

# МАТЕМАТИКА В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

Российская конференция, посвященная 50-летию  
Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН  
17–23 сентября 2007 г.  
Тезисы докладов

# MATHEMATICS IN THE MODERN WORLD

The Russian Conference  
Dedicated to the Fiftieth Anniversary of  
the Sobolev Institute of Mathematics  
September 17–23, 2007  
Abstracts

Novosibirsk, Russia

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА

# МАТЕМАТИКА В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

Российская конференция, посвященная 50-летию  
Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

17–23 сентября 2007 г.

Тезисы докладов

НОВОСИБИРСК  
2007

УДК 51  
ББК В1+В31  
М34

Математика в современном мире. Российская конференция, посвященная 50-летию Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, 17–23 сентября 2007 г.): Тез. докладов / Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2007. 358 с.

Организатор — Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

### **Программный комитет**

Академик Ю. Л. Ершов (Новосибирск) — председатель, академик А. А. Боровков (Новосибирск), академик С. К. Годунов (Новосибирск), академик Ю. И. Журавлёв (Москва), академик М. М. Лаврентьев (Новосибирск), академик В. Л. Макаров (Москва), академик Ю. Г. Решетняк (Новосибирск), академик Д. В. Ширков (Москва), чл.-к. РАН С. С. Гончаров (Новосибирск), чл.-к. РАН В. Д. Мазуров (Новосибирск), чл.-к. РАН В. Г. Романов (Новосибирск), чл.-к. РАН И. А. Тайманов (Новосибирск), чл.-к. РАН В. Г. Хорошевский (Новосибирск), профессор Д. С. Аниконов (Новосибирск), профессор Ю. Е. Аниконов (Новосибирск), профессор В. В. Асеев (Новосибирск), профессор Н. Н. Ачасов (Новосибирск), профессор В. С. Белоносов (Новосибирск), профессор В. Л. Береснев (Новосибирск), профессор А. М. Блохин (Новосибирск), профессор О. В. Бородин (Новосибирск), профессор В. А. Васильев (Новосибирск), д. ф.-м. н. А. Ю. Веснин (Новосибирск), профессор С. К. Водопьянов (Новосибирск), д. ф.-м. н. Ю. С. Волков (Новосибирск) — секретарь, профессор Н. И. Глебов (Новосибирск), профессор В. Т. Дементьев (Новосибирск), профессор Г. В. Демиденко (Новосибирск), профессор А. А. Евдокимов (Новосибирск), д. ф.-м. н. В. Н. Желябин (Новосибирск), профессор Н. Г. Загоруйко (Новосибирск), профессор А. А. Колоколов (Омск), профессор В. И. Кузьминов (Новосибирск), профессор С. С. Кутателадзе (Новосибирск), профессор А. С. Морозов (Новосибирск), профессор Е. А. Палютин (Новосибирск), профессор В. Н. Ремесленников (Омск), профессор В. А. Топчий (Омск), профессор С. И. Фадеев (Новосибирск), д. ф.-м. н. М. В. Фокин (Новосибирск) — заместитель председателя, профессор В. И. Шмырёв (Новосибирск).

### **Тематика конференции**

Алгебра и математическая логика  
Геометрия, топология и математический анализ  
Дифференциальные уравнения и математическая физика  
Теория вероятностей и математическая статистика  
Вычислительная математика и математическое моделирование  
Дискретный анализ и исследование операций  
Теория игр и математическая экономика  
Теоретическая физика

## СОДЕРЖАНИЕ

---

### АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА ALGEBRA AND MATHEMATICAL LOGIC

---

#### **П. Е. Алаев**

Тонкие вычислимые булевы алгебры  
Thin computable Boolean algebras . . . . . 19

#### **Р. Ж. Алеев, В. В. Соколов**

Группы центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп  
The central units of the integral group rings of cyclic and alternating groups . . . . . 20

#### **М. Г. Амаглобели**

$G$ -свободные метабелевы нильпотентные группы  
 $G$ -free metabelian nilpotent groups . . . . . 21

#### **А. А. Бутурлакин**

Спектры конечных проективных специальных линейных групп  
Spectra of finite simple groups . . . . . 22

#### **А. В. Васильев**

О конечных группах со связным графом простых чисел  
On finite groups with a connected graph of prime numbers . . . . . 23

#### **Е. П. Вдовин**

О существовании регулярных орбит конечных разрешимых линейных групп  
On existence of the regular orbits of finite solvable linear groups . . . . . 25

#### **М. А. Гречкосеева**

Критерий распознаваемости конечных простых групп  $L_n(2^k)$  по спектр  
A criterion of recognizability of finite simple groups  $L_n(2^k)$  by spectrum . . . . . 26

#### **А. Р. Ешкеев**

Некоторые свойства  $\Delta$ -PJ- и  $\Delta$ -PR-теорий  
Some properties of the  $\Delta$ -PJ and  $\Delta$ -PR-theories . . . . . 28

#### **О. В. Зеевальд**

О простых модальных  $BL$ -алгебрах. Слабое интерполяционное свойство для логик,  
соответствующих многообразиям, порождённым конечными модальными  $G$ -алгебрами  
On simple modal  $BL$ -algebras. The weak interpolation property for the logics corresponding  
to the varieties generated by finite modal  $G$ -algebras . . . . . 30

#### **И. Б. Кайгородов**

О  $\delta$ -дифференцированиях простых конечномерных йордановых супералгебр  
и полупростых конечномерных йордановых алгебр  
On the  $\delta$ -derivations of simple finite dimensional Jordan superalgebras and semisimple  
finite dimensional Jordan algebras . . . . . 32

#### **А. В. Карпенко**

Слабая интерполяция в расширениях модальной логики  $S4$   
Weak interpolation in extensions of the modal logic  $S4$  . . . . . 33

#### **А. А. Коробов**

О стабильности группы автоморфизмов конечномерного векторного пространства  
над телом  
On stability of the automorphism group of a finite dimensional vector space over a skew field . . . . 35

**Д. С. Кротов, В. Н. Потапов**Описание  $n$ -арных квазигрупп порядка 4Description of the  $n$ -ary quasigroups of order 4 ..... 36**Д. О. Ревин**

Холловы свойства конечных групп

The Hall properties of finite groups ..... 37

**В. В. Римацкий**Построение базиса правил вывода, допустимых в расширениях системы  $S4$ Constructing the explicit basis of admissible rules for extensions of  $S4$  ..... 38**Х. М. Рухая, Л. М. Тибуа**Алгоритм установления общезначимости формулы  $\tau sr$ -логикиAn algorithm for determining the validity of a formula of a  $\tau sr$ -logic ..... 39**С. В. Судоплатов**

О стабильных генерических эренфейхтовых теориях (решение проблемы Лахлана)

On stable generic Ehrenfeucht theories (a solution of the Lachlan problem) ..... 41

**В. А. Чуркин**

Ортогональные группы и вероятность диагонализуемости матрицы

Orthogonal groups and the probability of that a matrix may be diagonalized ..... 43

**П. А. Шрайнер**Автоматическое определение слоя модального исчисления, расширяющего  $S4$ Automatic determination of the slice for a modal calculus extending  $S4$  ..... 44**ГЕОМЕТРИЯ, ТОПОЛОГИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
GEOMETRY, TOPOLOGY, AND MATHEMATICAL ANALYSIS****Г. А. Акишев**Оценки наилучшего  $M$ -членного приближения классовEstimates of the best  $M$ -term approximations of classes ..... 46**Д. А. Бердинский**

Поверхности вращения в группе Гейзенберга и спектральное обобщение функционала Уиллмора

Surfaces of revolution in the Heisenberg group and the spectral generalization of the Willmore functional ..... 48

**А. А. Богданов, В. Р. Мешков, А. В. Омельченко, М. И. Петров, Э. А. Тропп**

Топология двоякопериодических переплетений

Topology of doubly periodic links ..... 49

**А. Ю. Веснин**

Оценки сложности трехмерных многообразий, разветвленных над двухмостовыми узлами

Complexity estimates for 3-manifolds branched over two-bridged knots ..... 50

**С. К. Водопьянов**

Пространства Соболева и современная теория функций

Sobolev spaces and modern function theory ..... 51

**А. Ф. Воронин**

Исследование интегральных уравнений в свертках на отрезке с периодическим ядром

Study into convolution integral equations with periodic kernel on an interval ..... 53

**В. М. Гичев**

- О полиномиально выпуклых оболочках орбит компактных линейных групп  
 On polynomially convex hulls of the orbits of compact linear groups ..... 55

**А. В. Грешнов**

- Об изоморфизме нильпотентных касательных конусов для некоторых анизотропных римановых пространств  
 On the isomorphism of nilpotent tangent cones for some anisotropic Riemannian spaces ..... 57

**И. А. Гундырев**

- О подобно однородных пространствах с внутренней метрикой  
 Similarly homogeneous spaces with intrinsic metric ..... 59

**А. Е. Гутман, А. В. Коптев**

- Пространство  $CD_0$ -сечений банахова расслоения  
 The space of  $CD_0$ -sections of a Banach bundle ..... 61

**А. А. Егоров**

- Свойства решений дифференциальных соотношений, строящихся с помощью квазивыпуклых функций и нуль-лагранжианов  
 Properties of solutions of the differential relations involving quasiconvex functions and null-Lagrangians ..... 63

**Д. В. Егоров**

- Тэта-функции на многообразии Кодaira — Тёрстона  
 Theta-functions on the Kodaira–Thurston manifold ..... 65

**А. С. Кацунова**

- О нахождении главных значений интеграла Мартинелли — Бохнера  
 Calculation of the principal values of the Martinelli–Bochner integral ..... 66

**А. Г. Качуровский**

- Два новых подхода к унификации эргодических теорем и теорем о сходимости мартингалов  
 Two new approaches to the unification of ergodic theorems and martingale convergence theorems ..... 68

**Ф. Г. Кораблев**

- Граф-многообразия рода 2  
 Graph manifolds of genus 2 ..... 70

**А. Е. Королько, И. М. Пупышев**

- Поточечные неравенства для функций классов Соболева на группах Карно  
 Pointwise inequalities for functions of Sobolev classes on Carnot groups ..... 71

**Е. Г. Лазарева**

- Свойства перестановок рядов в банаховом пространстве  
 On the properties of series permutations in a Banach space ..... 73

**С. В. Матвеев**

- Недавний прогресс в классификации трехмерных многообразий малой сложности  
 Recent progress in the theory of manifolds of small complexity ..... 75

**Т. Н. Никитина**

- Некоторые приложения условия следа для  $\bar{\partial}$ - и  $\bar{\partial}^*$ -замкнутых форм  
 Some applications of the trace condition for  $\bar{\partial}$ - and  $\bar{\partial}^*$ -closed forms ..... 77

**Д. О. Николаев**

- Классификация многообразий сложности ноль  
 Classification of the manifolds of complexity zero ..... 80

**М. А. Овчинников**

Значения  $t$ -инварианта на малых многообразиях Зейферта  
 Values of the  $t$ -invariant on small Seifert manifolds ..... 82

**Т. Е. Панов**

Действия тора и комплексные кобордизмы  
 Torus actions and complex cobordisms ..... 84

**В. П. Пантелеев**

Наилучшие совмещения областей  
 Best matching of domains ..... 85

**Е. А. Плотникова**

Регулярность решений квазилинейных уравнений субэллиптического типа  
 Regularity of solutions to quasilinear equations of subelliptic type ..... 87

**Е. В. Прокопенко**

Об оценке параметров, влияющих на форму сплайновой кривой  
 On estimation of the parameters influencing the forms of a spline ..... 88

**Е. Д. Родионов, В. В. Славский**

О конформно плоских метриках ограниченной кривизны  
 Conformally flat metrics of bounded curvature ..... 90

**А. С. Романов**

О непрерывности функций соболевского типа на метрических пространствах  
 On continuity of Sobolev type functions on metric spaces ..... 92

**Е. А. Сбродова**

Граничные наклоны трехмерных многообразий  
 Boundary slopes of 3-manifolds ..... 94

**М. С. Сгибнев**

О единственности решения системы интегральных уравнений на прямой  
 On uniqueness of the solution to a system of integral equations on the real line ..... 96

**О. А. Сергеева**

Билинейные спаривания Петерсона для голоморфных  $(q, \rho)$ -форм  
 Bilinear Peterson pairings for holomorphic  $(q, \rho)$ -forms ..... 98

**Е. Е. Скурихин**

Некоторые приложения когомологической теории категорных топологических пространств  
 Some applications of the cohomology theory of categorical topological spaces ..... 100

**Я. В. Славолубова**

О контактных структурах на некоторых пятимерных группах Ли  
 Contact structures on some 5-dimensional Lie groups ..... 102

**Е. С. Смаилов**

Мультипликаторы преобразования Фурье в пространствах со степенным весом  
 Multipliers of the Fourier transform in spaces with power weight ..... 104

**А. В. Сычѳв**

О школе Лаврентьева — Белинского по геометрической теории функций  
 The Lavrentiev–Belinskii school of geometric function theory ..... 105

**В. В. Таркаев**

Хирургические представления трехмерных гиперболических многообразий с каспами  
 Surgery presentation of 3-dimensional hyperbolic manifolds with cusps ..... 106

**Е. А. Фоминых**

Верхние оценки сложности граф-многообразий  
Upper estimates for complexity of graph manifolds ..... 108

**О. Н. Шатных**

Поведение векторной сложности трехмерных многообразий при разрезании  
по поверхности  
The behavior of the vector complexity of 3-manifolds under cutting along a surface ..... 109

**А. А. Яковлев**

Спектр Sol-многообразий в адиабатическом пределе  
The spectrum of Sol-manifolds in the adiabatic limit ..... 111

**N. V. Abrosimov**

Hyperbolic and spherical volumes of octahedra with some symmetries ..... 113

**J.-M. Aubry**

Ultrarapidly decreasing ultradifferentiable functions, Wigner distributions,  
and density matrices ..... 115

**V. V. Chueshev**

A basis for meromorphic Prym  $q$ -differentials and a multiple divisor on a variable compact  
Riemann surface ..... 116

**D. V. Isangulova**

Sharp geometric rigidity on Heisenberg groups ..... 117

**M. Karmanova**

On geometric measure theory on metric structures ..... 118

**N. V. Kopteva, E. Ya. Klimenko**

A two-dimensional slice through the parameter space of two-generator Kleinian groups ..... 120

**Ya. A. Kopylov**

$L_{p,q}$ -cohomology of some Riemannian manifolds ..... 122

**M. V. Korobkov**

On necessary and sufficient conditions for a curve to be the gradient range of a  $C^1$ -smooth  
function ..... 123

**L. Kussainova**

Multipliers in weighted Sobolev spaces ..... 124

**S. S. Kutateladze**

The call of mathematics ..... 125

**I. G. Nikolaev**

Quasilinearization, Enflo’s 2-roundness, and Alexandrov’s curvature ..... 127

**A. I. Parfenov**

A criterion for an interpolation equality ..... 129

**T. Püttmann**

New models for exotic 7-spheres ..... 131

**D. Repovš**

Wild embeddings of Cantor sets into 3-manifolds ..... 132



---

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**  
**DIFFERENTIAL EQUATIONS AND MATHEMATICAL PHYSICS**


---

**Д. С. Аниконов**

Частичное решение обратных задач  
 Partially solving inverse problems ..... 133

**Э. В. Арбузов, А. Л. Бухгейм**

О решении системы уравнений специального вида для оператора Коши — Римана  
 On solving a system of special type equations for the Cauchy–Riemann operator ..... 135

**А. М. Блохин, Д. Л. Ткачев**

Корректность модифицированной смешанной задачи об устойчивости ударной волны  
 в вязком газе  
 Well-posedness of a modified initial-boundary value problem on stability of shock waves  
 in a viscous gas ..... 137

**М. Е. Боговский**

Некоторые аспекты применения метода Ньютона к уравнениям Навье — Стокса  
 Some aspects of application of the Newton method to the Navier–Stokes equations ..... 139

**Л. Н. Бондарь**

Условия разрешимости краевых задач для квазиэллиптических систем  
 Solvability conditions of boundary value problems for quasielliptic systems ..... 141

**Р. С. Бушманов**

Асимптотическая устойчивость состояния равновесия для одной гидродинамической  
 модели переноса заряда в полупроводниках  
 Asymptotic stability of the equilibrium state for one hydrodynamical model of charge  
 transport in semiconductors ..... 143

**Е. П. Волокитин**

Достаточные условия центра для некоторых классов совершенно изохронных систем  
 Sufficient center conditions for uniformly isochronous systems ..... 145

**Ю. А. Гайдов, В. П. Голубятников**

Геометрические задачи моделирования генных сетей  
 Geometrical problems of modeling gene networks ..... 146

**С. Н. Глазатов**

О пространственно-периодических решениях нестационарных уравнений трансзвуковой  
 газовой динамики  
 On triply periodic solutions to nonstationary equations of transonic gas dynamics ..... 148

**В. М. Гордиенко**

Гиперболические системы, эквивалентные волновому уравнению  
 Hyperbolic systems equivalent to the wave equation ..... 149

**Г. В. Демиденко, И. И. Матвеева**

Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом  
 Stability of solutions to delay differential equations ..... 151

**Г. В. Демиденко, И. И. Матвеева, Ю. Ю. Клевцова**

Дифференциальное уравнение Ляпунова с периодическими коэффициентами  
 The Lyapunov differential equation with periodic coefficients ..... 152

**И. Е. Егоров, Т. А. Сафонова**

О задаче Дирихле для неклассического дифференциально-операторного уравнения второго порядка

On the Dirichlet problem for a nonclassical second-order operator-differential equation . . . . . 154

**А. О. Егоршин**

Об аппроксимации дифференциальных и разностных уравнений

On approximation of differential and difference equations . . . . . 155

**А. О. Егоршин**

Линейная алгебра и динамические процессы

Linear algebra and dynamical processes . . . . . 157

**А. В. Жибер, О. С. Костригина**

О нелинейных гиперболических системах уравнений, интегрируемых по Дарбу

On nonlinear hyperbolic systems of Darboux integrable equations . . . . . 160

**О. Г. Жукова**

Граничное управление процессом распространения тепла в полубесконечном стержне.

Гиперболическая модель

Boundary control of heat propagation processes in a semi-infinite rod. A hyperbolic model . . . . . 162

**С. А. Загребина**

Задача сопряжения для уравнения термоконвекции

A conjugation problem for the heat convection equation . . . . . 164

**Х. Х. Имомназаров**

Динамическая задача для уравнения SH волн в пористой среде с криволинейной свободной поверхностью

A dynamical problem for the SH-wave equation in porous media with a curvilinear

free surface . . . . . 165

**С. И. Кабанихин**

Регуляризация обратных задач математической физики

Regularization of inverse problems of mathematical physics . . . . . 166

**А. И. Кожанов**

Вырождающиеся уравнения соболевского типа

Degenerate Sobolev type equations . . . . . 168

**А. И. Кожанов**

Дифференциальные уравнения с неизвестными коэффициентами

Differential equations with unknown coefficients . . . . . 170

**О. А. Колтуновский**

Обратная коэффициентная задача для гиперболического уравнения в случае переопределения на временных слоях

An inverse coefficient problem for a hyperbolic equation in the case of overdetermination

on time layers . . . . . 171

**Л. И. Кононенко**

Качественный анализ сингулярно возмущенной системы с двумя медленными и одной быстрой переменными

Qualitative analysis of a singularly perturbed system with two slow and one fast variables . . . . . 172

**А. В. Красник**

Задача Коши для линейного дифференциально-операторного уравнения четвертого порядка в банаховом пространстве

The Cauchy problem for a linear fourth-order operator-differential equation in a Banach space . . 173

**А. А. Ломов**

Суммарные линейные системы в анализе временных рядов  
Sum linear systems in time series analysis ..... 175

**М. В. Нецадим**

Касательные преобразования уравнения Кэли — Дарбу  
Tangent transformations of the Cayley–Darboux equation ..... 176

**С. Г. Пятков**

О некоторых эволюционных обратных задачах  
On some evolution inverse problems ..... 177

**Р. К. Романовский, Л. В. Бельгарт**

Об экспоненциальной дихотомии линейных разностных систем с почти периодической матрицей  
On exponential dichotomy of linear difference systems with almost periodic matrix ..... 179

**Р. К. Романовский, М. В. Мендзив**

Устойчивость решений смешанной задачи для гиперболической системы на плоскости с почти периодическими коэффициентами  
Stability of solutions to a mixed problem for a plane hyperbolic system with almost periodic coefficients ..... 181

**А. И. Рылов**

Решения уравнений Чаплыгина и их нестационарных аналогов и законы сохранения в газовой динамике  
Solving the Chaplygin equations and their nonstationary analogs, and the conservation laws in gas dynamics ..... 183

**С. А. Саженов**

Истинно нелинейное ультрапараболическое уравнение колмогоровского типа  
A genuinely nonlinear ultraparabolic Kolmogorov type equation ..... 185

**В. В. Сказка**

О параметрическом резонансе у гамильтоновых уравнений с периодическим гамильтонианом, имеющим непрерывный спектр  
On parametric resonance in the Hamiltonian equations having periodic Hamiltonian with continuous spectrum ..... 186

**Ю. Л. Трахинин**

Диссипативные симметризаторы гиперболических задач и их приложения в магнитной гидродинамике  
Dissipative symmetrizers of hyperbolic problems and their applications in magnetohydrodynamics ..... 188

**С. В. Успенский, Е. Н. Васильева, Т. Е. Денисова**

Обобщенные пространства Соболева и приложения к дифференциальным уравнениям  
Generalized Sobolev spaces and their applications to differential equations ..... 190

**М. Д. Хриптун**

Обобщенные функции Бесселя и некоторые их применения  
Generalized Bessel functions and their applications ..... 193

**Н. А. Чуешева**

Об одной краевой задаче для дифференциального уравнения порядка  $2m$   
On a boundary value problem for a differential equation of order  $2m$  ..... 195

**Г. А. Чумаков, Н. А. Чумакова**

Хаотическая динамика в кинетической модели гетерогенной каталитической реакции  
Chaotic dynamics in a kinetic model of a heterogeneous catalytic reaction ..... 197

**N. A. Lyulko**

Increasing the smoothness of solutions to some hyperbolic problems on the plane ..... 199

---

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**  
**PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS**

---

**А. П. Ковалевский**

Модифицированный знаковый метод тестирования фрактальности гауссовского шума  
Modified sign method of testing Gaussian noise fractality ..... 201

**Ю. Ю. Линке, А. И. Саханенко**

Оптимальное оценивание в задаче линейной регрессии при невыполнении некоторых  
классических предположений  
Optimal estimation in a linear regression problem without some classical assumptions ..... 203

**В. И. Лотов**

Об одной задаче проверки гипотез  
On some testing problem ..... 205

**А. А. Могульский**

Интегро-локальные теоремы, действующие на всей полуоси, для сумм случайных величин  
с правильно меняющимися распределениями  
Integro-local theorems on the whole semiaxis for sums of random variables with regular  
distributions ..... 206

**Ф. С. Насыров**

Обобщенные иттовские интегралы и гауссовские процессы  
Extended Ito integrals and Gaussian processes ..... 208

**Н. В. Савищенко**

Устойчивость разностных стохастических схем  
Stability of difference stochastic schemes ..... 209

**В. А. Топчий**

Время вырождения срезаемых на уровне  $k$  надкритических ветвящихся процессов  
Extinction time for supercritical branching processes cutting at level  $k$  ..... 212

**S. Utev**

Operator inequalities and their applications ..... 214

---

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА**  
**И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**  
**COMPUTATIONAL MATHEMATICS**  
**AND MATHEMATICAL MODELING**

---

**В. Н. Белых**

Феномен ненасыщаемости численного метода в свете очевидностей теории конструктивного  
приближения функций  
Phenomenon of numerical algorithm nonsaturation in a view of evidences of theory  
of constructive approximation of functions ..... 215

**Э. А. Бибердорф, Н. И. Попова**

Вычисления с гарантированной точностью в современной математической культуре  
 Calculations with guaranteed accuracy in modern mathematical culture ..... 217

**В. В. Богданов**

О ковьшуклой интерполяции рациональными сплайнами  
 On coconvex interpolation by rational splines..... 219

**В. Л. Васкевич**

Константы вложения пространств Соболева и их приложения в оценках погрешностей  
 Embedding constants of Sobolev spaces and their application in error estimates..... 220

**Ю. С. Волков**

Сплайны чётной степени по Субботину и по Марсдену  
 Splines of even degree in the sense of Subbotin and Marsden..... 222

**С. В. Гайдомак**

Об одном разностном методе решения вырожденных гиперболических систем  
 On one difference method for solving degenerate hyperbolic systems..... 223

**Б. М. Жапбасбай, Х. Х. Имомназаров**

Оптимизационный метод решения двумерной обратной задачи для неоднородных пористых сред  
 An optimization method for solving a two-dimensional inverse problem for heterogeneous porous media..... 225

**А. И. Задорин**

Метод интерполяции для эллиптической задачи с пограничным слоем  
 The interpolation method for an elliptic problem with a boundary layer ..... 227

**М. С. Иванов, А. Н. Кудрявцев, А. В. Троцюк, Д. В. Хотяновский**

Численное моделирование взаимодействия ударных и детонационных волн в газах  
 Numerical modeling of the interaction of shock and detonation waves in gases ..... 228

**Б. И. Квасов**

Построение поверхностей свободной формы методом сеток  
 Construction of free surfaces by the grid method ..... 230

**В. А. Лихошвай, Н. А. Омелянчук, В. В. Миронова, С. И. Фадеев**

Одномерная математическая модель паттерна распределения ауксина в корне растения  
 An one-dimensional mathematical model of a pattern of the auxin distribution in a root of a plant ..... 231

**А. Ю. Лошманов**

Математическое моделирование некоторых процессов обработки металлов давлением  
 Mathematical modeling of some processes of metal shaping by pressure ..... 232

**Н. А. Луценко**

О численном методе для моделирования нестационарных течений газа через пористые объекты с источниками тепла  
 On a numerical method for modeling a two-dimensional nonstationary flow of a gas through porous objects with heat sources ..... 234

**В. Л. Мирошниченко**

О точных оценках приближения интерполяционными кубическими сплайнами  
 On the exact error bounds for approximation by cubic spline interpolants..... 236

**Н. Б. Пивоварова, Л. Б. Славина**

Расчёт скоростного поля в очаговой области кронотского землетрясения в 1997 г.  
 Computation of the velocity field in the focal zone of the Kronotsky earthquake in 1997 ..... 237

**В. В. Поддубный, Е. А. Червонная**

Построение границ области устойчивости решений системы дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами

Construction of the boundaries of stability domains of the solutions of a system of delay differential equations . . . . . 239

**А. Н. Рогалев**

Использование гарантированных границ решений для анализа свойств дифференциальных уравнений

Use of the guaranteed bounds of solutions for analyzing of the properties of differential equations . . . . . 241

**В. А. Скорospelов, П. А. Турук**

Геометрическая поддержка проектирования рабочих колес гидротурбин

Geometrical support for designing the runners of hydraulic turbines . . . . . 243

**С. И. Фадеев, И. А. Гайнова, В. К. Королев, А. Е. Медведев**

Пакет программ STEP+ для численного исследования автономных систем и систем нелинейных уравнений

Software package STEP+ for numerical study of autonomous systems and systems of nonlinear equations . . . . . 244

**С. И. Фадеев, В. В. Когай, К. В. Гунбин**

Численное исследование модели рецепции градиента концентрации морфогена Hedgehog

Numerical study of the reception model for the morphogene Hedgehog concentration gradient . . . 245

**С. И. Фадеев, А. Б. Шигаров, В. А. Кириллов, Н. А. Кузин**

Численное исследование математической модели сопряжённого по теплу каталитического реактора паровой конверсии и окисления метанола

Numerical study of a mathematical model of catalytic reactor interfaced on heat for methanol steam conversion and oxidation . . . . . 246

**А. П. Чупахин**

Гидродинамика на вращающейся сфере

Hydrodynamics on a rotating sphere . . . . . 247

**Б. М. Шумилов, Э. А. Эшаров**

Эрмитовы сплайн-вейвлеты и прогнозирование рынка недвижимости

Hermite spline wavelets and forecasting the real estate market . . . . . 248

## ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH

**А. А. Агеев**

Приближенные алгоритмы и нижние пределы неаппроксимируемости для задач теории расписаний с задержками

Approximation algorithms and lower inapproximability bounds for scheduling problems with delays . . . . . 250

**Е. В. Алексеева**

Генетический алгоритм для задачи о  $P$ -медиане с предпочтениями клиентов

A genetic algorithm for the  $P$ -median problem with customer preferences . . . . . 253

**Ю. В. Бородина**

О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов

On the schemes admitting single tests of length 1 for constant faults at element outlets . . . . . 254

**А. Ю. Васильева**

Спектральные свойства совершенных раскрасок и вполне регулярных кодов  
 The spectral properties of perfect colorings and totally regular codes ..... 255

**Ю. Ю. Великанова**

О временной сложности алгоритмов локального спуска для задач теории расписаний  
 на параллельных машинах  
 On time complexity of local descent algorithms for schedule theory problems on parallel  
 machines ..... 257

**В. Г. Визинг**

Задачи раскраски графов, связанные с составлением расписаний для коммуникационных  
 сетей  
 Graph coloring problems connected with scheduling communication networks ..... 258

**Э. Х. Гимади**

Алгоритмы с оценками для некоторых задач коммивояжёра и их модификаций  
 Algorithms with performance guarantees for some traveling salesman problems  
 and their modifications ..... 259

**Э. Х. Гимади, Ю. В. Глазков**

Приближённые алгоритмы для некоторых трёхиндексных планарных задач о назначении  
 Approximation algorithms for some 3-index planar assignment problems ..... 261

**Э. Х. Гимади, А. Ле Галлу, А. В. Шахштейндер**

Вероятностный анализ одного приближенного алгоритма для задачи коммивояжера  
 на неограниченных сверху входных данных  
 Stochastic analysis of an approximation algorithm for the traveling salesman problem  
 with upper unbounded input ..... 262

**А. А. Добрынин, Л. С. Мельников**

Графы Грещша — Закса  
 Grötzsch–Sachs graphs ..... 264

**А. И. Ерзин**

Однопараметрическая схема динамического программирования для выбора оптимальных  
 типов соединений в ациклической сети с учетом эльморовской задержки  
 An one-parameter dynamic programming scheme for the optimal wire type selection problem  
 in acyclic nets in the Elmore delay model ..... 266

**А. В. Кельманов**

Проблемы оптимизации в задачах анализа и распознавания последовательностей  
 с квазипериодической структурой  
 Some optimization problems in analysis and recognition of sequences  
 with a quasiperiodical structure ..... 268

**А. В. Кононов, М. И. Свириденко, С. В. Севастьянов**

Полный 4-параметрический анализ сложности классических цеховых задач теории  
 расписаний  
 A complete 4-parameter complexity analysis of the classical workshop problems  
 of schedule theory ..... 270

**А. В. Лось**

О свитчинговых методах построения  $q$ -значных кодов  
 On the switch methods of constructing  $q$ -digit codes ..... 272

**В. А. Лутков, И. Д. Черных**

Задача open shop с маршрутизацией и разрешением прерываний  
 Routing open shop with preemptions allowed ..... 274

**С. А. Малюгин**

О несистематических совершенных кодах над конечными полями

On nonsystematic perfect codes over finite fields ..... 276

**А. Л. Пережогин**

Об автоморфизмах простых циклов в гиперкубе

Automorphisms of cycles in the hypercube ..... 278

**С. А. Пузынина**

Обзор по совершенным раскраскам и другим обобщениям совершенных кодов на бесконечных решетках

Survey of perfect colorings and other generalizations of perfect codes on infinite lattices ..... 279

**А. В. Пяткин**

О задачах раскраски инциденторов

On the incidentor coloring problems ..... 281

**Д. С. Романов**

Обзор методов построения нелинейных совершенных двоичных кодов

Survey of the methods of constructing nonlinear perfect binary codes ..... 282

**А. С. Руднев**

Алгоритм имитации отжига для упаковки кругов и прямоугольников на плоскости

An algorithm of firing imitation for packing circles and rectangles on the plane ..... 284

**К. Л. Рычков**

О достаточных условиях существования графа с заданным разнообразием шаров

On sufficient conditions for existence of a graph with given variety of balls ..... 285

**Ф. И. Соловьева**

Построение замощений неориентируемых поверхностей системами троек Штейнера

Construction of coverings for nonorientable surfaces by Steiner triple systems ..... 286

**Н. Н. Токарева**Бент-функции кратной нелинейности:  $K$ -бент-функцииBent functions of multiple nonlinearity:  $K$ -bent functions ..... 288**Т. И. Федоряева**

Оценки числа различных шаров заданного радиуса в графах

Bounds for the number of different balls of a given radius in graphs ..... 290

**О. В. Хамисов**

Методы глобальной оптимизации и теория двойственности

Global optimization methods and duality theory ..... 291

**Р. В. Хелемендик**

Логика ветвящегося времени и игровые программы. Приложения и перспективы

Logic of branching time and game programs. Applications and perspectives ..... 293

**Д. А. Чемисова**

О некоторых свойствах оптимальных расписаний в задаче Flow Shop с прерываниями и произвольным регулярным критерием

On some properties of optimal schedules in Flow Shop problem with breaks and arbitrary regular criterion ..... 295

**Е. V. Konstantinova**

Structural properties of some Cayley graphs ..... 296



---

**ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА**  
**GAME THEORY AND MATHEMATICAL ECONOMICS**


---

**С. М. Анцыз**

Об оптимальных стратегиях функционирования иерархически организованных систем  
 On optimal strategies of the functioning of the hierarchical organized systems..... 298

**В. А. Булавский, М. И. Вирченко, Н. В. Шестакова**

Рента как объект математического моделирования  
 Rent as an object of mathematical modeling..... 299

**А. Ф. Валеева, Т. Ю. Сиразетдинова**

Конструирование прямоугольного раскроя в системах автоматизированного проектирования  
 Construction of rectangular cutting in the systems of the computer-aided design ..... 301

**В. А. Васильев**

Кооперативные игры и полиномиальная измеримость  
 Cooperative games and polynomial measurability ..... 303

**Н. П. Дементьев**

Накопительные пенсионные реформы и эффекты замещения в процессах сбережения в экономике  
 Pension accumulative reforms and substitution effects in the saving processes in the national economy ..... 305

**В. А. Кардаш**

Содержательный смысл предельных значений компромиссно-равновесных цен  
 The meaning of the marginal values of the compromise-equilibrium prices..... 306

**В. А. Колемаев**

О последствиях инвестирования в производство дополнительного дохода, порожденного ростом мировых цен на энергоресурсы и сырье  
 On the consequences of the investing in production the additional income generated by growth of the world prices on energy supply and raw materials ..... 308

**Г. Ш. Лев, А. В. Фролов**

Об оптимальном определении неисправных элементов  
 On optimal determination of faulty components ..... 310

**Э. А. Мухачева, А. С. Филиппова**

Нетипичные эволюционные алгоритмы для решения задач ортогональной упаковки  
 Nontypical evolutionary algorithms for solving orthogonal packing problems ..... 311

**Т. Т. Орлова**

Экономико-математическое моделирование лесных ферм  
 Economical-mathematical modeling of forest farms ..... 313

**Н. А. Орозбеков**

Задача оптимизации активов с дифференцированной ставкой процента для нового банка  
 The optimization problem of assets with varied interest rate for a new bank ..... 314

**А. А. Петров**

Системный анализ переходной экономики и приложения моделей к анализу эволюции экономики России 1992–2005 гг.  
 Systemic analysis of the transition economy and application of models to the analysis of the evolution of the Russian economy in 1992–2005 ..... 316

**И. Г. Поспелов**

Моделирование современной экономики России: методы, технологии, результаты  
 Modeling the modern national economy of Russia: methods, technologies, and results ..... 318

**Э. О. Рапопорт**

Уравновешивающие цены в одной задаче распределения неделимого ресурса  
 The long-run equilibrium prices in one problem of allotment of an indivisible resource..... 319

**А. Н. Романовская**

Модель оптимизации портфеля и процентных ставок нового банка и банка-монополиста  
 A portfolio and rate optimization model for a new bank and a monopolist-bank..... 321

**И. В. Романовский**

Открытый симплекс-пакет с генерированием столбцов  
 An open simplex-package with column generation ..... 322

**А. В. Рыженков**

Нелинейная, вероятностная макро модель большого цикла в Италии: математический  
 и статистический анализ  
 The nonlinear probabilistic macro-model of a large cycle in Italy: mathematical and statistical  
 analysis ..... 323

**А. В. Сидоров**

Патерналистская модель экономики с перекрывающимися поколениями  
 A paternalistic model of an economy with overlapping generations ..... 325

**А. Е. Трубачева**

Существование решения в задаче инвестора с аддитивной слабо возмущенной  
 производственной функцией  
 Existence of solution in the investor problem with a weakly perturbed additive  
 production function ..... 326

**Г. И. Ханин**

Экономика России в постсоветский период: альтернативная оценка динамики  
 и эффективности  
 The Russian economy in the post-Soviet period: alternative estimation of dynamics  
 and efficiency ..... 328

**В. И. Хохлюк**

Вычислительные процедуры прямого метода  
 Computational procedures of the direct method ..... 330

**В. И. Шмырев**

Алгоритмы полиэдральной комплементарности для отыскания равновесия в линейных  
 моделях обмена  
 Algorithms of polyhedral complementarity for searching an equilibrium in linear exchange  
 models ..... 331

**C. D. Aliprantis, M. Florenzano, R. Tourky**

Portfolio cones and arbitrage free prices: anything goes ..... 333

**I. A. Bykadorov, A. Ellero, S. Funari, E. Moretti**

Communication and trade discount in manufacturer–retailer–consumer structure..... 334

**J. Drèze, M. Le Breton, A. Savvateev, S. Weber**

“Almost” subsidy-free spatial pricing in a multi-dimensional setting..... 335

**T. S. H. Driessen**

Generalizations of Sobolev’s consistency and values for TU-games ..... 337

**A. B. Khmel'nitskaya**

Values for graph-restricted games with coalition structure ..... 338

**S. Weber, H. Wiesmeth**

Decision making in the Council of Ministers of the EU: a formal analysis ..... 340

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА****THEORETICAL PHYSICS****Н. Н. Ачасов, А. А. Кожевников**Реакция  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-\pi^-$  при энергии пучков до 1 ГэВReaction  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-\pi^-$  for the beam energy up to 1 GeV ..... 341**И. И. Орлов, Н. В. Ильин**

Причинность. Интеграл наложения. Текущие спектры

Causality. Superposition integral. Current spectra ..... 342

**М. Поляков, А. Н. Валл, А. А. Владимиров**

О связи дифференциальных сечений по поперечному импульсу и пространственному параметру вылета детектируемой частицы

On connection of the differential cross sections in the transverse momentum and nearest approach parameter of a detecting particle ..... 344

**В. Г. Сербо**

Образование лептонных пар в соударениях релятивистских ядер

Lepton pair formation in collisions of relativistic nuclei ..... 345

**З. К. Силагадзе**

Демон Максвелла в зазеркалье

Maxwell's Demon through the Looking-Glass ..... 346

**N. N. Achasov**

Light scalar mesons today ..... 347

**N. N. Achasov, A. V. Kiselev**Light scalar mesons in the experimental data on the  $\phi \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$  decay and the  $\pi\pi$  scattering ... 348**N. N. Achasov, G. N. Shestakov**Lightest scalar in the  $SU_L(2) \times SU_R(2)$  linear  $\sigma$  model ..... 349**M. Diehl, D. Yu. Ivanov**

Dispersion representations for hard exclusive reactions ..... 350

**S. I. Eidelman**

Status of the muon anomalous magnetic moment ..... 351

**A. H. Fariborz, R. Jora, J. Schechter**

Scalar meson puzzle in QCD ..... 353

---

## АЛГЕБРА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА ALGEBRA AND MATHEMATICAL LOGIC

---

### ТОНКИЕ ВЫЧИСЛИМЫЕ БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ\*

П. Е. Алаев

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; alaev@math.nsc.ru*

Пусть  $T$  — некоторая теория. Её главными расширениями называются расширения вида  $T[\varphi] = \text{Th}(T \cup \{\varphi\}) = \{\psi \text{ — предложение} \mid T, \varphi \vdash \psi\}$  для некоторого предложения  $\varphi$ .

