeneous Riemannian manifolds is δ-homogeneous. Any locally isometric (particularly, universal) covering of every δ-homogeneous Riemannian manifold is itself δ-homogeneous. It follows from these results that the study of δ-homogeneous spaces mainly (even not entirely) reduces to the case of indecomposable compact simply connected manifolds. Omitting details, the most important result of the paper [3] is the following: δ-homogeneous Riemannian manifolds form a new proper subclass of geodesic orbit spaces with non-negative sectional curvature, which properly includes the class of all normal homogeneous Riemannian manifolds. Recall that a smooth Riemannian manifold is *geodesic orbit* (g.o.) if any its geodesic is an orbit of some one-parameter group of isometries; normal homogeneous Riemannian manifolds are well known and classified.

The following theorem is a highly non-trivial continuation and an application of previous results (see the full text in the preprint [4]).

Theorem. *A Riemannian manifold is compact simply connected indecomposable δ-homogeneous, non-normal homogeneous, and has positive Euler characteristic if and only if it a generalized flag manifolds $Sp(l)/U(1) \cdot Sp(l-1) = \mathbb{C}P^{2l-1}$, $l \geq 2$, supplied with invariant Riemannian metrics of positive sectional curvature with a pinching constant (the ratio of the minimal sectional curvature to the maximal one) in the open interval* $(1/16, 1/4)$.

Remark. This implies very unusual geometric properties of the adjoint representation of $Sp(l)$, $l \geq 2$, [4].

REFERENCES

1. *Berestovskii V. N., Plaut C.,* "Homogenous spaces of curvature bounded below," J. Geom. Anal., **9**, No. 2, 203–219 (1999).
2. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.,* "On δ-homogeneous Riemannian manifolds" (in Russian), Dokl. Akademii Nauk, **415**, No. 6, 727–729 (2007), English translation in: Doklady Mathematics, **76**, No. 1, 596–598 (2007).
3. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.,* "On δ-homogeneous Riemannian manifolds," Differential Geometry and its Applications, **26**, No. 5, 514–535 (2008).
4. *Berestovskii V. N., Nikitenko E. V., Nikonorov Yu. G.,* "The classification of δ-homogeneous Riemannian manifolds with positive Euler characteristic," preprint arXiv: 0903.0457 [math.DG].

COMPLEXITY, HEEGAARD DIAGRAMS AND GENERALIZED DUNWOODY MANIFOLDS

Cattabriga A.[1], **Mulazzani M.**[2], **Vesnin A.**[3]

[1] *Department of Mathematics, University of Bologna, Bologna, Italy;*
`cattabri@dm.unibo.it`
[2] *Department of Mathematics, University of Bologna, Bologna, Italy;*
`mulazza@dm.unibo.it`
[3] *Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
`vesnin@math.nsc.ru`

We deal with Matveev complexity of compact orientable 3-manifolds represented via Heegaard diagrams. This lead us to the definition of modified Heegaard complexity of Heegaard diagrams and of manifolds. We define a class of manifolds which are generalizations of Dunwoody manifolds, including cyclic branched coverings of two-bridge knots and links, torus knots, some pretzel knots, and some theta-graphs. Using modified Heegaard complexity, we obtain upper bounds for their Matveev complexity, which linearly depend on the order of the covering. Moreover, using homology arguments we obtain lower bounds.

The third author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. NSh–5682.2008.1) and by the grant of the Siberian Branch of RAN.

REFERENCES

1. *Cattabriga A., Mulazzani M., Vesnin A.*, "Complexity, Heegaard diagrams and generalized Dunwoody manifolds", J. Korean Math. Soc., to appear (2009).
2. *Matveev S.*, "Complexity theory of 3-dimensional manifolds", Acta Appl. Math. **19**, 101–130 (1990).
3. *Matveev S.*, Algorithmic topology and classification of 3-manifolds. ACM-Monographs, Vol. 9, Spinger-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2003.

EXISTENCE OF NORMAL SURFACES

Fominykh E. A.[1]**, Martelli B.**[2]

[1] *Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of RAS, Ekaterinburg, Russia;* efominykh@gmail.com
[2] *Università di Pisa, Pisa, Italy;* martelli@dm.unipi.it

We study the existence of normal surfaces in various triangulated 3-manifolds. When the manifold is bounded here we actually talk about ideal triangulations. A normal surface in a triangulated 3-manifold is a surface intersecting each tetrahedron in triangles and squares. A normal surface is trivial when it is made only of triangles.

A connection between normal surfaces and Turaev–Viro invariants was noted in [1]. We use here a nice version of the homology-free 5th Turaev–Viro invariant, called the t-invariant, due to Matveev, Ovchinnikov, and Sokolov [2], to prove the following results [3].

Theorem 1. *Every compact* 3*-manifold has only finitely many triangulations without non-trivial normal surfaces.*

Actually, it turns out that such exceptional triangulations have a fixed number of tetrahedra, depending only on the t-invariant of the manifold. Despite this fact, there are plenty of triangulations without non-trivial normal surfaces: at least half of the ~ 5000 minimal triangulations of hyperbolic manifolds with $\leqslant 4$ tetrahedra are so.

Theorem 2. *Every triangulation of any closed manifold except the minimal triangulation $T_{5,2}$ of the lens space $L_{5,2}$ contains a non-trivial normal surface.*

The first author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 07–01–96026).

REFERENCES

1. *Frohman C, Kania-Bartoszynska J.*, "The quantum content of the normal surfaces in a three-manifold," J. Knot Theory Ramifications, **17**, No. 8, 1005–1033 (2008).
2. *Matveev S. V., Ovchinnikov M. A., Sokolov M. V.*, "Construction and properties of the T-invariant," Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov., **267**, 207–219 (2000).
3. *Fominykh E., Martelli B.*, "k-normal surfaces," Journal of Differential Geometry, **82**, No. 1, 101–114 (2009).

THE SEMIGROUP PROPERTY OF CONVEX HULLS

Gichev V. M.[1], **Zubareva I. A.**[2]

[1] *Omsk Branch of Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Omsk, Russia;*
gichev@ofim.oscsbras.ru
[2] *Omsk State University of Railway Transport, Omsk, Russia;*
i_gribanova@mail.ru

Let $\mathfrak{v}$ be a finite dimensional Euclidean vector space and $G \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{v})$ be a compact group. We say that G satisfies *Semigroup Property* (SP for short) if the family $\{\widehat{O}_v\}_{v\in\mathfrak{v}}$ of convex hulls of orbits $O_v = Gv$, $v \in \mathfrak{v}$, is a semigroup with respect to the Minkowski addition of sets: $A + B = \{a + b :\ a \in A,\ b \in B\}$. The main result is the following theorem.

Theorem. *A compact linear group satisfies* SP *if and only if it is polar and its Weyl group is a Coxeter group.*

The group G is called *polar* if there exists a linear subspace $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{v}$ (which is said to be a *Cartan subspace*) such that

(a) each orbit O_v, $v \in \mathfrak{v}$, meets $\mathfrak{a}$;

(b) for any $v \in \mathfrak{a}$, the tangent space $\mathfrak{t}_v = T_vO_v$ is orthogonal to $\mathfrak{a}$.

The *Weyl group* W is defined as the group $\{g \in G :\ g\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}$ restricted to $\mathfrak{a}$; "*Coxeter group*" means "a finite linear group generated by reflections in linear hyperplanes". In particular, if G is finite, then SP holds if and only if G is a Coxeter group; if G is connected then SP is true if and only if G is polar (since W is a Coxeter group for connected polar G). The polar representations of connected compact groups are known to be orbit equivalent to the isotropy representations of Riemannian symmetric spaces.

Principal orbits of polar groups are precisely the homogeneous isoparametric submanifolds. (A connected compact submanifold in the Euclidean space is called *isoparametric* if it has flat normal bundle and its principal curvatures with respect to a parallel normal vector field are constant.) There is a characterization of these manifolds, including non-homogeneous ones (which are not described yet), in terms of singular Riemannian foliations admitting sections ([1]). G. Thorbergsson asked for the following question: does a singular Riemannian foliation of a Euclidean space admit sections if and only if the convex hulls of the leaves is a semigroup with respect to the Minkowski addition? We shall present some results on this problem.

A preliminary weaker version of the theorem above was partially proved in [3]. One parameter semigroups of sets in real vector spaces were described in [4]. In [2], semigroups of sets were used as an essential tool for studying geometric properties of topological groups.

REFERENCES

1. *Alexandrino M. M.*, "Singular Riemannian foliations with sections," Illinois J. Math., **48**, No. 4, 1163–1182 (2004).
2. *Berestovskiĭ V., Plaut C., Stallmann C.*, "Geometric groups I," Trans. AMS, **351**, 1403–1422 (1999).
3. *Gichev V. M.*, A remark on polar representations of compact Lie groups (Russian), Mat. Strukt. Model. **6**, 29–35 (2000).
4. *Radström H.*, "One-parameter semigroups of subsets of a real linear space," Arkiv für Matematik, **4**, No. 9, 87–97 (1959).

A CONFORMAL DE RHAM COMPLEX

Gol'dshtein V.

Ben Gurion University, Beer Sheva, Israel; vladimir@bgu.ac.il

Joint with Marc Troyanov.

One of the important question in the theory of quasi-conformal mappings is to construct quasi-conformal invariants, i.e.invariants of Riemannian manifolds which are stable under quasiconformal mappings and can thus be used to distinguish non quasiconformally equivalent manifolds. An important class of quasiconformal invariants is based on the notion of conformal capacity or, equivalently, of moduli of curves families. Another type of invariants are Royden algebras, Dirichlet space $L^{1,n}(M)$ of all locally integrable functions with integrable in degree $n = \dim M$ weak gradients and the space $\mathrm{BMO}(M)$ of functions with bounded mean oscillation. These algebraic invariants are important from a theoretical viewpoint, but one cannot use the Royden algebra, the Dirichlet space or the space BMO to quasiconformally distinguish two concrete manifolds, because these invariant are not really computable. In the present work, we describe a version of the de Rham complex adapted to quasiconformal geometry. This is a Banach differential graded algebra which is invariant under quasiconformal mappings. We call this graded algebra the conformal de Rham complex. We can then define an associated cohomology: this conformal cohomology is then obviously a quasiconformal invariant with potentially interesting applications. It is not completely hopeless to try and compute this conformal cohomology. We give some examples of computations. ¤

REFERENCES

1. *Gol'dshtein V., Troyanov M.*, "The L_{pq}-cohomology of SOL," Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse, **VII**, No. 4, 687–698 (1998).
2. *Gol'dshtein V., Troyanov M.*, "Sobolev Inequality for Differential forms and L_{qp}-cohomology," Journal of Geom. Anal., **16**, No. 4, 597–631 (2006).
3. *Gol'dshtein V., Troyanov M.*, "A Conformal de Rham Complex," preprint arXiv:0711.1286v2 (2007).

CONVEXITY PROBLEMS IN 3-D GEOMETRIC TOMOGRAPHY

Golubyatnikov V. P.[1], **Yomdin Y. N.**[2]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Novosibirsk, Russia;* glbtn@math.nsc.ru

[2] *Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel;* yosef.yomdin@weizmann.ac.il

Let $F(x,z) \geq 0$, $G(y,z) \geq 0$ for $(x,y,z) \in [0,a]\times[0,b]\times[0,c] = \Pi$. We continue our studies of reconstruction of a measurable set $\mathcal{A} \subset \Pi$ from tomography type projection data in the case when its characteristic function $\varkappa(x,y,z)$ satisfies the equations

$$\int_0^a \varkappa(x,y,z)\,dx = G(y,z), \quad \int_0^b \varkappa(x,y,z)\,dy = F(x,z). \tag{1}$$

$F(x,z)$ and $G(y,z)$ are directly connected with the Steiner symmetizations $S_Y(\mathcal{A})$ and $S_X(\mathcal{A})$ respectively. See [1] for encyclopedic overview of this domain of geometry.