Пусть  $T$  — вычислимо перечислимая (аксиоматизируемая) теория. Говорим, что у  $T$  мало в. п. расширений, если каждое её в. п. расширение  $T' \supseteq T$  имеет вид  $T[\varphi]$ . Заметим, что  $T[\varphi]$  всегда является в. п. расширением теории  $T$ . В [1] был получен ряд результатов для существенно неразрешимых теорий с таким свойством.

Ниже мы будем рассматривать только разрешимые теории  $T$ . Через  $\mathfrak{B}(T)$  обозначим алгебру Линденбаума — Тарского теории  $T$ ; её можно рассматривать как вычислимую булеву алгебру. Хорошо известно, что

- (1) расширения теории  $T$  соответствуют идеалам в  $\mathfrak{B}(T)$ ,
- (2) в. п. расширения  $T$  соответствуют в. п. идеалам в  $\mathfrak{B}(T)$ ,
- (3) у  $T$  мало в. п. расширений тогда и только тогда, когда любой в. п. идеал в  $\mathfrak{B}(T)$  является главным (одно-порождённым).

Говорим, что вычислимая булева алгебра  $\mathfrak{B}$  является тонкой, если любой в. п. идеал в  $\mathfrak{B}$  является главным (это понятие было предложено в [2]). Следующая теорема описывает алгебраическую структуру тонких вычислимых булевых алгебр.

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{B}$  — это вычислимая булева алгебра. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1)  $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}'$ , где  $\mathfrak{B}'$  — тонкая вычислимая булева алгебра;
- (2)  $\mathfrak{B}$  — атомная булева алгебра.

#### Литература

1. Downey R. G. Maximal theories // Annals of Pure and Applied Logic. 1987. V. 33, № 3. P. 245–282.
2. Handbook of Recursive Mathematics. Elsevier, 1998.

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05–01–00819).

# ГРУППЫ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ЕДИНИЦ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГРУПП

Р. Ж. Алеев<sup>1</sup>, В. В. Соколов<sup>2</sup>

*Южно-Уральский государственный университет, Челябинск;*

<sup>1</sup> *aleev@csu.ru*, <sup>2</sup> *berkutov@mail.ru*

В работе [1] были описаны группы  $U(Z(\mathbf{Z}A_n))$  центральных единиц целочисленных групповых колец  $\mathbf{Z}A_n$  знакопеременных групп  $A_n$  для  $n < 7$ . Анализ таблиц характеров групп  $A_n$  позволяет доказать следующий результат.

**Теорема 1.** *Пусть  $n < 10$  и  $n \notin \{5, 6\}$ , или  $n = 12$ . Тогда группа  $U(Z(\mathbf{Z}A_n))$  тривиальна, то есть,*

$$U(Z(\mathbf{Z}A_n)) = \langle -1 \rangle \times Z(A_n),$$

где  $Z(A_n)$  — центр  $A_n$ .

Основная цель доклада — дать полное описание группы  $U(Z(\mathbf{Z}A_{10}))$ . В работе [2] были введены локальные единицы рациональной групповой алгебры конечной группы  $G$  и было доказано, что подходящие локальные единицы порождают подгруппу конечного индекса в группе центральных единиц целочисленного группового кольца группы  $G$ . Первый существенный результат для описания  $U(Z(\mathbf{Z}A_{10}))$  состоит в следующем.

**Теорема 2.** *Справедливо равенство*

$$U(Z(\mathbf{Z}A_{10})) = \langle -1 \rangle \times \langle u(\lambda) \rangle.$$

*Здесь  $u(\lambda)$  — локальная единица, определяемая характером степени 384 группы  $A_{10}$ , для некоторой единицы  $\lambda$  кольца целых квадратичного поля  $\mathbf{Q}(\sqrt{21})$ .*

Далее находим  $\lambda$  и получаем окончательный результат.

**Теорема 3.** *Справедливо равенство*

$$U(Z(\mathbf{Z}A_{10})) = \langle -1 \rangle \times \langle u(\lambda) \rangle.$$

*Здесь  $u(\lambda)$  — локальная единица, определяемая характером степени 384 группы  $A_{10}$  и*

$$\lambda = \left( 2 + \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right)^{3780}.$$

## Литература

1. *Aleev R. Ž Higman’s central unit theory, units of integral group rings of finite cyclic groups and Fibonacci numbers // Intern. J. of Algebra and Comp. 1994. V. 4, № 3. P. 309–358.*
2. *Алеев Р. Ж. Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп // Матем. труды. 2000. Т. 3, № 1. С. 3–37.*

## G-СВОБОДНЫЕ МЕТАБЕЛЕВЫ НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ

М. Г. Амаглобели

*Тбилисский государственный университет, Тбилиси, Грузия; maia@rmi.acnet.ge*

Пусть  $\mathfrak{M}_c$  — многообразие метабелевых нильпотентных групп степени нильпотентности  $c \geq 1$ . По определению, это многообразие, которое можно задать с помощью двух тождеств:

$$\begin{aligned} \forall x, y, z, t \quad [x, y], [z, t] &= 1 \quad (\text{тождество метабелевости}), \\ \forall x_1, x_2, \dots, x_{c+1} \quad [x_1, x_2, \dots, x_{i+1}] &= 1 \quad (\text{тождество нильпотентности степени } c). \end{aligned}$$

В работе [1] для любой фиксированной группы  $G$  из многообразия  $\mathfrak{M}$  и множества букв  $X$  определено понятие  $G$ -свободной группы в многообразии  $\mathfrak{M}$ . Более коротко эту группу будем называть  $(G, \mathfrak{M})$ -свободной группой. Структурно  $(G, \mathfrak{M})$ -свободная группа есть группа

$$G_{\mathfrak{M}}[X] = G *_{\mathfrak{M}} F_{\mathfrak{M}}(X),$$

где  $*$  — вербальное произведение в многообразии  $\mathfrak{M}$ , а  $F_{\mathfrak{M}}(X)$  — свободная группа с базой  $X$  в многообразии  $\mathfrak{M}$ .

Там же объяснена важность определения структуры группы  $G_{\mathfrak{M}}[X]$  при построении алгебраической геометрии над группой  $G$ .

В работе [3] (теорема 4) мы определяем структуру этой группы для многообразия  $\mathfrak{M}_c$ , опираясь на работу [2] о структуре  $G_{\mathfrak{M}}[X]$ , где  $\mathfrak{M}$  — многообразие метабелевых групп.

**Теорема 4.** *Мальцевской базой группы  $G_{\mathfrak{M}}[X]$  служат базисные коммутаторы из  $W$  степени  $c$  и меньше.*

### Литература

1. Амаглобели М. Г., Ремесленников В. Н.  $G$  тождества и  $G$  многообразия // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 3. С. 249–272.
2. Ремесленников В. Н., Романовский Н. С. О нетабелевых произведениях групп // Алгебра и логика. 2000. Т. 43, № 3. С. 341–352.
3. Амаглобели М. Г., Ремесленников В. Н.  $G$ -свободные метабелевы нильпотентные группы // Докл. РАН. 2004. Т. 399, № 3. С. 295–297.

# СПЕКТРЫ КОНЕЧНЫХ ПРОЕКТИВНЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП\*

А. А. Бутурлакин

Новосибирский государственный университет, Новосибирск; *buturlakin@gmail.com*

Спектром  $\omega(G)$  конечной группы  $G$  называется множество порядков ее элементов. Группа  $G$  называется распознаваемой по спектру, если любая конечная группа  $H$  такая, что  $\omega(H) = \omega(G)$ , изоморфна  $G$ . Поскольку любая группа с нетривиальным разрешимым радикалом нераспознаваема, проблема распознаваемости в первую очередь представляет интерес для неабелевых простых групп. Как показывает практика исследований, при решении проблемы распознаваемости для серий простых групп возникает необходимость в критерии принадлежности данного натурального числа спектру той или иной простой группы. Согласно классификационной теореме, все неабелевы конечные простые группы исчерпываются знакопеременными группами степени, большей 4, спорадическими группами и простыми группами лиева типа. Спектры спорадических групп известны. Для знакопеременных групп требуемый критерий может быть легко получен. В исключительных группах лиева типа описаны классы сопряженных элементов, и таким образом, спектры этих групп также описаны. Нашей целью является нахождение подобного критерия для каждой классической группы лиева типа. Данная работа посвящена линейным группам.

Пусть  $G$  — конечная группа лиева типа над полем характеристики  $p$ . Тогда спектр  $\omega(G)$  группы  $G$  естественным образом распадается на три подмножества: множество  $\omega_p(G)$  порядков унипотентных элементов, т.е. элементов чей порядок есть степень числа  $p$ , множество  $\omega_{p'}(G)$  порядков полупростых элементов, т.е. элементов чей порядок взаимно прост с  $p$ , и множество  $\omega_m(G)$  порядков смешанных элементов. Описание подмножества  $\omega_p(G)$  для всех классических групп лиева типа содержится в [1]. В [2] автором совместно с М.А. Гречкосеевой было получено описание циклического строения максимальных торов в классических простых группах, и, следовательно, описано множество  $\omega_{p'}(G)$ . Таким образом, для завершения описания спектров конечных простых линейных групп требуется описать множество  $\omega_m(G)$ .

Пусть  $\mu(G)$  — множество максимальных относительно делимости элементов из  $\omega(G)$ . Очевидно, множество  $\mu(G)$  однозначно определяет  $\omega(G)$ . Обозначим через  $\mu_m(G)$  множество  $\mu(G) \cap \omega_m(G)$  и через  $\text{lcm}\{m_1, m_2, \dots, m_s\}$  наименьшее общее кратное чисел  $m_1, m_2, \dots, m_s$ .

**Теорема.** Пусть  $G = PSL_n(q)$ ,  $n \geq 2$ , и  $q$  — степень простого числа  $p$ . Положим  $d = (n, q - 1)$ . Пусть для каждого  $k > 1$  такого, что  $n_0 = p^{k-1} + 1 < n$ , и для любого разбиения  $n - n_0 = n_1 + n_2 + \dots + n_s$  множество  $\eta(G)$  содержит число  $p^k(q^{n_1} - 1)/d$ , если  $s = 1$ , содержит число  $p^k \text{lcm}\{q^{n_1} - 1, q^{n_2} - 1, \dots, q^{n_s} - 1\}$ , если  $s > 1$ , и не содержит никаких других элементов. Тогда  $\mu_m(G) \subseteq \eta(G) \subseteq \omega_m(G)$ , т.е. число принадлежит  $\omega_m(G)$  тогда и только тогда, когда оно делит некоторый элемент из  $\eta(G)$ .

## Литература

1. *Testerman D. M.*  $A_1$ -Type overgroups of order  $p$  in semisimple algebraic groups and the associated finite groups // *J. Algebra.* 1995. Т. 177, № 1. С. 34–76.
2. *Бутурлакин А. А., Гречкосеева М. А.* Циклическое строение максимальных торов в конечных классических группах // *Алгебра и логика.* 2007. Т. 46, № 2. С. 129–156.

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05–01–00797).

# О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ СО СВЯЗНЫМ ГРАФОМ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ\*

А. В. Васильев

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; vasant@math.nsc.ru*

Пусть  $G$  — конечная группа,  $\pi(G)$  — множество простых делителей ее порядка, а  $\omega(G)$  — ее спектр, т. е. множество порядков ее элементов. Граф простых чисел  $GK(G)$  группы определяется следующим образом. Множество вершин графа  $GK(G)$  — это множество  $\pi(G)$ , и два простых числа  $r, s \in \pi(G)$ , рассматриваемые как вершины графа, смежны в том и только в том случае, когда  $rs \in \omega(G)$ . Понятие графа простых чисел было введено К. В. Грюнбергом и О. Кегелем в середине семидесятых годов прошлого века (поэтому граф также называется графом Грюнберга — Кегеля). Им же принадлежит теорема о строении конечных групп с несвязным графом простых чисел. Этот глубокий результат вместе с классификацией конечных простых групп с таким графом, полученной в работах Дж. Вильямса и А. С. Кондратьева (см. [1,2]), стал отправной точкой целого ряда интересных и важных исследований.

Доказательство теоремы Грюнберга–Кегеля существенно использует тот факт, что группа  $G$  четного порядка содержит элемент нечетного порядка, несвязанный (т. е. лежащий в другой компоненте связности) с числом 2 в  $GK(G)$ . Оказалось, что условие несвязности может быть в большинстве случаев успешно заменено на более слабое условие несмежности числа 2 с хотя бы одним нечетным простым числом.

Обозначим через  $t(G)$  наибольшее число простых делителей порядка группы  $G$  попарно несмежных в  $GK(G)$ . Иными словами,  $t(G)$  — наибольшая мощность независимого множества вершин в  $GK(G)$  или неплотность графа  $GK(G)$ . По аналогии назовем  $r$ -неплотностью  $t(r, G)$  графа  $GK(G)$  наибольшее число вершин в независимых множествах вершин графа, содержащих простое число  $r$ . Недавно в [3] была дана характеристика конечных групп, для которых  $t(G) \geq 3$  и  $t(2, G) \geq 2$ , а в [4] было доказано, что все конечные неабелевы простые группы за исключением знакопеременных групп подстановок удовлетворяют условию  $t(2, G) \geq 2$ . В данной работе мы усиливаем основной результат из [3].

**Теорема 1.** *Пусть  $G$  — конечная группа, удовлетворяющая условиям  $t(G) \geq 3$  и  $t(2, G) \geq 2$ . Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) *Существует конечная неабелева простая группа  $S$  такая, что  $S \leq \overline{G} = G/K \leq \text{Aut}(S)$ , где  $K$  — максимальная нормальная разрешимая подгруппа группы  $G$ .*

(2) *Для любого независимого множества  $\rho$  вершин графа  $GK(G)$  с условием  $|\rho| \geq 3$  не более чем одно простое число из  $\rho$  делит произведение  $|K| \cdot |\overline{G}/S|$ . В частности,  $t(S) \geq t(G) - 1$ .*

(3) *Имеет место одно из двух утверждений.*

(а) *Каждое простое число  $r \in \pi(G)$ , несмежное в  $GK(G)$  с числом 2, не делит произведение  $|K| \cdot |\overline{G}/S|$ . В частности,  $t(2, S) \geq t(2, G)$ .*

(б) *Существует единственное простое число  $r \in \pi(K)$ , несмежное в  $GK(G)$  с числом 2. В этом случае  $t(G) = 3$ ,  $t(2, G) = 2$ , и  $S \simeq \text{Alt}_7$  или  $A_1(q)$  для некоторого нечетного числа  $q$ .*

Предложенная характеристика вместе с описанием графа простых чисел всех конечных неабелевых простых групп (см. [4]) применяется, в частности, при исследовании проблемы распознавания групп по спектру. Для данной конечной группы  $G$  обозначим через  $h(G)$  число попарно неизоморфных конечных групп  $H$ , для которых  $\omega(H) = \omega(G)$ . Группа  $G$  называется распознаваемой (по спектру), если  $h(G) = 1$ , почти распознаваемой, если  $1 < h(G) < \infty$ , и нераспознаваемой, если  $h(G) = \infty$ . Будем говорить, что для группы  $G$  проблема распознаваемости решена, если для нее известно точное значение  $h(G)$ . Поскольку любая конечная группа, содержащая нетривиальную нормальную разрешимую подгруппу, является нераспознаваемой, проблема распознаваемости вызывает интерес прежде всего для неабелевых простых групп и групп, близких к ним. Пусть  $L$  — конечная неабелева простая группа и  $G$  — конечная группа со спектром как у

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 05–01–00797 и № 06–01–39001), Президиума СО РАН, интеграционный проект № 2006.1.2., Фонда содействия российской науки и гранта Президента РФ (МД–2848.2007.1).



$L$ . Ясно, что совпадение спектров групп  $L$  и  $G$  влечет совпадение их графов простых чисел. Таким образом, если группа  $L$  удовлетворяет условиям теоремы 1, то им удовлетворяет и группа  $G$ . Из пункта (1) заключения теоремы следует, что  $G$  содержит единственный неабелев композиционный фактор  $S$ . Утверждения пунктов (2) и (3) теоремы помогают доказать, что этот фактор  $S$  изоморфен  $L$ . Если этот факт установлен, говорят, что группа  $L$  квазираспознаваема. Очевидно, доказательство квазираспознаваемости группы  $L$  является существенным шагом при доказательстве распознаваемости или почти распознаваемости группы  $G$ .

Описание графа простых чисел [4] показывает, что неравенство  $t(2, L) \geq 2$  верно для всех конечных неабелевых простых групп исключая знакопеременные группы подстановок  $Alt_n$ , где  $n$  таково, что среди чисел  $n, n-1, n-2, n-3$  нет простых. С другой стороны, для каждой неабелевой простой группы  $L$  с условием  $t(L) < 3$  проблема распознаваемости уже решена.

Следующий результат показывает, что случай (б) из пункта (3) теоремы 1 может быть исключен из рассмотрения при применении этой теоремы в доказательстве распознаваемости неабелевой простой группы.

**Теорема 2.** Пусть  $L$  — конечная неабелева простая группа, удовлетворяющая условиям  $t(L) = 3$  и  $t(2, L) = 2$ . Пусть  $G$  — конечная группа с условием  $\omega(G) = \omega(L)$ , и  $K, S, \overline{G}$  такие же как в теореме 1. Тогда каждое простое число  $r \in \pi(G)$ , несмежное в графе  $GK(G)$  с числом 2, не делит произведение  $|K| \cdot |\overline{G}/S|$ .

### Литература

1. Williams J. S. Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69, № 2. P. 487–513.
2. Кондратьев А. С. О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Матем. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
3. Васильев А. В. О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Сиб. матем. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 511–522.
4. Васильев А. В., Вдовин Е. П. Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
5. Васильев А. В., Гречкосеева М. А. О распознавании по спектру конечных простых линейных групп над полями характеристики 2 // Сиб. матем. журн. 2005. Т. 46, № 4. С. 749–758.

# О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕГУЛЯРНЫХ ОРБИТ КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП\*

Е. П. Вдовин

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; vdovin@math.nsc.ru*

Рассмотрим группу  $G$  и предположим, что  $G$  действует на множестве  $\Omega$ . Тогда действие группы  $G$  на декартовой степени  $\Omega^k$  определяется естественным образом:  $g : (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1^g, \dots, x_k^g)$ . Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть  $G$  — разрешимая подгруппа группы  $GL_n(q)$  и  $(|G|, q) = 1$ . Тогда существует регулярная  $G$ -орбита множества  $V \times V$ , т. е. существуют такие векторы  $u, v \in GF(q)^n$ , что  $C_G(u) \cap C_G(v) = \{e\}$ .*

Немедленными следствиями из данной теоремы являются следующие результаты.

**Теорема 2.** *Пусть  $G$  — конечная  $\pi$ -разрешимая группа и  $H$  — её холлова  $\pi$ -подгруппа. Тогда существуют такие элементы  $x, y \in G$ , что  $H \cap H^x \cap H^y = O_\pi(G)$ .*

Данный результат обобщает предыдущие результаты различных авторов о пересечении силовских  $p$ -подгрупп и холловых  $\pi$ -подгрупп нечётного порядка в  $p$ - и  $\pi$ -разрешимых группах соответственно.

**Теорема 3.** *Пусть  $G$  — разрешимая подгруппа группы  $GL_n(q)$  и  $(|G|, q) = 1$ . Тогда существует регулярная  $G$ -орбита множества  $V \times V$ , в частности  $|G| < |V|^2$ .*

**Теорема 4.** *Пусть  $G$  — разрешимая  $\pi$ -подгруппа группы автоморфизмов  $\pi'$ -группы  $H$ . Тогда существуют такие элементы  $x, y \in H$ , что  $C_G(x) \cap C_G(y) = \{e\}$ .*

Известные примеры показывают, что теоремы 1 и 3 без ограничения  $(|G|, q) = 1$  неверны.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00797), гранта Президента РФ (МК-3036.2007.1) и СО РАН (грант № 29 для молодых ученых и Интеграционный проект 2006.1.2).

# КРИТЕРИЙ РАСПОЗНАВАЕМОСТИ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП $L_n(2^k)$ ПО СПЕКТРУ\*

М. А. Гречкосеева

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; grechkoseeva@gmail.com*

Спектром  $\omega(G)$  конечной группы  $G$  называется множество порядков ее элементов. Группа  $G$  называется распознаваемой по спектру, если для любой конечной группы  $H$  из равенства  $\omega(H) = \omega(G)$  следует изоморфизм  $H \simeq G$ . Другими словами, если обозначить через  $h(G)$  число попарно неизоморфных групп с таким же спектром, что и  $G$ , то распознаваемость группы  $G$  по спектру равносильна условию  $h(G) = 1$ . Группа  $G$  называется почти распознаваемой по спектру, если  $1 < h(G) < \infty$ , и нераспознаваемой по спектру, если  $h(G) = \infty$ . Говорят, что для группы  $G$  проблема распознаваемости по спектру решена, если известно точное значение  $h(G)$ . Поскольку любая конечная группа, содержащая нетривиальную нормальную разрешимую подгруппу, является нераспознаваемой, проблема распознаваемости вызывает интерес прежде всего для неабелевых простых групп и групп, близких к ним.

В случае конечных простых линейных групп над полями характеристики 2 проблема распознаваемости решена для групп  $L_2(2^k)$  [1],  $L_3(2^k)$  [2],  $L_4(2^k)$  [3],  $L_n(2^k)$ , где  $n = 2^m \geq 16$  [4], а также для всех групп  $L_n(2)$  [5]. Оказалось, что все эти группы распознаваемы. Для остальных групп из этого класса получены результаты, позволяющие решить некоторые естественные промежуточные задачи проблемы распознаваемости. Заметим, что для доказательства распознаваемости конечной простой неабелевой группы  $L$  по спектру достаточно решить следующие три независимые задачи: доказать, что  $L$  квазираспознаваема, т.е. любая конечная группа  $H$  такая, что  $\omega(H) = \omega(L)$ , обладает единственным неабелевым композиционным фактором и этот фактор изоморфен  $L$ ; показать, что для любого собственного накрытия  $H = K \cdot L$  выполнено  $\omega(H) \neq \omega(L)$ ; установить, что для любого расширения  $H$  группы  $L$  посредством внешних автоморфизмов выполнено  $\omega(H) \neq \omega(L)$ .

Как следует из [5], при  $n \neq 5$  спектр любого собственного накрытия группы  $L_n(2^k)$  отличен от спектра самой группы. В данной работе мы доказываем, что при  $n > 24$  группы  $L_n(2^k)$  квазираспознаваемы. В качестве следствия из этих двух результатов получена

**Теорема 1.** Пусть  $n > 24$  и  $L = L_n(2^k)$ . Если  $G$  — конечная группа такая, что  $\omega(G) = \omega(L)$ , то  $L \leq G \leq \text{Aut}(L)$ .

Кроме того, получен критерий распознаваемости группы  $L_n(2^k)$ , где  $n > 24$ , по спектру. В формулировке теоремы через  $m_r$  обозначена  $r$ -часть числа  $m$ .

**Теорема 2.** При  $n > 24$  простая линейная группа  $L_n(2^k)$  распознаваема по спектру тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- 1)  $n = 2^m + 1$  для некоторого натурального  $m$ ;
- 2) для любого простого делителя  $r$  числа  $\gcd(n, 2^k - 1, k)$  выполнено условие  $m_r \geq (q - 1)_r$ .

Отметим, что если  $n \neq 2^m + 1$ , то для любого простого делителя  $r$  числа  $\gcd(n, 2^k - 1, k)$ , удовлетворяющего условию  $m_r < (q - 1)_r$ , спектр группы  $L_n(2^k)$  совпадает со спектром ее расширения с помощью полевого автоморфизма порядка  $r$ . Таким образом, для любой размерности  $n \neq 2^m, 2^m + 1$  найдется бесконечное множество чисел  $k$  таких, что группа  $L_n(2^k)$  не является распознаваемой по спектру.

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00797 и № 06-01-39001) и Президиума СО РАН (интеграционный проект № 2006.1.2).

### Литература

1. *Shi W.* A characteristic property of  $J_1$  and  $PSL_2(2^n)$  // Adv. in Math. 1987. V. 16. P. 397–401.
2. *Мазуров В. Д., Су М. Ч., Чао Х. П.* Распознавание конечных простых групп  $L_3(2^m)$  и  $U_3(2^m)$  по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 5. С. 567–585.
3. *Мазуров В. Д., Чен Г. Ю.* Распознаваемость конечных простых групп  $L_4(2^m)$  и  $U_4(2^m)$  по спектру // Алгебра и логика (в печати).
4. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А.* О распознавании по спектру конечных простых линейных групп над полями характеристики 2 // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 4. С. 749–758.
5. *Мазуров В. Д., Заварницин А. В.* Порядки элементов в накрытиях конечных простых линейных и унитарных групп и распознаваемость  $L_n(2)$  по спектру // ДАН. 2006. Т. 409, № 6. С. 736–739.

## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА $\Delta$ -PJ- И $\Delta$ -PR-ТЕОРИЙ

А. Р. Ешкеев

Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова, Караганда, Казахстан;  
modth1705@mail.ru

В данном тезисе мы рассмотрим свойства  $h$ - $\Delta$ -алгебраически простых моделей относительно  $\Delta$ -PJ-теорий, введенных в [1]. А также свойства счетных  $(\Sigma^+, \Sigma^+)$ -атомных моделей  $\Delta$ -PR-теорий. Основная разница между соответствующими (базисными) понятиями этих теорий и йонсоновскими теориями заключается в том, что в аксиомах задающих  $\Delta$ -PJ-теорию участвуют только позитивные предложения, а также вложения между моделями заменяются на продолжения и погружения, как в [2, 3].

**Определение 1.** [1] Если  $C$  класс  $L$ -структур, то мы говорим, что элемент  $M$  из  $C$   $\Delta$ -позитивно экзистенциально замкнут в  $C$ , если каждый  $\Delta$ -гомоморфизм из  $M$  в любой элемент из  $C$  является  $\Delta$ -погружением.

**Определение 2.** а) [1] Теория  $T$  называется  $\Delta$ -позитивной йонсоновской ( $\Delta$ -PJ) теорией, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $T$  имеет бесконечную модель;
- 2)  $T$  позитивно  $\forall\exists$ -аксиоматизируема;
- 3)  $T$  допускает  $\Delta$ -JEP;
- 4)  $T$  допускает  $\Delta$ -AP.

б) Теория  $T$  называется  $\Delta$ -позитивной робинсоновской ( $\Delta$ -PR) теорией, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $T$  имеет бесконечную модель;
- 2)  $T$  позитивно  $\forall$ -аксиоматизируема;
- 3)  $T$  допускает  $\Delta$ -JEP;
- 4)  $T$  допускает  $\Delta$ -AP.

Из определения следует, что любая  $\Delta$ -PR-теория является  $\Delta$ -PJ-теорией.

Когда  $\Delta = B(At)$  и все  $\Delta$ -продолжения являются  $\Delta$ -погружениями, то мы получаем обычную йонсоновскую теорию с той лишь разницей, что у нее только позитивные  $\forall\exists$ -аксиомы. Тем самым рассматриваемая теория устойчива относительно гомоморфизмов. В том случае, если при некотором фиксированном  $\Delta$  рассматриваемая  $\Delta$ -PJ-теория является йонсоновской в классическом смысле, то мы применяем относительно неё все обозначения и результаты известные ранее, например, как в [4]. В случае когда  $\Delta$ -PJ-теория, вообще говоря, не йонсоновская, роль семантической модели играет любая её  $\kappa$ -универсальная область  $U$  (как в [3]), и, соответственно, в этом случае понятия центра, совершенности  $\Delta$ -PJ-теории определяются следующим образом.

**Определение 3.** Центром  $\Delta$ -PJ-теории  $T$  называется теория  $T_{\Delta}^* = Th_{\Delta}(U)$ , где  $U$  -  $\kappa$ -универсальная область данного языка  $L$ , являющаяся моделью данной теории  $T$ , которую будем называть семантической моделью  $\Delta$ -PJ-теории  $T$ .

**Определение 4.**  $\Delta$ -PJ-теория  $T$  называется  $\Delta$ -PJ-совершенной, если её семантическая модель  $U$  насыщена в своей мощности для всех  $\Delta$ -типов.

**Определение 5.** Модель  $A$   $\Delta$ -PJ-теории  $T$  называется  $h$ - $\Delta$ -алгебраически простой, если для любой модели  $B$   $\Delta$ -PJ-теории  $T$  существует  $h$ - $\Delta$ -погружение модели  $A$  в  $B$ .

**Определение 6.**  $\phi \in \Gamma^+ \Leftrightarrow \phi \in L^+ \cap \Gamma$ , где  $\Gamma$  - вид формулы  $\phi$ .

В рамках выше указанных определений получены следующие результаты. Пусть  $\Delta = B^+(At)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $T$  -  $\Delta$ -PJ-совершенная  $\Delta$ -PJ-теория, полная для  $\exists^+$ -предложений. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $T$  имеет  $h$ - $\Delta$ -алгебраически простую модель;
- 2)  $T_{\Delta}^*$  имеет  $(\Sigma^+, \Sigma^+)$ -атомную модель.

**Теорема 2.** Пусть  $T$  -  $\Delta$ -PJ-совершенная  $\Delta$ -PR-теория, полная для  $\forall\exists^+$ -предложений. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $A$  - счетная и  $(\Sigma^+, \Sigma^+)$ -атомная модель  $T_{\Delta}^*$ ;
- 2)  $A$  - счетная и  $\Delta$ -позитивно экзистенциально замкнутая  $\Sigma^+$ -nice модель  $T$ .

Эти результаты являются  $\Delta$ -PJ-аналогами при указанном  $\Delta$  соответствующих результатов из работы [5].

Все неопределенные в данном тезисе понятия можно найти в [1], [5], [6].

### Литература

1. *Ешкеев А. Р.* Категоричные позитивные теории // Синтаксис и семантика логических систем. Материалы российской школы-семинара, посвященной 100 летию со дня рождения Курта Геделя, 23–27 августа 2006 г., Иркутск, Институт математики СО РАН. Изд-во Гос. пед. ун-та, 2006. С. 28–32.
2. *Ben-Yaacov I.* Positive model theory and compact abstract theories // Journal of Mathematical Logic. 2003. V. 3, no. 1. P. 85–118.
3. *Ben-Yaacov I.* Compactness and independence in non first order frameworks // Bulletin of Symbolic Logic. 2005. V. 11, no. 1. P. 28–50.
4. *Ешкеев А. Р., Оспанов Р. М.* Йонсоновские теории и их компаньоны // Материалы 10-ой Межвузовской конференции по математике и механике. Т. 1. Алматы, 2005. С. 85–90.
5. *Baldwin J. T., Keisler D. W.* Algebraically prime models // Annals of Mathematical Logic. 1981. V. 20. P. 289–330.
6. *Барвайс Дж.* (ред.) Справочная книга по математической логике. Ч. 1: Теория моделей. М.: Наука, 1982.