Theorem 1. *If the projection data $F(x,z)$, $G(y,z)$ satisfy the conditions*:
1. *$F(x,z)$, $G(y,z)$ are concave and their supports are convex*;
2. *Their Steiner symmetrizations commute $S_X(S_Y(\mathcal{A})) = S_Y(S_X(\mathcal{A}))$*;
3. *Functions $G_+^{-1}(F_+^{-1}(F(x,z)) - x)$, $0 < x < x_0(z)$,*
 $G_+^{-1}(x - F_-^{-1}(F(x,z)))$, $x_0(z) < x < a$, are concave,
 and functions $G_-^{-1}(F_+^{-1}(F(x,z)) - x)$, $0 < x < x_0(z)$,
 $G_-^{-1}(x - F_-^{-1}(F(x,z)))$, $x_0(z) < x < a$, are convex;

then the domain $\mathcal{A}$ is convex and is uniquely determined by (1).

Here G_-^{-1}, F_+^{-1} etc denote for fixed $z = z_0$ corresponding inverse functions of concave functions $F(x,z_0), G(y,z_0)$ on the segments of their monotonicity $[0, x_0(z_0)]$, $[x_0(z_0), a]$; $F(x_0(z_0), z_0) = \max_{x\in[0,a]} F(x,z_0)$. Following general approach described in [2], we have taken here as small number of projections, as it was possible.

Let h_1, h_2 be support functions of convex bodies $V_1, V_2 \subset R^3$ such that their orthogonal projections onto any plane do not have $SO(2)$-symmetries. As in [2,3], consider sufficiently dense δ-grid (ω, ψ) on the unit spherical bundle of $S^2 \subset R^3$.

Theorem 2. *If for all unit vectors $\omega \perp \psi$ in this grid restrictions h_1^ω, h_2^ω of the functions h_1, h_2 to the planes $P(\omega)\perp\omega$ satisfy the condition*

$$h_2^\omega(\psi) = h_1^\omega(\alpha(\omega)\psi) + (\psi, b(\omega)) + o(\delta^2)$$

for some rotations $\alpha(\omega)$ in the plane $P(\omega)$ and for some parallel translations $b(\omega)\perp\omega$, then the convex bodies V_1, V_2 can be done $o(\delta^{2/3})$-closed either by a parallel translation, or by a central symmetry.

The work was partially supported by Leading Scientific Schools grant 8526.2006.1, by ADS-Program of Development of Scientific Potential of Higher School, grant 2.1.1/3707, and by Joseph Meyerhoff visiting professorship at the Weizmann Institute of Science.

REFERENCES

1. *Gardner R. J.*, Geometric Tomography, 2-nd Edition, Cambridge Univ. Press, New York (2006).
2. *Etinger B., Sarig N., Yomdin Y.*, "Linear versus non-linear acquisition of step-functions," J. Geom. Anal., **18**, No. 2, 369–399 (2008).
3. *Golubyatnikov V. P.*, Uniqueness questions in reconstruction of multidimensional objects from tomography-type projection data, VSP, Utrecht (2000).

ON A LENGTH SCALE OF TURBULENT MOTION GENERATED BY A RIEMANNIAN METRIC ARISING IN HOMOGENEOUS ISOTROPIC TURBULENCE

Grebenev V. N.[1], Oberlack M.[2]

[1] *Institute of Computational Technologies of SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
vngrebenev@gmail.com
[2] *Technische Universitat Darmstadt, Darmstadt, Germany;*
oberlack@fdy.tu-darmstadt.de

Examining length scales of turbulence motion, we can see that some scales analyzed are based on the use of Euclidian metric to measure a distance. However, it is not so clear why we use Euclidian metric in turbulence to define a length scale of turbulent motion without taking into account the geometry of turbulent pattern. The example, where we need a correction of (linear) length scale, is the use of Prandtl's mixing-length scale l_m in the problem of decaying fluid oscillations near a wall. In this problem, a modification of Prandtl's mixing-length scale is taken in the following (nonlinear) form: $l_m = \kappa r(1 - \exp(-r/A))$. Although the above example comes from the theory of wall turbulent flows, nevertheless this fact reflects understanding to make a correction of some (linear) length scales.

We observe that to study the geometry of turbulent pattern we need an additional structure: the Riemannian metric. The novelty of our approach for the application in turbulence is that we use the interaction between the shape deformation of a manifold (a singled out fluid volume) equipped with a family of Riemannian metrics $g(t)$ (length scales of turbulent motion) and the evolution of these Riemannian metric $g(t)$ in time. That helps us to describe shape dynamics of a model manifold (a singled out fluid volume) in terms of the deformation of $g(t)$. This is conceptually similar to the Ricci flow ideas.

We demonstrate (in the simplest case) how to equip a model manifold (a singled out fluid volume) by a Riemannian metric (length scales of turbulent motion) exploring a special form of the closure model for the von Kármán-Howarth equation (this model holds for a wide range of well accepted turbulence theories for homogeneous isotropic turbulence). This enables us to equip a model manifold (a fluid volume) by a family of Riemannian metrics (length scales of turbulent motion) which depend on time. The metric constructed by this way takes the form of a round metric $d\tilde{z}^2 = dq^2 + \tilde{\gamma}^2(q, t_c)d\theta^2$ where $\tilde{\gamma} = q^{\beta} D_{LL}^{\alpha}$, $\alpha = 1/4$, $\beta = 9/2$ and $q = 2r^{1/2}$. We show how the length scale of transverse displacements of fluid particles depends on the structure function D_{LL} and the correlation distance r.

To study explicitly the behavior of the Riemannian metric constructed, we use the inviscid form of the von Kármán-Howarth equation which admits the two-parameter Lie scaling subgroup. We show that one selfsimilar solution obtained coincides with the element of Beltrami surface (or pseudo-sphere): a canonical surface of the constant sectional curvature equals -1. Negativity of the curvature of Beltarmi surface means a stochastic behavior of geodesic curves located on this surface.

This work supported by RFBR (№ 07–01–00363) and partially by DFG.

Integral representation formula on Carnot groups

Isangulova D. V.[1], **Vodopyanov S. K.**[2]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia;* dasha@math.nsc.ru
[2] *Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia;* vodopis@math.nsc.ru

We prove Sobolev type integral representation formula on general Carnot groups. We consider Carnot group $\mathbb{G}$ with stratified Lie algebra $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$, $[V_1, V_i] = V_{i+1}$, $i = 1, \dots, m-1$, $[V_1, V_m] = \{0\}$, $\dim V_1 = n$. Let left-invariant vector fields $X_1, \dots, X_N$ substitute a basis of Lie algebra V such that $X_1, \dots, X_n$ is a basis of V_1 and $\dim V_i$ vector fields form a basis of V_i for each $i = 2, \dots, m$. Set σ_i be the degree of the vector field X_i: $\sigma_i = \min\{k \mid X_i \in V_k\}$. Lebesgue measure on $\mathbb{R}^N$ is the bi-invariant Haar measure on $\mathbb{G}$. We will consider coordinates of the first type, that is $x = (x_1, \dots, x_N) = \exp(\sum_{i=1}^N x_i X_i)(e)$. Define a *quasimetric* $d_\infty(x, y) = \sup_{i=1,\dots,N}\{|(x^{-1}y)_i|^{1/\sigma_i}\}$. Denote a ball in quasimetric d_∞ by $\mathrm{Box}(a, r) = \{x : d_\infty(a, x) < r\}$.

To a multi-index $I = (i_1, \dots, i_l) \in \{1, \dots, N\}^l$ it corresponds the differential operator $X^I = X_{i_1} \dots X_{i_l}$ and the weight $d(I) = \sum_{j=1}^l \sigma_{i_j}$. By multi-index with subindex h we will denote horizontal multi-index $I_h = (i_1, \dots, i_l) \in \{1, \dots, n\}^l$, $d(I_h) = l$. A function f is said to be a *polynomial* on $\mathbb{G}$ if $f(x) = \sum_I a_I x^I$ where all but finitely many of the coefficients a_I vanish (here $x^I = x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_l}$). For the polynomial f, the (*homogeneous*) *degree* is said to be $\max\{d(I) \colon a_I \neq 0\}$.

Theorem. *Let an integer $l > 0$. There is a number $\varkappa > 1$ and a projection P_{l-1} of the space $L_1(\mathrm{Box}(e, 1))$ to the space of polynomials of degree $< l$, such that for every function $u \in C^\infty(\mathrm{Box}(e, \varkappa))$ the integral representation formula*

$$u(x) = P_{l-1}u(x) + \sum_{d(I_h)=l} \int\limits_{\mathrm{Box}(e,\varkappa)} X^{I_h}u(y)(K_{I_h}(y^{-1}x) + L_{I_h}(y, x))\, dy$$

holds for $x \in \mathrm{Box}(e, 1)$ where $K_{I_h} \in C^\infty(\mathbb{G} \setminus \{e\})$, $\operatorname{supp} K_{I_h} \subseteq \overline{\mathrm{Box}(e, 1)}$,

$$|X^J K_{I_h}(x)| \leqslant M_{d(J)} d_\infty(x, e)^{-l+d(J)+\nu} \quad \textit{for any multi-index } J,$$

and $L_{I_h} \in C^\infty(\mathbb{G} \times \mathbb{G})$, $\operatorname{supp} L_{I_h}(\cdot, x) \subseteq \mathrm{Box}(e, \varkappa)$ for $x \in Box(e, 1)$.

Using Riesz potentials we obtain coercive estimates for special differential operators, and Poincaré inequality on John domains.

Theorem covers results of paper [1] in which integral representation formula was obtained by different method.

REFERENCES

1. *Romanovskii N. N.*, “Integral representations and embedding theorems for functions defined on the Heisenberg groups $\mathbb{H}^n$”, St. Petersbg. Math. J., **16**, No. 2, 349–375 (2005).

CHARACTERISTIC SET OF SMOOTH CONTACT MAPPINGS OF CARNOT MANIFOLDS

Karmanova M. B.

Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Novosibirsk, Russia;
maryka@math.nsc.ru

We consider smooth contact mappings $\varphi : \mathbb{M} \to \widetilde{\mathbb{M}}$ of Carnot manifolds. A smooth manifold $\mathbb{M}$ of a topological dimension N is called a *Carnot manifold* if there exists a subbundle $H\mathbb{M} \subset T\mathbb{M}$, $\dim H_x\mathbb{M}$ does not depend on x, and a collection of numbers $\dim H_x\mathbb{M} = \dim H_1 < \dim H_2 < \ldots < \dim H_M = N$ such that each point $p \in \mathbb{M}$ possesses a neighborhood $U \subset \mathbb{M}$ with a collection of C^1-smooth vector fields $X_1, \ldots, X_N$ on U enjoying the following three properties. For each $v \in U$ we have

(1) $X_1(v), \ldots, X_N(v)$ constitutes a basis of $T_v\mathbb{M}$;

(2) $H_i(v) = \operatorname{span}\{X_1(v), \ldots, X_{\dim H_i}(v)\}$ is a subspace of $T_v\mathbb{M}$ of a dimension $\dim H_i$, $i = 1, \ldots, M$, where $H_1(v) = H_v\mathbb{M}$;

(3)
$$[X_i, X_j](v) = \sum_{\deg X_k \leq \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk}(v) X_k(v)$$

where the *degree* $\deg X_k$ equals $\min\{m \mid X_k \in H_m\}$;

(4) a quotient mapping $[\,\cdot,\cdot\,]_0 : H_1 \times H_j/H_{j-1} \mapsto H_{j+1}/H_j$ induced by Lie brackets is an epimorphism for all $1 \leq j < M$.