# О ПРОСТЫХ МОДАЛЬНЫХ $VL$ -АЛГЕБРАХ. СЛАБОЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЕ СВОЙСТВО ДЛЯ ЛОГИК, СООТВЕТСТВУЮЩИХ МНОГООБРАЗИЯМ, ПОРОЖДЁННЫМ КОНЕЧНЫМИ МОДАЛЬНЫМИ $G$ -АЛГЕБРАМИ\*

О. В. Зеевальд

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; seewald.olga@gmail.com*

Рассмотрим псевдоболеву алгебру  $\mathbb{C} = \langle C, \cap, \cup, \Rightarrow, \delta, \eta, 0, 1 \rangle$ , где  $0$  — наименьший элемент,  $1$  — наибольший элемент, для любых  $a, b \in C$  элемент  $(a \Rightarrow b)$  — псевдодополнение элемента  $a$  относительно  $b$ , операции  $\delta, \eta$  удовлетворяют следующим условиям: для любых  $a, b \in C$  верно

- 1)  $\delta 1 = 1$ ,
- 2)  $\delta a \leq a$ ,
- 3)  $\delta \delta a = \delta a$ ,
- 4)  $\delta(a \cap b) = \delta a \cap \delta b$ ,
- 5)  $\eta(a \cap \delta b) = (\eta a \cap \delta b)$ ,
- 6)  $\eta a = \delta \eta a$ ,
- 7)  $a \leq \eta a$ .

**Предложение 1.** *Если алгебра  $\mathbb{C}$  является простой, то операции  $\delta$  и  $\eta$  имеют вид:*

$$\delta x = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 1, \\ 0, & \text{если } x < 1, \end{cases} \quad \eta x = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим конечные алгебры Лукасевича, а именно алгебры вида:  $\mathbb{L}_n = \langle L_n, *, \Rightarrow, 0, 1 \rangle$ , где  $L_n = \{l_1, l_2, \dots, l_n\} = \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-1}{n-1}\}$ ,  $n \geq 2$ , операции определяются следующим образом:

$$x * y = \max(0, x + y - 1), \quad x \Rightarrow y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq y, \\ 1 - x + y, & \text{если } x > y. \end{cases}$$

**Предложение 2.** *Алгебры  $\mathbb{L}_n$  являются простыми.*

Определения  $VL$ -алгебры,  $G$ -алгебры даны в [2] и в [4].

**Предложение 3.** *Многообразие  $V(G)$  всех  $G$ -алгебр локально конечно.*

Рассмотрим конечную модальную  $G$ -алгебру следующего вида:  $\mathbb{G}_n = \langle G_n, *, \Rightarrow, \delta, \eta, 0, 1 \rangle$ , где  $G_n = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ,  $n \geq 2$  причем  $g_i \in [0, 1]$  для каждого  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $g_1 < g_2 < \dots < g_n$ ,  $g_1 = 0$ ,  $g_n = 1$ . Операции определяются следующим образом:  $x * y = \min(x, y)$ ,  $x \Rightarrow$

$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq y, \\ y, & \text{если } x > y, \end{cases}$  операции  $\delta, \eta$  удовлетворяют условиям 1)–7). Для любого непустого

множества  $W$  введем обозначение:  $\bar{a} \Leftarrow \{a_i\}_{i \in W}$ , где  $a_i = a$  для всех  $i \in W$ .

Для любого непустого множества  $W$  определим алгебру  $\mathbb{G}_n^W = \langle G_n^W, *^W, \Rightarrow^W, \square, \diamond, \bar{0}, \bar{1} \rangle$ , где  $G_n^W = \{\{g_i\}_{i \in W} \mid g_i \in G_n \text{ для всех } i \in W\}$ , операции определяются следующим образом:

$$(\{g_i\}_{i \in W}) *^W (\{h_i\}_{i \in W}) = \{g_i * h_i\}_{i \in W}, \quad (\{g_i\}_{i \in W}) \Rightarrow^W (\{h_i\}_{i \in W}) = \{g_i \Rightarrow h_i\}_{i \in W},$$

$$\square(\{g_i\}_{i \in W}) = \overline{\min_{i \in W} g_i}, \quad \diamond(\{g_i\}_{i \in W}) = \overline{\max_{i \in W} g_i},$$

Обозначим  $x \cap y \Leftarrow x * (x \Rightarrow y)$ ,  $x \cup y \Leftarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y) \cap ((y \Rightarrow x) \Rightarrow x)$ . Определим операции для  $\mathbb{G}_n^W$ :  $g \cap^W h \Leftarrow g *^W (g \Rightarrow^W h)$ ,  $g \cup^W h \Leftarrow ((g \Rightarrow^W h) \Rightarrow^W h) \cap^W ((h \Rightarrow^W g) \Rightarrow^W g)$ . Тогда очевидно, что  $(\{g_i\}_{i \in W}) \cap^W (\{h_i\}_{i \in W}) = \{g_i \cap h_i\}_{i \in W}$ ,  $(\{g_i\}_{i \in W}) \cup^W (\{h_i\}_{i \in W}) = \{g_i \cup h_i\}_{i \in W}$ .

Пусть  $\mathbb{G} = \langle G, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1 \rangle$ , — произвольная  $G$ -алгебра. Определим соответствующую ей алгебру  $\mathbb{G}^W$  с модальностями по Хайеку следующим образом:  $\mathbb{G}^W = \langle G^W, *^W, \Rightarrow^W, \square, \diamond, \bar{0}, \bar{1} \rangle$ ,

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06-01-00358), Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (№ НШ-4787.2006.1), а также ИНТАС (№ 04-77-7080).

где  $G^W = \{\{g_i\}_{i \in W} \mid g_i \in G \text{ для всех } i \in W\}$ , операции  $*^W, \Rightarrow^W, \Box, \Diamond$  определяются теми же равенствами, что и соответствующие операции алгебры  $\mathbb{G}_n^W$ , а операции  $\cap^W, \cup^W$ , выражаются через  $*^W, \Rightarrow^W$ .

**Предложение 4.** Пусть  $\mathbb{A}$  — конечно порожденная простая алгебра многообразия  $V(\mathbb{G}^W)$ . Тогда  $\mathbb{A}$  является конечной.

Назовем *модальной BL-алгеброй* алгебру  $\mathbf{L} = \langle L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, \Box, \Diamond, 0, 1 \rangle$ , где  $\langle L, \cap, \cup, *, \Rightarrow, 0, 1 \rangle$  является BL-алгеброй, и операции  $\Box, \Diamond$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\Box(a \Rightarrow b) \leq (\Box a \Rightarrow \Box b), \quad \Box(a \Rightarrow b) \leq (\Diamond a \Rightarrow \Diamond b), \quad \Box 1 = 1.$$

**Предложение 5. (СЕР для модальных BL-алгебр)** Пусть  $A, B$  — модальные BL-алгебры, причем  $A \subseteq B$ . Для любой конгруэнции  $\theta$  на алгебре  $A$  существует конгруэнция  $\theta'$  на  $B$ , такая, что  $\theta' \cap A^2 = \theta$ .

**Теорема.** Класс всех простых алгебр многообразия  $V(\mathbb{G}_n^W)$  совпадает с классом всех простых алгебр многообразия  $V(S5)$ .

Говорят, что логика  $L$  обладает слабым интерполяционным свойством, если выполнено следующее:

WIP: Если  $A(p, q), B(p, r) \vdash_L \perp$ , то существует формула  $C(p)$  такая, что  $A(p, q) \vdash_L C(p)$ , и  $C(p), B(p, r) \vdash_L \perp$ .

**Следствие. (WIP)** Логика  $MG_n$ , соответствующая многообразию  $V(\mathbb{G}_n^W)$ , обладает слабым интерполяционным свойством.

Научный руководитель: проф., д. ф.-м. н. Л. Л. Максимова.

## Литература

1. Расёва Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. М.: Наука, 1972.
2. Зеевальд О. В. Нечеткие логики с модальностями // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 6.
3. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
4. Hajek P. Metamathematics of fuzzy logic. Dordrecht: Kluwer Academic publishers, 1998.



# О $\delta$ -ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯХ ПРОСТЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЙОРДАНОВЫХ СУПЕРАЛГЕБР И ПОЛУПРОСТЫХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБР\*

И. Б. Кайгородов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; Kaygorodov.ivan@gmail.com*

Понятие дифференцирования алгебры обобщалось многими математиками в самых различных направлениях. В частности, В.Т.Филиппов изучал  $\delta$ -дифференцирования, т.е. такие линейные отображения  $\phi$  алгебры, что  $\phi(xy) = \delta(\phi(x)y + x\phi(y))$ , где  $\delta$  — некоторый фиксированный элемент основного поля. Он рассмотрел [1, 2] первичные алгебры Ли над ассоциативно-коммутативным кольцом  $\Phi$  с единицей и  $\frac{1}{2}$ . В.Т.Филиппов доказал, что любая первичная  $\Phi$ -алгебра Ли с невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой не имеет ненулевого  $\delta$ -дифференцирования, если  $\delta \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ . Также он дал описание  $\frac{1}{2}$ -дифференцирований произвольной первичной  $\Phi$ -алгебры Ли  $A$  ( $\frac{1}{6} \in \Phi$ ) с невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой. Им доказано, что линейное отображение  $\phi: A \rightarrow A$  является  $\frac{1}{2}$ -дифференцированием тогда и только тогда, когда  $\phi \in \Gamma(A)$ , где  $\Gamma(A)$  — центроид алгебры  $A$ . Отсюда следует, что если  $A$  — центральная простая алгебра Ли над полем характеристики  $p \neq 2, 3$  с невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой, то любое  $\frac{1}{2}$ -дифференцирование  $\phi$  имеет вид  $\phi(x) = \alpha x$ ,  $\alpha \in \Phi$ . В дальнейшем В.Т.Филиппов описал  $\delta$ -дифференцирования первичных альтернативных и нелиевых мальцевских  $\Phi$ -алгебр с некоторыми ограничениями на кольцо операторов  $\Phi$ . Он доказал [3], что алгебры из этих классов не имеют ненулевого  $\delta$ -дифференцирования, если  $\delta \neq 0, \frac{1}{2}, 1$ .

Тривиальными назовем нулевые отображения, а также 0-дифференцирования и 1-дифференцирования. В докладе рассматриваются нетривиальные  $\delta$ -дифференцирования на полупростых конечномерных йордановых алгебрах и простых конечномерных йордановых супералгебрах. Результаты обобщаются в следующих теоремах.

**Теорема 1.** Пусть  $\phi$  — нетривиальное  $\delta$ -дифференцирование полупростой конечномерной йордановой алгебры  $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ , где  $A_i$  — простые алгебры, над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2. Тогда  $\delta = \frac{1}{2}$  и для  $x = \sum_{i=1}^n x_i$ , где  $x_i \in A_i$  выполняется  $\phi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ ,  $\alpha_i \in F$ .

**Теорема 2.** Пусть  $A$  — простая конечномерная йорданова супералгебра, над алгебраически замкнутым полем характеристики 0,  $\phi$  — нетривиальное  $\delta$ -дифференцирование супералгебры  $A$ . Тогда  $\delta = \frac{1}{2}$  и  $\phi(x) = \alpha x$  для некоторого  $\alpha \in F$  и произвольного  $x \in A$ .

## Литература

1. Филиппов В. Т. О  $\delta$ -дифференцированиях алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 6. С. 1409–1422.
2. Филиппов В. Т. О  $\delta$ -дифференцированиях первичных алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 1. С. 201–213.
3. Филиппов В. Т. О  $\delta$ -дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр // Алгебра и Логика. 2000. Т. 39, № 5. С. 618–625.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования N 11617 и гранта РФФИ N 05-01-00230.

## СЛАБАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В РАСШИРЕНИЯХ МОДАЛЬНОЙ ЛОГИКИ $S4$

А. В. Карпенко

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск; karpenko@post.nsu.ru*

В работе рассматриваются расширения модальной логики  $S4$ .

Говорят, логика  $L$  обладает слабым интерполяционным свойством если выполнено:

WIP: Если  $A(p, q), B(p, r) \vdash_L \perp$ , то существует формула  $C(p)$  такая, что  $A(p, q) \vdash_L C(p)$  и  $C(p), B(p, r) \vdash_L \perp$ .

Известно, что каждой логике  $L$  над  $S4$ , соответствует многообразие  $V(L)$  топобулевых алгебр (ТБА).

**Теорема [2]:** Для всякой модальной логики  $L$  следующие условия эквивалентны:

1.  $L$  обладает WIP;
2. класс простых алгебр многообразия  $V(L)$  амальгамируем;
3. класс конечно порожденных простых алгебр многообразия  $V(L)$  амальгамируем.

Получены следующие результаты:

**Лемма 1:** Топобулева алгебра является простой, тогда и только тогда, когда операция взятия внутреннейности определена следующим образом  $\Box x = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 1; \\ 0, & \text{при } x \neq 1. \end{cases}$

**Лемма 2:** Любая конечно порожденная простая топобулева алгебра является конечной.

Из лемм 1 и 2 следует, что конечно порожденные простые ТБА — это, с точностью до изоморфизма, конечные  $n$ -атомные ТБА  $V_n$ , описанные в работах Л. Л. Максимовой.

**Теорема 1:** Логика  $L$ , расширяющая логику  $S4$ , обладает WIP тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

- 1)  $V_n \in V(L)$  для всех  $n > 0$ ;
- 2)  $V_3 \notin V(L)$ .

**Теорема 2:** Пусть логика  $L$  получается из  $S4$  добавлением нового списка аксиом  $A_1, \dots, A_m$ . Обозначим через  $A$  конъюнкцию  $A_1 \& \dots \& A_m$ . Тогда  $L = S4 + A$  обладает слабым интерполяционным свойством, если и только если выполнено одно из условий:

- 1)  $A$  истинна на всех  $V_n, n \geq 1$ ;
- 2)  $A$  опровергается на  $V_3$ .

**Следствие:** Слабое интерполяционное свойство разрешимо над  $S4$ .

Известно, что логика  $S4$  характеризуются шкалами с рефлексивным и транзитивным отношением  $R$ .

Зафиксируем шкалу  $F = \langle T, R \rangle$ , где  $T$  — множество с транзитивным и рефлексивным отношением  $R$ . Элемент  $0 \in T$  называется  $R$ -наименьшим, если он удовлетворяет условию  $(\forall x \in T) 0Rx$ . Определяем на  $T$  отношение эквивалентности  $x \approx y \Leftrightarrow xRy \wedge yRx$ .

Классы  $(x/\approx) = \{y \mid y \approx x\}$  будем называть *сгустками*, а множество  $T/\approx$  с частичным порядком  $(x/\approx) \leq (y/\approx) \Leftrightarrow xRy$  — *остовом* шкалы. Максимальные, в смысле порядка  $\leq$ , сгустки  $C$ , т.е. удовлетворяющие условию  $\neg(\exists x \in T)(C < x/\approx)$ , будем называть *внешними*, а остальные — *внутренними*.

Обозначим  $\mu_1(F) = \sup\{\text{card}(C) \mid C \text{ — внешний сгусток } F\}$ .

Кроме того, для произвольной логики непротиворечивой логики  $L$  определим следующее понятие:

$$\mu_1(L) = \sup\{\mu_1(F) \mid F \models L \wedge \text{card}(F) < \omega\}.$$

Из этого определения следует, что для непротиворечивой логики  $L, \mu_1(L) \in \{1, 2, \dots, \omega\}$ . Кроме того, считается, что  $\mu_1(For) = 0$ .

Л. Л. Максимовой в [1] доказано, что для любой модальной логики  $L$  и любого  $n < \omega$  выполнено следующее условие:  $\mu_1(V) \geq n \Leftrightarrow V_n \in V(L)$ .

**Теорема 3:** Модальная логика, расширяющая логику  $S4$  Льюиса, обладает слабым интерполяционным свойством тогда и только тогда, когда  $\mu_1(L) \in \{0, 1, 2, \omega\}$ .

**Литература**

1. *Gabbay D. M., Maksimova L.* Interpolation and definability: modal and intuitionistic logics. Oxford Univ. Press, 2005.
2. *Maksimova L.* Weak interpolation in equational logic // Logic Colloquium, Nijmegen, The Netherlands, 2006. P. 22–23.

# О СТАБИЛЬНОСТИ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ КОНЕЧНОМЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА НАД ТЕЛОМ

А. А. Коробов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; alexgor@math.nsc.ru*

Хорошо известно, что унипотентная линейная группа нильпотентна [1, теорема 49.1.1]. Единственно возник вопрос: верно ли, что унипотентная группа автоморфизмов конечномерного векторного пространства над произвольным телом нильпотентна [2, вопрос 2.62]? Этот же вопрос можно встретить в [3]. В случае положительной характеристики это эквивалентно проблеме Бернсайда для группы матриц над телом. Положительные ответы были получены Супруненко [4] для группы размерности, не превосходящей 5 в характеристике 2 или 3, Мочизуки [5] для характеристики 0 или достаточно большой (больше чем  $(n-1)(n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ , где  $n$  размерность), в статье [6] для характеристики 2. Остается ли ответ положительным во всех случаях? До сих пор это было неизвестно.

**Теорема.** *Унипотентная группа автоморфизмов конечномерного векторного пространства над произвольным телом нильпотентна, стабильна и триангулируема.*

**Следствие.** *Пусть  $V$  – конечномерное векторное пространство над телом положительной характеристики  $p$ . Тогда всякая  $p$ -группа автоморфизмов векторного пространства  $V$  локально конечна.*

## Литература

1. Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. М.: Наука, 1987.
2. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. 2-е изд. Новосибирск. 1967.
3. Плоткин Б. И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966.
4. Супруненко Д. А. Об унипотентных группах матриц над телом // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247, № 2. С. 289–291.
5. Mochizuki H. Y. Unipotent matrix groups over division rings // Canad. Math. Bull. 1978. V. 21, № 2. P. 249–250.
6. Derakhshan J., Wagner F. O. Skew linear unipotent groups // Bull. London Math. Soc. 2006. V. 38, № 3. P. 447–449.

ОПИСАНИЕ  $n$ -АРНЫХ КВАЗИГРУПП ПОРЯДКА 4\*Д. С. Кротов<sup>1</sup>, В. Н. Потапов<sup>2</sup>Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; <sup>1</sup> [dkrotov@math.nsc.ru](mailto:dkrotov@math.nsc.ru), <sup>2</sup> [vpotapov@math.nsc.ru](mailto:vpotapov@math.nsc.ru)

Алгебраическая система, состоящая из множества  $\Sigma$  мощности  $k$  и  $n$ -арной операции  $f : \Sigma^n \rightarrow \Sigma$ , однозначно обратимой по каждой своей переменной, называется  $n$ -квазигруппой порядка  $k$ . Принято (см. [1]) называть  $n$ -квазигруппой порядка  $k$  также и соответствующую функцию  $f$ . Таблица значений  $n$ -квазигруппы порядка  $k$  называется латинским  $n$ -кубом измерения  $k$  (если  $n = 2$ , то латинским квадратом).

*Изотопией* называется упорядоченный набор из  $n + 1$  перестановки  $\tau_i : \Sigma \rightarrow \Sigma$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$ .  $n$ -Квазигруппы  $f$  и  $g$  называются *изотопными*, если для некоторой изотопии  $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n)$  имеем  $f(x_1, \dots, x_n) \equiv \tau_0 g(\tau_1 x_1, \dots, \tau_n x_n)$ .

*Ретрактом размерности  $m$*   $n$ -квазигруппы  $f$  называется  $m$ -квазигруппа  $g$ , задаваемая тождеством  $g(x_1, \dots, x_m) \equiv f(a_1 \dots a_{i_1-1} x_1 a_{i_1+1} \dots x_m a_{i_m+1} \dots a_n)$ , для некоторого  $\bar{a} \in \Sigma^n$  и набора номеров координат  $i_1, \dots, i_m$ ,  $1 \leq m \leq n$ .

$n$ -Квазигруппа  $f$  называется *разделимой*, если найдутся: целое число  $m$ ,  $2 \leq m < n$ ,  $(n - m + 1)$ -квазигруппа  $h$ ,  $m$ -квазигруппа  $g$  и перестановка  $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ , – такие что

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv h(g(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}), x_{\sigma(m+1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Нетрудно показать, что для каждого  $n$  существуют только две  $n$ -квазигруппы порядка 2 и  $3 \cdot 2^n$  различных  $n$ -квазигрупп порядка 3, которые являются разделимыми (при  $n > 2$ ) и изотопными.

Таким образом, число 4 является первым нетривиальным порядком  $n$ -квазигруппы. В [3] получена асимптотика числа  $n$ -квазигрупп порядка 4. Дальнейшие определения и утверждения относятся только к  $n$ -квазигруппам порядка 4. Можно считать, что  $\Sigma = Z_2 \times Z_2$ .

Пусть  $\oplus$  групповая операция в  $Z_2 \times Z_2$ .  $n$ -Квазигруппа  $f$  порядка 4, заданная равенством

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 \oplus \dots \oplus x_n$$

и все изотопные ей  $n$ -квазигруппы называются *линейными*.

$n$ -Квазигруппа  $f$  называется *полулинейной*, если найдутся такие  $a, b \in \Sigma$ , что  $f^{-1}(a) \cup f^{-1}(b) = g^{-1}(a) \cup g^{-1}(b)$ , для некоторой линейной  $n$ -квазигруппы  $g$ .

Как показано в [2], любую полулинейную  $n$ -квазигруппу можно задать парой из изотопии и булевой функции  $\lambda : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ .

Следующая теорема даёт описание  $n$ -квазигрупп порядка 4.

**Теорема 1.** *Каждая  $n$ -квазигруппа порядка 4 является разделимой или полулинейной.*

Доказательство проводится индукцией по  $n$ . Отдельно рассматривается несколько случаев когда наибольшая размерность  $m$  неразделимого ретракта  $n$ -квазигруппы принимает значения  $m = 2$ ,  $3 < m < n - 2$ ,  $m = n - 2$  и  $m = n - 1$ .

## Литература

1. Белоусов В. Д.  $n$ -Арные квазигруппы. Кишинёв: “Штиинца”, 1972
2. Кротов Д. С. Нижние оценки числа  $m$ -квазигрупп порядка 4 и числа совершенных двоичных кодов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 2. С. 47–53.
3. Потапов В. Н., Кротов Д. С. Асимптотика числа  $n$ -квазигрупп порядка 4 // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 4. С. 873–887.

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05–01–00364).

# ХОЛЛОВЫ СВОЙСТВА КОНЕЧНЫХ ГРУПП\*

Д. О. Ревин

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; revin@math.nsc.ru*

Согласно определению Ф.Холла, если для данного множества  $\pi$  простых чисел конечная группа  $G$  обладает холловой  $\pi$ -подгруппой  $H$ , и всякая  $\pi$ -подгруппа в  $G$  сопряжена с подгруппой из  $H$ , то говорят, что  $G$  обладает свойством  $D_\pi$ .

С помощью классификации конечных простых групп доказана следующая

**Теорема 1.** Пусть  $\pi$  — некоторое множество простых чисел,  $G$  — конечная группа. Тогда группа  $S$  обладает свойством  $D_\pi$  если и только если каждый ее композиционный фактор обладает этим свойством.

В соответствии с классификационной теоремой всякая простая конечная группа либо имеет простой порядок, либо изоморфна некоторой знакопеременной группе  $A_n$  степени  $n \geq 5$ , либо изоморфна группе, принадлежащей одной из 16 серий групп лиева типа над некоторым конечным полем, либо изоморфна одной из 26 спорадических групп.

В докладе для пары  $(S, \pi)$ , где  $S$  — простая конечная группа,  $\pi$  — множество простых чисел, в терминах параметров, задающих группу  $S$ , сформулированы условия I–VII так, что справедливы следующие утверждения.

**Теорема 2.** Пусть  $\pi$  — некоторое множество простых чисел и  $S$  — конечная простая группа. Тогда группа  $S$  обладает свойством  $D_\pi$  если и только если пара  $(S, \pi)$  удовлетворяет одному из условий I–VII.

**Следствие.** Пусть  $\pi$  — некоторое множество простых чисел. Тогда конечная группа обладает свойством  $D_\pi$  если и только если для каждого ее композиционного фактора  $S$  пара  $(S, \pi)$  удовлетворяет одному из условий I–VII. Таким образом, получена исчерпывающая характеристика конечных групп со свойством  $D_\pi$ .

---

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 05–01–00797 и СО РАН, грант № 29 для молодых ученых и интеграционный проект 2006.1.2.

# ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСА ПРАВИЛ ВЫВОДА, ДОПУСТИМЫХ В РАСШИРЕНИЯХ СИСТЕМЫ $S4$

В. В. Римацкий

Институт архитектуры и строительства,  
Сибирский федеральный университет, Красноярск; *Gemmeny@rambler.ru*

Говорим, что логика  $\lambda$ , расширяющая логику  $S4$ , имеет *слабое свойство ко-накрытий*, если для любого конечного корневого  $\lambda$ -фрейма  $\mathcal{F}$  и произвольной нетривиальной антицепи  $\mathcal{X} \subset \mathcal{F}$ , фрейм  $\mathcal{F}_1$ , полученный добавлением как корня одноэлементного рефлексивного ко-накрытия ко фрейму  $\bigcup_{c \in \mathcal{X}^R} c^R$ , также является  $\lambda$ -фреймом.

Для всех чисел  $n > 1$ ,  $n \in N$ , определим формулы:

$$A_n := \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \diamond p_i; \quad A_{n,1} := \Box \left[ \bigwedge_{1 \leq i \leq n} p_i \rightarrow \neg \diamond q \right]; \quad B := q \vee \neg \diamond q.$$

Определим также для  $n > 1$ ,  $n \in N$ , последовательность правил вывода:

$$\mathcal{R}_n := \frac{\Box(A_{n,1} \wedge \neg(A_n \wedge B))}{\Box \neg A_n}.$$

**Теорема 1.** Пусть задана модальная логика  $\lambda \supseteq S4$  такая что: (i) финитно аппроксимируема; (ii) имеет слабое свойство ко-накрытий. Тогда множество правил  $\{\mathcal{R}_n, n \in N\}$  образуют базис  $\lambda$ -допустимых правил вывода.

**Следствие 1.** Множество правил  $\{\mathcal{R}_n, n \in N\}$  образуют базис допустимых правил вывода логики  $S4, S4.1, Grz$ .

**Теорема 2.** Пусть задана модальная логика  $\lambda \supseteq S4$  такая что: (i) финитно аппроксимируема; (ii) имеет слабое  $k$ -свойство ко-накрытий; (iii) ширина логики конечна и равна  $k$ . Тогда множество правил  $\{\mathcal{R}_n, 1 < n \leq k\}$ , образуют базис  $\lambda$ -допустимых правил вывода.

Несложно показать, что число финитно аппроксимируемых логик, удовлетворяющим условиям теорем 1 и 2 не менее чем счетно.

**Теорема 3.** Пусть суперинтуиционистская логика  $\lambda \supseteq Int$ , удовлетворяет условиям теоремы 1 или теоремы 2. Тогда множество правил  $\{\mathcal{R}_n^i : T(\mathcal{R}_n^i) = \mathcal{R}_n, n > 1, n \in N\}$  образует базис допустимых правил вывода логики  $\lambda$ . Если ширина логики конечна и равна  $k$ , то логика  $\lambda$  имеет конечный базис  $\{\mathcal{R}_n^i : T(\mathcal{R}_n^i) = \mathcal{R}_n, 1 < n \leq k\}$  для допустимых правил вывода.

**Следствие 2.** Множество правил  $\{\mathcal{R}_n^i, n \leq k + 1\}$  образуют базис допустимых правил вывода логики Де Йонга  $D_k$ .

## АЛГОРИТМ УСТАНОВЛЕНИЯ ОБЩЕЗНАЧИМОСТИ ФОРМУЛЫ $\tau sr$ -ЛОГИКИ

Х. М. Рухая<sup>1</sup>, Л. М. Тибуа<sup>2</sup>

*ТГУ, Институт прикладной математики им. И. Н. Векуа, Тбилиси, Грузия;*

<sup>1</sup> *rukhaia@viam.sci.tsu.ge, <sup>2</sup> tibua@viam.sci.tsu.ge*

В статье описан алгоритмический процесс установления общезначимости некоторых видов формул  $\tau sr$ -логики, который ориентирован на автоматическом доказательстве теорем [1].

Условимся, что каждая из метабукв  $A, B, A_1, B_1, \dots$  (1) (соответственно  $T, U, T_1, U_1, \dots$  (2)) является метапеременной областью определения которой является класс всех формул (соответственно термов)  $\tau sr$ -логики, а метабуквы  $x, y, x_1, y_1, \dots$  (3) будут обозначать любые различные предметные буквы  $\tau sr$ -логики [2].

Метаформулы присоединенные к основной формуле  $\tau sr$ -логики, определяются следующим алгоритмом:

На первой строчке напишем формулу. Найдем в указанной формуле все такие  $\tau$ -операторные знаки, у которых операторные буквы выбраны из последовательности переменных языка  $\tau sr$ -логики и которые не действуют на другие кванторы такого типа. Если такие кванторы существуют то все группы букв [3], связанные этими кванторами, заменим такими метапеременными (3)-ей последовательности, которые не входят в эту формулу. Таким способом полученную метаформулу и произведенную подстановку напишем на второй строчке. Аналогичным путем, из второй строчки, если она содержит квантор указанного типа, получим третью строчку. Этот процесс обязательно закончится записью формулы и соответствующей подстановки на какой-нибудь  $k$  строчке ( $k \in \{1, 2, \dots\}$ ).

В записанной на  $k$  строчке метаформуле с правой стороны поищем первое свободное вхождение буквы, взятой из последовательности вещественных переменных языка  $\tau sr$ -логики. Группу свободных букв [3], из которой выбрана указанная буква, заменим такой метапеременной (3)-ой последовательности, которая не входит в данную формулу. Принятую таким путём метаформулу и осуществленную подстановку запишем на  $(k + 1)$  строчке.

Аналогично, если в ней опять найдется свободное вхождение буквы из последовательности переменных языка  $\tau sr$ -логики, из  $(k + 1)$  строчки получим  $(k + 2)$  строчку. Этот процесс обязательно закончится записью формулы и соответствующей подстановки на какой-то  $(k + e)$  строчке ( $e \in \{1, 2, \dots\}$ ).

В записанной на  $(k + e)$  строчке метаформуле найдем первую пару внутренних скобок справа. Составная часть этих скобок может иметь вид:  $[\tau xA]$  или  $[f^n x_1 \dots x_n]$  или  $[SxTA]$  или  $[x_1 = x_2]$  или  $[P^n x_1 \dots x_n]$  или  $[RxTA]$ . Если указанная составная часть имеет вид  $[\tau xA]$  или  $[f^n x_1 \dots x_n]$  или  $[SxTA]$ , то данные и их графически равные части заменим первой такой метапеременной из (2)-ой последовательности, которая не входит в данную формулу. Полученную таким путём метаформулу и произведенную подстановку запишем на  $(k + e + 1)$  строчке. А если указанная составная часть имеет вид  $[x_1 = x_2]$  или  $[P^n x_1 \dots x_n]$  или  $[RxTA]$ , то данные и их графически равные части заменим первой такой метапеременной из (1)-ой последовательности которая не входит в данную формулу и полученные результаты запишем на  $(k + e + 1)$  строчке. Аналогично, из этой строчки получим  $(k + e + 2)$  строчку, если в ней опять окажутся части типа:  $[\tau xA]$  или  $[f^n x_1 \dots x_n]$  или  $[SxTA]$  или  $[x_1 = x_2]$  или  $[P^n x_1 \dots x_n]$  или  $[RxTA]$ .

Этот процесс обязательно закончится записью формулы и соответствующей подстановки на какой-то  $(k + e + n)$  строчке ( $n \in \{1, 2, \dots\}$ )

В записанной на  $(k + e + n)$  строчке формуле поищем первую пару внутренних скобок. Составная часть этих скобок может иметь вид:  $[\neg A]$  или  $[A \vee B]$  или  $[A \wedge B]$  или  $[A \rightarrow B]$  или  $[A \leftrightarrow B]$ , тогда указанные и их графически равные части формулы заменим первой такой метапеременной из (1)-ой последовательности которая не входит в данную формулу. Полученную таким путём метаформулу и осуществленную подстановку запишем на  $(k + e + n + 1)$  строчке. Легко увидеть, что указанный алгоритмический процесс закончится, потому что число символов входящих в записанной на каждой последующей строке метаформуле уменьшается. Ясно что на конечной строчке будет записана метапеременная из (1)-ой последовательности и соответствующая подстановка.



Формулы, полученные рассмотренным алгоритмическим процессом, назовем **присоединенными метаформулами**.

Если присоединенная формула данной формулы содержит только метапеременные (1)-ой последовательности и символы  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ , то назовем ей **присоединенной к данной формуле пропозиционной метаформулой**.

Если пропозиционная метаформула, рассмотренная как формула логики высказываний, является тавтологией, то она называется **пропозиционной тавтологической формой**.

Пропозиционную тавтологическую форму и формулу типа  $[T = T]$  назовем **тавтологической формой**.

Непосредственный итог выше указанного алгоритма следующий.

**Теорема 1.** *Для общезначимости формулы  $\tau sr$ -логики достаточно, чтобы существовала присоединенная тавтологическая форма формулы  $A$ .*

**Теорема 2.** *Для того, чтобы формула  $A$   $\tau sr$ -логики, была подстановочным частным случаем тавтологии логики высказываний, необходимо и достаточно, чтобы существовала присоединенная пропозиционная тавтологическая форма формулы  $A$ .*

### Литература

1. Чен Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. Москва, 1983.
2. Рухая Х.М. Описание формальной математической теории  $\tau sr$  с операторами подстановок // Исследования по математической логике и теории алгоритмов. Тбилиси, 1985.
3. Пхакадзе Ш.С. Некоторые вопросы теории обозначений. Тбилиси, 1977.

# О СТАБИЛЬНЫХ ГЕНЕРИЧЕСКИХ ЭРЕНФОЙХТОВЫХ ТЕОРИЯХ (РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛАХЛАНА)\*

С. В. Судоплатов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; sudoplat@math.nsc.ru*

В работах [1–3] приведены синтаксические модификации генерической конструкции Хрушова—Хервига [4, 5], позволяющие строить примеры насыщенных моделей стабильных генерических властных орграфов [6] с почти несущественными упорядоченными раскрасками [7]. Интерес к этим конструкциям объясняется известной *проблемой Лахлана* о существовании стабильной теории  $T$  с конечным, но большим единицы числом  $I(T, \omega)$  попарно неизоморфных счетных моделей. Теории  $T$ , для которых  $1 < I(T, \omega) < \omega$ , называются *эренфойхтовыми*. Любая эренфойхтова теория содержит неглавный властный тип, который, как показано в [6], в свою очередь локально содержит структуру властного орграфа.

Стабильность теорий рассматриваемых властных орграфов обеспечивается балансом между числом элементов и числом бинарных связей в конечных структурах  $\mathcal{A}$  (составляющих генерическую модель [8]) посредством следующей *предранговой* функции  $y(\cdot)$ , ограниченной снизу положительными значениями счетной серии монотонно возрастающих последовательностей специального вида с бесконечными пределами:

$$y(\mathcal{A}) = 2 \cdot |A_f| + |A_{\text{nf}}| - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^Q \cdot e_k^Q(\mathcal{A}),$$

где  $A_f$  — множество развилочных вершин в  $\mathcal{A}$  (вершина  $a$  в бесконтурном графе  $\langle X, Q \rangle$  называется *развилочной*, если существуют вершины  $b, c, d \in X$ , а также дуги  $(b, a), (a, c), (a, d) \in Q$  или  $(a, b), (c, a), (d, a) \in Q$ );  $A_{\text{nf}} = A \setminus A_f$ ;  $e_1^Q(\mathcal{A})$  — число дуг в  $\mathcal{A}$ ;  $e_k^Q(\mathcal{A})$ ,  $k \geq 2$ , — число пар  $(a, b) \in A^2$ , связанных лишь внешними над  $\mathcal{A}$  кратчайшими  $(a, b)$ -маршрутами длины  $k$  и такими, что никакой  $(a, b)$ -маршрут длины  $k$  не содержит внешних *принудительных* развилок, т.е. развилок, без учета которых число внешних связей становится достаточно большим;  $\alpha_k^Q$  — веса кратчайших маршрутов длины  $k$ ,  $0 < \alpha_{k+1}^Q \ll \alpha_k^Q < \frac{1}{2}$ .

Конструкция синтаксической модификации [8, 9] слияний Хрушова [10, 11] с использованием предранговой функции

$$y'(\mathcal{A}) = 2 \cdot |A_f| + |A_{\text{nf}}| - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^Q \cdot e_k^Q(\mathcal{A}) - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^P \cdot e_k^P(\mathcal{A}) - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^R \cdot e_k^R(\mathcal{A}),$$

(где  $e_k^P(\mathcal{A})$  — число  $P_{i,n}$ -ребер в структуре  $\mathcal{A}$ , связывающих элементы цвета  $n$  с элементами больших цветов,  $\alpha_k^P$  — веса  $P_{i,n}$ -ребер,  $k = c(i, n)$ ,  $i \in \omega$ ,  $0 < \alpha_{k+1}^P \ll \alpha_k^P < \frac{1}{2}$ ;  $e_k^R(\mathcal{A})$  — число  $R_k$ -ребер в структуре  $\mathcal{A}$ , связывающих одноцветные элементы,  $\alpha_k^R$  — веса  $R_k$ -ребер,  $0 < \alpha_{k+1}^R \ll \alpha_k^R < \frac{1}{2}$ ) позволяет перенести основной результат работы [12] о всевозможных реализациях основных параметров эренфойхтовости на класс стабильных теорий:

**Теорема 1.** *Для любого конечного предупорядоченного множества  $\langle X, \leq \rangle$  с наименьшим элементом  $x_0$  и наибольшим классом  $\tilde{x}_1$  в упорядоченном фактор-множестве  $\langle X, \leq \rangle / \sim$  по отношению  $\sim$  (где  $x \sim y \Leftrightarrow x \leq y$  и  $y \leq x$ ), а также для любой функции  $f : X / \sim \rightarrow \omega$ , удовлетворяющей условиям  $f(\tilde{x}_0) = 0$ ,  $f(\tilde{x}_1) > 0$  при  $|X| > 1$ ,  $f(\tilde{y}) > 0$  при  $|\tilde{y}| > 1$ , существует стабильная генерическая теория  $T$  и изоморфизм  $g : \langle X, \leq \rangle \xrightarrow{\sim} \text{RK}(T)$  такой, что  $\text{Pl}(g(\tilde{y})) = f(\tilde{y})$  для любого  $\tilde{y} \in X / \sim$ .*

Тем самым справедлива следующая теорема, представляющая решение проблемы Лахлана.

**Теорема 2.** *Для любого натурального числа  $n \geq 3$  существует стабильная теория  $T_n$ , у которой  $I(T_n, \omega) = n$ .*

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00411), а также Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (№ НШ-4787.2006.1).

## Литература

1. *Судоплатов С. В.* Малые стабильные генерические графы с бесконечным весом. Двудольные орграфы // Матем. труды. 2006. Т. 9, № 2. С. 154–171.
2. *Судоплатов С. В.* Малые стабильные генерические графы с бесконечным весом. Безразвилочные орграфы // Матем. труды. 2007. Т. 10, № 1.
3. *Судоплатов С. В.* Малые стабильные генерические графы с бесконечным весом. Властные орграфы // Статья сдана в Матем. труды в 2006 г.
4. *Hrushovski E.* A stable  $\aleph_0$ -categorical pseudoplane. Preprint. Hebrew University, Jerusalem, 1988.
5. *Herwig B.* Weight  $\omega$  in stable theories with few types // J. Symbolic Logic. 1995. V. 60, No. 2. P. 353–373.
6. *Судоплатов С. В.* Властные орграфы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 205–213.
7. *Судоплатов С. В.* Несущественные совмещения и раскраски моделей // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44, № 5. С. 1132–1141.
8. *Судоплатов С. В.* Синтаксический подход к построению генерических моделей // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 2.
9. *Sudoplatov S. V.* On the finite closure property for fusions of generic classes // Мальцевские чтения. Новосибирск, 2006. <http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/06/Abstract/Sudoplat.pdf>
10. *Hrushovski E.* Strongly minimal expansions of algebraically closed fields // Israel J. Math. 1992. V. 79. P. 129–151.
11. *Baudisch A., Martin-Pizarro A., Ziegler M.* Hrushovski’s Fusion. Preprint. Mathematisches Institut, Freiburg, 2006.
12. *Судоплатов С. В.* Полные теории с конечным числом счетных моделей. II // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 3. С. 314–353.

## ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ГРУППЫ И ВЕРОЯТНОСТЬ ДИАГОНАЛИЗИРУЕМОСТИ МАТРИЦЫ

**В. А. Чуркин**

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; churkin@math.nsc.ru*

Известно, что над полем комплексных чисел практически любая случайно выбранная квадратная матрица диагонализуема (подобна диагональной). Интересно найти долю диагонализуемых матриц над полем вещественных чисел или над конечными полями.

Пусть  $B_n(r)$  — шар радиуса  $r > 0$  с центром в нулевой матрице относительно стандартной евклидовой нормы на  $M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$  и пусть  $D_n(r)$  — множество матриц из  $B_n(r)$ , диагонализуемых над  $\mathbb{R}$ . Число

$$P_n = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } D_n(r)}{\text{vol } B_n(r)}$$

естественно назвать вероятностью диагонализуемости вещественных матриц порядка  $n$ .

**Теорема 1.** *Вероятность  $P_n$  диагонализуемости матрицы порядка  $n \geq 2$  над полем вещественных чисел равна*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{n(n+1)}{4} \frac{\Gamma(\frac{n(n+1)}{4})}{\prod_{k=1}^{n-1} \Gamma(\frac{k+1}{2})} \cdot C_n,$$

где  $\Gamma$  — гамма-функция Эйлера, а  $C_n$  — интеграл

$$\int_{\substack{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1 \\ x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) dx_1 \dots dx_n.$$

Значения гамма-функции в указанных точках найти легко. Интеграл  $C_n$  удалось подсчитать только при  $n = 2$  и  $n = 3$ .

**Следствие 1.**  $P_2 = \sqrt{2}/2$ ,  $P_3 = \sqrt{2}/4$ .

Доказательство теоремы 1 использует теорему Шура о том, что каждая вещественная матрица, диагонализуемая над  $\mathbb{R}$ , ортогонально подобна треугольной, а также соответствующее действие ортогональной группы.

Пусть теперь  $K$  — конечное поле порядка  $q$  и  $P_n(q)$  — доля матриц порядка  $n$  из  $M_n(q)$ , диагонализуемых над  $K$ .

**Теорема 2.**

$$P_n(q) = \frac{|GL_n(q)|}{|M_n(q)|} \sum_{s=1}^n \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_s = n \\ k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_s}} \frac{1}{\prod_{i=1}^s |GL_{k_i}(q)|} \sum_{r=1}^s \sum_{n_1 + \dots + n_r = s} \frac{q(q-1) \dots (q-s+1)}{n_1! n_2! \dots n_r!}.$$

**Следствие 2.**

$$\lim_{q \rightarrow \infty} P_n(q) = \frac{1}{n!}.$$

# АВТОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛОЯ МОДАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ, РАСШИРЯЮЩЕГО S4\*

П. А. Шрайнер

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; schr@ngs.ru*

Данная работа продолжает работы [1–8], посвященные автоматическому распознаванию различных свойств в некоторых классах неклассических логик.

Говорят, что модальное исчисление  $L$ , расширяющее S4, **принадлежит слою**  $n$ , если в нем выводятся все формулы  $\sigma_n$  для  $0 < n < \omega$ , и не выводится формула  $\sigma_{n+1}$ .

Последовательность формул  $\{\sigma_n\}$  определяется следующим образом:

$$\sigma_0 = \perp; \sigma_{n+1} = \Box p_{n+1} \vee \Box(\Box p_{n+1} \rightarrow \sigma_n);$$

Исчисление называется исчислением **конечного слоя**, если в нем выводится формула  $\sigma_n$  для некоторого  $n > 0$ , и исчислением **бесконечного слоя**, в противном случае.

Л.Л. Максимовой в работе [9] было доказано, что все модальные логики конечных слоев являются **локально табличными** (т.е. для любого конечного множества переменных найдется только конечное количество попарно неэквивалентных в данном исчислении формул.)

В данной работе предлагается алгоритм, позволяющий для произвольного модального исчисления, полученного добавлением конечного числа новых схем аксиом к модальному исчислению S4, автоматически проверить является это исчисление конечнослойным или нет. В случае положительного ответа определяется номер слоя, к которому принадлежит исследуемое исчисление.

Будем обозначать через  $L+A$  исчисление, полученное из исчисления  $L$  добавлением формулы  $A$  в качестве новой схемы аксиом. Заметим, что данное определение можно распространить на конечное число формул, взяв в качестве добавляемой формулы их конъюнкцию. Через  $S_k$  обозначим  $k$ -элементную линейную шкалу.

Алгоритм основан на следующем предложении:

**Предложение 1.** Пусть модальное исчисление  $L = S4 + A$ , причем формула  $A$  содержит  $k$  модальностей. Тогда

1. Исчисление  $L$  принадлежит бесконечному слою тогда и только тогда когда формула  $A$  опровергается на  $k + 1$ -элементной линейной шкале.
2. Исчисление  $L$  принадлежит конечному слою  $n$  тогда и только тогда когда формула  $A$  истинна на  $S_m$  для всех  $0 < m < n$  и опровергается на  $S_{n+1}$ .

**Доказательство** получается с использованием Предложения 4.5, Теоремы 5.2 и доказательства Теоремы 5.3 из [10].

Автором создана программа, реализующая вышеописанный алгоритм автоматического определения слоя для расширений S4.

Заметим, что подобная программа может быть создана и для автоматического определения слоя суперинтуиционистских логик.

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06–01–00358).

## Литература

1. Шрайнер П. А. Автоматическое распознавание интерполяционного свойства у некоторых суперинтуиционистских пропозициональных логик // Вестник НГУ. 2003. Т. 3, № 4. С. 85–92.
2. Максимова Л. Л., Шрайнер П. А. Алгоритмы распознавания табличности и предтабличности в расширениях интуиционистского исчисления // Вестник НГУ. 2006. Т. 6, № 3. С. 49–58.
3. Schreiner P. Automated recognition of interpolation over S4.3 // Logic Colloquium 2005, Athens, Greece, 2005. Book of abstracts. P. 113.
4. Schreiner P. Automated recognition of the interpolation property in the extensions of the S5 // The 9th Asian Logic Conference, 2005. Abstracts. P. 123–124.
5. Schreiner P. A., Shilov N. V. and Grebeneva J. V. SAT vs. SMV for automatic validation of tabular property of superintuitionistic logics // Bulletin of Novosibirsk Computing Center. Volume of A. P. Ershov Institute of Informatics Systems. Computer Science Series. 2006. V. 24, № 24. P. 105–117.
6. Schreiner P. Automatic checking properties of non-classical logics // Journal of Applied Non-classical Logic. Algebraic and relational deductive tools. 2006. V. 16, № 3–4. P. 507–516.
7. Schreiner P. Recognition of the Craig Interpolation Property and Projective Beth Property in the local tabular positive calculus // Logic Colloquium 2006, Nijmegen, the Netherlands, 2006. P. 35.
8. Шрайнер П. А. Автоматическое распознавание интерполяции в модальных исчислениях // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 1. С. 103–119.
9. Максимова Л. Л. Модальные логики конечных слоев // Алгебра и логика. 1975. Т. 6, № 3. С. 49–58.
10. Maksimova L. Strongly decidable properties of modal and intuitionistic calculi // Logic Journal of IGPL. 2000. V. 8, № 6, 797–819.

**ГЕОМЕТРИЯ, ТОПОЛОГИЯ  
И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ  
GEOMETRY, TOPOLOGY,  
AND MATHEMATICAL ANALYSIS**

**ОЦЕНКИ НАИЛУЧШЕГО  $M$ -ЧЛЕННОГО  
ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ**

**Г. А. Акишев**

*Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова, Караганда, Казахстан;  
akishev@kargu.krg.kz*

Пусть  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m) \in R^m$ ,  $I^m = [0, 2\pi]^m$ ,  $m \in N$ . Через  $L_{\bar{p}}(I^m)$  обозначим пространство измеримых по Лебегу  $2\pi$ -периодических функций со смешанной нормой

$$\|f\|_{\bar{p}} = \left[ \int_0^{2\pi} \left[ \dots \left[ \int_0^{2\pi} |f(\bar{x})|^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} dx_m \right]^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $1 \leq p_j < +\infty$ ,  $j = 1, \dots, m$  (см. [1]).

Пусть даны векторы  $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$ ,  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$ ,  $1 \leq \tau_j, p_j < +\infty$ ,  $r_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Рассмотрим класс О. В. Бесова

$$B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} = \left\{ f \in \overset{\circ}{L}_{\bar{p}}(I^m) : \|f\|_{B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}}} = \|f\|_{\bar{p}} + \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p}} \right\}_{\bar{s} \in Z_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leq 1 \right\}.$$

Здесь  $\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in \rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f) e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle}$ , где  $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j$ ,  $\rho(\bar{s}) = \{\bar{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, m\}$ ,  $a_{\bar{n}}(f)$  — коэффициенты Фурье функции  $f \in L_1(I^m)$  по кратной тригонометрической системе  $\{e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle}\}_{\bar{n} \in Z^m}$ .

Пусть  $e_M(f)_{\bar{p}}$  — наилучшее  $M$ -членное приближение тригонометрическими полиномами функции  $f \in L_{\bar{p}}(I^m)$ . Положим

$$e_M(B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}})_{\bar{q}} = \sup_{f \in B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}}} e_M(f)_{\bar{q}}.$$

Наилучшее  $M$ -членное приближение для функции одной переменной в пространстве  $L_2$  было введено С. Б. Стечкиным [2] при формулировке критерия абсолютной сходимости рядов Фурье. Оценки порядка  $M$ -членного приближения различных классов исследовали Р. С. Исмагилов, В. Е. Майоров, Э. С. Белинский, В. Н. Темляков, Р. Девор, Б. С. Кашин, А. С. Романюк (см. библиографию в [3–5]).

В докладе будут представлены результаты об оценках наилучшего  $M$ -членного приближения классов в пространствах со смешанной нормой. В частности

**Теорема 1.** Пусть  $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ ,  $\bar{q} = (q_1, \dots, q_m)$ ,  $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$ ,  $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ ,  $1 \leq p_j \leq 2 < q_j < +\infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $1 \leq \theta_j < +\infty$ ,  $0 < r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} = \dots = r_\nu + \frac{1}{q_\nu} - \frac{1}{p_\nu} < r_{\nu+1} + \frac{1}{q_{\nu+1}} - \frac{1}{p_{\nu+1}} \leq \dots \leq r_m + \frac{1}{q_m} - \frac{1}{p_m}$ .

1. Если  $r_j > \frac{1}{p_j}$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $(r_1 - \frac{1}{p_1})\frac{1}{q_j} < (r_j - \frac{1}{p_j})\frac{1}{q_1}$ ,  $j = \nu + 1, \dots, m$ , то

$$e_M \left( B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} \right)_{\bar{q}} \leq M^{-\left(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}\right)} (\log M)^{(\nu-1)\left(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{2}\right) + \sum_{j=2}^{\nu} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j}\right)}.$$

2. Если  $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}$ ,  $q_j < \theta_j$ ,  $q'_j = \frac{q_j}{q_j - 1}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , то

$$e_M \left( B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} \right)_{\bar{q}} \leq M^{-\frac{q_1}{2} \left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)} (\log M)^{(q_1-1)(\nu-1)\left(r_1 - \frac{1}{p_1}\right) + \frac{q'_1}{q_1} \sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}}.$$

3. Если  $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q} < r_j < \frac{1}{p_j}$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $\theta_1 = \dots = \theta_m = \theta \leq q = q_1 = \dots = q_m$ , то

$$e_M \left( B_{\bar{p}, \theta}^{\bar{r}} \right)_q \leq M^{-\frac{q}{2} \left(r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1}\right)} (\log M)^{(q-1)(\nu-1)\left(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{q'}{q} \frac{1}{\theta}\right)}.$$

**Теорема 2.** Если  $2 \leq p_j < q_j < +\infty$ ,  $1 \leq \theta_j < +\infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ , то при  $r_1 > \frac{1}{2}$  имеет место оценка

$$e_M \left( B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} \right)_{\bar{q}} \leq M^{-r_1} (\log M)^{(\nu-1)r_1 + \sum_{j=2}^{\nu} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j}\right)}.$$

Если  $1 < p_j < q_j \leq 2$ ,  $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q} < r_j$ ,  $q_j < \theta_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , то

$$e_M \left( B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} \right)_{\bar{q}} \leq M^{-\left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)} (\log M)^{(\nu-1)\left(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1}\right) + \sum_{j=2}^{\nu} \left(\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\theta_j}\right)}.$$

**Теорема 3.** Пусть  $1 < p_j < q_j \leq 2$ ,  $1 \leq \theta_j < +\infty$ ,  $r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m$ ,  $\beta = \min\{2, p_1, \dots, p_m\}$ .

1. Если  $p_j < \theta_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , то

$$e_M \left( B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} \right)_{\bar{p}} \leq C(r, p, q, m, \theta) M^{-r_1} (\log M)^{(\nu-1)r_1 + \sum_{j=2}^{\nu} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\theta_j}\right)}.$$

2. Если  $\theta_1 = \dots = \theta_m = \theta < \beta$ , то

$$e_M \left( B_{\bar{p}, \theta}^{\bar{r}} \right)_{\bar{p}} \leq C(r, p, q, m, \theta) M^{-r_1} (\log M)^{(\nu-1)\left(r_1 - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\theta}\right)}.$$

**Теорема 4.** Пусть  $1 < q_j < p_j < +\infty$ ,  $p_j \geq 2$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m$ . Тогда

$$e_M \left( B_{\bar{p}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} \right)_{\bar{q}} \leq C(r, p, q, m, \theta) M^{-r_1} (\log M)^{(\nu-1)r_1 + \sum_{j=2}^{\nu} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j}\right)}$$

в случае  $2 < \theta_j < +\infty$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

В некоторых случаях параметров показана точность полученных оценок.

Из приведенных теорем в случае  $q_1 = \dots = q_m$ ,  $p_1 = \dots = p_m$ ,  $\theta_1 = \dots = \theta_m$  следуют результаты А. С. Романиюка [5], где также показана точность этих оценок.

### Литература

1. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
2. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. 1955. Т. 102, № 1. С. 37-40.
3. *Темляков V. N.* Nonlinear methods of approximation // Found. Comput. Math. 2003. V. 3. P. 33–107.
4. *Кашиш В. С.* О нижних оценках для  $M$ -членных приближений // Матем. замет. 2001. Т. 70, № 4. С. 636–638.
5. *Романиюк А. С.* Наилучшие  $M$ -членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67. С. 61–100.



# ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ В ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА И СПЕКТРАЛЬНОЕ ОБОБЩЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА УИЛЛМОРА\*

Д. А. Бердинский

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; berdinsky@gmail.com*

Следуя подходу, принятому в [2, 3], предложено спектральное обобщение функционала Уиллмора для поверхностей в трехмерной группе Гейзенберга  $\text{Nil}$  с левоинвариантной метрикой и четырехмерной группой изометрий, т. е. наделенной одной из геометрий Терстона см. [4]. Используя поверхности вращения, показано [5], что для поверхностей в пространстве  $\text{Nil}$  обобщенный функционал Уиллмора аналогичен функционалу Уиллмора для поверхностей в евклидовом пространстве во многих отношениях. В [5] доказано что для всех сфер постоянной средней кривизны в  $\text{Nil}$ , значение обобщенного функционала Уиллмора постоянно и равно  $\pi$ , а для сфер вращения функционал принимает значения большие либо равные  $\pi$  и равенство достигается в точности на сферах постоянной средней кривизны, кроме того, на торах вращения функционал принимает значения, большие нуля.

В евклидовом пространстве сферы постоянной средней кривизны суть круглые сферы и решения изопериметрической задачи. Для сфер в евклидовом пространстве функционал Уиллмора достигает на круглых сферах своего минимального возможного значения равного  $\pi$ . Согласно [1], все сферы постоянной средней кривизны в  $\text{Nil}$  являются сферами вращения и предположительно дают решение изопериметрической задачи (это верно по крайней мере для малых значений объема). Обобщенный функционал Уиллмора равен  $\pi$  на сферах постоянной средней кривизны в  $\text{Nil}$ , и достигает на них своего минимального значения среди всех сфер вращения.

Эти геометрические наблюдения подтверждают, что обобщенный функционал Уиллмора является правильным обобщением функционала Уиллмора для случая поверхностей в  $\text{Nil}$ .

## Литература

1. *Abresch U., Rosenberg H.* Generalized Hopf differentials // *Mat. Contemp.* 2005. V. 28. P. 1–28.
2. *Taimanov I. A.* Modified Novikov — Veselov equation and differential geometry of surfaces // *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2.* 1997. V. 179. P. 133–151.
3. *Тайманов И. А.* Двумерный оператор Дирака и теория поверхностей // *Успехи матем. наук.* 2006. Т. 61, № 1. С. 85–164.
4. *Бердинский Д. А., Тайманов И. А.* Поверхности в трехмерных группах Ли // *Сиб. мат. журн.* 2005. Т. 46, № 6. С. 1248–1264.
5. *Бердинский Д. А., Тайманов И. А.* Поверхности вращения в группе Гейзенберга и спектральное обобщение функционала Уиллмора // *Сиб. мат. журн.* 2007. Т. 48, № 3. С. 496–511.

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07–01–00777).

# ТОПОЛОГИЯ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ ПЕРЕПЛЕТЕНИЙ

А. А. Богданов, В. Р. Мешков, А. В. Омельченко, М. И. Петров, Э. А. Тропп

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Санкт-Петербург;  
*avo-travel@yandex.ru*

Двоякопериодические плетеные структуры (рис. 1), подобно таким известным топологическим объектам, как косы, узлы и зацепления, часто встречаются как в технических (текстильные структуры [1]), так и в физических (двумерные дискретные модели в статистической физике [2]) приложениях. Две двоякопериодические структуры топологически эквивалентны друг другу, если они могут быть получены одна из другой изотопией пространства  $R^3$ , сохраняющей двоякопериодичность. Такая изотопия может представлять собой либо непрерывную деформацию  $R^3$  с тем же периодом, что и сама структура, либо произвольное линейное преобразование, сохраняющее ориентацию пространства (перекосы, повороты, растяжения).

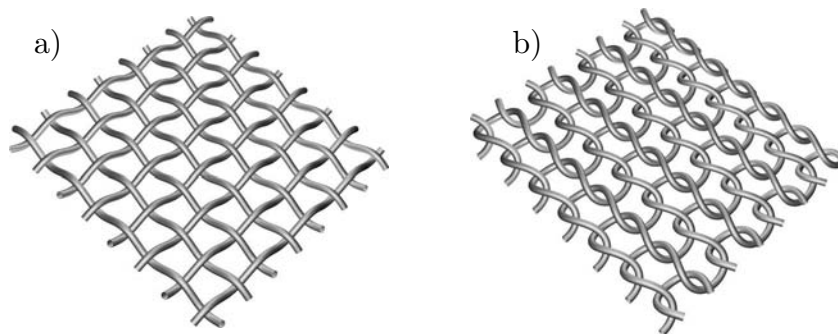


Рис. 1. Двоякопериодические плетеные структуры.

Двоякопериодическая структура полностью определяется заданием своего минимального повторяющегося элемента — элементарной ячейки. отождествление противоположных сторон ячейки позволяет рассматривать такие структуры как зацепления над тором.

Неоднозначность выбора элементарной ячейки приводит к необходимости рассматривать такие структуры с точностью до скручиваний тора вдоль меридиана и параллели (скручиваний Дэна). Это существенно уменьшает число неизотопных друг другу структур. Кроме того, это упрощает их анализ и, следовательно, позволяет продвинуться существенно дальше в их изучении.

Одной из основных задач, связанных с произвольным топологическим объектом, является построение топологического инварианта — алгебраического объекта (числа или полинома), не меняющегося при изотопии и различающего неэквивалентные структуры. В работе строится изотопический полиномиальный инвариант кауфмановского типа от двух переменных для двоякопериодических плетеных структур, не зависящий от выбора периода [3].

Следующей традиционной для маломерной топологии проблемой является задача перечисления всех неизотопных друг другу топологических объектов. Для узлов и зацеплений разработано большое число алгоритмов решения этой проблемы. Особенностью рассматриваемых структур является тот факт, что в практических приложениях встречаются структуры с большим числом перекрестков. В работе строятся быстрые алгоритмы генерирования и просеивания двоякопериодических плетеных структур с одинаковым числом перекрестков, максимально учитывающие специфику рассматриваемой задачи.

## Литература

1. *Spencer D. J.* Knitting Technology: a comprehensive handbook and practical guide. 3-rd edition. Cambridge: Woodhead Publishing, 2001, 386 p.
2. *Бэжтер Р.* Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1985.
3. *Grishanov S. A., Meshkov V. R., Omelchenko A. V.* Kauffman-Type Polynomial Invariants for Dolby Periodic Structures // Journal of Knots and Its Ramifications. 2007. V. 16, № 6.

# ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ, РАЗВЕТВЛЕННЫХ НАД ДВУХМОСТОВЫМИ УЗЛАМИ\*

А. Ю. Веснин

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; vesnin@math.nsc.ru*

Введенное С. В. Матвеевым понятие *сложности*  $c(M)$  трехмерного многообразия  $M$  играет важную роль при исследовании и классификации трехмерных многообразий [1]. При этом, задача оценивания и вычисления сложности заданного многообразия является весьма трудной. В настоящее время известны точные значения сложности только для табличных многообразий и для нескольких бесконечных серий многообразий с краем.

Класс двухмостовых узлов и зацеплений является одним из наиболее исследуемых в теории узлов, а накрытия трехмерной сферы, разветвленные над двухмостовыми узлами и зацеплениями, — в теории трехмерных многообразий.

**Теорема 1** [2]. Пусть  $K(p, q)$  — двухмостовой узел или зацепление,  $M_n(p, q)_{n=2}^\infty$  — семейство  $n$ -листных меридианно-циклических накрытий трехмерной сферы, разветвленных над  $K(p, q)$ . Тогда для всех  $n$  имеет место верхняя оценка сложности многообразий

$$c(M_n(p, q)) \leq n(p - 1).$$

**Доказательство** теоремы основано на явной конструкции фундаментального многогранника для  $M_n(p, q)$ , предложенной в [3].

Пусть  $K(p, q)$  — двухмостовой узел или зацепление, а  $\ell(p, q)$  — минимум среди длин всех положительных непрерывных дробей, представляющих такие рациональные числа  $p'/q'$ , что  $K(p', q')$  эквивалентен  $K(p, q)$ .

**Теорема 2** [2]. Если в условиях предыдущей теоремы  $K(p, q)$  является гиперболическим, то для всех  $n \geq 7$  имеет место нижняя оценка сложности многообразий

$$c(M_n(p, q)) > n \cdot \left(1 - \frac{c\pi^2}{n^2}\right)^{3/2} \cdot \max\{2, 2\ell(p, q) - 2.6667\dots\},$$

где  $c = 4$ ; более того, если  $K(p, q)$  отличен от  $K(5, 2)$  и  $K(7, 3)$ , то указанное неравенство имеет место для всех  $n \geq 6$  при  $c = 2\sqrt{2}$ .

**Доказательство** теоремы использует оценку объема дополнения к  $K(p, q)$  в терминах  $\ell(p, q)$  из [4] и оценку изменения объема при хирургии Дэна из [5].

## Литература

1. Matveev S. V. Algorithmic topology and classification of 3-manifolds. ACM-monographs. V. 9, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 2003.
2. Petrinio C., Vesnin A. Two-sided bounds for the complexity of cyclic branched coverings of two-bridge links. Preprint. math.GT/0612830.
3. Minkus J. The branched cyclic coverings of 2-bridge knots and links // Mem. Amer. Math. Soc. 1982. V. 35, no. 255.
4. Lackenby M. The volume of hyperbolic alternating link complements. With an appendix by Ian Agol and Dylan Thurston // Proc. London Math. Soc. 2004. V. 88, P. 204–224.
5. Futer D., Kalfagianni E., Purcell J. S. Dehn filling, volume, and the Jones polynomial. Preprint. math.GT/0612138.

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06–01–00153) и интеграционного проекта между СО РАН и УрО РАН.

# ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА И СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ\*

С. К. Водопьянов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; vodopis@math.nsc.ru*

Обсуждается взаимосвязь теории пространств Соболева и теории функций. Пионерская работа С. Л. Соболева [1] о достаточных условиях на  $C^1$ -диффеоморфизм евклидовых областей, индуцирующий по правилу замены переменной изоморфизм пространств Соболева с первыми обобщенными производными, вдохновила последующих исследователей на детальное рассмотрение различных аспектов этой проблемы. Прежде всего, было показано, что в категории  $C^1$ -диффеоморфизмов указанные Соболевым достаточные условия являются в ряде случаев также и необходимыми. С развитием теории квазиконформных отображений и геометрической теории меры стало возможным решить проблему Соболева в значительно более общей постановке: *измеримое отображение  $\varphi : D \rightarrow D'$ ,  $D, D' \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , индуцирует изоморфизм пространств Соболева  $L_p^1$ ,  $1 \leq p < \infty$ , тогда и только тогда, когда его можно переопределить на множестве нулевой меры так, чтобы оно стало квазиконформным при  $p = n$  [2] и квазиизометрическим при  $p \neq n$  [3].*

Новый аспект этой задачи возникает в том случае, когда требуется найти необходимые и достаточные условия на отображение  $\varphi : D \rightarrow D'$ , индуцирующее по правилу замены переменной *ограниченный оператор  $\varphi^* : L_p^1 \rightarrow L_q^1$ ,  $1 \leq q \leq p < \infty$  [4].* При частных показателях суммируемости гомеоморфные отображения этого класса совпадают с квазиконформными отображениями ( $q = p = n$ ) либо с отображениями, квазиконформными в среднем ( $n - 1 < q < p \leq n$ ). При  $q = p = n$  отображения этого класса, имеющие неотрицательный якобиан, суть отображения с ограниченным искажением.

Обобщающей концепцией последнего класса служат отображения с ограниченным  $(p, q)$ -искажением. Непрерывное отображение  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$ , называется *отображением с ограниченным  $(p, q)$ -искажением*,  $1 \leq q \leq p < \infty$ , если

- 1)  $\varphi$  открыто и дискретно;
- 2)  $\varphi \in W_{1, \text{loc}}^1(G)$ ;
- 3)  $J(x, \varphi) \geq 0$  п. в. и  $J(x, \varphi) \in L_{1, \text{loc}}(G)$ ;
- 4) локальное искажение  $K_p(x; \varphi) = \inf\{k(x) : |\nabla f|(x) \leq k(x)J(x, \varphi)^{\frac{1}{p}}\}$  принадлежит либо классу  $L_\infty(G)$  при  $1 \leq q = p < \infty$ , либо классу  $L_{\frac{qp}{p-q}}(G)$  при  $1 \leq q < p < \infty$ ;
- 5) отображение  $f$  обладает  $\mathcal{N}$ -свойством Лузина.

Для отображений с ограниченным  $(p, q)$ -искажением справедлив аналог теоремы Лиувилля в следующей форме. Напомним, что многообразии  $M$  называется  *$r$ -параболическим*, если емкость  $\text{cap}(e; \mathring{L}_r^1(\mathbb{M}))$  любого компакта  $e \subset M$  равна нулю

**Теорема.** Пусть  $\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$  — римановы многообразия, а  $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$  — отображение с ограниченным  $(p, q)$ -искажением,  $q > n - 1$ . Если многообразие  $\mathbb{M}$   $r$ -параболическое с  $r = \frac{q}{q-n+1}$ , то многообразие  $\mathbb{M}'$   $s$ -параболическое с  $s = \frac{p}{p-n+1}$ .

Теорема в случае  $q = p \neq n$  доказана в [5].

---

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 06-01-00735), и Совета по грантам для поддержки ведущих научных школ России (грант НШ-8526.2006.1).

**Литература**

1. *Соболев С. Л.* О некоторых группах преобразований  $n$ -мерного пространства // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32. С. 380–383.
2. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Квазиконформные отображения и пространства функций с первыми обобщенными производными // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 3. С. 515–531.
3. *Vodopyanov S. K.* Composition Operators on Sobolev Spaces // In: «Complex Analysis and Dynamical Systems II». Contemporary Mathematics, AMS. 2005. V. 382. P. 327–342.
4. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Операторы суперпозиции в пространствах Соболева // Изв. вузов. Математика. 2002. Т. 486, № 10. С. 11–33.
5. *Troyanov M., Vodop'yanov S.* Liouville type theorems for mappings with bounded (co)-distortion // Annales de l'Institut Fourier. 2002. V. 52, N 6. P. 1753–1784.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СВЕРТКАХ НА ОТРЕЗКЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ЯДРОМ\*

А. Ф. Воронин

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; voronin@math.nsc.ru*

Рассматриваются интегральные уравнения 2-го и 1-го рода в свертках на конечном интервале  $(0, b)$ ,

$$\lambda u(t) - \int_0^b k(t-s)u(s) ds = f(t), \quad t \in (0, b), \quad \lambda = 1, 0, \quad (1)$$

при следующих ограничениях,

$$k \in L_1(-b, b), \quad f \in L_1(0, b), \quad b > 0. \quad (2)$$

Кроме того, предполагается, что ядро  $k$  является периодической функцией на  $(-b, b)$ ,

$$k(t+b) = k(t), \quad t \in (-b, 0). \quad (3)$$

В данной работе найдены в замкнутой форме [1, с. 532] условия разрешимости, корректности и все решения задачи (1)–(3). Таким образом, в работе для задачи (1)–(3) получены результаты, аналогичные основным результатам теории уравнений в свертках 2-го рода на полубесконечном интервале [2, 3]. Заметим, что теория уравнений в свертках 1-го рода на полубесконечном интервале развита лишь для весьма специального класса ядер [2–4].