A sub-Riemannian quasimetric d_∞ corresponding to this structure is defined as

$$d_\infty(x, y) = \max_{i=1,\ldots,N} \{|y_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\}, \text{ where } y = \exp\Bigl(\sum_{i=1}^N y_i X_i\Bigr)(x).$$

The Hausdorff dimension of $\mathbb{M}$ with respect to d_∞ equals $\nu = \dim H_1 + \sum\limits_{j=2}^M j(\dim H_j - \dim H_{j-1})$.

The main result is

Theorem 1 [2]. *Suppose that $\varphi : \mathbb{M} \to \widetilde{\mathbb{M}}$ is a smooth contact mapping of Carnot manifolds. For the characteristic set*

$$\chi = \{x \in \mathbb{M} : \operatorname{rank} D\varphi(x) = \widetilde{N}\} \cap \{x \in \mathbb{M} : \operatorname{rank} \widehat{D}\varphi(x) < \widetilde{N}\},$$

where $\widehat{D}\varphi$ is a sub-Riemannian differential [1], *we have $\mathcal{H}^{\nu-\tilde{\nu}}(\varphi^{-1}(z) \cap \chi) = 0$ for almost all $z \in \widetilde{M}$.*

As an application of this result, we obtain the sub-Riemannian coarea formula [1] for all classes of smooth contact mappings of Carnot manifolds.

REFERENCES

1. *Karmanova M., Vodopyanov S.*, “Geometry of Carnot–Carathéodory Spaces, Differentiability, Coarea and Area Formulas,” in: Analysis and Mathematical Physics, Trends in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, pp. 233–335.
2. *Karmanova M. B.*, “Characteristic Set of Smooth Contact Mappings of Carnot-Caratéodory Spaces,” Dokl. AN, **425**, No. 3, 314–319 (2009).

GEOMETRICAL AND ANALYTICAL ASPECTS OF OBSERVER'S MATHEMATICS

Khots D.[1], **Khots B.**[2]

[1] *Omaha, Nebraska, USA;* dkhots@cox.net
[2] *Compressor Controls Corp, Des Moines, Iowa, USA;* bkhots@cccglobal.com

This work considers Geometrical and Analytical aspects in a setting of arithmetic provided by Observer's Mathematics (see www.mathrelativity.com). We prove that Euclidean Geometry works in a sufficiently small neighborhood of the given line, but when we enlarge the neighborhood, Lobachevsky Geometry takes over. Also, we show that physical speed is a random variable and cannot exceed some constant, and this constant does not depend on an inertial coordinate system. We further consider Newton, Schrodinger, Airy equations, quantum theory of two-slit interference, wave-particle duality for single photons, and the uncertainty principle and prove some special properties for "small sizes" of nature. Certain results and communications to these theorems are also provided.

REFERENCES

1. *Khots B., Khots D.,* Mathematics of Relativity, *Web Book*, www.mathrelativity.com, 2004.
2. *Khots B., Khots D.,* "An Introduction to Mathematics of Relativity," in: Lecture Notes in Theoretical and Mathematical Physics, Ed. A. V. Aminova, v. 7, Kazan State University, Kazan, 2006, pp. 269–306.
3. *Khots B., Khots D.,* "Quantum Theory and Observer's Mathematics," American Institute of Physics (AIP), **965**, 261–264 (2007).
4. *Khots D., Khots B.,* "Physical Aspects of Observer's Mathematics," American Institute of Physics (AIP), **1101**, 311–313 (2009).

SOME PROBLEMS OF HOMOLOGICAL ALGEBRA IN P-SEMI-ABELIAN CATEGORIES

Kopylov Ya. A.

Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Novosibirsk, Russia;
yakop@math.nsc.ru

We consider additive categories meeting the following axiom.

Axiom 1. *Each morphism* α *has kernel* $\operatorname{Ker}\alpha$ *and cokernel* $\operatorname{Coker}\alpha$.

In a category satisfying Axiom 1, every morphism α admits a canonical decomposition $\alpha = (\operatorname{im}\alpha)\bar{\alpha}(\operatorname{coim}\alpha)$, where $\operatorname{im}\alpha = \ker\operatorname{coker}\alpha$, $\quad \operatorname{coim}\alpha = \operatorname{coker}\ker\alpha$. A morphism α is called *strict* if $\bar{\alpha}$ is an isomorphism.

We use the following notations: O_c is the class of all strict morphisms, M is the class of all monomorphisms, M_c is the class of all strict monomorphisms, P is the class of all epimorphisms, P_c is the class of all strict epimorphisms.

An additive category is called *P-semi-abelian* if it meets Axiom 1 and the following

Axiom 2. *If* α *is a morphism then* $\bar{\alpha}$ *is a monomorphism and an epimorphism.*

As V. I. Kuz′minov and A. Yu. Cherevikin proved in 1972, an additive category $\mathcal{A}$ with kernels and cokernels is P-semi-abelian if and only if the following two conditions are fulfilled:

(P1) if (1) is a pullback then $f \in P_c \Longrightarrow g \in P$;

(P2) if (1) is a pushout then $g \in M_c \Longrightarrow f \in M$.

If we replace here $g \in P$ by $g \in P_c$ and $f \in M$ by $f \in M_c$, we obtain the familiar definition of a *quasi-abelian category*. D. A. Raĭkov conjectured that in this way the definition will not change. However, in 2008 W. Rump disproved Raĭkov's Conjecture by constructing two explicit examples of P-semi-abelian categories that are not quasi-abelian. Since both classes are important in solving homological problems of functional analysis, in our point of view, it is interesting to study P-semi-abelian categories.

We expose some new results on the problem of defining homology and the validity of the five- and nine-lemma in P-semi-abelian categories.

The author was supported by the Specific Targeted Project GALA within the NEST Activities of the Commission of the European Communities (Contract No. 028766), the State Maintenance Program for the Leading Scientific Schools and Junior Scientists of the Russian Federation (NSh 5682.2008.1), and a grant of the President of the Russian Federation (Grant MK–2137.2008.1).

PROPERTIES OF THE C^1-SMOOTH FUNCTIONS WHOSE GRADIENT RANGE HAS TOPOLOGICAL DIMENSION 1

Korobkov M. V.

Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Novosibirsk, Russia;
korob@math.nsc.ru

In the talk we discuss some results of [1]. We apply our previous methods [2] to geometry and to the mappings with bounded distortion.

Theorem 1. *Let $v : \Omega \to \mathbb{R}$ be a C^1-smooth function on a domain* (*open connected set*) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. *Suppose*

$$\operatorname{Int} \nabla v(\Omega) = \emptyset. \tag{1}$$

Then $\operatorname{meas} \nabla v(\Omega) = 0$.

Here $\operatorname{Int} E$ is the interior of E, $\operatorname{meas} E$ is the Lebesgue measure of E.

Theorem 1 is a straight consequence of the following two results.

Theorem 2 [2]. *Let $v : \Omega \to \mathbb{R}$ be a C^1-smooth function on a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Suppose* (1) *is fulfilled. Then the graph of v is a normal developing surface.*

Recall that a C^1-smooth manifold $S \subset \mathbb{R}^3$ is called *a normal developing surface* [3] if for any $x_0 \in S$ there exists a straight segment $I \subset S$ (the point x_0 is an interior point of I) such that the tangent plane to S is stationary along I.

Theorem 3. *The spherical image of any C^1-smooth normal developing surface $S \subset \mathbb{R}^3$ has the area* (*the Lebesgue measure*) *zero.*

Recall that *the spherical image of a surface S* is the set $\{\mathbf{n}(x) \mid x \in S\}$, where $\mathbf{n}(x)$ is the unit normal vector to S at the point x.

From Theorems 1–3 and the classical results of A. V. Pogorelov (see [4, Ch. 9]) we obtain the following corollaries

Corollary 4. *Let the spherical image of a C^1-smooth surface $S \subset \mathbb{R}^3$ have no interior points. Then this surface is a surface of zero extrinsic curvature in the sense of Pogorelov.*

Corollary 5. *Any C^1-smooth normal developing surface $S \subset \mathbb{R}^3$ is a surface of zero extrinsic curvature in the sense of Pogorelov.*

Theorem 6. *Let $K \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ be a compact set and the topological dimension of K equals* 1. *Suppose there exists $\lambda > 0$ such that $|A - B|^2 \le \lambda \det(A - B)$, $A, B \in K$. Then for any Lipschitz mapping $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ on a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ such that $\nabla f(x) \in K$ a.e. the identity $\nabla f \equiv \mathrm{const}$ holds.*

Many partial cases of Theorem 6 (for instance, when $K = SO(2)$ or K is a segment) are well-known (see, for example, [5]).

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 08-01-00531-a) and by the Programme of the President of Russia for the State Support of Young Scientists and the Leading Scientific Schools of Russia (projects no. MK–5366.2008.1 and no. NSh–5682.2008.1).

REFERENCES

1. *Korobkov M. V.*, "Properties of the C^1-smooth functions whose gradient range has topological dimension 1," Dokl. Math., to appear.
2. *Korobkov M. V.* "Properties of the C^1-smooth functions with nowhere dense gradient range," Siberian Math. J., **48**, No. 6, 1019–1028 (2007).
3. *Shefel′ S. Z.*, "C^1-Smooth isometric imbeddings," Siberian Math. J., **15**, No. 6, 972–987 (1974).
4. *Pogorelov A. V.*, Extrinsic geometry of convex surfaces, American Mathematical Society (AMS), Providence, R.I. (1973). (Translations of Mathematical Monographs, Vol. 35).
5. *Müller S.*, Variational Models for Microstructure and Phase Transitions, Max-Planck-Institute for Mathematics in the Sciences, Leipzig (1998). (Lecture Notes, No. 2. http://www.mis.mpg.de/jump/publications.html).

ON ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF THE APPROXIMATION NUMBERS AND ESTIMATES OF SCHATTEN VON NEUMANN NORMS OF THE HARDY INTEGRAL OPERATORS WITH VARIABLE LIMITS OF INTEGRATION

Lomakina E. N.

Khabarovsk State Academy of Economics and Law, Khabarovsk, Russia;
lomakina.as@mail.ru

The weighted Hardy integral operator $H : L^\infty(0,\infty) \to L^\infty(0,\infty)$ is defined by

$$Hf(x) = v(x) \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} u(y)f(y)\,dy,$$

where $u(y) \in L^1$, $v(x) \in L^\infty$ and $\varphi(x)$, $\psi(x)$ are increasing differentiated functions $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(x) < \psi(x)$ for all $x \in (0,\infty)$ and $\varphi(\infty) = \psi(\infty) = \infty$.