К настоящему времени не существует полной теории задачи (1)–(2). Более того, не существует теории корректности задачи (1)–(2) с обозримыми условиями корректности. Успех в исследовании задачи (1)–(2) достигнут лишь в частных случаях. В [5], при условии, что ядро имеет следующий общий вид:

$$k(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^{m_j} c_{lj} e^{p_j t} t^l, \quad t \in (-b, b),$$

где  $c_{lj}, p_j$  — комплексные постоянные, задача (1)–(2) полностью исследована. В [6] приведены результаты полного исследования корректности задачи (1)–(2) при  $\lambda = 1$  и условии четности ядра  $k$ . Библиография исследований уравнений (1) дана в [7], там же задача (1)–(2) сведена к классической краевой задаче Римана для аналитических функций с матричным коэффициентом  $G(p)$ . Однако теория задачи Римана с матричным коэффициентом находится в стадии развития, что затрудняет непосредственное ее применение. В [8] был предложен метод канонической факторизации матриц-функций, с помощью которого в [6] были найдены частные индексы матричного коэффициента  $G(p)$ , которые, согласно теории векторной задачи Римана [1, 4], полностью определяют ее корректность. Из полученных условий корректности задачи Римана следуют, согласно леммы 1.1 [7], достаточные условия корректности уравнения 2-го рода (1) (которые являются и необходимыми в рассматриваемом в [6] случае).

В настоящей работе продолжены исследования из [7] при дополнительном ограничении (3), последнее упрощает ситуацию и приводит к скалярной задаче Римана, которая в общем случае исследована в [1, 2]. Согласно леммы 1.1 [7], при выполнении некоторого условия, результаты исследования скалярной задачи Римана переносятся на уравнения (1).

---

\*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке СО РАН (Междисциплинарный интеграционный проект № 48) и гранта поддержки ведущих научных школ России (НШ-7157.2006.1)

### Литература

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
2. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978.
3. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, № 5 (83). С. 3–120.
4. *Прёсдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979.
5. *Ганин М. П.* Об одном интегральном уравнении Фредгольма с ядром, зависящем от разности аргументов // Изв. вузов. Математика. 1963. № 2. С. 31–43.
6. *Воронин А. Ф.* Условия корректности уравнения 2-го рода в свертках на конечном интервале с четным ядром // Докл. АН. 2007. Т. 413, № 5. С. 594–595.
7. *Воронин А. Ф.* Полное обобщение метода Винера — Хопфа для интегральных уравнений в свертках на конечном интервале с интегрируемыми ядрами // Диф. уравн. 2004. Т. 40, № 9. С. 1153–1160.
8. *Воронин А. Ф.* О корректности краевой задачи Римана с матричным коэффициентом // Докл. АН. 2007. Т. 414, № 2. С. 121–123.

# О ПОЛИНОМИАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧКАХ ОРБИТ КОМПАКТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП

В. М. Гичев

*Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск;*  
*gichev@ofim.oscsbras.ru*

Полиномиально выпуклая оболочка  $\widehat{Q}$  компакта  $Q$  в комплексном векторном пространстве  $V$  определяется равенством

$$\widehat{Q} = \{v \in V : |p(v)| \leq \sup_{q \in Q} |p(q)| \text{ для всех голоморфных полиномов } p \text{ на } V\}.$$

Оболочка компакта «общего положения» может быть устроена очень сложно. Например, с начала 60-х годов известно, что существуют  $Q$ , для которых  $\widehat{Q} \neq Q$ , но  $\widehat{Q} \setminus Q$  не имеет аналитической структуры, т. е. не содержит одномерных комплексных подмногообразий  $V$  (см. [1]). С другой стороны, существуют вполне несвязные множества  $Q \subset \mathbb{C}^n$ , для которых  $\widehat{Q}$  имеет непустую внутренность (см. [2]). Эти и другие примеры показывают, что задача описания  $\widehat{Q}$  в общем случае вряд ли имеет разумное решение. Иногда  $\widehat{Q}$  удается найти; обычно это возможно, если  $Q$  имеет большую группу симметрий. Например, если  $Q = \mathbb{T}^n z$ , где  $z \in \mathbb{C}^n$ ,  $\mathbb{T}^n$  — группа диагональных  $n$ -матриц с диагональными элементами из единичной окружности  $\mathbb{T} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$ , то  $\widehat{Q} = D^n z$ , где  $D$  — замкнутый единичный круг в  $\mathbb{C}$ . Если  $Q$  —  $\mathbb{T}^n$ -инвариантный компакт, в котором плотно множество  $Q_0$  векторов с ненулевыми компонентами, то

$$\widehat{Q} = D^n \text{clos exp conv ln } |Q_0|,$$

где функции  $|\cdot|$ ,  $\ln$  и  $\text{exp}$  применяются к вектору покомпонентно,  $\text{clos}$  обозначает замыкание, а  $\text{conv}$  — линейно выпуклую оболочку. Если число орбит  $\mathbb{T}^n$  в  $Q$  конечно, то  $\widehat{Q}$  можно задать конечным набором неравенств.

Простейшая довольно общая ситуация, в которой задача описания  $\widehat{Q}$  не выглядит безнадежной, — случай, когда  $Q = Gv$ , где  $V$  — комплексное линейное пространство,  $v \in V$ ,  $G$  — компактная подгруппа  $\text{GL}(V)$ . Наиболее заметный результат здесь — описание оболочек орбит групп изотропии ограниченных симметрических областей в комплексных линейных пространствах (см. [3, 4]). Для любой такой области определяются сингулярные значения  $\sigma_1(v), \dots, \sigma_n(v)$  вектора  $v$  из касательного пространства (они обобщают понятие сингулярных значений матрицы), которые упорядочиваются по убыванию ( $\sigma_1(v) \geq \dots \geq \sigma_n(v)$ ); оболочка  $Gv$  задается неравенствами  $\mu_k(z) \leq \mu_k(v)$ , где  $\mu_k(z) = \sigma_1(z) \cdots \sigma_k(z)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , а  $n$  — ранг симметрической области. По существу, задача сводится к описанному выше случаю тора, расширенного группой Вейля системы корней симметрического пространства («малой системы корней»). Если область неприводима, то малая система корней может иметь тип  $C_n$  или  $BC_n$ , а ее группу Вейля можно реализовать как группу всех перестановок координат и изменений их знаков в подходящем базисе. В работе [5] исследовался случай группы  $G$ , полученной расширением тора конечной группой. Если орбита  $G^{\mathbb{C}}v$  связна, то оболочка  $\widehat{Gv}$  орбиты  $Gv$  содержится в замыкании  $G^{\mathbb{C}}v$  и выделяется в нем конечным числом неравенств вида  $|z_1|^{s_1} \dots |z_n|^{s_n} \leq c$ . Если при этом степени  $s_1, \dots, s_n$  не зависят от  $v$ , то, при некоторых дополнительных условиях,  $G$  можно реализовать как группу всех линейных автоморфизмов ограниченной симметрической области, сохраняющих некоторое максимальное абелево подпространство и не переставляющих неприводимые компоненты.

Стоит отметить, что полиномиально выпуклую оболочку  $\widehat{G}$  самой группы  $G$  в пространстве линейных операторов в  $V$  тоже можно описать явно (при этом описание, в некотором смысле, тоже сводится к случаю тора). Она является полугруппой (см. [6]). Очевидно,  $\widehat{Gv} \subseteq \widehat{Gv}$  для всех  $v \in V$ ; в некоторых случаях можно доказать равенство. Однако обычно равенства нет: например,



если  $G$  полупроста, то всегда  $\widehat{G} = G$ , но очень часто  $\widehat{Gv} \neq Gv$  (это так для естественного действия  $SU(2)$  в  $\mathbb{C}^2$ , поскольку все нетривиальные орбиты — сферы).

Если  $\widehat{Q} = Q$ , то  $Q$  называется *полиномиально выпуклым*. Полиномиально выпуклые орбиты компактных линейных групп  $G$  охарактеризованы в работе [7] как вещественные формы замкнутых орбит групп  $G^{\mathbb{C}}$  (множества неподвижных точек антиголоморфных инволюций, коммутирующих с действием  $G$ ). Более того, замкнутость орбиты  $G^{\mathbb{C}}v$  равносильна тому, что она содержит полиномиально выпуклую  $G$ -орбиту.

Видимо, следующий шаг должен состоять в описании оболочек орбит присоединенного представления компактной группы  $G$  в комплексификации  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  ее алгебры Ли  $\mathfrak{g}$ . Орбиты элементов  $\mathfrak{g}$  под действием группы  $G^{\mathbb{C}}$  замкнуты, а их  $G$ -орбиты (флаговые многообразия) являются вещественными формами  $G^{\mathbb{C}}$ -орбит. Пусть  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $z \in G^{\mathbb{C}}x$ . Тогда полиномиальная оболочка орбиты  $\widehat{Gz}$  содержится в  $G^{\mathbb{C}}x$  и совпадает с ее оболочкой относительно алгебры всех аналитических функций на  $G^{\mathbb{C}}x$ ; в частности, она определяется внутренней геометрией комплексного однородного пространства  $G^{\mathbb{C}}x$  (в действительности даже геометрией однородного  $CR$ -многообразия  $Gz$ ). Сейчас ясно, что для  $x$  общего положения описание  $\widehat{Gz}$  не может быть простым. Задачу можно свести к случаю симметрических областей, если  $x$  сопряжен микровесу (другими словами,  $\text{ad}(x)$  имеет собственные числа  $0, \pm i$ ). Именно, орбита  $Gx$  является компактным эрмитовым симметрическим пространством (область — двойственное пространство некомпактного типа). Через  $x$  проходит пара комплексно аффинных подпространств  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ , которые целиком содержатся в  $G^{\mathbb{C}}x$ . Пусть  $\mathfrak{l}$  — одно из них. Естественное представление стационарной подгруппы  $G_x$  точки  $x$  в  $\mathfrak{l}$  становится линейным, если  $x$  выбрать началом. Оно эквивалентно представлению изотропии симметрической области. Любая  $G$ -орбита в  $G^{\mathbb{C}}x$  пересекает  $\mathfrak{l}$ ; поэтому условие следующей теоремы не ограничивает общности.

**Теорема 1.** *Если  $z \in \mathfrak{l}$ , то  $\widehat{Gz} = G\widehat{G_x z}$ .*

Для произвольных  $x \in \mathfrak{g}$  возможен аналог этой конструкции, но теорема в общем случае неверна.

## Литература

1. *Stolzenberg G.* A hull with no analytic structure // J. Math. Mech. 1963. V. 12. P. 103–112.
2. *Витюшкин А. Г.* Об одной задаче У. Рудина // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213, № 1. С. 14–15.
3. *Kaup W.*, Bounded symmetric domains and polynomial convexity // Manuscr. Math. 2004. V. 114, No 3. P. 391–398.
4. *Kaup W., Zaitsev D.*, On the CR-structure of compact group orbits associated with bounded symmetric domains // Invent. Math. 2003. V. 153. P. 45–104.
5. *Gichev V. M.*, Orbits of tori extended by finite groups and their polynomial hulls: the case of connected complex orbits // Contemporary Math. (to appear). Preprint. arXiv math.CV 0704.1095v1.
6. *Gichev V. M.*, Maximal ideal spaces of invariant function algebras on compact groups. Preprint. arXiv math.FA//0603449.
7. *Gichev V. M., Latypov I. A.*, Polynomially convex orbits of compact Lie groups // Transformation Groups. 2001. V. 6, no. 4. P. 321–331.

# ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ НИЛЬПОТЕНТНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ КОНУСОВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ АНИЗОТРОПНЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ\*

А. В. Грешнов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; greshnov@math.nsc.ru*

Пусть  $U \subset \mathbb{R}^N$  — некоторая ограниченная область. Рассмотрим на  $U$  некоторые  $C^r$ -гладкие векторные поля  $X_1, \dots, X_N$ ,  $r \geq 1$ , значения которых в каждой точке  $g \in U$  образуют базис касательного пространства  $T_g U$ . Каждому векторному полю  $X_n$  в области  $U$  сопоставим некоторое натуральное число  $\deg X_n < N$ , называемое формальной степенью векторного поля. Полагаем, что на  $U$  имеет место следующая «таблица коммутаторов»:  $[X_i, X_j] = \sum_{\deg X_k \leq \deg X_i + \deg X_j} C_{ijk} X_k$ ,

где  $C_{ijk}$  — некоторые  $C^{r-1}$ -гладкие на  $U$  функции. Символом  $H_i$  обозначаем далее векторное подрасслоение касательного расслоения  $TU$ , образованное векторными полями  $X_j$  такими, что  $\deg X_j \leq i$ . Тогда имеем  $\deg X_j = \min\{i \mid X_j \in H_i\}$ , и пусть  $\Upsilon = \max_{i=1, \dots, N} \{\deg X_i\}$ . Отметим, что подрасслоения  $H_i$  «натянуты» на векторные поля  $X_1, \dots, X_{\dim H_i}$ , не являющиеся, вообще говоря, коммутаторами «горизонтальных» векторных полей, поэтому мы не можем гарантировать выполнение условий теоремы Рашевского — Чоу, и, как следствие, существование в этом случае метрики Карно — Каратеодори. Подобные геометрические объекты рассматривались Громовым в работе [1].

Для каждой точки  $g \in U$  введем в рассмотрение нормальную систему координат

$$\theta_g(x_1, \dots, x_N, 1) = \exp \left( \sum_{i=1}^N x_i X_i \right) (g).$$

Отображение  $\theta_g$  осуществляет, согласно известным теоремам обыкновенных дифференциальных уравнений, диффеоморфизм класса  $C^r$  между некоторым евклидовым шаром  $B_e(0, \varepsilon_g)$  и некоторой окрестностью  $O_g \subset U$  точки  $g$ . Пусть  $\tilde{O} \subset U$  — некоторая область, обладающая следующим свойством: для каждой точки  $g \in \tilde{O}$  выполняется  $\tilde{O} \subset \theta_g(B_e(0, \hat{\varepsilon}))$ , где  $\hat{\varepsilon} = \inf\{\varepsilon_g \mid g \in \tilde{O}\}$ .

В дальнейшем полагаем, что  $r = \Upsilon - 1$ , если  $\Upsilon > 2$ . Тогда  $\theta_g \in C^{\Upsilon-1}$ . В случае  $\Upsilon = 2$  дополнительно полагаем, что  $\theta_g \in C^2$ . При таких условиях мы всегда будем как минимум иметь  $(\theta_g^{-1})_* X_i = \tilde{X}_i \in C^1$ . Как следствие, в случае равномерно регулярных пространств Карно — Каратеодори [2] и, так называемых, многообразий Карно [3] условие на гладкость векторных полей имеет вид  $X_i \in C^{2\Upsilon-1-\deg X_i}$ ,  $i = 1, \dots, N$ , где  $\Upsilon > 2$ , а в случае, когда  $\Upsilon = 2$ , дополнительно полагаем, что  $\theta_g \in C^2$ .

Из определения области  $\tilde{O}$  вытекает, что для любых точек  $u, v \in \tilde{O}$  найдется единственное векторное поле  $\sum_{i=1}^N x_i X_i$  такое, что  $v = \exp \left( \sum_{i=1}^N x_i X_i \right) (u)$ ,  $|(x_1, \dots, x_N)|_\infty < \hat{\varepsilon}$ . Рассмотрим функцию  $\rho_\Upsilon : \tilde{O} \times \tilde{O} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\rho_\Upsilon(u, v) = \max_{i=1, \dots, N} \{|x_i|^{1/\deg X_i}\}$ . Несложно показать, следуя, например, [2, 4], что функция  $\rho_\Upsilon$  является квазиметрикой, непрерывной по каждому аргументу. Обозначим  $\Delta_\tau = \theta_g \circ \delta_\tau \circ \theta_g^{-1}$ , где  $\delta_\tau x = (\tau^{\deg X_i} x_i)_{i=1, \dots, N}$ ,  $g \in \tilde{O}$ .

**Теорема 1.** *Векторные поля  $(\Delta_{1/\varepsilon})_*(\varepsilon^{\deg X_i} \tilde{X}_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , сходятся равномерно на некоторой области  $O^g \subset \tilde{O}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  к векторным полям  $\hat{X}_i^g$ ,  $i = 1, \dots, N$ , образующим базис некоторой градуированной алгебры Ли; при этом*

$$[\hat{X}_i^g, \hat{X}_j^g] = \sum_{\deg X_i + \deg X_j = \deg X_k} \hat{C}_{ijk} \hat{X}_k^g, \quad \hat{C}_{ijk} = C_{ijk}(g).$$

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00482-а).

Полагаем, что область  $O^g$  обладает следующим свойством: для любых точек  $u, v \in O^g$  найдется единственное векторное поле  $\sum_{i=1}^N x_i \widehat{X}_i^g$  такое, что  $v = \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i \widehat{X}_i^g\right)(u)$ , где все  $|x_i|$  достаточно малы. Рассмотрим функцию  $\rho_{\Upsilon}^g : O^g \times O^g \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\rho_{\Upsilon}^g(u, v) = \max_{i=1, \dots, N} \{|x_i|^{1/\deg X_i}\}$ . Метрическое квазипространство  $(O^g, \rho_{\Upsilon}^g)$  называется *нильпотентным касательным конусом* метрического квазипространства  $(O, \rho_{\Upsilon})$  в отмеченной точке  $g \in \tilde{O}$ .

Пусть  $C^{\Upsilon-1}$ -гладкие векторные поля  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , таковы, что значения векторов  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, \dim H_j$ , в каждой точке  $g \in \tilde{O}$  образуют базис касательного подпространства  $T_g H_j(g)$ ;  $\deg Y_i = \deg X_i$ . Рассмотрим квазипространство  $(\tilde{O}, \varrho)$  с квазиметрикой, индуцированной векторными полями  $Y_i$  по правилу, введенному выше. Пусть  $(D^g, \varrho^g)$  обозначает нильпотентный касательный конус квазипространства  $(\tilde{O}, \varrho)$  в точке  $g$ .

**Теорема 2.** *Метрические пространства  $(O^g, \rho^g)$ ,  $(D^g, \varrho^g)$  изоморфны в некоторой окрестности точки  $g$ .*

Вышеприведенные теоремы доказаны применением формулы Тейлора — Кэмпбелла — Хаусдорфа — Дынкина [4]; также показано, что в рамках данного метода показатели гладкости векторных полей не могут быть уменьшены [4]. Полученные результаты улучшают соответствующие результаты автора, полученные ранее в [2].

### Литература

1. *Gromov M.* Carnot — Caratheodory spaces seen from within // In book: Sub-Reimannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323.
2. *Грешнов А. В.* Метрики равномерно регулярных квазипространств Карно — Каратеодори и их касательных конусов // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 259–292.
3. *Водопьянов С. К.* Дифференцируемость отображений в геометрии многообразий Карно // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 251–271.
4. *Грешнов А. В.* О применениях формулы Тейлора — Кэмпбелла — Хаусдорфа — Дынкина на некоторых анизотропных римановых пространствах // СЭМИ (в печати).

## О ПОДОБНО ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ВНУТРЕННЕЙ МЕТРИКОЙ

И. А. Гундырев

*Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск; gundyrev@omsu.ru*

**Определение 1.** Метрическое пространство  $X$  называется *локально полным*, если для каждой его точки  $x$  существует положительное число  $r(x)$  такое, что замкнутый шар  $B(x, r(x))$  с индуцированной из  $X$  метрикой является полным метрическим пространством. Точную верхнюю границу таких чисел  $r(x)$  для фиксированной точки  $x$  (возможно бесконечную) будем обозначать  $c(x)$  и называть *радиусом полноты (пространства  $X$  в точке  $x$ )*.

**Определение 2.** Биекция  $f: X \rightarrow X$  метрического пространства  $(X, \rho)$  на себя называется  $\alpha$ -подобием ( $\alpha \in \mathbf{R}_+$ ), если для любых точек  $x, y \in X$  выполняется равенство:  $\rho(f(x), f(y)) = \alpha\rho(x, y)$ . Биекция  $f: X \rightarrow X$  называется *подобием*, если  $f$  —  $\alpha$ -подобие при некотором  $\alpha \in \mathbf{R}_+$ .

**Определение 3.** Метрическое пространство  $X$  называется *однородным (подобно однородным)*, если группа его изометрий (подобий) действует транзитивно на  $X$ .

В работе изучаются подобно однородные (неоднородные), т. е. допускающие транзитивную группу метрических подобий, пространства с внутренней метрикой. Простейшим примером такого пространства является открытая евклидова полупрямая.

Начало изучения таких пространств было положено в статье В. Н. Берестовского [1]. В теореме 2.1 статьи [1] доказано, что подобно однородное пространство однородно тогда и только тогда, когда оно полно. Там же каноническим образом построено однородное пространство, конформно эквивалентное подобно однородному (определение 1.4 и теорема 1.2 в [1]).

**Определение 4.** Пусть  $(X, \rho)$  — пространство с внутренней метрикой и  $\lambda = \lambda(x)$ ,  $x \in X$ , — положительная непрерывная вещественная функция на  $X$ . Для каждого параметризованного длиной дуги спрямляемого пути  $\xi = \xi(s)$ ,  $0 \leq s \leq a$ , в  $(X, \rho)$  определим новую его длину  $l(\xi, \lambda) := \int_0^a \lambda(\xi(s)) ds$ . Затем определим новую (*внутреннюю*) метрику  $\rho_\lambda$  на  $X$ , полагая  $\rho_\lambda(z, y)$  для  $z, y \in X$  равным точной нижней границе длин  $l(\xi, \lambda)$  по всем спрямляемым в метрике  $\rho$  путям  $\xi$ , соединяющим точки  $z, y$ . Будем говорить при этом, что метрика  $\rho_\lambda$  получена *конформным изменением метрики  $\rho$  с коэффициентом конформности  $\lambda$*  или что метрика  $\rho_\lambda$  *конформно эквивалентна метрике  $\rho$  с коэффициентом конформности  $\lambda$* .

**Теорема** (см. теорему 1.2 в [1]). *Для всякого локально полного подобно однородного пространства  $(X, \rho)$  с внутренней метрикой, пространство  $(X, \rho_\lambda)$ , ( $\lambda = 1/c$ , если  $(X, \rho)$  неоднородно;  $\lambda \equiv 1$ , если  $(X, \rho)$  однородно) является однородным полным пространством с внутренней метрикой.*

**Определение 5.** Пусть  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $x \in X$ . Изометрия  $g: X \rightarrow X$  называется  $\delta(x)$ -смещением, если  $\rho(y, g(y)) \leq \rho(x, g(x))$  для любой точки  $y \in X$ . Пространство с внутренней метрикой называется  $\delta$ -однородным, если для любых двух точек  $x, y \in X$  существует  $\delta(x)$ -смещение, переводящее  $x$  в  $y$ .

**Гипотеза В. Н. Берестовского.** *Всякое локально-компактное подобно однородное неоднородное пространство с внутренней метрикой  $(X, \rho)$  гомеоморфно прямому топологическому произведению  $c^{-1}(a) \times \mathbf{R}_+$  (следовательно  $c^{-1}(a) \times \mathbf{R}$ ), где  $c^{-1}(a)$  — произвольное множество уровня функции  $c$  (радиуса полноты) на  $(X, \rho)$ . В обозначениях теоремы 1 топологическая группа  $G$  гомеоморфна прямому топологическому произведению  $I \times \mathbf{R}_+$  (следовательно  $I \times \mathbf{R}$ ).*

В работе частично обобщена теорема 4.4. из [1] о характеристизации подобно однородных неоднородных римановых многообразий на случай локально-компактных подобно однородных неоднородных пространств с внутренней метрикой, удовлетворяющих дополнительному условию, что канонически конформно эквивалентное однородное пространство  $\delta$ -однородно или имеет ограниченную снизу кривизну по А. Д. Александрову. При тех же условиях доказана гипотеза В. Н. Берестовского о топологической структуре таких пространств.

**Теорема 1.** Пусть  $(X, \rho)$  — подобно однородное неоднородное локально-компактное пространство с внутренней метрикой и  $(X, \rho_\lambda)$  — соответствующее ему (теорема 1.2 в [1]),  $\lambda = 1/c$ , однородное локально-компактное пространство с внутренней метрикой. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

- а) пространство  $(X, \rho_\lambda)$  имеет кривизну  $\geq k$  по А. Д. Александрову;
- б) пространство  $(X, \rho_\lambda)$  является  $\delta$ -однородным.

Пусть  $G$  — наибольшая связная транзитивная локально-компактная топологическая группа подобий (движений) пространства  $(X, \rho)$  ( $(X, \rho_\lambda)$ ), существование которой гарантировано предложением 4.1 в [1]; группа  $I$  — наибольшая подгруппа изометрий пространства  $(X, \rho)$  в группе  $G$ ;  $x_0 \in c^{-1}(1)$  и  $H \subset I$  — стабилизатор точки  $x_0$  в группе  $G$ ; смежный класс  $gH \in G/H$  естественно отождествляется с точкой  $g(x_0)$  при помощи отображения  $f: G/H \rightarrow X$ ,  $f(gH) = g(x_0)$ . Тогда

1) группа  $G$ , снабжённая компактно-открытой топологией относительно действия  $G$  на  $X$ , изоморфна некоторому полупрямому произведению топологических групп  $(\mathbb{R}, +) \ltimes I$  (с нормальной подгруппой  $I$ ) так, что (в случае а)) элементы подгруппы  $(\mathbb{R}, +) \ltimes \{e\}$  коммутируют с элементами компактной подгруппы  $H \subset I$  и  $I/H$  — эффективное однородное пространство группы  $I$ ;

2)  $(X, \rho_\lambda) = (G/H, \rho_\lambda)$  — однородное эффективное пространство с  $G$ -инвариантной внутренней метрикой  $\rho_\lambda$  относительно канонического левого действия  $G$  на  $G/H$ ;

3) пространство  $(X, \rho)$  естественно изометрично пространству  $(G/H, \rho)$ , функция  $c: (G/H, \rho) \rightarrow \mathbb{R}_+$  — субметрия и одновременно радиус полноты пространства  $(G/H, \rho)$ , где  $c((t, i)H) = \exp(t)$ ,  $(t, i) \in (\mathbb{R}, +) \ltimes I$  (с учетом п. 1)).

### Литература

1. Берестовский В. Н. Подобно однородные локально полные пространства с внутренней метрикой // Изв. вузов. Математика. 2004. № 11(510). С. 3–22.

## ПРОСТРАНСТВО $CD_0$ -СЕЧЕНИЙ БАНАХОВА РАССЛОЕНИЯ

А. Е. Гутман<sup>1</sup>, А. В. Коптев<sup>2</sup>

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;*

<sup>1</sup> *gutman@math.nsc.ru,* <sup>2</sup> *koptev@math.nsc.ru*

На протяжении всего текста  $Q$  — непустой компакт (т. е. компактное хаусдорфово топологическое пространство) без изолированных точек. Как обычно, символом  $C(Q)$  обозначается множество всех непрерывных вещественных функций, определенных на  $Q$ , а символом  $c_0(Q)$  — совокупность всех таких функций  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ , что множество  $\{q \in Q : |f(q)| > \varepsilon\}$  конечно для любого числа  $\varepsilon > 0$ .

Пространство  $CD_0(Q) = C(Q) + c_0(Q)$ , введенное Ю. А. Абрамовичем и А. В. Викстедом [1, 2] в качестве примера банаховой решетки с некоторыми необычными порядково-топологическими свойствами, послужило предметом дальнейших интенсивных исследований (см., например, [3–8]), одним из результатов которых явилось представление  $CD_0(Q)$  в виде пространства  $C(\tilde{Q})$  непрерывных функций на множестве  $\tilde{Q} = Q \times \{0, 1\}$ , снабженном некоторой компактной хаусдорфовой топологией (см. [5]). В данной работе мы продолжаем инициированные в [6] исследования, связанные с распространением упомянутых результатов на случай сечений банаховых расслоений.

Банахово расслоение (или, точнее, непрерывное банахово расслоение) над  $Q$  является формализацией интуитивного представления о «непрерывной» функции  $\mathcal{X}$ , определенной на  $Q$  и сопоставляющей каждой точке  $q \in Q$  некоторое банахово пространство  $\mathcal{X}(q)$  (называемое слоем  $\mathcal{X}$  в точке  $q$ ). Один из формальных подходов к определению «непрерывности»  $\mathcal{X}$  заключается в выделении так называемой непрерывной структуры в  $\mathcal{X}$  — некоторого векторного подпространства  $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$  пространства сечений  $S(Q, \mathcal{X}) = \{s: Q \rightarrow \cup \text{im } \mathcal{X} : s(q) \in \mathcal{X}(q) \text{ для всех } q \in Q\}$  такого, что поточечная норма  $\|c\|: q \mapsto \|c(q)\|_{\mathcal{X}(q)}$  каждого сечения  $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{X}}$  непрерывна и множество  $\{c(q) : c \in \mathcal{C}_{\mathcal{X}}\}$  всюду плотно в  $\mathcal{X}(q)$  для всех  $q \in Q$ . Непрерывная структура  $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$  позволяет определить совокупность  $C(Q, \mathcal{X})$  непрерывных сечений расслоения  $\mathcal{X}$  как множество всех таких сечений  $u \in S(Q, \mathcal{X})$ , что  $\|u - c\| \in C(Q)$  при  $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ . Понятие непрерывного сечения банахова расслоения является естественным обобщением понятия непрерывной вектор-функции: действительно, если  $X$  — банахово пространство, то  $C(Q, X) = C(Q, \mathcal{X})$ , где  $\mathcal{X}$  — постоянное банахово расслоение со слоем  $X$ , снабженное непрерывной структурой, состоящей, например, из постоянных функций  $c: Q \rightarrow X$ .

Пусть  $\mathcal{X}$  — произвольное банахово расслоение над  $Q$ . Прямыми аналогами банаховых решеток  $c_0(Q)$  и  $CD_0(Q)$  являются пространства сечений  $c_0(Q, \mathcal{X}) = \{u \in S(Q, \mathcal{X}) : \|u\| \in c_0(Q)\}$  и  $CD_0(Q, \mathcal{X}) = C(Q, \mathcal{X}) + c_0(Q, \mathcal{X})$ .

**Теорема 1.** *Имеет место разложение в прямую сумму  $CD_0(Q, \mathcal{X}) = C(Q, \mathcal{X}) \oplus c_0(Q, \mathcal{X})$ . Таким образом, каждое сечение  $u \in CD_0(Q, \mathcal{X})$  единственным образом представляется в виде суммы  $u = u_c + u_d$ , где  $u_c \in C(Q, \mathcal{X})$ ,  $u_d \in c_0(Q, \mathcal{X})$ .*

**Теорема 2.** *Сечение  $u \in S(Q, \mathcal{X})$  принадлежит  $CD_0(Q, \mathcal{X})$  тогда и только тогда, когда для любой точки  $q \in Q$  существует предел  $\lim_{p \rightarrow q} u(p)$ . При этом  $\lim_{p \rightarrow q} u(p) = u_c(q)$  для всех  $q \in Q$ .*

Введем топологию на множестве  $Q \times \{0, 1\}$  следующим образом:  $Q \times \{1\}$  снабдим дискретной топологией и для любого элемента  $q \in Q$  окрестностью точки  $(q, 0)$  объявим всякое подмножество  $U \subset Q \times \{0, 1\}$ , для которого существует такая окрестность  $V \subset Q$  точки  $q$ , что  $(V \times \{0, 1\}) \setminus \{(q, 1)\} \subset U$ . Полученное топологическое пространство обозначим символом  $\tilde{Q}$ .

Для  $f \in CD_0(Q)$  определим функцию  $\tilde{f}: \tilde{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  равенствами  $\tilde{f}(\cdot, 0) = f_c$ ,  $\tilde{f}(\cdot, 1) = f$ . В [5, 7] показано, что  $\tilde{Q}$  является компактом и отображение  $f \mapsto \tilde{f}$  осуществляет изометрический и порядковый изоморфизм между банаховыми решетками  $CD_0(Q)$  и  $C(\tilde{Q})$ .

Определим функцию  $\tilde{\mathcal{X}}$  на  $\tilde{Q}$ , полагая  $\tilde{\mathcal{X}}(q, 0) = \tilde{\mathcal{X}}(q, 1) = \mathcal{X}(q)$  ( $q \in Q$ ), и для каждого сечения  $u \in CD_0(Q, \mathcal{X})$  рассмотрим сечение  $\tilde{u} \in S(\tilde{Q}, \tilde{\mathcal{X}})$ , определенное равенствами  $\tilde{u}(\cdot, 0) = u_c$ ,  $\tilde{u}(\cdot, 1) = u$ . Несложно показать, что множество  $\{\tilde{u} : u \in CD_0(Q, \mathcal{X})\}$  является непрерывной структурой, превращающей  $\tilde{\mathcal{X}}$  в банахово расслоение над  $\tilde{Q}$ .

**Теорема 3.** Векторное пространство  $CD_0(Q, \mathcal{X})$  является банаховым  $CD_0(Q)$ -модулем относительно равномерной нормы  $\|u\| = \sup\{\|u(q)\| : q \in Q\}$  и поточечного умножения. Отображение  $u \mapsto \tilde{u}$  осуществляет линейную изометрию  $CD_0(Q, \mathcal{X})$  на  $C(\tilde{Q}, \tilde{\mathcal{X}})$ . При этом  $\widetilde{fu} = \tilde{f}\tilde{u}$  для всех  $f \in CD_0(Q)$ ,  $u \in CD_0(Q, \mathcal{X})$ .

Пусть  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{Y}$  — банаховы расслоения над  $Q$ . Символом  $S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$  обозначим совокупность всевозможных функций  $H$ , определенных на  $Q$  и сопоставляющих точкам  $q \in Q$  ограниченные линейные операторы  $H(q) : \mathcal{X}(q) \rightarrow \mathcal{Y}(q)$ . Как легко видеть,  $S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$  является векторным пространством относительно поточечных операций.

Для  $H \in S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$  и  $u \in S(Q, \mathcal{X})$  условимся обозначать символом  $Hu$  сечение расслоения  $\mathcal{Y}$ , определяемое формулой  $(Hu)(q) = H(q)u(q)$  ( $q \in Q$ ). Введем в рассмотрение векторные подпространства  $C[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ ,  $c_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ ,  $CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \subset S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ , состоящие из тех функций  $H \in S[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ , для которых из  $u \in C(Q, \mathcal{X})$  следует  $Hu \in C(Q, \mathcal{Y})$ ,  $Hu \in c_0(Q, \mathcal{Y})$ ,  $Hu \in CD_0(Q, \mathcal{Y})$  соответственно.

**Теорема 4.** Если  $H \in CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ , то  $\sup\{\|H(q)\| : q \in Q\} < \infty$ . Каждое из пространств  $C[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ ,  $c_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ ,  $CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$  является банаховым пространством относительно равномерной нормы  $\|H\| = \sup\{\|H(q)\| : q \in Q\}$ .

**Теорема 5.** Имеет место разложение в прямую сумму  $CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = C[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \oplus c_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ . В частности, любая функция  $H \in CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$  единственным образом представляется в виде суммы  $H = H_c + H_d$ , где  $H_c \in C[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ ,  $H_d \in c_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ .

**Теорема 6.** Если  $H \in CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ ,  $u \in CD_0(Q, \mathcal{X})$ , то  $Hu \in CD_0(Q, \mathcal{Y})$ ,  $(Hu)_c = H_c u_c$ ,  $(Hu)_d = H_c u_d + H_d u_d + H_d u_c$ .

Для  $H \in CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$  определим функцию  $\tilde{H} \in S[\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{Y}}]$ , полагая  $\tilde{H}(\cdot, 0) = H_c$ ,  $\tilde{H}(\cdot, 1) = H$ .

**Теорема 7.** Отображение  $H \mapsto \tilde{H}$  осуществляет линейную изометрию между банаховыми пространствами  $CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$  и  $C[\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{Y}}]$ . При этом для любых  $f \in CD_0(Q)$ ,  $H \in CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ ,  $u \in CD_0(Q, \mathcal{X})$  справедливо равенство  $\widetilde{fHu} = \tilde{f}\tilde{H}\tilde{u}$ .