For any positive integer n, the n-*th approximation number* of H is

$$a_n(H) = \inf\{\|H - L\| \ : \ L \in \mathcal{B}(L^\infty, L^\infty),\ \mathrm{rank} L \le n-1\}.$$

We define

$$\sigma_{k,n} = \left(\int_{\psi(\zeta_k)}^{\psi(\xi_{k,n})} |u(t)|dt\right) \|v\|_{L^\infty(\xi_{k,n},\xi_{k,n+1})}$$

and

$$\varkappa_{k,n} = \left(\int_{\varphi(\tau_{k,n})}^{\varphi(\zeta_{k+1})} |u(t)|\,dt\right) \|v\|_{L^\infty(\tau_{k,n},\tau_{k,n+1})}.$$

Theorem 1. *Let $H : L^\infty(0,\infty) \to L^\infty(0,\infty)$ be a compact operator and*

$$\sum_k \sum_n \sigma_{k,n} < \infty, \quad \sum_k \sum_n \varkappa_{k,n} < \infty.$$

Then

$$\limsup_{n\to\infty} n a_n(H) \ll \int_0^\infty v_s(x)\ (|u(\varphi(x))|(\varphi'(x)) + |u(\psi(x))|(\psi'(x)))\ dx.$$

Theorem 2. *Let $1 < \alpha < \infty$ and $H : L^\infty(0,\infty) \to L^\infty(0,\infty)$ be a compact operator. Then*

$$\|H\|_{\mathcal{S}_\alpha} = \left(\sum_n a_n^\alpha(H)\right)^{1/\alpha} \ll \sum_m \|\chi_{(\zeta_m,\zeta_{m+1})} v\|_{L^\infty}\, \|\chi_{(\varphi(\zeta_m),\psi(\zeta_{m+1}))} u\|_{L^1},$$

where $\Delta_m = [\zeta_m, \zeta_{m+1})$ is the special decomposition of $(0,\infty)$.

The author supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 08–01–98500, 07–01–00054).

REFERENCES

1. *Edmunds D.E. Evans W.D. Harris D.J.*, “Two-sided estimates of the approximation numbers of certain Volterra inteqral operators,” Studia Math., **6**, No. 124, 59–80 (1997).
2. *Lomakina E. Stepanov V.*, “On asymptotic behaviour of the approximation numbers and estimates of Schatten von Neumann norms of the Hardy–type integral operators,” Function spaces and application, Narosa Publishing Hause, New Delhi, **6**, 153–187 (2000).

ON RATIONALITY OF THE GENERATING FUNCTION OF THE SOLUTION OF A TWO-DIMENSIONAL DIFFERENCE EQUATION

Lyapin A. P.

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia; LyapinAP@yandex.ru

Let $C = \{(\alpha, \beta)\}$ be a finite subset of the positive octant $\mathbb{Z}^2_+$ of the integer lattice $\mathbb{Z}^2$ and let $(m_1, m_2) \in C$. Moreover for all $(\alpha, \beta) \in C$ the condition $\alpha \leqslant m_1, \beta \leqslant m_2$ be fulfilled. The problem is to find the solution $f(x, y)$ of difference equation

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in C} c_{\alpha,\beta} f(x + \alpha, y + \beta) = 0, \tag{1}$$

which coincides with the some given function $\varphi : X_m \to \mathbb{C}$ on the set $X_m = \mathbb{Z}^2_+ \setminus \big(m + \mathbb{Z}^2_+\big)$.

The generating function $D_0(z, w) = \sum_{(x,y)\in X_m} \varphi(x, y) z^{-x-1} w^{-y-1}$ of the initial data of the difference equation (1) can be represented as the sum

$$D_0(z, w) = \Omega_m(z, w) + \sum_{r=0}^{m_1-1} \frac{\Phi_r(w)}{z^{r+1}} + \sum_{t=0}^{m_2-1} \frac{\Psi_r(z)}{w^{t+1}},$$

where

$$\Omega_m(z, w) = \sum_{\substack{0\leqslant x<m_1\\ 0\leqslant y<m_2}} \frac{\varphi(x, y)}{z^{x+1} w^{y+1}},\ \Phi_r(w) = \sum_{s\geqslant m_2} \frac{\varphi(r, s)}{w^{s+1}},\ \Psi_t(z) = \sum_{u\geqslant m_1} \frac{\varphi(u, t)}{z^{u+1}}.$$

Theorem. *The generating function* $\mathcal{D}(z, w) = \sum\limits_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2_+} \varphi(x, y) z^{-x-1} w^{-y-1}$ *of the solution of the difference equation* (1) *is*

$$\mathcal{D}(z, w) = \left(R(z, w)\Omega_m(z, w) + \sum_{r=0}^{m_1-1} \Phi_r(w) R^{(z)}_{r+1}(z, w) + \sum_{t=0}^{m_2-1} \Psi_t(z) R^{(w)}_{t+1}(z, w) - \right.$$
$$\left. - \sum_{(\alpha,\beta)\in C} c_{\alpha,\beta} z^\alpha w^\beta \sum_{\substack{\alpha\leqslant x<m_1\\ \beta\leqslant y<m_2}} \frac{\varphi(x, y)}{z^{x+1} w^{y+1}} \right) / R(z, w),$$

where $R(z, w) = \sum\limits_{(\alpha,\beta)\in C} c_{\alpha,\beta} z^\alpha w^\beta$ *is the characteristic polynomial of the difference equation* (1) *and*

$$R^{(z)}_{r+1}(z, w) = \frac{1}{z^{r+1}} \sum_{\alpha=r+1}^{m_1} \sum_{\beta=0}^{m_2} c_{\alpha,\beta} z^\alpha w^\beta, R^{(w)}_{t+1}(z, w) = \frac{1}{w^{t+1}} \sum_{\beta=t+1}^{m_2} \sum_{\alpha=0}^{m_1} c_{\alpha,\beta} z^\alpha w^\beta.$$

Corollary. *The generating function $\mathcal{D}(z, w)$ of the solution of the difference equation (1) is rational if and only if the generating function $D_0(z, w)$ of the initial data is rational.*

The work was supported in part by the Russian Foundation of Basic Research (RFBR) and by the National Natural Science Foundation of China (NSFC) in the framework of the bilateral project “Complex Analysis and Its Applications” (project No. 08–01–92208_GFEN)

REFERENCES

1. *Leinartas E. K.* “Multiple Laurent series and difference equations,” Siberian Math. J., **45**, No. 2, 321–326 (2004).

AN ITERATIVE METHOD FOR SOLVING CAUCHY PROBLEMS FOR THE p-LAPLACE OPERATOR

Ly I.

Institut für Mathematik, Potsdam, Germany; lyibrahim@gmx.de

We study the Cauchy problem for the nonlinear Laplace operator with data on a part of the boundary.

Suppose $1 < p < \infty$. By the p-Laplace operator is meant the quasilinear second order operator

$$\begin{aligned} \Delta_p u &:= \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \\ &= |\nabla u|^{p-4} \sum_{j,k=1}^{n} (\delta_{j,k} + p - 2) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \end{aligned}$$

in R^n, where $\delta_{j,k}$ is the Kronecker symbol and ∂_j the derivative in the j th coordinate. This operator is known to be elliptic at any function u whose gradient does not vanish.

Let X be the closure of a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary denoted by ∂X, and let S be an open piece of the boundary. The Cauchy problem for the p-Laplace operator with data on S consists in finding a function $u \in W^{1,p}(X)$ satisfying

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta_p u &=& 0 & \text{in} \quad X, \\ u &=& U_0 & \text{on} \quad S, \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} &=& U_1 & \text{on} \quad S, \end{array} \right.$$

where $\partial/\partial\nu$ stands for the derivative along the unit outward normal vector for ∂X, and U_0, U_1 are given functions on S.

To study this problem, we use purely nonlinear methods, such as successive iterations of a Zaremba type mixed boundary value problem for the p-Laplace operator.

REFERENCES

1. *Gringanu J.*, “The p-Laplacian on Sobolev spaces $W^{1,p}(\Omega)$,” Studia Univ. “Babeş-Bolyai,” Mathematica, **L**, No. 1, 25–31 (2005).
2. *Kozlov V. A., Maz’ya V.Ġ., Fomin A. V.*, “An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations,” Comput. Math. Phys., **31**, No. 1, 45–52 (1991).
3. *Ly I., Tarkhanov N. N.*, “The Cauchy Problem for Nonlinear Elliptic Equations,” Nonlinear Analysis, **70**, No. 7, 2494–2505 (2009).
4. *Tarkhanov N. N.*, The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equation, Akademie Verlag, Berlin (1995).

TRANSFORMATIONS OF SPECIAL SPINES OF 3-MANIFOLDS

Makovetskii A. Yu.

Chelyabinsk State University, Russia; artemmac@mail.ru

The article [1] investigates collections of curves on closed orientable surfaces and transformations that allow to pass from one collection to another. A cycle is a sequence of transformations in which the last collection of curves coincides with the first. It is proved in [1] that any cycle is a composition of several particular basic cycles.

By analogy with [1], we raise the question for special spines of 3-manifolds. We study the set of all special spines of a given 3-manifold. Any two spines in this set are joined by a sequence of transformations $T^{\pm 1}$ (see [2]). We study examples of nontrivial cycles for transformations of spines and their expressions via basic cycles.

Supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant 07–01–96026).

REFERENCES

1. *Hatcher A.*, *Thurston W.*, "A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface," Topology, **19**, 221–237 (1980).
2. *Matveev S.*, Algorithmic topology and classification of 3-manifolds, Springer, Berlin (2003).

ROOTS OF KNOTTED GRAPHS

Matveev S. V.

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, and Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of RAS, Ekaterinburg, Russia; matveev@csu.ru

A knotted graph is a pair (M, G), where M is a compact 3-manifolds and G an arbitrary graph in M. Let S be a general position sphere in (M, G). Then the *spherical reduction* of (M, G) along S can be described as compressing S to a point and cutting the resulting singular manifold along that point. The result of the reduction is a new (maybe disconnected) knotted graph.

DEFINITION. A knotted graph (M_0, G_0) is *a root* of (M, G), if

1. (M_0, G_0) can be obtained from (M, G) by spherical reductions;
2. (M_0, G_0) admits no further nontrivial spherical reductions.

Problem. Under what conditions does the root of a knotted graph (M, G) exist and is unique?

Note that if G is empty, then the root of (M, G) is the disjoint union of all irreducible factors in the prime decomposition of M. We discuss the above problem by presenting some positive results and by showing a few counterexamples. We also discuss 3-orbifolds and non-zero degree maps between them.

The talk is based on the theory of roots developed in [1,2] and some ideas of [3].

The author is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 07–01–96026) and joint research project "Differential-Geometric and Computer Methods of Classification of 3-Manifolds" between Ural and Siberian branches of RAS.

REFERENCES

1. *Matveev S. V.*, "Roots of knotted graphs and orbifolds," Preprint Max-Planck-Institute for Mathematics, Bonn, **51**, 1–15 (2005).
2. *Hog-Angeloni C., Matveev S. V.*, "Roots in 3-manifold topology," Geometry & Topology Monographs, **14**, 295–319 (2008).
3. *Petronio C.*, "Spherical Splitting of 3-orbifolds," Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **142**, 269–287 (2007).

ORBIFOLDS AND MANIFOLDS IN PROJECTIVE METRIC PRESENTATION

Molnár E.

Budapest University of Technology and Economics, Institute of Mathematics, Department of Geometry, Budapest, Hungary; emolnar@math.bme.hu

In earlier works of the author, partly joint with I. Prok and J. Szirmai (e.g. [1–4]), the projective sphere $PS^d(\mathbf{R}, \mathbf{V}^{d+1}, \boldsymbol{V}_{d-1}, \sim +)$ has been introduced for presentation of polyhedral d-orbifolds and d-manifolds, mainly in the homogeneous 3-spaces

$$\mathbf{E^3},\ \mathbf{S^3},\ \mathbf{H^3},\ \mathbf{S^2xR},\ \mathbf{H^2xR},\ \widetilde{\mathbf{SL_2R}},\ \mathbf{Nil},\ \mathbf{Sol}$$

(Thurston geometries).

The main steps can be indicated as follows.

1. A projective simplex coordinate system has to be introduced for the fundamental polyhedron, where the face pairing generators are expressed by linear mappings upto projective freedom with some free parameters.

2. The defining relations for the symmetry groups (by the induced edge equivalence classes) fix some parameters of the generator mappings, by matrix equations, occasionally of high degree.

3. We look for a plane-point polarity (or scalar product) for the orthogonality of planes of a 3-dimensional projective metric geometry from the eight possibilities above. This polarity (i.e. the orthogonality of planes) has to be invariant under the generator mappings. These lead to linear matrix equations for the symmetric polarity matrix.

4. The signature of polarity (scalar product, fundamental quadratic form), if it is not trivial, with some additional properties, provides the possible *Thurston geometry*.

5. If the signature is $(0, +, +, +)$, then we obtain Euclidean 3-tiling with exact matrices for the generators and the scalar product-possibly with free parameters. Other signatures (e.g. $(+, +, +, +)$ to spherical space, $(-, +, +, +)$ to hyperbolic or Bolyai-Lobachevskii space) lead to other realizations. Or – if only trivial polaryty is possible – then either certain "splitting effects" occur, or the famous *Thurston conjecture* would not be true (!), considered still to be open, in general (?).

REFERENCES

1. *Molnár E.*, "Polyhedron complexes with simply transitive group actions and their realizations," Acta Math. Hung., **59 1–2**, 175–216 (1992).
2. *Molnár E.*, "The projective interpretation of the eight 3-dimensional homogeneous geometries," Beiträge zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry), **38**, No. 2, 261–288 (1997).
3. *Molnár E., Prok I., Szirmai J.*, "Classification of tile-transitive 3-simplex tilings and their realizations in homogeneous spaces," in: Non-Euclidean Geometries, János Bolyai Memorial Volume, Ed. Prekopa A., Molnár E., Mathematics and Its Applications **581**, Springer, 2006, pp. 321–363.
3. *Molnár E., Szirmai J., Vesnin A.* "Projective metric realizations of cone-manifolds with singularities along 2-bridge knots and links," Journal of Geometry, (submitted).

ON SOME FRACTIONAL ORDER HARDY-TYPE INEQUALITIES

Nasyrova M. G.

Computing Centre of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russia; nassm@mail.ru

Let $0 \le a < b \le \infty$ and $1 < p \le q < \infty$ be parameters. Let $u = u(x, y)$ and $v = v(x)$ be weight functions on $(a, b) \times (a, b)$ and (a, b), respectively. We consider the fractional order Hardy-type inequality of the form

$$\left(\int_a^b \int_a^b |f(x) - f(y)|^q u(x, y)\, dy\, dx\right)^{1/q} \le C \left(\int_a^b |f'(x)|^p v(x)\, dx\right)^{1/p}, \qquad (1)$$

for every absolutely continuous function $f(x)$ on (a, b). This type of inequalities was studied by H. P. Heinig ($p = q$) and A. Kufner ($p < q$) (see [1, 2] for details) in case of special weight in the left hand side.

Suppose that the weight function u has separated variables, that is,

$$u(x, y) = u_1(x)u_2(y).$$

We prove the following condition

$$A = A_1 + A_2 < \infty,$$

where

$$A_1 = \sup_{a<t<b} \left(\int_t^b u_1(x)\, dx\right)^{1/q} \left(\int_a^t v(z)^{1-p'} \left(\int_a^z u_2(y)\, dy\right)^{p'/q} dz\right)^{1/p'},$$

$$A_2 = \sup_{a<t<b} \left(\int_a^t u_1(x)\, dx\right)^{1/q} \left(\int_t^b v(z)^{1-p'} \left(\int_z^b u_2(y)\, dy\right)^{p'/q} dz\right)^{1/p'},$$

is necessary and sufficient for inequality (1) to hold and the best constant C in the inequality is estimated as $C \approx A$. Due to symmetry of the problem it it possible to point out the other pair of the characterizing constants. Some further results are also given.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 07–01–00054 and 09–01–98516–r–vostok–a.

REFERENCES

1. *Kufner A., Persson L.-E.*, Weighted Inequalities of Hardy Type, World Scientific, New Jersey-London-Singapore-Hong Kong (2003).
2. *Kufner A.*, "Fractional order inequalities of Hardy-type," in: Analytic and Geometric Inequalities and Applications, Ed T. M. Rassias, H. M. Strivastava, Kluver Academic Publishers, Dordrecht, 1999, pp. 183–189.

VARIATIONAL CALCULUS AS THE BASE OF THE POWER PARAMETERS EVALUATIONS FOR THE ROCKET-PROPELLANT SYSTEMS

Nazyrova R. R.

"TRANS-SERVICE" Ltd, Kazan, Russia; tdsoftstudy@rambler.ru

The methods of the thermodynamic and thermal properties of the reacting mixtures form the base of the power parameters evaluations of the rocket-propelled systems. From the most common definitions the thermodynamic state of the reacting mixture that takes part at the equilibrium combustion process is described by the mathematical model

$$\min_{T\in[\underline{T},\overline{T}]} \min_{\overline{\pi}\in\Pi(p,T)} S^{(1)}(p,T,\overline{\pi})$$

where

$$S^{(1)}(p,T,\overline{\pi}) = -S(p,T,\overline{\pi}),$$

$$\varphi_j(p,T,\overline{\pi}) = \varphi_j^{(0)},\ j=1,2,\ldots,n.$$

The each point $\overline{\pi}_i$ of the set $\Pi(p,T)$ break (by the definition

$$n_j^{(c)} = \begin{cases} 0, j\in \overline{V}_{(c)}^{(i)}, \\ \alpha, j\in V_{(c)}^{(i)}, \end{cases}$$

where $\alpha \geq 0$ for all values of the mixtures moles numbers N) the set $V_{(c)}$ of the condenced substances to the subsets $\overline{V}_{(c)}^{(i)}$, $V_{(c)}^{(i)}$ where

$$\overline{V}_{(c)}^{(i)} \cup V_{(c)}^{(i)} = V_{(c)}, \quad \overline{V}_{(c)}^{(i)} \cap V_{(c)}^{(i)} = \emptyset, \quad |V_{(c)}^{(i)}| < |X|$$

and X is the set of the chemical elements.

It is proposed to introduce the function $F(N,\Phi(N),\frac{d\Phi(N)}{dN})$ where

$$\Phi(N) = \sum_{k\in V_{(c)}^{(i)}} \overline{S}_k^{(c)} n_k^{(c)}, \qquad \frac{d\Phi(N)}{dN} = \sum_{k\in V_{(c)}^{(i)}} \overline{S}_k^{(c)} \frac{dn_k^{(c)}}{dN},$$

and to decide the problem

$$\min_{V_{(c)}^{(i)}\subseteq V_{(c)}} \min_{N\in[\underline{N_i},\overline{N_i}]} S^{(2)}(N)$$

by the solving the task of variational calculus by the moving bound that is described by the form

$$\min_{\Phi(N)} \int\limits_{N^{(1)}}^{N^{(2)}} F\Big(N,\Phi(N),\frac{d\Phi(N)}{dN}\Big)\,dN$$

where

$$\Phi(N^{(1)}) = f^{(1)}, \quad \Phi(N^{(2)}) = \psi(N^{(2)}).$$

COMPLEXITY OF SOME INFINITY SERIES OF 3-MANIFOLDS WITH NON-EMPTY BOUNDARY

Nikolaev D. O.

[1] *Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia;* count_6@mail.ru

Consider an irreducible boundary irreducible 3-manifold M with non-empty boundary. Recall that complexity $c(M)$ of M is called a minimal number of true vertices of almost simple spine of M ([1]).

Let M be a submanifold of N.

Definition. A relative complexity $c(N, M)$ of pair (N, M) is a minimal number of almost simple spine $P \in M$ of M, such that $(N \setminus M) \cap P$ consists of open disks.

Theorem 1. *There exists a system of incompressible proper annuli, embedded in M so that $c(M) = c(\widetilde{M}, M_S)$, where M_S is a result of cutting M along S and contains no incompressible annuli at all, $\widetilde{M}$ is a result of annulus reduction of M along S ([1]). System S, manifolds M_S and $\widetilde{M}$ can be find algorithmically.*

The authors were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 08–01–00162).

REFERENCES

1. *Matveev S. V.* Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifolds, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2003).

HOMOGENEOUS RIEMANNIAN SPACES

Rodionov E. D.[1], **Slavsky V. V.**[2]

[1] *Altai State Pedagogical Academy, Barnaul, Russia;* edr2002_ds@mail.ru
[2] *Ugra Research Institute of Information Technologies, Khanty-Mansiysk, Russia;* slavsky_ds@uriit.ru

In the present talk we consider some sections of modern Riemannian geometry, the theory of homogeneous Riemannian geometry, i.e., those Riemannian manifolds on wich a certain group of motions acts transitively. We discuss some results of this theory, referring to the following topics, which are most closely related to our research.

1. Geodesics curves on homogeneous Riemannian spaces. Behavior of geodesics curves on homogeneous Riemannian spaces. Homogeneous Riemannian spaces with closed geodesics. Closures of geodesics curves. Geodesically orbital spaces. Some unsolved problems.

2. Homogeneous Riemannian spaces of positive curvature. Homogeneous Riemannian manifolds of positive sectional curvature. Berestovsky-Milnor theorem on homogeneous Riemannian manifolds of positive Ricci curvature. One-dimensional curvature of homogeneous Riemannian spaces.

3. Homogeneous Riemannian manifolds with Einstein metric. Compact and noncompact cases. Homogeneous Killing manifolds with Einstein metric and triple Einstein algebras. Compact homogeneous Einstein manifolds of special form. Some unsolved problems.

4. Locally conformally homogeneous (pseudo)Riemannian spaces. Almost harmonic and harmonic (pseudo)Riemannian metrics on some classes of homogeneous spaces.

These investigations are supported by the RFBR (project no. 08–01–98001) and the LSS of RF (project no. SS–5682.2008.1).

THE TANGENT CONE TO A QUASIMETRIC SPACE WITH DILATIONS

Selivanova S. V.

Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Novosibirsk, Russia;
s_seliv@yahoo.com

On a topological space X, dilations can be introduced as one-parametric families of homeomorphisms $\delta = \{\delta_\varepsilon^x\}_{\varepsilon>0}$ defined in a neighborhood $U(x)$ of each point $x \in X$ and meeting certain axioms, in particular $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon^x u = x$ for all $u \in U(x)$.

Main examples of spaces with dilations are Carnot-Caratheodory spaces (see e.g. [1] and references therein) which model nonholonomic processes and naturally arise in many applications. Usually, the Hörmander's condition is supposed to hold, which makes the Carnot-Caratheodory space to a metric space. But recently discovered applications have lead to considering a more general situation [1] when only a certain quasimetric (a distance function meeting the generalized triangle inequality) can be introduced. Motivated by these considerations, we investigate local geometric properties of general quasimetric spaces with dilations.