Для  $C(Q)$ -подмодуля  $\mathcal{V} \subset CD_0(Q, \mathcal{Y})$  обозначим символом  $\text{Hom}(C(Q, \mathcal{X}), \mathcal{V})$  множество всех ограниченных  $C(Q)$ -гомоморфизмов из  $C(Q, \mathcal{X})$  в  $\mathcal{V}$ . Для  $H \in CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$  определим функцию  $T_H : C(Q, \mathcal{X}) \rightarrow CD_0(Q, \mathcal{Y})$ , полагая  $(T_H u)(q) = H(q)u(q)$  для всех  $u \in C(Q, \mathcal{X})$  и  $q \in Q$ .

**Теорема 8.** Отображение  $H \mapsto T_H$  осуществляет линейные изометрии между парами банаховых пространств  $C[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \leftrightarrow \text{Hom}(C(Q, \mathcal{X}), C(Q, \mathcal{Y}))$ ,  $c_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \leftrightarrow \text{Hom}(C(Q, \mathcal{X}), c_0(Q, \mathcal{Y}))$ ,  $CD_0[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] \leftrightarrow \text{Hom}(C(Q, \mathcal{X}), CD_0(Q, \mathcal{Y}))$ .

## Литература

1. Abramovich Y. A., Wickstead A. W. Regular operators from and into a small Riesz space // Indag. Math. N.S. 1991. V. 2, N 3. P. 257–274.
2. Abramovich Y. A., Wickstead A. W. Remarkable classes of unital AM-spaces // J. Math. Anal. Appl. 1993. V. 180, N 2. P. 398–411.
3. Abramovich Y. A., Wickstead A. W. The regularity of order bounded operators into  $C(K)$ . II // Quart. J. Math. Oxford Ser. 2. 1993. V. 44, N 175. P. 257–270.
4. Alpay Ş., Ercan Z.  $CD_0(K, E)$  and  $CD_\omega(K, E)$ -spaces as Banach lattices // Positivity. 2000. V. 4, N 3. P. 213–225.
5. Ercan Z. A concrete description of  $CD_0(K)$ -spaces as  $C(X)$ -spaces and its applications // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. V. 132. P. 1761–1763.
6. Høim T., Robbins D. A. Section spaces of Banach bundles which generalize some function spaces // Siberian Adv. Math. 2006. V. 16, N 3. P. 71–81.
7. Troitsky V. G. On  $CD_0(K)$ -spaces // Владикавказский мат. журн. 2004. Т. 6, № 1. С. 71–73.
8. Алтай Ш., Эрджан З. Заметка о пространствах  $CD_0(K)$  // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 514–517.

# СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ, СТРОЯЩИХСЯ С ПОМОЩЬЮ КВАЗИВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ И НУЛЬ-ЛАГРАНЖИАНОВ\*

А. А. Егоров

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;  
Новосибирский государственный университет, Новосибирск;  
yegorov@math.nsc.ru*

Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Для  $K \geq 1$  обозначим через  $\mathfrak{G}_p(K)$  класс отображений  $v \in W_{\text{loc}}^{1,p}(V; \mathbb{R}^m)$ , определенных на областях  $V \subset \mathbb{R}^n$  и удовлетворяющих дифференциальному неравенству

$$F(v'(x)) \leq KG(v'(x)) \quad \text{для п.в. } x \in V.$$

Здесь  $v' = \left(\frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu}\right)$  — матрица Якоби отображения  $v$ ,  $F: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $G: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывные функции,  $\mathbb{R}^{m \times n}$  — пространство вещественных  $m \times n$ -матриц, рассматриваемое с операторной нормой  $|\zeta| = \sup\{|\zeta(x)| : |x| < 1\}$ ,  $\zeta \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

В случае  $m = n$ ,  $F(\zeta) = |\zeta|$  и  $G(\zeta) = \det \zeta$  класс  $\mathfrak{G}_n(K)$  состоит из отображений с ограниченным искажением, являющихся одним из важных объектов исследований в геометрической теории отображений (см., например, монографии [1–3]).

Мы доказываем теорему о самоулучшающейся интегрируемости производных отображений из класса  $\mathfrak{G}_p(K)$ . Этот результат является аналогом для отображений класса  $\mathfrak{G}_p(K)$  хорошо известной теоремы о самоулучшающейся интегрируемости производных отображений с ограниченным искажением, полученной Т. Иванцом и Г. Мартином [4] и Т. Иванцом [5] (см. также монографию [3]). Короткое доказательство этой теоремы можно найти в статье [6].

Напомним, что непрерывная функция  $\Phi: \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  называется *квазивыпуклой* в смысле Ч. Б. Морри [7], если

$$\int_{B(0,1)} (\Phi(\zeta + \varphi'(x)) - \Phi(\zeta)) dx \geq 0 \quad \text{для всех } \varphi \in C_0^\infty(B(0,1); \mathbb{R}^m) \text{ и } \zeta \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Говорят, что функция  $\Phi$  есть *нуль-лагранжиан* (см., например, [8, 3]), если  $\Phi$  и  $-\Phi$  являются квазивыпуклыми функциями.

Пусть  $2 \leq k \leq \min\{m, n\}$ . Предположим, что непрерывные функции  $F$  и  $G$  удовлетворяют следующим предположениям (мы следуем нумерации из [9]):

- (Н2)  $G$  является нуль-лагранжианом;
- (Н3)  $F$  и  $G$  являются положительно однородными функциями степени  $k$ ;
- (Н4)  $\sup\{K \geq 0 : F(\zeta) \geq KG(\zeta), \zeta \in \mathbb{R}^{m \times n}\} = 1$ ;
- (Н5)  $c_F = \inf\{F(\zeta) : |\zeta| = 1\} > 0$ .

**Теорема.** *Предположим, что выполнены предположения (Н2)–(Н5). Тогда существуют вещественные числа  $q(F, G, K)$  и  $p(F, G, K)$  такие, что  $1 < q(F, G, K) < k < p(F, G, K)$  и для каждого числа  $q(F, G, K) < p < p(F, G, K)$  любое отображение  $v: V \rightarrow \mathbb{R}^m$  из класса  $\mathfrak{G}_p(K)$  лежит в пространстве  $W_{\text{loc}}^{1,s}(V; \mathbb{R}^m)$  с любым показателем  $q(F, G, K) < s < p(F, G, K)$ . При этом для каждой пробной функции  $\varphi \in C_0^\infty(V)$  справедливо неравенство типа Каччиопполи*

$$\|\varphi v'\|_{L^s(V; \mathbb{R}^{m \times n})} \leq C_s(F, G, K) \|\varphi v \otimes \varphi'\|_{L^s(V; \mathbb{R}^{m \times n})}.$$

Эта теорема позволяет усилить полученные ранее автором в работе [9] результаты по устойчивости рассматриваемых классов решений. Отметим, что в этих результатах требуются дополнительные предположения на функции  $F$  и  $G$ .

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ, Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН «Актуальные проблемы теории функций и гидродинамики» (№ 117) и Фонда содействия отечественной науке.



### Литература

1. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
2. Решетняк Ю. Г. Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. 2-е изд., перераб. Новосибирск: Изд-во Ин-та матем., 1996.
3. Iwaniec T., Martin G. Geometric function theory and non-linear analysis. Oxford: Oxford University Press, 2001. (Oxford Mathematical Monographs).
4. Iwaniec T., Martin G. Quasiregular mappings in even dimensions // Acta Math. 1993. V. 170, N 1. P. 29–81.
5. Iwaniec T.  $p$ -Harmonic tensors and quasiregular mappings // Ann. of Math. (2). 1992. V. 136, N 3. P. 589–624.
6. Faraco D., Zhong X. A short proof of the self-improving regularity of quasiregular mappings // Proc. AMS. 2006. V. 134, N 1. P. 187–192.
7. Morrey C. B. Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1966. (Grundlehren der Math, Wiss.; V. 130).
8. Ball J. M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. 1977. V. 63. P. 337–403.
9. Егоров А. А. Устойчивость классов отображений, квазивыпуклость и нуль-лагранжианы // Докл. АН. 2007. Т. 415, № 6.

# ТЭТА-ФУНКЦИИ НА МНОГООБРАЗИИ КОДАИРЫ — ТЁРСТОНА

Д. В. Егоров

*Институт математики и информатики,  
Якутский государственный университет им. М. К. Аммосова, Якутск;  
egorov.dima@gmail.com*

Многообразие Кодaira — Тёрстона (КТ) — это  $\mathbb{R}^4$ , профакторизованное по решетке образованной единичными сдвигами вдоль осей  $x_2, x_3, x_4$  и сдвигом  $(x_1 + 1, x_2, x_3 + x_2, x_4)$ . Это замкнутое симплектическое многообразие.

Строятся сечения линейного комплексного расслоения над КТ — аналог тэта-функций Якоби. Доказана теорема о вложении КТ в  $\mathbb{C}P^n$  при помощи данных тэта-функций.

## Литература

1. *Мамфорд Д.* Лекции о тэта-функциях, Москва, Мир, 1988.
2. *Taimanov I. A.* Secants of Abelian Varieties, Theta Functions, and Soliton Equations. Preprint. arXiv:alg-geom/9609019.
3. *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии. Т. 2: Схемы. Комплексные многообразия. М.: Наука, 1988.
4. *Chern S. S.* Complex manifolds. Textos de Matematica, No. 5. Recife: Universidade do Recife, 1959.
5. *Geiges H.* Symplectic structures on  $T^2$  bundles over  $T^2$  // Duke Math. J. 1992. V. 67. P. 539–555.
6. *Griffiths P., Harris J.* Principles of algebraic geometry. N. Y.–Chichester–Brisbane–Toronto: John Wiley and Sons, 1978.
7. *Gromov M.* Partial differential relations. New York–Berlin: Springer Verlag, 1986.
8. *Tischler D.* Closed 2-forms and an embedding theorem for symplectic manifolds // J. Diff. Geom. 1977. V. 12. P. 229–235.
9. *Thurston W. P.* Some simple examples of symplectic manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 55. P. 467–468.
10. *Tralle A., Oprea J.* Symplectic Manifolds with no Kähler Structure. Lecture Notes in Math. 1661. Berlin: Springer, 1997.

# О НАХОЖДЕНИИ ГЛАВНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРАЛА МАРТИНЕЛЛИ — БОХНЕРА

А. С. Кацунова

*Политехнический институт, Сибирский федеральный университет, Красноярск; akinsky@mail.ru*

В работе рассматриваются главные значения по Коши и в смысле Керзмана — Стейна интеграла Мартинелли — Бохнера в строго псевдовыпуклых областях из  $\mathbf{C}^n$ .

Пусть  $D$  — строго псевдовыпуклая область в  $\mathbf{C}^n$  с границей  $\partial D$  класса  $\mathcal{C}^3$ , т. е.

$$D = \{z \in \Omega : \varrho(z) < 0\},$$

где  $\varrho(z)$ -вещественнозначная строго плюрисубгармоническая функция класса  $\mathcal{C}^3$  в некоторой окрестности  $\Omega$  замыкания области  $\bar{D}$  и такая, что  $d\varrho \neq 0$  на  $\partial D$ .

Известно, что в  $\Omega$  существует барьерная гладкая функция  $\Phi(\zeta, z)$  переменных  $(\zeta, z) \in \Omega \times \Omega$  такая, что  $\Phi$  голоморфна по  $z \in \Omega$  при фиксированном  $\zeta \in \Omega$ ,

$$2 \operatorname{Re} \Phi(\zeta, z) \geq \rho(\zeta) - \rho(z) + \gamma |\zeta - z|^2$$

для некоторой константы  $\gamma > 0$ ,

$$\Phi(\zeta, z) = \sum_{k=1}^n P_k(\zeta, z)(\zeta_k - z_k),$$

где  $P = (P_1, \dots, P_n)$  — гладкая вектор-функция переменных  $(\zeta, z) \in \Omega \times \Omega$ , голоморфная по  $z \in \Omega$  при фиксированном  $\zeta \in \Omega$ .

Обозначим через  $U(\zeta, z)$  ядро Мартинелли — Бохнера [1], т. е.

$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \cdot \frac{w'_0(\zeta, z) \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n}} = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k) \overline{d\zeta_{[k]}} \wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n}}.$$

Определим главное значение в.р. по Коши и в.р.н. в смысле Керзмана — Стейна [3,4]

$$\text{v. p.} \int_{\partial D} U(\zeta, z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D \setminus B_z(\varepsilon)} U(\zeta, z),$$

$$\text{v. p. h.} \int_{\partial D} U(\zeta, z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\partial D \setminus U_z(\varepsilon)} U(\zeta, z),$$

для  $z \in \partial D$ , где  $B_z(\varepsilon) = \{\zeta : |\zeta - z| < \varepsilon\}$ ,  $U_z(\varepsilon) = \{\zeta \in \partial D : |\Phi(\zeta, z)| < \varepsilon\}$ .

Известно [2], что

$$\text{v. p.} \int_{\partial D} U(\zeta, z) = \frac{1}{2}, \quad z \in \partial D.$$

**Теорема 1.** При  $n > 1$  справедлива формула

$$\text{v. p. h.} \int_{\partial D} U(\zeta, z) = \frac{1}{2}, \quad z \in \partial D.$$

**Литература**

1. *Айзенберг Л. А., Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.
2. *Кытманов А. М., Мысливец С. Г.* О главном значении по Коши особого интеграла Хенкина — Рамиреза в строго псевдовыпуклых областях пространства  $\mathbf{C}^n$  // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 625–633.
3. *Alt W.* Singuläre integrale mit gemischten homogenitäten auf mannigfaltigkeiten und anwendungen in der funktionentheorie // Math. Zeit. 1974. V. 137, N 3. P. 227–256.
4. *Kerzman N., Stein E. M.* The Szegő kernel in terms of Cauchy — Fantappié kernels // Duke Math. J. 1978. V. 45, N 3. P. 197–224.

## ДВА НОВЫХ ПОДХОДА К УНИФИКАЦИИ ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ И ТЕОРЕМ О СХОДИМОСТИ МАРТИНГАЛОВ

А. Г. Качуровский

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; agk@math.nsc.ru*

Давно известно любопытное совпадение поведения эргодических средних и (обращенных) мартингалов. Кроме того, есть много общего в доказательствах эргодических теорем и теорем о сходимости мартингалов. Это и привело (не позже середины 40-х годов прошлого века) к естественному предположению о возможности унификации эргодических средних и мартингалов единой суперструктурой. Формально вопрос был поставлен С. Какутани в [1].

В [2] вводятся и исследуются два новых естественных класса стохастических процессов: мартингално-эргодические и эргодико-мартингалные. Принадлежащие к этим классам последовательности случайных величин всегда сходятся — и п. в., и по норме; этот факт составляет основное содержание мартингално-эргодической и эргодико-мартингалной теорем (теоремы 1 и 2 ниже). Каждая из них унифицирует (содержит как частные вырожденные случаи) по шесть теорем: и обычные эргодические теоремы Биркгофа и фон Неймана, и теоремы Дуба о сходимости прямого и обращенного мартингала п. в. и по норме (теоремы Биркгофа и Дуба о сходимости прямого мартингала п. в. — с небольшими естественными оговорками; остальные четыре теоремы — полностью, без оговорок). Кроме того, максимальное и доминантное неравенства, хорошо известные для эргодических средних и мартингалов, справедливы и для мартингално-эргодических и эргодико-мартингалных процессов [2].

Поскольку имеющиеся доказательства унифицирующих теорем 1 и 2 используют утверждения как эргодических теорем, так и теорем о сходимости мартингалов — то подходы дают (пока) только возможность их единой формулировки, не давая независимого унифицированного доказательства.

Пусть  $(\Omega, F, \lambda)$  — вероятностное пространство,  $T$  — его эндоморфизм,  $f \in L_1(\Omega)$ ; и пусть  $F_n$  — монотонная последовательность  $\sigma$ -подалгебр  $F$ ,  $F_n \uparrow (\downarrow) F_\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Положим

$$A_n f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k, \quad f^* = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n f, \quad f_\infty^* = E(f^* | F_\infty).$$

Через  $L \log L$  обозначим, как обычно, класс Зигмунда всех измеримых функций  $f$ , для которых интегрируема  $|f| \log^+ |f|$  (здесь  $0 \log^+ 0 = 0$ ; очевидно,  $L \log L \supset L_p$  при любом  $p > 1$ ).

**Теорема 1** (мартингално-эргодическая) [2].

1) Пусть  $f \in L_p$ ,  $p \in [1, \infty)$ . Тогда  $E(A_{n_1} f | F_{n_2}) \rightarrow f_\infty^*$  в  $L_p$  при  $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ ; при этом  $\|f_\infty^*\|_p \leq \|f\|_p$ .

2) Если  $\sup_n |A_n f| \leq h$  п. в. для некоторой интегрируемой случайной величины  $h$  (что заведомо выполняется, например, в случае  $f \in L \log L$ ), то  $E(A_{n_1} f | F_{n_2}) \rightarrow f_\infty^*$  п. в. при  $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ ; при этом  $E f_\infty^* = E f$ , и если  $F_\infty$   $T$ -инвариантно, то и  $f_\infty^*$  — тоже.

Если  $T$  эргодичен, то  $f_\infty^* \equiv \text{Const} = E f$  п. в.

Положим далее

$$f^\infty = E(f | F_\infty) (= \lim_{n \rightarrow \infty} E(f | F_n)), \quad A_n f^\infty = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^\infty \circ T^k, \quad f_*^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n f^\infty.$$

**Теорема 2** (эргодико-мартингалная) [2].

1) Пусть  $f \in L_p$ ,  $p \in [1, \infty)$ . Тогда  $A_{n_1}(E(f | F_{n_2})) \rightarrow f_*^\infty$  в  $L_p$  при  $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ ; при этом  $\|f_*^\infty\|_p \leq \|f\|_p$ .

2) Если  $\sup_n |E(f|F_n)| \leq h$  п. в. для некоторой интегрируемой случайной величины  $h$  (что заведомо выполняется, например, в случае  $f \in L \log L$ ), то  $A_{n_1}(E(f|F_{n_2})) \rightarrow f_*^\infty$  п. в. при  $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ ; при этом  $E f_*^\infty = E f$ .

Если  $T$  эргодичен, то  $f_*^\infty \equiv \text{Const} = E f$  п. в.

**Замечание 1.** Утверждения теорем 1 и 2 в вырожденном случае  $F_n \equiv F$  (в этом случае и  $E(A_{n_1} f|F_{n_2}) \equiv A_{n_1} f$ , и  $A_{n_1}(E(f|F_{n_2})) \equiv A_{n_1} f$  для любого  $n_2$ ) совпадают с утверждениями эргодических теорем фон Неймана (полностью) и Биркгофа (для  $f$  класса  $L \log L$ ). Вырожденный случай  $T \equiv \text{id}$  (в этом случае и  $E(A_{n_1} f|F_{n_2}) \equiv E(f|F_{n_2})$ , и  $A_{n_1}(E(f|F_{n_2})) \equiv E(f|F_{n_2})$  для любого  $n_1$ ) дает утверждения теорем Дуба о сходимости прямого и обращенного мартингалов:

в части сходимости по норме — полностью (поскольку прямой мартингал  $X_n$  сходится по норме тогда и только тогда когда он *регулярен*, т. е. имеет вид  $X_k = E(X_0|F_k)$  для всех  $k$  и некоторой интегрируемой случайной величины  $X_0$ ; а обращенный мартингал всегда имеет такой вид и регулярен);

в части сходимости п. в. — для обращенного мартингала полностью; для прямого регулярного — полностью (а нерегулярные прямые мартингалы плохо унифицируются с эргодическими средними — уже потому, что по норме не сходятся).

**Замечание 2.** Избавиться от условия мажорируемости в формулировках вторых частей обеих теорем (т. е. ослабить условие  $f \in L \log L$  до условия  $f \in L_1$ ) — нельзя.

### Литература

1. *Kakutani S.* Ergodic theory // In: Proc. Intern. Congr. Math., Cambridge (MA), 1950. V. 2. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 1952. P. 128–142.
2. *Качуровский А. Г.* Единые теории, унифицирующие эргодические средние и мартингалы // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2007. Т. 256. С. 172–200.

## ГРАФ-МНОГООБРАЗИЯ РОДА 2\*

Ф. Г. Кораблев

Челябинский государственный университет, Челябинск; korablev@csu.ru

Замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие *имеет род 2*, если его можно представить, как объединение двух полных кренделей рода 2, и нельзя представить в виде объединения двух полных кренделей меньшего рода. Известно довольно много многообразий рода 2. Это, например, все связные суммы линзовых пространств. Также известны все многообразия Зейферта рода 2. Они полностью описываются пятью непересекающимися сериями многообразий.

Замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие  $M$  называется *граф-многообразием*, если существует такое семейство непересекающихся торов  $\mathcal{F}$ , что  $M \setminus \mathcal{F}$  — совокупность многообразий Зейферта. Мы рассматриваем только так называемые *полностью ориентируемые* граф-многообразия. Это такие граф-многообразия, что каждое из многообразий Зейферта имеет ориентируемую базу, и само является ориентируемым.

Каждому граф-многообразию можно сопоставить граф, в котором вершины соответствуют многообразиям Зейферта, на которые разрезается многообразие, а ребра — торам, по которым разрезается многообразие.

Результатом работы является полный список всех полностью ориентируемых граф-многообразий рода 2, соответствующих графам, изображенных на рис. 1.



Рис. 1. Графы, соответствующие граф-многообразиям.

В основе работы лежат статьи [1, 2], в которых авторы дали полное описание того, как поверхность Хегора, т. е. поверхность, по которой склеиваются крендели разбиения, пересекает каждое из многообразий Зейферта, на которые разрезается полностью ориентируемое граф-многообразие.

Результаты этих статей носят весьма общий характер. Мы же применяем их для поиска всех граф-многообразий рода 2.

## Литература

1. *Schultens J., Weidmann R.* On the geometric and the algebraic rank of graph manifolds. Preprint.
2. *Schultens J.* Heegaard splittings of graph manifolds // *Geometry and Topology*. 2004. V. 8. P. 831–876.

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06–01–72014–МНТИ).

## ПОТОЧЕЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ СОБОЛЕВА НА ГРУППАХ КАРНО\*

А. Е. Королько<sup>1</sup>, И. М. Пупышев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Новосибирский государственный университет, Новосибирск; *korolko@mail.ru*

<sup>2</sup> Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск; *iluxa1@ngs.ru*

В работе рассматриваются поточечные неравенства для функций классов Соболева на группах Карно. Известно, что функции из пространств Соболева в евклидовом пространстве удовлетворяют локальным поточечным неравенствам, сформулированным в виде оценок для остатков тейлоровских разложений через старшие производные. Эти результаты получены в работе Б. Боярского и П. Хайлаша [1]. Результат является обратимым: в работе Б. Боярского [2] доказана теорема о том, что если функция удовлетворяет поточечным неравенствам, то она принадлежит локальному пространству Соболева. В работе С. К. Водопьянова [3] получена характеристика функций из пространств Соболева с первыми производными на группах Карно с помощью поточечных соотношений.

В данной работе рассматриваются пространства Соболева со старшими производными на группах Карно. Доказываются поточечные неравенства для функций из этих пространств, а также обратная теорема.

**Теорема 1.** Пусть функция  $f \in W_{1,loc}^m(\mathbb{G})$  и ее производные  $X^\alpha f$ ,  $d(\alpha) \leq m - 1$ , определены в каждой точке по формуле

$$X^\alpha f(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} X^\alpha f(y) dy.$$

Тогда если  $|f(y)| < \infty$  и  $|X^\alpha f(x)| < \infty$  для  $d(\alpha) \leq m - 1$ , то

$$|f(y) - T_x^{m-1} f(y)| \leq C \left( M_{6\kappa\rho(x,y)} |\nabla_{\mathfrak{L}}^m f|(y) + M_{6\kappa\rho(x,y)} |\nabla_{\mathfrak{L}}^m f|(x) \right) \cdot \rho(x, y)^m,$$

где  $T_x^{m-1} f(y)$  — многочлен Тейлора функции  $f(y)$  степени  $m - 1$  с центром в точке  $x$ ,  $\nabla_{\mathfrak{L}}^m f = \{X^\alpha f\}_{d(\alpha)=m}$ ,  $\rho$  — однородная норма на группе, а  $M_{Rg}(x) = \sup_{r < R_{B(x,r)}} \int |g(y)| dy$  — максимальная

функция Харди — Литтлвуда.

При доказательстве теоремы 1 используются лемма Хедберга об оценке потенциала Рисса через максимальную функцию Харди — Литтлвуда, свойства многочленов Тейлора на группах Карно, неравенства типа Пуанкаре и интегральные представления Соболева.

**Теорема 2.** Пусть  $F = \{f_\alpha : d(\alpha) \leq m - 1\}$  —  $(m - 1)$ -джет функций, определенных в шаре  $B$ , такой, что для некоторых функций  $a_B^i = a_B^i(F) \in L_p(B)$

$$|R_i^{m-1} F(x, y)| \leq \rho(x, y)^{\alpha-d(i)} [a_B^i(x) + a_B^i(y)]$$

для всех  $d(i) \leq m - 1$ . Тогда в любом шаре  $B_0 \subset B$  существует функция  $f \in W_p^m(B_0)$  такая, что

$$X^\alpha f|_{B_0} = f_\alpha|_{B_0} \text{ для } d(\alpha) \leq m - 1$$

и расширенный  $m$ -джет  $\tilde{F} = \{X^\alpha f, d(\alpha) \leq m\}$  удовлетворяет неравенству

$$\|X^\alpha f\|_{L_p(B_0)} \leq C \cdot \left( \max\{\|f_i\|_{L_p(B)}, d(i) \leq m - 1\} + \sum_{d(i) \leq m-1} \|a_B^i\|_{L_p(B)} \right) \text{ для } d(\alpha) \leq m.$$

---

\* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-00735) и Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проект НШ-8526.2006.1).



При доказательстве используются свойства тейлоровских многочленов на группах Карно, теорема Уитни о разложении открытого множества на шары и некоторые факты из функционального анализа.

Таким образом, получено альтернативное описание пространств Соболева на группах Карно.

### Литература

1. *Bojarski B., Hajlasz P.* Pointwise inequalities for Sobolev functions and some applications // *Studia Math.* 1993. V. 106. P. 77–92.
2. *Bojarski B.* Pointwise characterization of Sobolev classes. Preprint. 2006. 27 p.
3. *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // *Сиб. мат. журн.* 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.

# СВОЙСТВА ПЕРЕСТАНОВОК РЯДОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е. Г. Лазарева

Томский государственный университет, Томск; *lazareva-e-g73@mail.ru*

В связи с проблемой описания области сумм ряда в бесконечномерном банаховом пространстве [1] мы продолжаем изучение следующего свойства перестановок рядов (см. [2, 3]).

**Определение.** Пусть  $\pi, \delta$  — перестановки,  $M \in \mathbb{R}$ ,  $E$  — банахово пространство. Мы говорим, что перестановка  $\delta$  принадлежит множеству  $M \cdot \pi$  в пространстве  $E$ , если для любого сходящегося к нулю ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  в пространстве  $E$  из сходимости ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$  следует сходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\delta(k)}$ , причем  $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\delta(k)} = M \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)}$ . Записываем это утверждение так:

$$\delta \in (M \cdot \pi)(E).$$

Аналогично множеству  $(M \cdot \pi)(E)$  строится множество  $(\pi + \sigma)(E)$ , где  $\pi, \sigma$  — перестановки. Ясно, что  $(M \cdot \pi)(E) \subset (M \cdot \pi)(\mathbb{R})$ ,  $(\pi + \sigma)(E) \subset (\pi + \sigma)(\mathbb{R})$ . Мы доказали обратные включения:

**Теорема 1.** Пусть  $E$  — банахово пространство,  $\pi, \sigma$  — перестановки,  $M \in \mathbb{R}$ . Тогда  $(M \cdot \pi)(E) = (M \cdot \pi)(\mathbb{R})$ ,  $(\pi + \sigma)(E) = (\pi + \sigma)(\mathbb{R})$ .

Основную роль в доказательстве теоремы 1 играет линейное пространство последовательностей

$$S_{C,\pi}(E) = \left\{ X = (x_k)_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} x_k, \sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(k)} \text{ сходятся в } E \right\},$$

наделенное банаховой нормой  $|X|_{C,\pi} = \max \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|, \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^n x_{\pi(k)} \right\| \right\}$ .

В случае, когда  $\delta \in (M \cdot \pi)(\mathbb{R})$  и пространство  $E$  имеет базис Шаудера, последовательность непрерывных функционалов  $\delta_n(X) = \sum_{k=1}^n x_{\delta(k)}$  оказывается равномерно ограниченной на всюду плотном подпространстве пространства  $S_{C,\pi}(E)$ . Отсюда вытекает существование поточечного предела этой последовательности, т. е. функционала  $\delta(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\delta(k)}$ . Теперь легко получить, что  $\delta \in (M \cdot \pi)(E)$ .

На пространство  $E$  без базиса Шаудера этот результат переносится с помощью изоморфного вложения пространства  $E$  в  $C[0; 1]$ .

Результат теоремы 1 для целых значений  $M$  можно усилить с помощью следующей теоремы:

**Теорема 2.** Пусть  $Q$  — всюду плотная топологическая подгруппа группы  $(\mathbb{R}, +)$ ,  $M \in \mathbb{Z}$ . Тогда  $(M \cdot \pi)(Q) = (M \cdot \pi)(\mathbb{R})$ .

**Замечание 1.** Свойства пространства  $S_{C,\pi}(E)$  требуют дополнительного изучения. Последовательности с конечным числом ненулевых членов не образуют всюду плотного множества в этом пространстве, если перестановка  $\pi$  меняет сумму. Исходя из сепарабельности пространства  $E$ , удастся доказать сепарабельность пространства  $S_{C,\pi}(E)$  лишь для специального класса перестановок  $\pi$ , меняющих сумму.

**Замечание 2.** Конкретные примеры построения перестановок из множеств  $(M \cdot \pi)(E)$ ,  $M \in \mathbb{Z}$ , можно найти в [2], из множеств  $(\pi + \sigma)(E)$  — в [3]. Причем их конструкции не зависят от пространства  $E$ .

### Литература

1. *Kadets M. I., Kadets V. M.* Series in Banach Spaces. Operator Theory: Advances and Applications. V. 94. Berlin: Birkhäuser Verlag, 1997.
2. *Лазарева Е. Г.* Исследование области сумм векторного ряда посредством умножения перестановки ряда на вещественные числа // Математические труды. 2001. Т. 4, № 1. С. 36–67.
3. *Лазарева Е. Г.* Сложение перестановок ряда // Вестник ТГУ. Бюллетень оперативной научной информации «Актуальные проблемы алгебры и анализа». 2005. № 54. С. 61–72.

# НЕДАВНИЙ ПРОГРЕСС В КЛАССИФИКАЦИИ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ МАЛОЙ СЛОЖНОСТИ\*

С. В. Матвеев

Челябинский государственный университет, Челябинск;  
Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург;  
matveev@csu.ru

Любое замкнутое неприводимое трехмерное многообразие  $M$  можно получить попарным склеиванием граней нескольких тетраэдров. Минимальное число таких тетраэдров называется *сложностью* многообразия  $M$  и обозначается  $c(M)$ . Одно из полезных свойств сложности состоит в том, для что любого  $k$  общее число замкнутых неприводимых трехмерных многообразий сложности  $k$  конечно [1]. Этот факт лежит в основе классификации (табулирования) многообразий малой сложности. Следующий результат был получен с помощью пакета программ «Распознаватель многообразий», разработанного сотрудниками кафедры компьютерной топологии и алгебры ЧелГУ и отдела алгоритмической топологии ИММ УрО РАН.

**Теорема 1.** При  $k \leq 12$  число  $N(k)$  замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий сложности  $k$  задается следующей таблицей:

$c$	$\leq 5$	6	7	8	9	10	11	12	Всего
$N(k)$	61	74	175	436	1154	3078	8421	23434	36833

Приведем несколько выводов, полученных путем анализа составленных таблиц.

1. При  $7 \leq k \leq 12$  отношение  $N(k)/N(k-1)$  монотонно растет от 2,36 до 2,78. Отсюда можно сделать эмпирический вывод, что  $N(k)$  растет, по крайней мере, экспоненциально. То же самое верно как для составных многообразий (т. е. для многообразий, имеющих нетривиальные JSJ-разбиения на геометрические части), так и для всех геометрических многообразий, кроме евклидовых и Nil. При этом все шесть существующих эвклидовых многообразий имеют сложность 6, а число Nil-многообразий растет линейно с угловым коэффициентом 15.
2. Доля многообразий Зейферга среди всех многообразий сложности  $k$  монотонно уменьшается от 100% при  $k = 6$  до примерно 50% при  $k = 12$ .
3. При  $7 \leq k \leq 12$  число составных многообразий растет несколько быстрее, чем число гиперболических многообразий. Этот факт заставляет задуматься о правильности распространенного мнения, что большинство замкнутых неприводимых трехмерных многообразий являются гиперболическими.
4. Имеется ровно 9 различных типов JSJ-разбиений многообразий сложности  $\leq 12$ , причем число компонент этих разбиений колеблется от одной до четырех.
5. Любое замкнутое ориентируемое гиперболическое многообразие сложности  $\leq 12$  можно получить рациональной перестройкой трехмерной сферы по одному из пяти конкретных трехкомпонентных зацеплений, задаваемых диаграммами с 6, 6, 7, 8 и 8 двойными точками, соответственно (В. В. Таркаев).

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00293) и совместного интеграционного проекта ИММ УрО РАН и ИМ СО РАН.

Пусть  $(F; \mu_i, \lambda_i, 1 \leq i \leq n)$  — диаграмма Хегора замкнутого трехмерного многообразия  $M$  рода  $n$ . Определим сложность Хегора  $c_h(M)$  многообразия  $M$  как минимально число точек пересечения меридианов  $\mu_i$  с меридианами  $\lambda_j$ , где  $1 \leq i, j \leq n$ . Минимум берется по всем возможным диаграммам заданного рода. Отметим, что многообразия рода 1 (линзовые пространства) полностью классифицированы. Преимущество многообразий рода 2 состоит в том, что представляющие их приведенные диаграммы укладываются в две 6-параметрические серии, что сильно облегчает проведение соответствующего компьютерного эксперимента по их распознаванию и табулированию.

**Теорема 2.** *Общее число замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий сложности Хегора  $c_h \leq 32$  равно 5697. Рост числа зейфертовых, гиперболических и составных многообразий, а также общего числа многообразий сложности Хегора  $k$  для  $10 \leq k \leq 32$  показан на рис. 1.*

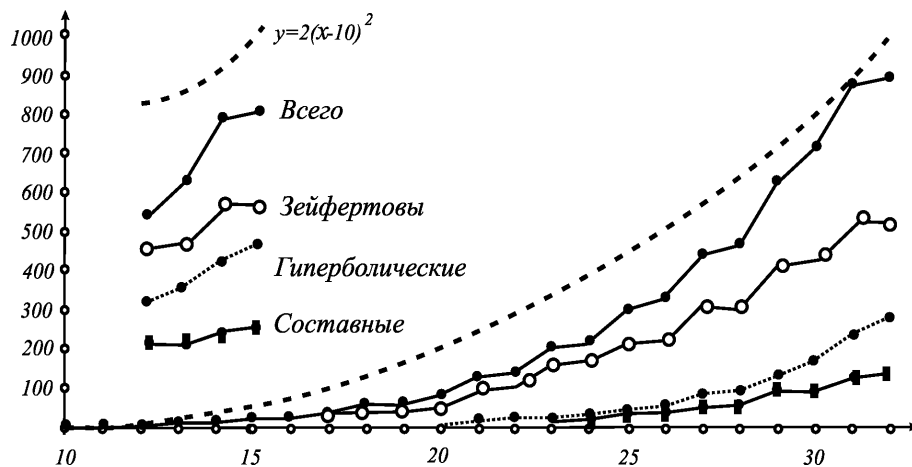


Рис. 1. Рост числа многообразий рода 2 в зависимости от сложности  $c_h$ .