In [2] we have developed an analog of the Gromov-Hausdorff convergence theory for quasimetric spaces, that yields an adequate notion of the tangent cone (i.e. an object that is a first-order approximation of the original space and has simpler algebraic structure). Using this theory, we prove the following

Theorem 1. *Let (X, d, δ) be a quasimetric space with dilations. If the limit $d^x(u, v) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} d(\delta_\varepsilon^x u, \delta_\varepsilon^x v)$ exists uniformly on $u, v \in U(x)$, and the distance $d^x(u, v)$ is non-degenerate, then the quasimetric space $(U(x), d^x)$ is the tangent cone to (X, d) at x, in the sense of definitions in* [2].

Provided that an additional axiom holds, the structure of the tangent cone can be described [3]: it is a local group, locally isomorphic to a graded nilpotent Lie group. Applied to the particular case of Carnot-Caratheodory spaces these results give an analog of the Mitchell's cone theorem.

REFERENCES

1. *Karmanova M., Vodopyanov S.*, "Geometry of Carno-Caratheodory spaces, differentiability and coarea formula," in: Analysis and Mathematical Physics, Trends in Mathematics, Birkhäuser, Basel, 2009, pp. 231–335.
2. *Selivanova S. V.*, "The tangent cone to a regular quasimetric Carnot — Caratheodory space," Doklady Mathematics, **425**, No. 5, 595–599 (2009).
3. *Vodopyanov S. K., Selivanova S. V.*, "Algebraic properties of the tangent cone to a quasimetric space with a dilation structure," Doklady Mathematics, 2009 (to appear).

AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR A NONSMOOTH SINGULAR ELLIPTIC EQUATION WITH STATE CONSTRAINTS

Serovajsky S. Ya.

al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan; serovajskys@mail.ru

We consider the homogeneous Dirichlet problem for the nonlinear elliptic equation

$$\Delta y + a(y) = v$$

in the opene bounded set Ω. The continuous function a has a bounded velocity of the increasing. It is not sufficient for the existence or uniqueness of its solution for all function v.

We determine the spaces $V = L_2(\Omega)$, $Y = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \cap L_2(\Omega)$, $U = V \times Y$. Let U_{ad} be the set of the admissible pairs, i.e. the pairs $u = (v, y)$ satisfying to the equality (1). Besides of this we have nonempty convex closed sets V_0 and Y_0 from the spaces V and Y. We denote $U_0 = V_0 \times Y_0$, $U_\partial = U_{ad} \cap U_0$. We consider the state functional

$$I(v,y) = \chi \int\limits_\Omega |v|^2 dx \, + \int\limits_\Omega |y - z|^q dx,$$

where $\chi > 0$, $z \in L_q(\Omega)$.

The problem of the minimizing of this functional on the set U has a solution if the set U_∂ is nonempty. However it has some serious difficulties of the optimal control finding. At first, we have the ill-posed boundary problem, so we can't any possibility to use the classical variational method. Then the state functional is not differentiable by nonsmoothness of the function a. Besides the state constraint, described by the set Y_0, is very hard difficulty too. Therefore the classical optimization methods are not applicable in this case. We will get a result with using of the weak form of the approximate solution and the approximational penalty method.

Let a_k be a continuous differentiable function with bounded velocity of the increasing of its derivative, and $a_k(y) \to a(y)$ in $L_2(\Omega)$ uniformly with respect to $y \in Y$ if $k \to \infty$. We determine the approximational penalty functional

$$I_k(v,y) = I(v,y) \, + \, \frac{1}{\varepsilon_k} \int\limits_\Omega |\Delta y + a_k(y) - v|^2 dx,$$

where $\varepsilon_k \to 0$, if $k \to \infty$, and

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\varepsilon_k} \sup_{y \in Y_0} \int\limits_\Omega |a_k(y) - a(y)|^2 dx \, = \, 0.$$

The problem of minimizing of the differentiable functional I_k on the convex set U_0 has a solution u_k. It satisfies the corresponding variational inequality. This necessary condition of optimality could be solved by an iterative method.

Theorem. *Every weak limit point of the consequence $\{u_k\}$ is the solution of minimizing problem of the functional I on the set U_∂, besides $I(u_k) \to \min I(U_\partial)$.*

Let's denote a pair $u \in U_0$ as the approximate solution of our problem, if we have the inclusion $u \in O$ and the inequality $|I(u) - \min I(U_\partial) \leq \delta$ for the small neighbourhood O of the weak topology of the space U and the small value $\delta > 0$.

Then the pair u_k is the approximate solution of this problem for the large enough number k by last theorem. It can be finding by the necessary conditions of optimality for the approximate problem. This technique could be use for solving of other optimal control problems for singular nonsmooth systems with state constraints.

GENERALIZED MINIMAL SURFACES OF LIOUVILLE TYPE

Shcherbakov E. A.

Kuban State University, Krasnodar, Russia; echt@math.kubsu.ru

It is now known that the Laplace equality

$$p_L - p_V = k \cdot H, \quad k > 0,$$

for equilibrium surface dividing phases V and L with pressures p_V and p_L is not adequate for surfaces with large normal curvatures.

The equation

$$p_L - p_V = k \cdot H + \Theta \cdot K, \quad k > 0, \quad \Theta \in R, \tag{1}$$

where H and K are mean and gauss curvatures of the equilibrium surface is more appropriate in general case ([1]). The surfaces satisfying equation (1) whose right term $p_L - p_V$ is equal to zero we name as generalized minimal surfaces.

Let c_1, c_2 be two regular curves lying in two disjoint cubes in the space R^3. Let us denote as L a class of admissible Liouville surfaces passing through the curves c_1, c_2.

On the class L we consider the following functional Ξ (see [2] for the axisymmetrical case)

$$\Xi(\bar{X}) = A(\bar{X}) + \Theta \cdot K(\bar{X})$$

Here $A(\bar{X})$ is the area of admissible surface $\bar{X} \in L$ and the functional K_1 is defined by the expression

$$K(\bar{X}) = \int\limits_{-T}^{T} d\nu \int\limits_{\Gamma_\nu} \frac{1}{2} \cdot \Bigg\{ - g \cdot \sqrt{1-g^2} \int\limits_{0}^{|g|} \Big(\arcsin\sigma + \sigma \cdot \sqrt{1-\sigma^2} - \frac{\pi}{2} \Big) \cdot$$
$$\cdot \big(1-\sigma^2\big)^{3/2} \cdot d\sigma + E \cdot \sqrt{1-g^2} \Bigg\} \cdot du, \quad E \in R$$

Here $G = G(w)$ is the coefficient of the first fundamental form of $\bar{X}$ in semi-geodesic parameterization, g is equal to $G_u(w)$ and Γ_ν is a geodesic line of the surface $\bar{X}$.

We prove existence of the solution of the following variational problem:

To find an element $\bar{X}_e \in L$ such that

$$\Xi(\bar{X}_e) = \inf\left\{\Xi(\bar{X}), \bar{X} \in L\right\}.$$

REFERENCES

1. *Korovkin V. P., Secrieru G. V., Sazhin F. M.*, “An analysis of the connection between capillary and wedging pressures” (in Russian), Mathematical researches, **108**, 27–32 (1989).
2. *Chtcherbakov E. A.* “Free Boundary Value Problem for Axisymmetrical Fluid‘s Flow with Surface Tension and Wedging Forces,” Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen, **17**, No. 4, 937–961 (1998).

UNIVERSAL ITERATIONS IN THE CAUCHY PROBLEM FOR NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS

Shestakov I. V.

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia; Shestakov-V@yandex.ru

We consider the Cauchy problem for a nonlinear elliptic system $F(x,y,y')=0$ of order 1 in a bounded domain $D \subset \mathbb{R}^n$ with smooth boundary. We are looking for a solution $y \in H^1(D,\mathbb{R}^l)$ of this system whose values on a part S of ∂D coincide with a prescribed function $y_0 \in H^{1/2}(\partial D,\mathbb{R}^l)$. Even in the case of linear systems the Cauchy problem is solvable for a "thin" set of Cauchy data y_0. For this reason we reformulate the Cauchy problem as the variatinal problem of finding a function $y \in H^1(D,\mathbb{R}^l)$ with $y = y_0$ on S, for which the integral

$$\int_D |F(x,y,y')|^2 dx$$

is minimal. The Euler equations of this variational problem can be thought of as a first order relaxation of the Cauchy problem. They constitute a mixed boundary problem of Zaremba type for a nonlinear analogue of the Laplace equation in D. This problem is treated by means of universal iterations of the form $y_{n+1} = y_n - \varepsilon f(y_n)$ for a Lipschitz continuous selfmapping f of a Hilbert space H. The mapping f proves to be monotone, i.e. $(f(y)-f(z), y-z) \geq 0$ for all $y, z \in H$. Given any initial value, it is easy to verify that $d^2(y_{n+1}, y_n) \leq (1 - 2c_n\varepsilon + C_n^2\varepsilon^2) d^2(y_n, y_{n-1})$ for all $n = 1, 2, \ldots$, where

$$c_n = \frac{(f(y_n) - f(y_{n-1}), y_n - y_{n-1})}{d^2(y_n, y_{n-1})} \geq 0,$$

$$C_n = \frac{d(f(y_n), f(y_{n-1}))}{d(y_n, y_{n-1})}.$$

Hence the iterations converge if the parameter $\varepsilon > 0$ can be chosen in such a way that $1 - 2c_n\varepsilon + C_n^2\varepsilon^2$ is uniformly bounded above by a constant less than 1.

REFERENCES

1. *Koshelev A. I.*, Regularity of solutions of elliptic equations and systems, Nauka, Moscow (1986).
2. *Krein S. G., L'vin S. Ya.*, "Overdetermined and underdetermined elliptic problems" (in Russian), in: Functional analysis and mathematical physics, Akad. Nauk SSSR Sibirsk. Otdel., Inst. Mat., Novosibirsk, 1985, pp. 106–116.

ON THE STRUCTURE OF SPENCER'S BUNDLE FOR OPERATORS WITH INJECTIVE PRINCIPAL SYMBOL SATISFYING A UNIQUENESS CONDITION

Shlapunov A. A.

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia; aashlapuno@mail.ru

The main problem of the theory of overdetermined elliptic systems of differential equations is to establish that any regular system $Av = f$ with smooth coefficients on an open set $U \subset \mathbb{R}^n$ admits a solution in smooth sections of the bundle, provided that f satisfies a compatibility condition in U (see, for instance, [1]). It is known that the regularity prodvides differential compatibility conditions and guarantees *formal* solvabilty of the system (i.e., on the level of formal power series). However examples by Lewy and Mizohata show it does not guarantee the solvability in C^∞-sense even if the coefficients of A are polynomial.

According to the geometrical approach of Spencer (see [2]), acyclicity of differential complex $\{A_i\}_{i=0}^N$ generated by regular differential operator $A_0 = A$ is equivalent the acyclicity of the so called Spencer complex.

Let $\mathfrak{R}_A^s$ be the Spencer bundle over U (i.e. $\mathfrak{R}_A^s(x)$, $x \in U$, is the kernel of A on the level of jets of length $s \geq a$ over the point x, where a is the order of A). Let us show how an information on the structure of the bundle $\mathfrak{R}_A^s$ results on the acyclicity of the compatibility complex (cf. [3]).

We say that A is *adequate* at the point $x_0 \in U$ if for any number $\mathbb{N} \ni s \geq a$ and jet $u \in \mathfrak{R}_A^s(x_0)$ there is a neighbourhood V of x_0 and smooth section v satisfying $Av = 0$ in V such that the jet $j^s(v)(x_0)$ of the section v of length s at x_0 coincides with u. If we denote by $\widehat{\mathfrak{R}}_A^s(x_0)$ a module generated by s-jets of smooth solutions of the operator A in a neighbourhood of x_0 over the ring of smooth functions in a neighbourhood of x_0 then A is adequate if and only if $\widehat{\mathfrak{R}}_A^s(x_0) = \widetilde{\mathfrak{R}}_A^s(x_0)$ where $\widetilde{\mathfrak{R}}_A^s(x_0)$ is a sheaf corresponding to the bundle $\mathfrak{R}_A^s$ at x_0.

Let us consider systems with the following Uniqueness Condition for the Cauchy problem in small:

Uniqueness Condition. If $v \in C^\infty(U)$ with $Av = 0$ in U and $v(x) = 0$ for every x from an open (non-empty) subset $O \subset U$ then $v \equiv 0$ in U.

Theorem 1. *Let A be a regular formally inegrable involutive adequate system in U satisfying the Uniqueness Condition in U. Then the complex $\{A_i\}_{i=0}^N$ is acyclic on the level of sheafs at point $x_0 \in U$ at degree $q \geq 1$ if and only if for any $s \geq a$ and $\phi \in \widetilde{\mathfrak{R}}_A^s$ there is a jet $\Phi \in \widehat{\mathfrak{R}}_A^\infty$ such that $\pi^{s,\infty}\Phi = \phi$ where $\pi^{s,\infty} : \widehat{\mathfrak{R}}_A^\infty \to \widetilde{\mathfrak{R}}_A^s$ is the natural projection.*

Theorem 2. *If A is a regular formally inegrable involutive system with real analytic coefficients in U then it is adequate.*

Conjecture. *If A is a regular system with injective principal symbol satisfying the Uniqueness Condition in U then it is adequate.*

REFERENCES

1. *Tarkhanov N. N.*, Complexes of Differential Operators, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1995).
2. *Spencer D. C.* "Overdetermined systems of linear partial differential equations," Bull. Amer. Math. Soc., **75**, No. 2, 179–239 (2009).
3. *Shlapunov A. A., Tarkhanov N. N.*, "A homotopy operator for Spencer complex in C^∞-case," Sib. Adv. in Math., **19**, No. 2, 91–127 (2009).

OPTIMAL TRANSPORTATION AND RICCI CURVATURE FOR METRIC MEASURE SPACES

Sturm K.-Th.

University of Bonn, Bonn, Germany; sturm@uni-bonn.de

We present the concept of generalized lower Ricci curvature bounds for metric measure spaces (M, d, m), introduced by Lott, Villani and the author. These curvature bounds are defined in terms of optimal transportation, more precisely, in terms of convexity properties of the relative entropy $\mathrm{Ent}(.|m)$ regarded as function on the Wasserstein space of probability measures on the given sapce M. For Riemannian manifolds, $\mathrm{Curv}(M, d, m) \geq K$ if and only if $\mathrm{Ric}_M \geq K$ on M. Other important examples covered by this concept are Finsler manifolds and Alexandrov spaces.

One of the main results is that these lower curvature bounds are stable under (e.g. measured Gromov–Hausdorff) convergence.

Moreover, we introduce a curvature-dimension condition $\mathrm{CD}(K, N)$ being more restrictive than the curvature bound $\mathrm{Curv}(M, d, m) \geq K$. For Riemannian manifolds, $\mathrm{CD}(K, N)$ is equivalent to $\mathrm{Ric}_M(\xi, \xi) \geq K \cdot |\xi|^2$ and $\dim(M) \leq N$.

Condition $\mathrm{CD}(K, N)$ implies sharp version of the Brunn–Minkowski inequality, of the Bishop–Gromov volume comparison theorem and of the Bonnet–Myers theorem.

Extension of this curvature concept to discrete spaces and infinite dimensional spaces will be indicated, e.g. for the Wiener space $\mathrm{Curv}(M, d, m) = 1$.

ON ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF ANALYTIC FUNCTIONS SATISFYING NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Soldatov A. P.

Belgorod State University, Belgorod, Russia; soldatov@bsu.edu.ru

The family of m analytic functions in the angle domains is considered. These functions are connected on the lateral sides by $2m$ linear relations. The following question is discussed. Suppose that right sides of the given relations have power-logarithmic asymptotic. Then under what conditions is this property valid for the analytic functions.

FIRST GENERAL THEOREMS ON LOWER SEMICONTINUITY AND RELAXATION FOR STRONG MATERIALS

Sychev M. A.

Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Novosibirsk, Russia;
masychev@math.nsc.ru

We consider the situation of strong materials, i.e. when all admissible deformations are continuous functions. The later is achieved by required suitable growth assumptions for integrands.

Under certain further technical assumptions on integrands we prove lower semicontinuity and relaxation results. As usual quasiconvexity is resposible for lower semicontinuity when quasiconvexifications present the lower semicontinuous extensions. What is notable the only involved properties are a.e. classical differentiability of deformations and uniform convergence of weakly convergent sequences of deformations.

LATTICE-LIKE BALL PACKINGS IN THURSTON'S GEOMETRIES

Szirmai J.

Budapest University of Technology and Economics, Institute of Mathematics, Department of Geometry, Budapest, Hungary; szirmai@math.bme.hu

In this talk we investigate the geodesic balls of the **Nil** space and compute their volume, introduce the notion of the **Nil** lattice, **Nil** parallelepiped and density of the lattice-like ball packing. Moreover, we determine the densest lattice-like geodesic ball packing by a type of **Nil** lattices. The density of this densest packing is ≈ 0.78085, may be surprising enough in comparison with the Euclidean result ≈ 0.74048. The kissing number of the balls in this packing is 14.

Moreover, we consider in **Nil** and **Sol** spaces the translation curves and translation balls introduced by initiative of E. Molnár. In **Sol** geometry we study the relation between **Sol** lattices and lattices of the pseudoeuclidean (or Minkowskian) plane. We compute the volume of a translation ball, define the **Sol** parallelepiped and the density of the lattice-like ball packing. We determine the densest translation ball packing by so-called fundamental lattices. This density is ≈ 0.56405083 and the kissing number of the balls to this packing is 6.

REFERENCES

1. *Molnár E.*, "The projective interpretation of the eight 3-dimensional homogeneous geometries," Beiträge zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry), **38**, No. 2, 261–288 (1997).
2. *Scott P.*, "The geometries of 3-manifolds," Bull. London Math. Soc., **15**, 401–487 (1983).
3. *Szirmai J.*, "The densest geodesic ball packing by a type of Nil lattices," Beiträge zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry), **48**, No. 2, 383–398 (2007).
4. *Szirmai J.*, "The densest translation ball packing by fundamental lattices in the Sol space," Manuscript to Beiträge zur Algebra und Geometrie (Contributions to Algebra and Geometry), (2009).

THE DIRICHLET TO NEUMANN OPERATOR FOR ELLIPTIC COMPLEXES

Tarkhanov N.

University of Potsdam, Potsdam, Germany; tarkhanov@math.uni-potsdam.de

Let $\mathcal{X}$ be a connected compact C^∞ manifold with boundary equipped with a Riemannian metric. In the sequel n stands for the dimension of $\mathcal{X}$.

Denote by Δ the Laplace-Beltrami operator on $\mathcal{X}$. The classical Dirichlet to Neumann map $C^\infty(\partial\mathcal{X}) \to C^\infty(\partial\mathcal{X})$ is defined by $u_0 \mapsto \sqrt{-1}\, n(du)$, where u is the solution to the Dirichlet problem in $\mathcal{X}$ with data $u = u_0$ on $\partial\mathcal{X}$ and $n(du)$ stands for the normal component of du on $\partial\mathcal{X}$ which is a constant multiple of the derivative of u along the unit outward normal vector to the boundary. The factor $\sqrt{-1}$ is explained by purely technical reasons.

In the inverse problem of reconstructing a manifold from boundary measurements the following question is of great theoretical and applied interest: To what extent are the topology and geometry of $\mathcal{X}$ determined by the Dirichlet to Neumann map? If $\mathcal{X}$ is of dimension 2, it proves to be determined by the Dirichlet to Neumann operator up to a conformal equivalence. For $n \geq 3$, there is the conjecture that the Dirichlet to Neumann operator determines $\mathcal{X}$ up to an isometry. In [2] this conjecture is proved for real analytic manifolds $\mathcal{X}$.

In [1], a Dirichlet to Neumann operator is defined on the space of differential forms of all degrees on $\mathcal{X}$. Moreover, the Betti numbers of $\mathcal{X}$ are expressed in terms of this operator. The Dirichlet to Neumann operator of [1] maps differential forms of degree i on $\partial\mathcal{X}$ to those of degree $n-i-1$, i.e., it does not preserve the natural graduation of the space of differential forms. Moreover, as substitution for the Dirichlet problem the boundary value problem for harmonic forms u on $\mathcal{X}$ is chosen, with prescribed data $t(u) = u_0$ and $t(d^*u) = 0$ on $\partial\mathcal{X}$, where $t(d^*u)$ is the tangential component of d^*u on the boundary.

Here we present another construction of the Dirichlet to Neumann operator for differential forms. To shorten notation, we use the same letter Δ for the Laplace-Beltrami operator on differential forms in $\mathcal{X}$. By the Dirichlet to Neumann operator is meant the map $\Omega^i(\partial\mathcal{X}) \to \Omega^i(\partial\mathcal{X})$ defined by $u_0 \mapsto \sqrt{-1}\, n(du)$, where u is the solution to problem

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u & = & 0 & \text{in } \mathcal{X}, \\ t(u) & = & u_0 & \text{on } \partial\mathcal{X}, \\ n(u) & = & 0 & \text{on } \partial\mathcal{X} \end{array} \right.$$

on $\mathcal{X}$. Thus, our Dirichlet to Neumann operator preserves the spaces of i-forms on $\partial\mathcal{X}$. In this way we obtain indeed a straightforward generalisation of the Dirichlet problem.

This boundary value problem is elliptic and behaves well also in the context of arbitrary elliptic complexes on $\mathcal{X}$. We show that the Dirichlet to Neumann operator defined in this way determines the Betti numbers of $\mathcal{X}$. This is a very particular case of our formula obtained for arbitrary elliptic complexes of first order differential operators on $\mathcal{X}$.

REFERENCES

1. *Belishev M., Sharafutdinov, V.*, "Dirichlet to Neumann operator on differential forms," Bull. des Sci. Math., **132**, 128–145 (2008).
2. *Lassas M., Taylor M., Uhlmann G.*, "The Dirichlet to Neumann map for complete Riemannian manifolds with boundary," Comm. Anal. Geom., **11**, No. 2, 207–221 (2003).

THE NUMBER OF THREE-PARTICLE BOUND STATES AND STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRUM OF THE ENERGY OPERATOR OF TWO-MAGNON SYSTEM IN A THREE-DIMENSIONAL ISOTROPIC IMPURITY NON-HEISENBERG FERROMAGNET WITH NEAREST-NEIGHBOURS INTERACTIONS

Tashpulatov S. M.

Institute of Nuclear Physics of Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan; toshpul@mail.ru, toshpul@rambler.ru, toshpul@inp.uz

We consider the energy operator of two-magnon systems in a isotropic ferromagnetic impurity non-Heisenberg model with interacting between nearest-neighbors. We investigated the structure of essential spectrum and number of three-particle bound states of energy operator of two-magnon system.