Прокомментируем полученные результаты.

1. В пределах исследованной области значений сложности Хегора  $c_h$  число многообразий растет не более чем полиномиально. Для сравнения, на рис. 1 пунктиром показана парабола  $y = 2(x - 10)^2$ . Отметим, что в этом случае число гиперболических многообразий растет быстрее числа составных.
2. Для случая многообразий Зейферта экспериментальные результаты полностью согласуются с теоретическими. В частности, получены все типы многообразий Зейферта рода 2, описанные в [2, 3].
3. Все построенные граф-многообразия рода 2 хорошо укладываются в схему, предложенную в [4]. Соответствующий анализ был выполнен Ф. Г. Кораблевым. Нужно отметить, что до сих пор конкретные примеры граф-многообразий рода 2 появлялись лишь эпизодически. Поэтому появление большого числа (несколько сотен) новых примеров является положительным итогом.

### Литература

1. Matveev S. V. Algorithmic topology and classification of 3-manifolds. Springer ACM-monographs, V. 9. 2003.
2. Boileau M., Zieschang H. Heegaard genus of closed orientable Seifert 3-manifolds // Inventiones mathematicae. 1984. V. 76. P. 455–468.
3. Moriah Y., Schultens J. Irreducible Heegaard splittings of Seifert fibered spaces are either vertical or horizontal // Topology. 1998. V. 37, no. 5. P. 1089–1112.
4. Schultens J. Heegaard splittings of graph manifolds // Geometry and Topology. 2004. V. 8. P. 831–876.

## НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ УСЛОВИЯ СЛЕДА ДЛЯ $\bar{\partial}$ - И $\bar{\partial}^*$ -ЗАМКНУТЫХ ФОРМ

Т. Н. Никитина

*Политехнический институт, Сибирский федеральный университет, Красноярск; AANick@yandex.ru*

Для некоторых классов областей доказывается, что условие ортогональности относительно подходяще выбранного пространства дифференциальных форм является необходимым и достаточным для  $\bar{\partial}$ -замкнутости дифференциальной формы, удовлетворяющей условию  $\bar{\partial}^* \bar{\partial} F = 0$  в  $\Omega$ . Исследуются некоторые приложения условия следа для  $\bar{\partial}$ -замкнутых форм. Это условие, связанное с нормальной частью на  $\partial\Omega$   $\bar{\partial}$ -оператора, позволит нам изучить задачу Неймана, связанную с оператором  $\bar{\partial}^* \bar{\partial}$ , для форм (см., например, [1–4]) и  $\bar{\partial}$ -задачу для внешних дифференциальных форм в  $\Omega$  с решениями, определяемыми граничным условием (см., например, [5]).

**1. Предварительные результаты.** Пусть  $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \varrho(z) > 0\}$  — ограниченная область в  $\mathbb{C}^n$  с границей класса  $C^m$ ,  $m \geq 1$ . Предположим  $\varrho \in C^m$  в  $\mathbb{C}^n$  и  $d\varrho \neq 0$  на  $\partial\Omega$ .

Обозначим через  $\text{Harm}(\Lambda^{p,q}, \Omega)$  пространство комплексных гармонических  $(p, q)$ -форм  $F$  в  $\Omega$  с коэффициентами класса  $C^2(\Omega)$ , т. е. форм, удовлетворяющих условию  $\square F = \bar{\partial}^* \bar{\partial} F + \bar{\partial} \bar{\partial}^* F = 0$  в  $\Omega$ ,  $\mathcal{G}(\Lambda^{p,q}, \Omega)$  — пространство  $(p, q)$ -форм с коэффициентами класса  $C^2(\Omega)$ , удовлетворяющих условию  $\bar{\partial}^* \bar{\partial} F = 0$  в  $\Omega$ ,  $Z(\Lambda^{p,q}, \Omega)$  — пространство  $\bar{\partial}$ -замкнутых  $(p, q)$ -форм в  $\Omega$ ,  $Z^*(\Lambda^{p,q}, \Omega)$  — пространство  $\bar{\partial}^*$ -замкнутых  $(p, q)$ -форм в  $\Omega$ . Для каждого  $r$ ,  $0 \leq r \leq m$ ,  $\mathcal{G}^r(\Lambda^{p,q}, \Omega) = \mathcal{G}(\Lambda^{p,q}, \Omega) \cap C^r(\Lambda^{p,q}, \bar{\Omega})$  и аналогично для  $\text{Harm}^r(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ ,  $Z^r(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ ,  $Z^{*r}(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ . Здесь  $C^r(\Lambda^{p,q}, \bar{\Omega})$  пространство  $(p, q)$ -форм с коэффициентами класса  $C^r(\bar{\Omega})$ .

**2. Условие следа для  $\bar{\partial}$ -замкнутых форм.** Рассмотрим следующее условие на  $f$  — значение на границе формы  $F \in C^0(\Lambda^{p,q}, \bar{\Omega})$ :

$$\int_{\partial\Omega} \bar{f} \wedge * \bar{\partial} H = 0 \tag{*}$$

для каждой формы  $H \in \mathcal{G}^1(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ .

Рассмотрим значимость условия (\*) для  $\bar{\partial}$ -замкнутых форм.

**Теорема 1.** Пусть  $\partial\Omega$  класса  $C^1$ . Если  $F \in Z^0(\Lambda^{p,q}, \Omega) \cap C^1(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ ,  $q < n$ , тогда  $f$  — значение на границе дифференциальной формы  $F$  удовлетворяет условию (\*).

**Теорема 2.** Пусть  $\partial\Omega$  класса  $C^1$ . Если  $F \in Z^0(\Lambda^{p,q}, \Omega) \cap C^1(\Lambda^{p,q}, \Omega)$  и  $F \in Z^{*0}(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ ,  $0 < q < n$ , тогда  $f$  и  $*f$  — значения на границе дифференциальных форм  $F$  и  $*F$  удовлетворяют условию

$$\int_{\partial\Omega} \bar{f} \wedge * \bar{\partial} H + \int_{\partial\Omega} * \bar{f} \wedge * \partial * H = 0 \tag{**}$$

для каждой формы  $H \in \text{Harm}^1(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ .

Теоремы 1 и 2 можно доказать для форм  $F$  с гармоническими коэффициентами конечного порядка роста в  $\Omega$ , а также для форм с коэффициентами из пространства Соболева.

Покажем, что если дифференциальная форма имеет достаточно регулярные коэффициенты, из условия (\*) следует  $\bar{\partial}$ -замкнутость.

**Теорема 3.** Пусть  $\partial\Omega$  класса  $C^1$ . Если форма  $F \in \mathcal{G}^1(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ ,  $q < n$  и ее значение на границе удовлетворяет условию (\*), тогда  $F \in Z^1(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\partial\Omega$  класса  $C^1$ . Если форма  $F \in \text{Harm}^1(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ ,  $0 < q < n$  и ее значение и значение  $*F$  на границе удовлетворяют условию (\*\*), тогда  $F \in Z^1(\Lambda^{p,q}, \Omega)$  и  $F \in Z^{*1}(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ .

Изучим задачу Неймана, связанную с оператором  $\bar{\partial}^* \bar{\partial}$ , для форм: задав  $\Phi$  на границе  $\partial\Omega$ , найдем необходимые и достаточные условия для разрешимости  $\bar{\partial}$ -задачи Неймана, связанной с оператором  $\bar{\partial}^* \bar{\partial}$ , для форм:

$$(\bar{\partial}F)_n = \Phi_n \text{ на } \partial\Omega \quad \text{и} \quad \bar{\partial}^* \bar{\partial}F = 0 \text{ в } \Omega. \quad (1)$$

**Теорема 5.** Пусть  $\partial\Omega$  класса  $C^1$ , а  $\Phi \in C_{p,q+1}^0(\partial\Omega)$ ,  $q < n$ . Тогда существует форма  $F$  (класса  $\mathcal{G}^1(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ ) такая, что  $(\bar{\partial}F)_n = \Phi_n$  на  $\partial\Omega$  тогда и только тогда, когда  $\Phi$  удовлетворяет условию

$$\int_{\partial\Omega} * \bar{\Phi} \wedge H = 0 \quad (**)$$

для каждой  $H \in \mathcal{G}^1(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ .

**Теорема 6.** Пусть  $\partial\Omega$  класса  $C^1$ , а  $\Phi \in C_{p,q+1}^0(\partial\Omega)$ ,  $\Psi \in C_{n-q+1, n-p}^0(\partial\Omega)$ ,  $0 < q < n$ . Тогда существует форма  $F$  (класса  $\text{Harm}^1(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ ) такая, что  $(\bar{\partial}F)_n = \Phi_n$  и  $(\partial * F)_n = \Psi_n$  на  $\partial\Omega$  тогда и только тогда, когда  $\Phi$  и  $\Psi$  удовлетворяют условию

$$\int_{\partial\Omega} * \bar{\Phi} \wedge H + \int_{\partial\Omega} * \bar{\Psi} \wedge * H = 0 \quad (**')$$

для каждой  $H \in \text{Harm}^1(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ .

В случае, когда  $\Omega$  является строго псевдовыпуклой, из условия (\*) следует, что дифференциальная форма, принадлежащая пространству решений системы  $\bar{\partial}^* \bar{\partial}$  в  $\Omega$ , является  $\bar{\partial}$ -замкнутой даже для форм с непрерывными коэффициентами, а также для форм  $F$  с гармоническими коэффициентами конечного порядка роста в  $\Omega$ .

Изучена задача Неймана (1), связанная с оператором  $\bar{\partial}^* \bar{\partial}$ , для форм конечного порядка роста.

**3.  $\bar{\partial}$ -задача для внешних дифференциальных форм с граничным условием.** Изучим  $\bar{\partial}$ -задачу для дифференциальных форм в  $\Omega$  с заданным граничным условием. Пусть  $\alpha \in C^0(\Lambda^{p,q+1}, \bar{\Omega})$  —  $\bar{\partial}$ -замкнутая форма с непрерывными коэффициентами на  $\bar{\Omega}$  и пусть  $g \in C_{p,q}^0(\partial\Omega)$ . Найдем форму  $F \in C^1(\Lambda^{p,q}, \bar{\Omega})$  такую, что

$$\bar{\partial}F = \alpha \text{ в } \Omega, \quad F = g \quad ((F)_\tau = g_\tau) \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (2)$$

**Теорема 7.** Пусть  $\Omega$  — строго псевдовыпуклая область с гладкой границей. Предположим, что  $\alpha \in C^0(\Lambda^{p,q+1}, \bar{\Omega})$  и  $g \in C_{p,q}^0(\partial\Omega)$ ,  $q < n$ . Тогда существует  $F \in C^1(\Lambda^{p,q}, \bar{\Omega})$  такая, что выполняется равенство (2) тогда и только тогда, когда  $\bar{\partial}\alpha = 0$  и для каждой  $H \in \mathcal{G}^1(\Lambda^{p,q}, \Omega)$

$$\int_{\partial\Omega} \bar{g} \wedge * \bar{\partial}H = \int_{\Omega} \bar{\alpha} \wedge * \bar{\partial}H. \quad (***)$$

**Теорема 8.** Пусть  $\Omega$  — строго псевдовыпуклая область с гладкой границей. Предположим, что  $\alpha \in C^0(\Lambda^{p,q+1}, \bar{\Omega})$ ,  $\beta \in C^0(\Lambda^{p,q-1}, \bar{\Omega})$  и  $g \in C_{p,q}^0(\partial\Omega)$ ,  $0 < q < n$ . Тогда существует  $F \in C^1(\Lambda^{p,q}, \bar{\Omega})$  такая, что выполняется равенство

$$\bar{\partial}F = \alpha \text{ и } \partial * F = * \beta \text{ в } \Omega, \quad F = g \text{ на } \partial\Omega$$

тогда и только тогда, когда  $\bar{\partial}\alpha = 0$  и  $\bar{\partial}^* \beta = 0$  и для каждой  $H \in \text{Harm}^1(\Lambda^{p,q}, \Omega)$

$$\int_{\partial\Omega} \bar{g} \wedge * \bar{\partial}H + \int_{\partial\Omega} * \bar{g} \wedge * \partial * H = \int_{\Omega} \bar{\alpha} \wedge * \bar{\partial}H + \int_{\Omega} * \bar{\beta} \wedge * \partial * H. \quad (***)'$$

Теоремы 7 и 8 получены также для форм конечного порядка роста и для форм с коэффициентами из пространства Соболева.

**4. Задача Неймана, связанная с оператором  $\bar{\partial}^* \bar{\partial}$ , для форм.** Изучим задачу Неймана, связанную с оператором  $\bar{\partial}^* \bar{\partial}$ , для форм: задав  $\Phi$  на границе  $\partial\Omega$ , найдем необходимые и достаточные условия для разрешимости  $\bar{\partial}$ -задачи Неймана, связанной с оператором  $\bar{\partial}^* \bar{\partial}$ , для форм:

$$(\bar{\partial}F)_n = \Phi_n \text{ на } \partial\Omega \quad \text{и} \quad \bar{\partial}^* \bar{\partial}F = \bar{\partial}^* \alpha \text{ в } \Omega. \quad (3)$$

**Теорема 9.** Пусть  $\Omega$  — строго псевдовыпуклая область и  $\partial\Omega$  класса  $C^1$ ,  $\bar{\partial}^* \bar{\partial}F = \bar{\partial}^* \alpha$  в  $\Omega$ ,  $\alpha \in Z^0(\Lambda^{p,q+1}, \Omega) \cap C^1(\Lambda^{p,q+1}, \Omega)$ , а  $\Phi \in C^0_{p,q+1}(\partial\Omega)$ ,  $q < n$ . Тогда существует форма  $F$  (класса  $C^2(\Lambda^{p,q}, \Omega) \cap C^1(\Lambda^{p,q}, \bar{\Omega})$ ) такая, что  $(\bar{\partial}F)_n = \Phi_n$  на  $\partial\Omega$  тогда и только тогда, когда  $\Phi$  и  $\alpha$  удовлетворяют условию

$$\int_{\partial\Omega} * \bar{\Phi} \wedge H = \int_{\partial\Omega} * \bar{\alpha} \wedge H \quad (***)$$

для каждой  $H \in \mathcal{G}^1(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ .

**Теорема 10.** Пусть  $\Omega$  — ограниченная строго псевдовыпуклая область и  $\partial\Omega$  класса  $C^1$ ,  $\square F = \bar{\partial}^* \alpha + \bar{\partial}(-1)^{p+q} \beta$  в  $\Omega$ ,  $\alpha \in Z^0(\Lambda^{p,q+1}, \Omega) \cap C^1(\Lambda^{p,q+1}, \Omega)$ ,  $\beta \in Z^{*0}(\Lambda^{p,q-1}, \Omega) \cap C^1(\Lambda^{p,q-1}, \Omega)$ , а  $\Phi \in C^0_{p,q+1}(\partial\Omega)$ ,  $\Psi \in C^0_{n-q+1, n-p}(\partial\Omega)$ ,  $0 < q < n$ . Тогда существует форма  $F$  (класса  $C^2(\Lambda^{p,q}, \Omega) \cap C^1(\Lambda^{p,q}, \bar{\Omega})$ ) такая, что  $(\bar{\partial}F)_n = \Phi_n$  и  $(\partial * F)_n = \Psi_n$  на  $\partial\Omega$  тогда и только тогда, когда  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют условию

$$\int_{\partial\Omega} * \bar{\Phi} \wedge H + \int_{\partial\Omega} * \bar{\Psi} \wedge * H = \int_{\partial\Omega} * \bar{\alpha} \wedge H - (-1)^{p+q} \int_{\partial\Omega} \bar{\beta} \wedge * H \quad (***)$$

для каждой  $H \in \text{Harm}^1(\Lambda^{p,q}, \Omega)$ .

Изучена задача Неймана (3), связанная с оператором  $\bar{\partial}^* \bar{\partial}$ , для форм в пространствах Соболева.

Получены также некоторые приложения условия следа для плюригармонических и \* плюригармонических форм.

### Литература

1. Folland G. B., Kohn J. J. The Neumann problem for the Cauchy — Riemann complex. Ann. Math. Stud. V. 75. Princeton, 1972. 140 p.
2. Kohn J. J. Subellipticity of the  $\bar{\partial}$ -Neumann problem on pseudoconvex domains: sufficient conditions // Acta Math. 1979. V. 142, N 1–2. P. 79–122.
3. Кытманов А. М. Интеграл Бохнера — Мартинелли и его применения. Новосибирск: Наука, 1992.
4. Никитина Т. Н.  $\bar{\partial}$ -замкнутость форм, представимых интегралом Кошелямана на основе логарифмического вычета // Изв. вузов. Математика. 2006. Т. 524, № 1. С. 40–52.
5. Хенкин Г. М. Метод интегральных представлений в комплексном анализе // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 7. С. 23–124. (Итоги науки и техники).



# КЛАССИФИКАЦИЯ МНОГООБРАЗИЙ СЛОЖНОСТИ НОЛЬ

Д. О. Николаев

Челябинский государственный университет, Челябинск; *count\_6@mail.ru*

В работе рассматриваются компактные ориентируемые неприводимые гранично неприводимые 3-многообразия сложности 0, т. е. обладающие почти простыми спайнами без истинных вершин. Теория спайнов и сложности 3-многообразий подробно изложена в [1].

Для классификации рассматриваемых многообразий нам потребуется понятие разбиения Джейко — Шэлена — Йоганссона (сокращенно JSJ-разбиение). Теорема о JSJ-разбиении [1] утверждает, что любое неприводимое гранично неприводимое 3-многообразие  $M$  содержит каноническую систему (JSJ-систему) непересекающихся грубых существенных торов и грубых существенных колец, разрезающую  $M$  на простые многообразия, зейфертовы многообразия и I-расслоения.

Рассмотрим компактное ориентируемое неприводимое гранично неприводимое 3-многообразие  $M$ , обладающее следующими свойствами:

- 1) JSJ-система  $M$  либо пуста, либо состоит из колец;
- 2) JSJ-система разрезает  $M$  на JSJ-ячейки двух типов: многообразия Зейферта и ориентируемые I-расслоения;
- 3) любое кольцо JSJ-системы послойно для содержащих его JSJ-ячеек относительно некоторого выбранного расслоения. Структуру расслоения ячейки, относительно которой JSJ-кольца послойны, будем называть *допустимой*.

Класс всех таких многообразий будем обозначать  $X$ , и их классификация, проводимая по той же схеме, что и классификация граф-многообразий (см. [2]), не представляет затруднений.

**Лемма 1.** *Для трехмерного шара не существует простого спайна сложности 0.*

**Доказательство.** Пусть простой спайн  $P$  сложности 0 трехмерного шара существует. Тогда:

1.  $P$  содержит хотя бы одну тройную линию  $S^1$ , т. к. никакое I-расслоение с замкнутой базой не является шаром.
2. Регулярная окрестность  $S^1$  не является гомеоморфной проколотому тройному колпаку (фактор-пространству диска  $D^2$  по свободному действию группы  $Z_3$  на  $\partial D^2$ ).
3. Среди 2-компонент  $P$  есть хотя бы одна дисковая (обозначим  $\mathcal{D}$ ), т. к. в разбиении граничной сферы непересекающимися окружностями (прообразами тройных линий при ретракции) будут хотя бы два диска, а это и означает наличие в  $P$  дисковой 2-компоненты.
4. Пусть собственный диск  $D$  изотопен прообразу диска  $\mathcal{D}$  при ретракции,  $D \cap \mathcal{D} = \emptyset$ . Разрезая 3-шар по  $D$ , получим полиэдр  $P^1$  такой, что а) число тройных линий  $P^1$  строго меньше соответствующего числа для  $P$ ; б)  $P^1$  — простой спайн 3-шара (после коллапсирования).
5. Повторяя рассуждения пп. 3–4, получим простой спайн  $P^n$  без тройных окружностей, что противоречит п. 1.

**Лемма 2.** *Пусть  $P$  — простой спайн сложности 0 компактного неприводимого гранично неприводимого многообразия  $M$  с непустым краем. Тогда  $P$  не содержит дисковых 2-компонент.*

**Доказательство.** Пусть  $P$  содержит дисковую компоненту  $\mathcal{D}$ . Тогда:

1. Учитывая то, что  $M \neq L_{3,1}$ , тройная окружность  $\partial \mathcal{D}$  негомеоморфна проколотому тройному колпаку.
2. Пусть собственный диск  $D$  изотопен прообразу диска  $\mathcal{D}$  при ретракции,  $D \cap \mathcal{D} = \emptyset$ . Разрезая 3-шар по  $D$ , получим полиэдр  $P^1$  такой, что  $P^1$  — простой спайн 3-шара (после коллапсирования) в силу неприводимости и граничной неприводимости  $M$ . Последнее невозможно по лемме 1.

**Теорема 1.** *Любое компактное неприводимое гранично неприводимое 3-многообразие  $M$  сложности ноль принадлежит  $X$ .*

**Доказательство.** 1. Все неприводимые замкнутые многообразия сложности ноль и 3-шар, очевидно, принадлежат  $X$ .

2. Пусть  $M$  — многообразие с непустым краем, отличное от 3-шара,  $P$  — его неколлапсируемый почти простой спайн сложности 0.

Рассмотрим собственное кольцо в  $M$ , изотопное прообразу тройной линии при ретракции. Все такие кольца будем называть стыковочными; из леммы 2 следует, что стыковочное кольцо всегда несжимаемо. Также можно считать, что стыковочные кольца попарно не пересекаются.

Ясно, что стыковочные кольца разрезают  $M$  на полнотория и I-расслоения, базы которых есть 2-компоненты спайна. Таким образом любое неприводимое гранично неприводимое многообразие  $M$  сложности 0 получается склейкой определенного набора I-расслоений и многообразий Зейферта по послойным несжимаемым кольцам. Известно, что I-расслоения не содержат грубых колец и торов, значит JSJ-система  $M$  состоит из стыковочных колец, и если исключить все негрубые и взаимно параллельные стыковочные кольца в многообразии  $M$ , получим JSJ-систему  $M$ . JSJ-ячейками будут соответственно I-расслоения и многообразия Зейферта.

По определению многообразий  $X$  получаем, что  $M \in X$ .

**Теорема 2.** Пусть  $M \in X$ . Сложность  $c(M) = 0$  тогда и только тогда, когда JSJ-ячейки  $M$  имеют допустимую структуру одного из следующих типов: а)  $L_{3,1}$ ,  $RP^3$ ,  $S^3$ , трехмерный шар; б) структура Зейферта  $(B; (\alpha_i, \beta_i, i = 1..n))$ , где  $B$  — поверхность с непустым краем, а параметры  $\alpha_i = 2, 3$ ; в) ориентированное I-расслоение.

**Доказательство.** Пусть край  $M$  непуст (для замкнутых многообразий результат получен перебором [1]).

Пусть  $c(M) = 0$ ,  $\mathcal{S}$  — JSJ-система нашего многообразия (непустая), а  $P$  — его простой спайн сложности 0. Из предыдущей теоремы известно, что  $\mathcal{S}$  целиком состоит из стыковочных колец, а значит можно считать, что JSJ-кольца разрезают  $P$  на некоторые полиэдры  $P_i$ , край которых есть послойные окружности и которые после коллапсирования являются спайнами соответствующих ячеек  $Q_i$ .

Пусть  $Q_i$  есть многообразие Зейферта. Его спайн с краем  $P_i$  (полученный разрезанием по  $\mathcal{S}$ ) не может содержать 2-компонент, негомеоморфных  $A^2$  и  $M^2$  (т. к. край  $P_i$  — послойные окружности).

Если  $P_i$  коллапсируется на окружность, значит  $Q_i$  есть полноторие и обладает допустимой структурой  $(D^2; (\alpha, \beta))$ . Если заклеить одну из окружностей в крае  $P_i$  диском, а затем коллапсировать на простой подполиэдр, то, очевидно, мы получим спайн линзы  $L_{\alpha, \beta}$  (под  $L_{2,1}$  соответственно понимается проективное пространство, а под  $L_{1,0}$  — сфера). Сложность при этом, естественно, не меняется, и имеем три возможных варианта:  $L_{3,1}$ ,  $RP^3$  или  $S^3$ , т. е. допустимая структура  $Q_i$  есть  $(D^2; (\alpha, \beta))$ , где  $\alpha = 1, 2, 3$ .

Иначе коллапсируем  $P_i$  на его простой подполиэдр  $P'_i$ . Разрезая  $Q_i$  по тем стыковочным кольцам, которые отсекают от  $P'_i$  листы Мёбиуса и проколотые тройные колпаки, получим набор полноторий и многообразия, имеющее своим спайном либо окружность, либо набор колец, склеенных по краям, т. е.  $Q_i$  получено приклеиванием по кольцам к зейфертовому многообразию без особых слоев полноторий  $(D^2; (\alpha, \beta))$ , где  $\alpha = 2, 3$ .

Далее, пусть JSJ-ячейки  $M$  имеют допустимую структуру указанных типов. Чтобы показать, что  $c(M) = 0$ , достаточно предъявить простой спайн сложности 0. Чтобы его построить, мы просто повторяем рассуждения первой части доказательства в обратном порядке. Нетрудно проверить, что в результате мы действительно получим требуемый спайн.

## Литература

1. *Matveev S. V.* Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifolds. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2003.
2. *Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. М.: Наука, 1998.

## ЗНАЧЕНИЯ $t$ -ИНВАРИАНТА НА МАЛЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ЗЕЙФЕРТА\*

М. А. Овчинников

*Челябинский государственный университет, Челябинск; ovch@csu.ru*

Полиэдр  $P$  в 3-многообразии  $M$  называется *спайном* многообразия, если его дополнение  $M \setminus P$  гомеоморфно прямому произведению края  $\partial M$  на полуинтервал  $[0, 1]$ , если край непуст, и — открытому шару  $\text{Int } B^3$ , если  $M$  замкнуто.

Двумерный полиэдр называется *простым полиэдром*, если у каждой его точки есть окрестность, вкладываемая в пространство

$$(R \times \{0\} \times R_+) \cup (R^2 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times R \times R_-)$$

Если при таком вложении окрестности точка простого полиэдра отображается в точку  $(0, 0, 0)$  пространства, то она называется *вершиной полиэдра*.

Спайн называется *простым спайном*, если он является простым полиэдром (см. [1]).

$t$ -Инвариант 3-многообразия  $M$  определяется как сумма

$$t(M) = \sum_{Q \subset P} (-\varepsilon)^{-v(Q)} \varepsilon^{\chi(Q)},$$

где  $Q$  обозначает простой подполиэдр, возможно пустой,  $v(Q)$  — число вершин подполиэдра,  $\chi(Q)$  — эйлерова характеристика подполиэдра,  $\varepsilon$  — решение уравнения  $\varepsilon^2 = \varepsilon + 1$ .

Значение  $t$ -инварианта не зависит от выбора простого спайна в многообразии и, таким образом, является топологическим инвариантом многообразия (см. [2]).

Известно, что  $t$ -инвариант в некотором смысле является одним из инвариантов Тураева — Виро (см. [2]). Однако, определение  $t$ -инварианта заметно проще, что дает дополнительные возможности для исследования поведения квантовых инвариантов.

**Теорема** Пусть  $M = (b, (O_1, 0), (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3))$  — малое многообразие Зейферта. Тогда, если  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \bmod 5 \neq 0$ , то значение  $t$ -инварианта определяется значениями  $k = (b + \beta_1(\alpha_1 \bmod 5)^{-1} + \beta_2(\alpha_2 \bmod 5)^{-1} + \beta_3(\alpha_3 \bmod 5)^{-1})^2 \bmod 5$  и  $l = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \bmod 5$  в соответствии с таблицей

	$l = -2$	$l = 1$	$l = -1$	$l = 2$
$k = 0$	$\varepsilon + 2$	0	$\varepsilon + 2$	$\varepsilon + 2$
$k = 1$	1	$\varepsilon + 1$	1	$2\varepsilon + 3$
$k = -1$	$\varepsilon + 1$	1	$\varepsilon + 1$	$\varepsilon + 3$

Если  $\alpha_3 \bmod 5 = 0$ , то значение  $t$ -инварианта определяется значениями  $\beta_3^2 \bmod 5$ ,  $(\alpha_1^2 \bmod 5, \beta_1^2 \bmod 5)$ ,  $(\alpha_2^2 \bmod 5, \beta_2^2 \bmod 5)$  согласно таблицам

		$\alpha_2^2 \bmod 5 = 1$	$\alpha_2^2 \bmod 5 = -1$	$\alpha_2^2 \bmod 5 = 0$ $\beta_2^2 \bmod 5 = 1$	$\alpha_2^2 \bmod 5 = 0$ $\beta_2^2 \bmod 5 = -1$
$\beta_3^2 \bmod 5 = 1$	$\alpha_1^2 \bmod 5 = 1$	1	$\varepsilon + 1$	$\varepsilon + 2$	0
	$\alpha_1^2 \bmod 5 = -1$	$\varepsilon + 1$	$3\varepsilon + 2$	$4\varepsilon + 3$	0
	$\alpha_1 \bmod 5 = 0$ $\beta_1^2 \bmod 5 = 1$	$\varepsilon + 2$	$4\varepsilon + 3$	$5\varepsilon^2$	0
	$\alpha_1 \bmod 5 = 0$ $\beta_1^2 \bmod 5 = -1$	0	0	0	0

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00293).

	$\alpha_2^2 \bmod 5 = 1$	$\alpha_2^2 \bmod 5 = -1$	$\alpha_2^2 \bmod 5 = 0$ $\beta_2^2 \bmod 5 = 1$	$\alpha_2^2 \bmod 5 = 0$ $\beta_2^2 \bmod 5 = -1$
$\beta_3^2 \bmod 5 = -1$	$\alpha_1^2 \bmod 5 = 1$	$\alpha_1^2 \bmod 5 = -1$	$\alpha_1 \bmod 5 = 0$ $\beta_1^2 \bmod 5 = 1$	$\alpha_1 \bmod 5 = 0$ $\beta_1^2 \bmod 5 = -1$
	$\varepsilon + 1$	1	0	$\varepsilon + 2$
	1	$2 - \varepsilon$	0	$3 - \varepsilon$
	0	0	0	0
	$\varepsilon + 2$	$3 - \varepsilon$	0	5

Случаи  $\alpha_1 \bmod 5 = 0$  и  $\alpha_2 \bmod 5 = 0$  описываются аналогичными таблицами в силу симметрии многообразия.

Теорема доказана применением конструкций, разработанных в [3, 4].

### Литература

1. *Turaev V. G., Viro O. Y.* State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols // *Topology*. 1992. V. 31. P. 865–902.
2. *Матвеев С. В., Овчинников М. А., Соколов М. В.* Построение и свойства  $t$ -инварианта // *Записки ПОМИ*. 2000. Т. 267, № 1. С. 207–219.
3. *Овчинников М. А.* Построение простых спайнов многообразий Вальдхаузена // В кн.: *Труды международной конференции «Маломерная топология и комбинаторная теория групп. Челябинск 1999»*. Киев: Ин-т математики, 2000. С. 65–86.
4. *Овчинников М. А.* Свойства представлений Виро — Тураева группы гомеотопий тора // *Записки ПОМИ*. 2000. Т. 267, № 1. С. 220–240.

## ДЕЙСТВИЯ ТОРА И КОМПЛЕКСНЫЕ КОБОРДИЗМЫ\*

Т. Е. Панов

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва; [tpanov@mech.math.msu.su](mailto:tpanov@mech.math.msu.su)*

Доклад основан на совместной работе [2] с В. М. Бухштабером и Н. Рэем.

Мы планируем обсудить приложения теории действий тора к одной из классических задач алгебраической топологии: нахождению и описанию явных представителей в классах комплексных кобордизмов, обладающих специальными свойствами. Торические и квазиторические многообразия представляют собой многообразия с действием тора, которое легко описывается в комбинаторных терминах, и являются ключевыми объектами в «торической топологии» — активно развивающейся в настоящее время области на стыке эквивариантной топологии, комбинаторной геометрии и коммутативной алгебры. В то же время квазиторические многообразия обладают эквивариантными стабильно комплексными структурами и представляют собой настолько широкий класс, что каждый класс комплексных кобордизмов содержит квазиторическое многообразие. Другими словами, каждое стабильно комплексное многообразие кобордантно многообразию с простым действием тора. Более подробно, наш результат звучит следующим образом.

**Теорема 1.** *В размерностях  $> 2$  каждый класс комплексных кобордизмов содержит квазиторическое многообразие (по определению связное), стабильно комплексная структура которого согласована с действием тора.*

Доказательство заключается в явном построении серии алгебраических торических многообразий, аддитивно порождающих кольцо комплексных кобордизмов (эта часть была выполнена в более ранней работе Бухштабера и Рэя), а затем в описании конструкции, обобщающей эквивариантную связную сумму, которая позволяет заменить несвязное объединение многообразий (соответствующее операции суммы в кобордизмах) на одно (связное) квазиторическое многообразие.

В качестве технического инструмента приложений торической топологии к комплексным кобордизмам мы используем комбинаторную теорию аналогичных многогранников А. Д. Александрова.

## Литература

1. *Бухштабер В. М., Панов Т. Е.* Торические действия в топологии и комбинаторике. М.: Издательство МЦНМО, 2004.
2. *Buchstaber V., Panov T., Ray N.* Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds // *Moscow Math. J.* 2007. V. 35, № 2. P. 219–242. arXiv:math.AT/0609346.

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05–01–01032).

# НАИЛУЧШИЕ СОВМЕЩЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ

В. П. Пантелеев

Мурманский государственный технический университет, Мурманск; [VladimirPantelееv@yandex.ru](mailto:VladimirPantelееv@yandex.ru)

1. Проблема наилучшего  $L_1$ -приближения функций отчасти переносится на области как наилучшее их совмещение. Рассматривается класс  $K$  замкнутых областей  $G \subset \mathbb{R}^n$  совместно с семейством  $F$  их преобразований, в котором для любых двух областей  $G \in K$  и  $G_1 \in K$  найдется преобразование  $f \in F$ , отображающее  $G$  на  $G_1$ ,  $f(G) = G_1$ . Ставится задача, как конструктивно (посредством компьютера) в заданном классе  $K$  областей найти ту из них  $G_0 \in K$ , которая наиболее полно совмещается с наперед заданной областью  $G' \subset \mathbb{R}^n$  в смысле максимума меры Лебега  $S$  общей части  $G \cap G'$  двух областей  $G \in K$  и  $G'$ ,  $S(G_0 \cap G') = \max\{S(G \cap G') : G \in K\}$ . Для отображений  $f \in F$ , сохраняющих меру, эта задача равнозначна минимизации меры Лебега  $S(G \Delta G')$  симметрической разности  $G \Delta G' = (G \setminus G') \cup (G' \setminus G)$ ,  $S(G_0 \Delta G') = \min\{S(G \Delta G') : G \in K\}$ . Ниже рассматриваются лишь плоские замкнутые ориентированные вправо (против часовой стрелки) области  $G \in K$  и  $G'$ , наделенные кусочно-гладкими границами  $\partial G$  и  $\partial G'$ . Для неограниченных областей кусочная гладкость понимается в локальном смысле.