The Hamiltonian of the system in question has the form

$$H = -\sum_{m,\tau}\sum_{n=1}^{2s} J_n(\overrightarrow{S}_m\overrightarrow{S}_{m+\tau})^n - \sum_{\tau}\sum_{n=1}^{2s}(J_n^0 - J_n)(\overrightarrow{S}_0\overrightarrow{S}_\tau)_n, \tag{1}$$

where $J_n > 0$ are the parameters of the multipole exchange interaction between the nearest-neighbor atoms in the lattice, $J_n^0 \neq 0$ are the atom-impurity multipole exchange interaction parameters, the summation over τ ranges the nearest-neighbors, and $\overrightarrow{S}_m$ is the atomic spin operator for the spin s at the lattice site m. Hamiltonian (1) acts in the summetric Fock space $\mathcal{H}$. Let $\mathcal{H}_1$ and $\mathcal{H}_2$ are the corresponding one-magnon and two-magnon subspace of the operator (1). Let $\tilde{H}_2 = H/_{\mathcal{H}_2}$ and $\tilde{H}_1 = H/_{\mathcal{H}_1}$, and $N-$ number of three-particle bound states of the operator (1). Denote $p(s) = -2\sum_{k=1}^{2s}(-2s)^k J_k$ and $q(s) = -2\sum_{k=1}^{2s}(-2s)^k(J_k^0 - J_k)$ and $a = \int_{T^3}\frac{\sin^2 t_1 dt_1 dt_2 dt_3}{3-\cos t_1-\cos t_2-\cos t_3}$, $b = \int_{T^3}\frac{(\cos t_1-\cos t_2)^2 dt_1 dt_2 dt_3}{3-\cos t_1-\cos t_2-\cos t_3}$. As is seen, we have $0 < a < b < 1$ and $2a < b$.

Теорема 1. *If* $\nu = 3$ *and* $0 < q(s) < \frac{p(s)}{3}$, *our* $-p(s) < q(s) < 0$, *our* $p(s) < 0, \frac{p(s)}{3} < q(s) < 0$, *our* $0 < q(s) < -p(s)$, *then the essential spectrum of the operator* $\tilde{H}_2$ *consists only one segment* $\sigma_{ess.}(\tilde{H}_2) = [0; 12p(s)]$ *our* $\sigma_{ess.}(\tilde{H}_2) = [12p(s); 0]$ *and for number* N *has the relation:* $0 \le N \le 32$.

Теорема 2. *If* $\nu = 3$ *and* $p(s) > 0, -\frac{2p(s)}{b} < q(s) \le -p(s)$, *our* $p(s) < 0, \frac{2p(s)}{b} < q(s) \le \frac{p(s)}{3}$, *our* $p(s) > 0, \frac{p(s)}{3} < q(s) \le \frac{2p(s)}{b}$, *our* $p(s) < 0, -p(s) < q(s) \le -\frac{2p(s)}{b}$, *then the essential spectrum of the operator* $\tilde{H}_2$ *consists of unification of two segments:* $\sigma_{ess.}(\tilde{H}_2) = [0; 12p(s)]\bigcup[z_1; 6p(s)+z_1]$ *our* $\sigma_{ess.}(\tilde{H}_2) = [12p(s); 0]\bigcup[z_1; 6p(s)+z_1]$ *and for number* N *has the relation:* $1 \le N \le 33$.

Теорема 3. *If* $\nu = 3$ *and* $p(s) > 0, -\frac{p(s)}{a} \le q(s) < -\frac{2p(s)}{b}$, *or* $p(s) < 0, \frac{p(s)}{a} < q(s) \le \frac{2p(s)}{b}$, *our* $p(s) > 0, \frac{2p(s)}{b} \le q(s) < \frac{p(s)}{a}$, *our* $p(s) < 0, -\frac{2p(s)}{b} \le q(s) < \frac{p(s)}{a}$, *then the essential spectrum of the operator* $\tilde{H}_2$ *consists of unification of three segments:* $\sigma_{ess.}(\tilde{H}_2) = [0; 12p(s)]\bigcup[z_1; 6p(s) + z_1]\bigcup[z_2; 6p(s) + z_2]$ *and for number* N *has the relation:* $3 \le N \le 35$.

Теорема 4. *If* $\nu = 3$ *and* $p(s) > 0, -\frac{p(s)}{a} \le q(s)$, *or* $p(s) < 0, \frac{p(s)}{a} \le q(s)$, *our* $p(s) > 0, \frac{p(s)}{a} \le q(s)$, *our* $p(s) < 0, -\frac{p(s)}{a} \le q(s)$, *then the essential spectrum of the operator* $\tilde{H}_2$ *consists 0f unification of four segments:*$\sigma_{ess.}(\tilde{H}_2) = [0; 12p(s)]\bigcup[z_1; 6p(s) + z_1]\bigcup[z_2; 6p(s) + z_2]\bigcup[z_3; 6p(s) + z_3]$ *and for number* N *has the relation:* $6 \le N \le 38$.

REFERENCES

1. *Tashpulatov S. M.* "One-Magnon systems in an isotropic non-Heisenberg ferromagnetic impurity Model," Theoretical and Mathematical Physics, **142**, No. 1, 71–78 (2005).

ON A CERTAIN CLASS OF KERNEL OPERATORS WITH VARIABLE LIMITS OF INTEGRATION

Ushakova E. P.

Computing Centre of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russia; elenau@inbox.ru

Let L_p be the Lebesgue space of all measurable functions on $[0,\infty)$ such that $\left(\int_0^\infty |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty$. Let $w, v \in L_{loc}[0,\infty)$ be non-negative weight functions.

We study $L_p - L_q$ boundedness and compactness of an integral operator

$$\mathcal{K}f(x) := w(x)\int_{a(x)}^{b(x)} k(x,y)f(y)v(y)dy \tag{1}$$

with differentiable and strictly increasing on $(0,\infty)$ border functions a, b such that $a(0) = b(0) = 0$, $a(x) < b(x)$ for $0 < x < \infty$ and $a(\infty) = b(\infty) = \infty$. A continuous kernel $k(x,y) > 0$ on $x > 0$, $a(x) < y < b(x)$ in (1) is from Oinarov's type class $\mathcal{O}_b$ or/and $\mathcal{O}_a$: there exists a constant $D \geq 1$ independent on x, y, z such that

$$D^{-1}k(x,y) \leq k(x,b(z)) + k(z,y) \leq Dk(x,y), \qquad z \leq x, \ \ a(x) \leq y \leq b(z), \quad (\mathcal{O}_b)$$

$$D^{-1}k(x,y) \leq k(x,a(z)) + k(z,y) \leq Dk(x,y), \qquad x \leq z, \ \ a(z) \leq y \leq b(x). \quad (\mathcal{O}_a)$$

Let $\sigma(x), \rho(y)$ on $[0,\infty]$ be *fairway*-functions such that $\sigma(0) = \rho(0) = 0$ and $\sigma(\infty) = \rho(\infty) = \infty$. We suppose $a(x) < \sigma(x) < b(x)$ and $\int\limits_{a(x)}^{\sigma(x)} [k(x,y)v(y)]^{p'}dy = \int\limits_{\sigma(x)}^{b(x)} [k(x,y)v(y)]^{p'}dy$ for $x > 0$. For $y > 0$ we assume $b^{-1}(y) < \rho(y) < a^{-1}(y)$ and $\int\limits_{b^{-1}(y)}^{\rho(y)} [k(x,y)w(x)]^q dx = \int\limits_{\rho(y)}^{a^{-1}(y)} [k(x,y)w(x)]^q dx$.

Denote $p' := p/(p-1)$, $q' := q/(q-1)$, $\Theta(t) := [b^{-1}(t), a^{-1}(t)]$, $\vartheta^-(t) := [a(\rho(t)), t]$, $\vartheta^+(t) := [t, b(\rho(t))]$, $\delta^-(t) := [b^{-1}(\sigma(t)), t]$, $\delta^+(t) := [t, a^{-1}(\sigma(t))]$, $\Delta(t) := [a(t), b(t)]$,

$$\mathcal{B}_\rho^\pm := \left(\int_0^\infty \left[\int_{\Theta(t)} [k(x,t)w(x)]^q dx\right]^{r/q} \left[\int_{\vartheta^\pm(t)} v^{p'}(y)dy\right]^{r/q'} v^{p'}(t)dt\right)^{1/r},$$

$$\mathcal{B}_\sigma^\pm := \left(\int_0^\infty \left[\int_{\delta^\pm(t)} w^q(x)dx\right]^{r/p} \left[\int_{\Delta(t)} [k(t,y)v(y)]^{p'}dy\right]^{r/p'} w^q(t)dt\right)^{1/r},$$

$$\mathcal{B}_\rho := \mathcal{B}_\rho^- + \mathcal{B}_\rho^+, \qquad \mathcal{B}_\sigma := \mathcal{B}_\sigma^- + \mathcal{B}_\sigma^+.$$

Theorem 1. *Let $1 < q < p < \infty$ and let the functions $\rho(y)$, $\sigma(x)$ be strictly increasing fairways on $[0,\infty]$. (i) If $k(x,y) \in \mathcal{O}_b$ then*

$$\beta_1(p,q)\left[\mathcal{B}_\rho^- + \mathcal{B}_\sigma^+\right] \leq \|\mathcal{K}\|_{L_p\to L_q} \leq \beta_2(p,q)\left[\mathcal{B}_\rho + \mathcal{B}_\sigma\right].$$

(ii) If $k(x,y) \in \mathcal{O}_a$ then $\beta_3(p,q)\left[\mathcal{B}_\rho^+ + \mathcal{B}_\sigma^-\right] \leq \|\mathcal{K}\|_{L_p\to L_q} \leq \beta_4(p,q)\left[\mathcal{B}_\rho + \mathcal{B}_\sigma\right]$.
(iii) $\mathcal{K} : L_p \to L_q$ is compact if $\mathcal{B}_\rho, \mathcal{B}_\sigma < \infty$ and if $\mathcal{K} : L_p \to L_q$ is compact then $\mathcal{B}_\rho^-, \mathcal{B}_\sigma^+ < \infty$ for $k(x,y) \in \mathcal{O}_b$ and $\mathcal{B}_\rho^+, \mathcal{B}_\sigma^- < \infty$ for $k(x,y) \in \mathcal{O}_a$.

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects 07–01–00054 and 09–01–98516) and by the Far-Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences (project 09–II–CO–01–003).

MAPPING CLASS GROUPS AND MAPPING CLASS MONOIDS

Vershinin V. V.

Sobolev Institute of Mathematics of SB RAS, Novosibirsk, Russia;
versh@math.nsc.ru

Let $S_{g,b,n}$ be an oriented surface of the genus g with b boundary components and a set Q_n of n fixed points. Consider a homeomorphism f of $S_{g,b,n}$ which maps k points, $k \leq n$, from Q_n: $\{i_1, \ldots, i_k\}$ to k points $\{j_1, \ldots, j_k\}$ also from Q_n. Denote the set of isotopy classes of such maps by $\mathcal{IM}_{g,b,n}$. Composition defines a structure of monoid on $\mathcal{IM}_{g,b,n}$. The classical mapping class group $\mathcal{M}_{g,b,n}$ is embedded in $\mathcal{IM}_{g,b,n}$ and the properties of mapping class monoids are close to the properties of mapping class groups [1, 2].

REFERENCES

1. *Vershinin V. V.*, "On the inverse braid monoid," Topology Appl., **156**, 1153–1166 (2009).
2. *Karoui R., Vershinin V. V.*, "On the inverse mapping class monoids," preprint arXiv:0902.1183.

AUTHOR INDEX