**Определение 1.** Границу  $\partial G$  области  $G$  называем *кусочно-гладкой*, если для всякой ограниченной части  $B$  области  $G$  найдётся конечный набор гладких дуг  $\delta_i \subset \partial G$  без общих внутренних точек, которые покрывают множество  $B \cap \partial G$ ,  $\cup_i \delta_i \supset B \cap \partial G$ .

Топологическая связность областей в последующем не задействована, поэтому понятие области всюду здесь может замещаться замыканием открытого множества. В данной работе для областей  $G \subset \mathbb{R}^2$  указан градиентный метод наилучшего их совмещения семейством  $F$  изометрических, а также семействами других аффинных преобразований, сохраняющих меру. Указаны численные алгоритмы наилучшего  $L_1$ -приближения функций в некоторых классах распределений. Выявлено, что один и тот же алгоритм может искать наилучшие приближения в разных классах распределений, имеющих некое общее сходство. Доказаны основные результаты, анонсированные ранее в статье [1].

2. Рассмотрим класс  $K$  замкнутых попарно изометричных областей  $G \subset \mathbb{R}^2$ . Положение области  $G \in K$ , как переменной или подвижной, определяется вектором  $\vec{r} = (a, b, t)$  с тремя составляющими, из которых первые две  $a$  и  $b$  — прямоугольные координаты какой-либо отмеченной точки  $Z \in \mathbb{R}^2$ , преобразуемой вместе с областью  $G$  с сохранением расстояний от точек  $T \in G$  до  $Z$ . Третья составляющая  $t$  — угол между лучом  $l$ , закрепленным за областью  $G$  и преобразуемым вместе с нею, и каким-либо неподвижным лучом  $l' \subset \mathbb{R}^2$ . Подчеркивая зависимое положение области  $G$  от вектора  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ , в последующем пишем  $G = G_r$ , снабжая её индексом  $r$ . Площадь  $S = S(G_r \cap G')$  общей части  $G_r \cap G'$  подвижной области  $G_r$  и неподвижной  $G'$  также определяется вектором  $\vec{r} = (a, b, t)$  и потому является функционалом в пространстве параметров  $\mathbb{R}^3$ . Если хотя бы одна из областей  $G$  или  $G'$  ограничена, функционал  $S$  на  $\mathbb{R}^3$  ограничен, непрерывен и большей частью дифференцируемый. Более того, эти свойства отчасти сохраняются и в случае, когда обе области неограниченные.

**Определение 2.** Дугу  $PQ$  границы  $\partial G$  области  $G$  назовем *направленной (вправо)*, если движение точки по этой дуге от  $P$  к  $Q$  отвечает обходу границы  $\partial G$  против часовой стрелки (правой ориентации области  $G$ ).

**Определение 3.** Расположение областей  $G_r$  и  $G'$  в плоскости  $\mathbb{R}^2$  назовем *регулярным* или *общим*, если их общая часть  $G' \cap G_r$  ограничена вблизи вектора  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ , а общая часть их границ  $\partial G' \cap \partial G_r$  имеет на границе  $\partial G_r$  меру нуль.

Наряду с вектором  $\vec{r} = (a, b, t)$  в пространстве параметров  $\mathbb{R}^3$ , который однозначно определяет положение областей  $G_r$  и  $G'$ , рассмотрим также точку  $r(a, b)$ , которую преобразуем вместе с областью  $G_r$  с сохранением расстояний точек этой области до  $r(a, b)$ . Следующая теорема содержит достаточное условие дифференцируемости функционала  $S$ , знак  $\forall$  выражает в ней косое (псевдоскалярное) произведение векторов.

**Теорема 1.** Пусть замкнутые области  $G_r$  и  $G'$  с кусочно-гладкими границами  $\partial G_r$  и  $\partial G'$  расположены в  $R^2$  регулярно и  $P_1Q_1, P_2Q_2, \dots, P_\ell Q_\ell, \dots$  — перечень всех направленных дуг границы  $\partial G_r$ , целиком лежащих в  $G'$  и не продолжаемых в  $G'$ . Тогда мера  $S = S(G' \cap G_r)$  общей части областей  $G'$  и  $G_r$  имеет в группе сдвигов  $dr = (da, db)$  и поворотов  $dt$  области  $G_r$  дифференциал  $dS = d_r S + d_t S = dr \vee \sum_\ell \overline{P_\ell Q_\ell} + dt \sum_\ell \overline{Q_\ell P_\ell} (\overline{CP_\ell} + \overline{CQ_\ell})/2$ .

В прямоугольных координатах точек  $P_\ell(x_{p\ell}, y_{p\ell})$  и  $Q_\ell(x_{q\ell}, y_{q\ell})$  имеем дифференциал

$$dS = da \sum_\ell (y_{q\ell} - y_{p\ell}) + db \sum_\ell (x_{p\ell} - x_{q\ell}) + dt \sum_\ell \{(x_{p\ell} - x_{q\ell})(x_{p\ell} + x_{q\ell} - 2a) + (y_{p\ell} - y_{q\ell})(y_{p\ell} + y_{q\ell} - 2b)\}/2.$$

Ему отвечает градиент

$$\bar{g} = \bar{i} \sum_\ell (y_{q\ell} - y_{p\ell}) + \bar{j} \sum_\ell (x_{p\ell} - x_{q\ell}) + \bar{k} \sum_\ell \{(x_{p\ell} - x_{q\ell})(x_{p\ell} + x_{q\ell} - 2a) + (y_{p\ell} - y_{q\ell})(y_{p\ell} + y_{q\ell} - 2b)\}/2,$$

который позволяет выписать для  $S$  необходимое условие экстремума  $\bar{g} = (0, 0, 0)$  в виде равенств статических моментов и моментов инерции для множеств точек  $P_\ell$  входа границы  $\partial G_r$  в область  $G'$  и точек  $Q_\ell$  выхода этой границы из  $G'$ :

$$\sum_\ell (x_{p\ell} - x_{q\ell}) = 0, \quad \sum_\ell (y_{p\ell} - y_{q\ell}) = 0, \quad \sum_\ell (x_{p\ell}^2 + y_{p\ell}^2 - x_{q\ell}^2 - y_{q\ell}^2) = 0.$$

Для практического отыскания точки локального экстремума градиент  $\bar{g}$  позволяет задействовать в пространстве параметров  $R^3$  итеративную формулу  $\bar{r}_{n+1} = \bar{r}_n + h_n \bar{g}_n$  с регулятором шага  $h_n > 0$ , которая вполне себя оправдала быстрым поиском локального экстремума в пробных программах оптимизации. В каждом её цикле градиент  $\bar{g} = \bar{g}_n$  вычисляется применительно к тому положению, которое приняла в этом цикле подвижная область  $G_r$ . С приближением вектора  $\bar{r}_n$  к точке локального экстремума градиент  $\bar{g}$  становится машинным нулем. На этом уровне необходимые условия выполнены и компьютерный поиск точки локального экстремума заканчивается. Для общего экстремума сначала ищутся по возможности все точки локальных экстремумов при разных начальных положениях области  $G_r$ , включая её зеркальное отображение, вычисляются значения функционала  $S$  в найденных точках и сравнением этих значений выявляется общий экстремум функционала  $S$ .

**3.** Обращаясь к неизометрическим преобразованиям, выделим группу аффинных отображений, представимых композициями сдвигов  $dr = (da, db)$  и сжатий  $X - a = k(x - a)$ ,  $Y - b = (y - b)/k$ . Этих отображений достаточно, чтобы, например, любое распределение из класса нормальных или двусторонних экспоненциальных, преобразовать в любое другое того же класса. Положение и вид области  $G_r$  определяется вектором  $\bar{r} = (a, b, c)$ , первые две составляющие  $a, b$  определяют положение осей сжатия, а третья  $c > 0$  выражают итоговый коэффициент сжатия оси абсцисс. Предполагается, что точка  $r(a, b)$  закреплена за областью  $G_r$  и преобразуется вместе с ней. Достаточное условие дифференцируемости функционала  $S = S(G_r \cap G')$  для сдвигов и сжатий выразим следующей теоремой, которая в частном её виде, когда  $b = 0$ , открывает путь градиентного поиска наилучшего приближения в классах распределений.

**Теорема 2.** Пусть замкнутые области  $G_r$  и  $G'$  с кусочно-гладкими границами  $\partial G$  и  $\partial G'$  расположены в плоскости  $R^2$  регулярно и  $P_1Q_1, P_2Q_2, \dots, P_\ell Q_\ell, \dots$  — перечень всех направленных (вправо) дуг границы  $\partial G_r$ , целиком лежащих и непродолжаемых в  $G'$ ,  $P_\ell(x_{p\ell}, y_{p\ell})$ ,  $Q_\ell(x_{q\ell}, y_{q\ell})$ . Тогда в группе всех сдвигов  $dr = (da, db)$  и сжатий  $X - a = k(x - a)$ ,  $Y - b = (y - b)/k$ ,  $k = 1 + dc/c$ , области  $G_r$  относительно неподвижной области  $G'$  (или, что то же самое, в пространстве  $R^3$  параметров  $a, b, c$ ) мера  $S = S(G' \cap G_r)$  общей части областей  $G_r$  и  $G'$  имеет дифференциал

$$dS = da \sum_\ell (y_{q\ell} - y_{p\ell}) + db \sum_\ell (x_{p\ell} - x_{q\ell}) + dc \sum_\ell \{(x_{q\ell} - a)(y_{q\ell} - b) - (x_{p\ell} - a)(y_{p\ell} - b)\}/c.$$

#### Литература

1. Пантелеев В. П. Градиентный метод наилучшего совмещения областей // В кн.: Труды международной конференции «Устойчивость и процессы управления». Т. 2. Санкт-Петербург: СПбГУ, 2005, С. 917–926.

# РЕГУЛЯРНОСТЬ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СУБЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА\*

Е. А. Плотникова

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск; pselena@gmail.com*

Изучается вопрос о регулярности слабых решений для одного класса квазилинейных уравнений на группах Гейзенберга. Более конкретно, речь идет о слабых решениях  $u \in S_{loc}^{1,2}(\Omega)$  уравнения

$$-\sum_{i=1}^{2n} X_i A_i(q, u, X_1 u, \dots, X_{2n} u) = f(q, u, X_1 u, \dots, X_{2n} u),$$

где дифференцируемая функция  $A_i(q, u, \xi) : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет некоторым условиям эллиптичности.

Применяя ранее разработанные методы О. А. Ладыженской, Н. Н. Уральцевой [1] в евклидовом случае и Л. Капоньи [2, 3] для более простого класса уравнений в случае группы Гейзенберга, нами доказано, что существует  $0 < \alpha < 1$  такое, что

$$\nabla u \in C_{loc}^\alpha(\Omega) \cap S_{loc}^{1,2}(\Omega),$$

где  $\nabla u$  обозначает евклидов градиент  $u$ . Кроме того, если  $A_i$  и  $f$  гладкие функции, то  $u \in C^\infty(\Omega)$ .

Группой Гейзенберга называется связная односвязная нильпотентная группа Ли, алгебра Ли  $V$  которой градуирована, т. е.  $V = V_1 \oplus V_2$ , где  $\dim V_1 = 2n$ ,  $\dim V_2 = 1$ ,  $[V_1, V_1] = V_2$ ,  $[V_1, V_2] = 0$ .

Пространство  $S_{loc}^{1,2}(\Omega)$  — пространство Соболева  $L_{loc}^2(\Omega)$ -функций, первые горизонтальные производные которых (т. е. производные вдоль полей  $X_1, \dots, X_{2n} \in V_1$ ) принадлежат пространству  $L_{loc}^2(\Omega)$ .

## Литература

1. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
2. *Sarason L.* Regularity of quasi-linear equations in the Heisenberg Group // *Comm. Pure Appl. Math.* 1997. V. 50. P. 867–889.
3. *Sarason L.* Regularity of quasilinear equations and 1-quasiconformal maps in Carnot Groups // *Math. Ann.* 1999. V. 313, N 2. P. 263–295.

---

\*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 06–01–00735) и Совета по грантам для поддержки ведущих научных школ России (грант НШ–8526.2006.1).



# ОБ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ, ВЛИЯЮЩИХ НА ФОРМУ СПЛАЙНОВОЙ КРИВОЙ

Е. В. Прокопенко

Кемеровский Государственный Университет, Кемерово; *pev-05@mail.ru*

В общем случае известно, что В-сплайновая кривая «подобна» массиву, однако, этой информации недостаточно для определения формы кривой. Например, интуитивно кажется, что массив должен порождать кривую с петлей, но на самом деле, построенная по этому массиву В-сплайновая кривая имеет вид рис. 1, т. е. не имеет самопересечения.

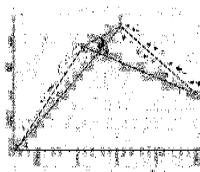


Рис. 1.

Выясним как расположение вершин ломаной, длина её звеньев влияют на форму кривой. Пусть кривая задана массивом точек. Прямые образуют фигуру, называемую *характеристической ломаной заданной кривой*, причем, как правило, эта ломаная не замкнута. Пусть точка  $X$  — точка пересечения отрезков  $P_0P_2$  и  $P_3P_1$ . Касательные к кривой в начальной и конечной точках, параллельны отрезкам  $P_0P_2$  и  $P_3P_1$ . Наша задача проследить, как кривая изменяет свою форму, если меняется положение точек массива  $P_0, P_1, P_2, P_3$ . Выберем такую стратегию — не изменяя положения прямых, проходящих через точки  $P_0P_2$  и  $P_3P_1$  исходного массива, будем менять положение точек  $P_1, P_2$  на этих прямых и посмотрим, как изменится кривая. Заметим, что В-сплайновая кривая, порожденная массивом  $P = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ , может рассматриваться как кривая Безье, порожденная массивом  $S = (S_0, S_1, S_2, S_3)$ , где точки  $P_i$  и  $S_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) связаны соотношениями:

$$S_0 = 1/6P_0 + 2/3P_1 + 1/6P_2, \quad S_1 = 2/3P_1 + 1/3P_2, \quad S_2 = 1/3P_1 + 2/3P_2, \quad S_3 = 1/6P_1 + 2/3P_2 + 1/6P_3,$$

Пусть  $X_1$ -точка пересечения прямых  $S_0S_1 = \alpha S_0X$  и  $S_2S_3 = \beta XS_3$ . В книге [1] Фокс и Прагг утверждают, что если выполнены условия

$$(\alpha - 4/3)(\beta - 4/3) > 4/9, \quad \alpha > 1, \quad \beta > 1, \quad (1)$$

то кривая Безье будет иметь самопересечение и образовывать петлю. При исследовании В-сплайновых кривых с помощью системы Maple были построены примеры кривых Безье, для которых оба условия выполняются, но петля отсутствует. Таким примером является кривая порожденная массивом

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 6.5 & 3.7 & 10 \\ 1 & 3.16 & 2.54 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда массив  $S$  имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 5.11 & 5.56 & 4.63 & 5.21 \\ 2.69 & 2.95 & 2.74 & 2.55 \end{pmatrix}$$

и для него условия (1) выполняются, однако кривая имеет вид рис. 2, т. е. петля отсутствует и кривая самопересечения не имеет.

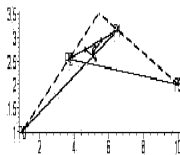


Рис. 2.

Из геометрических соображений, очевидно, что если  $\alpha$  и  $\beta$  принадлежат интервалу  $(0, 1)$ , то кривая Безье петли не имеет. Таким образом, указанные в соответствии с формулами (1) оценки значений  $\alpha$  и  $\beta$  нуждаются в уточнении, либо необходимо ввести некоторые новые соотношения, связывающие эти параметры. Заметим что, введенные в [2] параметры по-прежнему во всех случаях образования самопересечения (петли) принадлежат промежуткам от 0,57 (0,68) до 0,71 (0,91), а когда петля «пропадает» параметры находятся в промежутке от 0,60 (0,69) до 0,75 (0,88) (соответственно для  $\omega_1, \omega_2$ ). В тоже время, существуют значения  $\omega_1, \omega_2$ , выпадающие из указанных промежутков, но при которых петля сохраняется. Очевидно, что одними параметрами  $\omega_1, \omega_2$  форма В-сплайновой кривой не определяется. Как и в случае параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , требуется дальнейшее исследование и нахождение других соотношений между ними и границ их изменения.

Научный руководитель — к. ф.-м. н., доцент В. Б. Ким.

### Литература

1. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. М.: Мир, 1982.
2. Прокопенко Е. В. Зависимость формы В-сплайновой кривой от опорного массива // В кн.: Образование, наука, инновации: вклад молодых исследователей. Материалы 2 (34) международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Кемерово: КемГУ, 2007.

## О КОНФОРМНО ПЛОСКИХ МЕТРИКАХ ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНЫ\*

Е. Д. Родионов<sup>1</sup>, В. В. Славский<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Барнаульский государственный педагогический университет, Барнаул; *edr2002@mail.ru*

<sup>2</sup> Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск; *slavsky@urii.ru*

В работе рассматривается конформно-плоская метрика на  $n$ -мерной сфере  $S^n$  следующего вида

$$ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)}, \quad x \in S^n, \quad (1)$$

где  $f(x) > 0$  — функция класса  $C^{1,1}$ . Метрики такого типа рассматривались в [1]. Каждой такой метрике можно сопоставить выпуклую поверхность  $P_f$  в пространстве Лобачевского  $H_{-\kappa}^{n+1}$ , кривизна которой по абсолютной величине удовлетворяет неравенству

$$\kappa \geq 2K(f), \quad \text{где } K(f) = \sup_{x \in S^n, \xi \in T_x(S)} \left| f(x) \frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{2} |\nabla f|^2 \right|. \quad (2)$$

Здесь  $K(f)$  — точная верхняя граница абсолютной одномерной секционной кривизны метрики [2]. Обратно, каждой выпуклой замкнутой поверхности в  $P \subset H_{-\kappa}^{n+1}$  соответствует конформно-плоская метрика вида (1), ограниченной кривизны.

Дискретным приближением выпуклой поверхности  $P$  естественно считать выпуклый многогранник, вписанный в эту поверхность или описанный вокруг нее. Такой многогранник можно задать указанием конечного множества точек поверхности, взяв соответственно выпуклую оболочку этого множества или пересечение опорных полупространств пространства  $H_{-\kappa}^{n+1}$  к поверхности  $P$  в данных точках. Соответственно, получим пару конформно-плоских метрик  $ds^2 = \frac{dx^2}{f_-^2(x)}$ ,  $ds^2 = \frac{dx^2}{f_+^2(x)}$  таких, что  $f_-(x) \geq f(x) \geq f_+(x)$ , и конечное множество точек  $E \subset S^n$ , на котором выполняется равенство  $f_-(x_i) = f(x_i) = f_+(x_i)$ ,  $x_i \in E \subset S^n$ .

**Определение.** Конечную систему  $\Sigma_0 = \{(x_i, f(x_i)) : x_i \in E\}$  и  $\Sigma_1 = \{(x_i, f(x_i), \nabla f(x_i)) : x_i \in E\}$  назовем соответственно *0-дискретной* и *1-дискретной аппроксимацией* конформно-плоской метрики.

**Определение.** Любое множество вида  $\Sigma_0 = \{(x_i, f_i) : f_i > 0, x_i \in E\}$ , где  $E \subset S^n$  — конечное множество, назовем *0-дискретной конформно-плоской метрикой*. Аналогично определяется *1-дискретная конформно-плоская метрика*.

**Замечание.** Используя естественное вложение конформно-плоской метрики в изотропный конус  $C^+ \subset M^{n+2}$  пространства Минковского [1], можно 0-дискретную конформно-плоскую метрику отождествить с конечным множеством изотропного конуса, соответственно 1-дискретную конформно-плоскую метрику можно рассматривать как конечное «оснащенное» подмножество изотропного конуса (в каждой его точке задано касательное подпространство размерности  $n$ ).

**Теорема 1.** Пусть задана 0-дискретная конформно-плоская метрика  $\Sigma_0 = \{(x_i, f_i) : x_i \in E\}$  на сфере. Тогда найдется наименьшая константа  $\kappa_0 > 0$  такая, что существует  $f(x) \in C^{1,1}$ ,  $f(x_i) = f_i$  при  $x_i \in E$  и  $K(f) = \kappa_0$ .

**Теорема 2.** Пусть задана 1-дискретная конформно-плоская метрика  $\Sigma_1 = \{(x_i, f_i, u_i) : x_i \in E\}$  на сфере. Тогда найдется наименьшая константа  $\kappa_1 > 0$  такая, что существует  $f(x) \in C^{1,1}$ ,  $f(x_i) = f_i$ ,  $\nabla f(x_i) = u_i$  при  $x_i \in E$  и  $K(f) = \kappa_1$ .

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-81002) и при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (грант № НШ-8526.2006.1).

**Доказательство.** Доказательство опирается на локальную компактность пространства выпуклых подмножеств пространства Лобачевского.

**Замечание.** Величины  $\kappa_0$  и  $\kappa_1$  из теорем 1 и 2 назовем *абсолютной одномерной кривизной* дискретной  $\Sigma_0$  и  $\Sigma_1$  конформно-плоских метрик соответственно.

Любое конечное множество  $E$  точек сферы  $S^n$  определяет симплициальное разбиение  $T = \bigcup_{i=0}^n T_i$  сферы — триангуляцию Делоне, здесь  $T_i$  — симплексы размерности  $i = 0, 1, \dots, n$ . Симплексы  $\sigma \in T_n$  триангуляции Делоне однозначно определяются требованием, чтобы сфера, описанная вокруг симплекса  $\sigma$ , не содержала других точек множества из  $E$ . Заметим, что триангуляция Делоне инвариантна при мебиусовых преобразованиях. Пусть  $\sigma = \{x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\} \in T_k$  —  $k$ -мерный симплекс триангуляции Делоне, используя конформно-плоскую метрику  $\Sigma_0 = \{(x_i, f_i) : x_i \in E\}$ , сопоставим ему множество из  $(k+1)$  точки изотропного конуса  $C^+ \subset M^{n+2}$  пространства Минковского [1]. Одномерному симплексу  $\sigma = \{x_i, x_j\}$  будет соответствовать отрезок в пространстве  $M^{n+2}$ , длина (диаметр) которого равна

$$d(\sigma) = \frac{|x_i - x_j|}{\sqrt{f_i f_j}},$$

называемая *хордовым расстоянием* между  $x_i, x_j \in E$  относительно 0-дискретной конформно-плоской метрики.

**Замечание.** В терминах хордовых расстояний получены оценки для абсолютных одномерных кривизн  $\kappa_0$  и  $\kappa_1$  дискретных конформно-плоских метрик.

**Определение.** Величину

$$\delta(\Sigma_0) = \max_{\sigma \in T_1} d(\sigma)$$

назовем *диаметром* триангуляции  $T$  в метрике  $\Sigma_0$ .

**Определение.** Пусть  $\pi = \{x_1, \dots, x_m\}$  — последовательность вершин такая, что  $\{x_i, x_{i+1}\} \in T_1$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ . Назовем  $\pi$  *ломанной* в  $\Sigma_0$ , *соединяющей вершины*  $x_1$  и  $x_m$ . *Длина* ломанной равна

$$L(\pi) = \sum_{i=1}^{m-1} d(\{x_i, x_{i+1}\}).$$

*Кратчайшим расстоянием между вершинами*  $a$  и  $b$  в дискретном конформно-плоском пространстве  $\Sigma_0$  назовем минимум по всем ломанным  $\pi$ , соединяющим  $a$  и  $b$ :

$$\rho(a, b) = \min_{\pi} L(\pi).$$

Функцию  $\rho(a, b)$  назовем *внутренней метрикой* дискретного конформно-плоского пространства  $\Sigma_0$ .

**Замечание.** Дискретные конформно-плоские пространства с внутренней метрикой можно использовать при численном решении обратных кинематических задач [4].

## Литература

1. Славский В. В. Конформно плоские метрики ограниченной кривизны на  $n$ -мерной сфере // В кн.: Исследования по геометрии и математическому анализу. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1987. С. 45–63.
2. Родионов Е. Д., Славский В. В. Одномерная секционная кривизна римановых многообразий // Докл. АН. 2002. Т. 66, № 4. С. 35–39.
3. Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В. Геометрия однородных римановых многообразий // В кн.: Современная математика и ее приложения. Геометрия. Т. 37. Москва: Ин-т ВИНТИ, 2006. с. 87.
4. Славский В. В. Дискретная модель обратной кинематической задачи // В кн.: Обратные задачи и информационные технологии рационального природопользования. Ханты-Мансийск: Ин-т ЮНИИИТ, 2006. С. 10–13.

# О НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ\*

А. С. Романов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; asrom@math.nsc.ru*

Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство и  $s > 0$ . Борелевскую меру  $\mu$  будем называть  $s$ -регулярной на шаре  $B = B(x_0, R) \subset X$ , если существуют такие постоянные  $0 < L_1 < L_2 < \infty$ , что для всякой точки  $z \in B$  выполняется неравенство

$$L_1 r^s \leq \mu(B \cap B(z, r)) \leq L_2 r^s \quad \text{при } r < R + d(x_0, z).$$

Метрическое пространство  $(X, d)$  будем называть  $s$ -регулярным, если существуют число  $R_0 > 0$  и борелевская мера  $\mu$ , являющаяся  $s$ -регулярной на всяком шаре  $B(x, R) \subset X$  при  $R < R_0$ , а постоянные  $L_1$  и  $L_2$  не зависят от выбора шара.

Далее мы будем предполагать, что метрическое пространство  $(X, d)$  является  $s$ -регулярным и  $s > 1$ .

Символом  $f_E$  будем обозначать среднее значение функции  $f$  на множестве  $E$ , т. е.

$$f_E = \int_E f \, d m_n = \frac{1}{m_n(E)} \int_E f \, d m_n.$$

Рассмотрим шар  $B \subset R^n$ , точку  $z \in B$ , и введем обозначение  $D(z, r) = B(z, r) \cap B$ .

Будем говорить, что пара функций  $(f, g)$  удовлетворяет  $p$ -неравенству Пуанкаре на шаре  $B$ , если  $f$  — функция класса  $L_1(B)$ ,  $g$  — неотрицательная функция класса  $L_p(B)$ , и для всех  $z \in B$  и всех  $r > 0$  выполняется оценка

$$\int_{D(z,r)} |f - f_{D(z,r)}| \, d m_n \leq L \cdot r \left( \int_{D(z,r)} g^p \, d m_n \right)^{1/p}.$$

Пара функций  $(f, g)$  удовлетворяет  $p$ -неравенству Пуанкаре на метрическом пространстве  $(X, d)$ , если существует  $r_0 > 0$  такое, что пара  $(f, g)$  удовлетворяет  $p$ -неравенству Пуанкаре на всяком шаре  $B(x, r) \subset X$  при  $r < r_0$  и постоянная  $L$  не зависит от выбора шара.

Для колебания функции  $f$  на шаре  $B$  будем использовать обозначение  $\text{osc}_B f$ .

**Определение.** Функция  $f : X \rightarrow R$  называется  $s$ -абсолютно непрерывной, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для всякого семейства непересекающихся шаров  $B_k \subset X$  из неравенства

$$\sum_k \mu(B_k) < \delta$$

следует, что

$$\sum_k (\text{osc}_{B_k} f)^s < \varepsilon.$$

**Теорема.** Пусть  $p \in [1, s)$ , пара функций  $(f, g)$  удовлетворяет  $p$ -неравенству Пуанкаре на  $s$ -регулярном метрическом пространстве  $(X, d)$  с борелевской мерой  $\mu$ ,  $f \in L_1(X)$ , а неотрицательная функция  $g$  принадлежит пространству Лоренца  $L_{s,1}(X)$ . Тогда функция  $f$  может быть так переопределена на множестве нулевой меры, что получаемая в результате функция  $\tilde{f}$  будет  $s$ -абсолютно непрерывной на всем пространстве  $(X, d)$ .

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00482-а), программы «Ведущие научные школы» (№ НШ-8526.2006.1) и Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН 2006.

Для произвольной  $\mu$ -измеримой функции  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  функцию  $g : X \rightarrow [0, \infty)$  будем называть *допустимой*, если существует такое измеримое множество  $E \subset X$ , что  $\mu(E) = 0$  и неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)(g(x) + g(y)) \quad (1)$$

выполняется для всех точек  $x, y \in X \setminus E$ .

Множество всех допустимых функций для функции  $f$  обозначим через  $D(f)$ .

По аналогии с введенными П. Хайлашем [2] классами функций соболевского типа определим функциональное пространство  $M_{s,1}^1(X)$  условием

$$M_{s,1}^1(X) = \{f \in L_1(X) \mid g \in D(f) \cap L_{s,1}(X)\}.$$

**Следствие 1.** Пусть  $f \in M_{s,1}^1(X)$ . Тогда функция  $f$  может быть так переопределена на множестве нулевой меры, что получаемая в результате функция  $\tilde{f}$  будет  $s$ -абсолютно непрерывной на всем пространстве  $(X, d)$ .

Результат является непосредственным следствием теоремы, поскольку, интегрируя дважды неравенство (1), мы получаем, что пара функций  $(f, g)$  удовлетворяет 1-неравенству Пуанкаре. Следствием полученных оценок является аналогичный результат для евклидовых пространств, полученный ранее в работе [1] совершенно иным способом.

**Следствие 2.** Пусть  $G$  — ограниченная область в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in W_{1,loc}^1(G)$ , а обобщенные производные первого порядка функции  $f$  принадлежат пространству Лоренца  $L_{n,1}(G)$ . Тогда функция  $f$  может быть так переопределена на множестве нулевой меры, что получаемая в результате функция  $\tilde{f}$  будет  $n$ -абсолютно непрерывной в области  $G$ .

### Литература

1. Kauhanen J., Koskela P., Maly J. On function with derivatives in a Lorentz space // Manuscripta Math. 1999. V. 100, № 1. P. 87–101.
2. Hajlasz P. Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces // Potential Analysis. 1996. V. 5, № 4. P. 403–415.

## ГРАНИЧНЫЕ НАКЛОНЫ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ\*

Е. А. Сбродова

Челябинский государственный университет, Челябинск;  
Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург;  
sbrodova@csu.ru

Пусть  $M$  — компактное ориентируемое трехмерное многообразие. *Наклоном* на крае  $\partial M$  называется набор  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  нетривиальных простых замкнутых кривых на  $\partial M$ , которые попарно не пересекаются и не изотопны.

Рассмотрим два наклона  $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  и  $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$  на  $\partial M$ . Будем говорить, что наклон  $\alpha$  *содержится* в наклоне  $\beta$ , если существует изотопия, переводящая кривые  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  в кривые  $\{\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_n}\}$ , где  $\beta_{i_j} \in \beta$ . Два наклона  $\alpha$  и  $\beta$  считаются *равными*, если  $\alpha \subset \beta$  и  $\beta \subset \alpha$ .

Будем говорить, что край собственной поверхности  $F \subset M$  имеет наклон  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , если  $\partial F$  имеет вид  $k_1\alpha_1 \cup k_2\alpha_2 \cup \dots \cup k_n\alpha_n$ , т. е. состоит из  $k_1$  копий кривой  $\alpha_1$ ,  $k_2$  копий кривой  $\alpha_2$  и т. д., где числа  $\{k_i\}$  принимают натуральные значения. Наклон края  $\partial F$  обозначим через  $[\partial F]$ .

Наклон  $\alpha$  на  $\partial M$  называется *граничным*, если найдется такая собственная существенная поверхность  $F \subset M$ , что  $[\partial F] \subset \alpha$ .

В работе решается задача алгоритмического нахождения граничных наклонов ограниченного рода. *Родом* наклона  $\alpha$  на крае  $\partial M$  называется минимально возможный род такой собственной существенной ориентируемой поверхности  $F \subset M$ , что  $[\partial F] = \alpha$ . В случае, если таких поверхностей нет, род наклона  $\alpha$  считается равным  $\infty$ .

Напомним, что род ориентируемой поверхности  $F$  определяется как род (число ручек) замкнутой поверхности, которая получается из поверхности  $F$  заклеиванием дисками всех компонент края. Род  $g(F)$  ориентируемой поверхности  $F$  является целым неотрицательным числом и связан с эйлеровой характеристикой поверхности  $F$  равенством  $g(F) = \frac{2 - (\chi(F) - k)}{2}$ , где  $k$  равно числу компонент связности края  $\partial F$ .

Обозначим через  $\mathfrak{M}$  класс компактных ориентируемых неприводимых гранично неприводимых трехмерных многообразий.

**Теорема 1.** *Существует алгоритм, который по данному трехмерному многообразию  $M \in \mathfrak{M}$ , наклону  $\alpha$  на  $\partial M$  и целому числу  $N \geq 0$  выясняет содержит ли  $\partial M$  такой граничный наклон  $\beta$ , что  $\beta \subset \alpha$  и род наклона  $\beta$  не превосходит  $N$ .*

Доказательство теоремы 1 базируется на методе нормальных поверхностей Хакена (см. [1]) и специальных триангуляциях (см. [3]), позволяющих воспользоваться этим методом.

**Теорема 2.** *Существует алгоритм, который по данному трехмерному многообразию  $M \in \mathfrak{M}$  и данному числу  $N \geq 0$  выясняет, содержит ли  $\partial M$  граничный наклон, род которого не превосходит  $N$ .*

Доказательство теоремы 2 строится на оценке средней длины кривых граничного наклона ограниченного рода, предложенной в [2]. Напомним, что *длиной* кривой на крае триангулированного трехмерного многообразия, находящейся в общем положении относительно триангуляции, называется число точек пересечения этой кривой с ребрами триангуляции. Если собственная поверхность  $F \subset M$  имеет  $n$  граничных кривых, каждая из которых имеет длину  $l_1, l_2, \dots, l_n$  соответственно, то под *средней длиной*  $l_{av}$  граничных кривых мы будем понимать число  $\frac{\sum_{i=1}^n l_i}{n}$ . Известно, что средняя длина граничных кривых собственной поверхности, род которой не превосходит  $N$ , удовлетворяет неравенству

$$l_{av} \leq C(2N + 1),$$

где  $C$  — алгоритмически вычислимая константа, зависящая только от многообразия и триангуляции (см. [2]). Таким образом, любой граничный наклон должен содержать кривую, длина

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-01-96026).

которой не превосходит  $C(2N + 1)$ . Если найдены несколько кривых граничного наклона, то на основе этого неравенства, используя специальную триангуляцию, удастся построить оценку средней длины оставшихся кривых этого наклона. Будем последовательно находить кривые граничного наклона, получая на каждом шаге множество наклонов, состоящих сначала из одной кривой, затем из двух и т. д. Так как любой наклон на крае  $\partial M$  ориентируемого многообразия состоит из не более чем  $3g(\partial M) - 2$  кривых, где  $g(\partial M)$  равно роду поверхности  $\partial M$ , то процесс нахождения кривых граничного наклона остановится за конечное число шагов. На выходе мы получим множество  $S$  наклонов на  $\partial M$ . Таким образом, требуемый алгоритм сводится к построению множества  $S$  и к проверке, содержит ли конечное множество  $S$  граничный наклон, род которого не превосходит  $N$ , последнее условие проверяется алгоритмически (см. теорему 1).

### Литература

1. *Haken W.* Theorie der Normalflächen. Ein Isotopiekriterium für der Kreisknoten // Acta. Math. 1961. V. 105. P. 245–375.
2. *Jaco W., Rubinstein J. H., Sedgwick E.* Finding planar surfaces in knot- and link-manifolds. Preprint. arXiv:math.GT/0608700.
3. *Сбродова Е. А.* Плоские поверхности в трехмерных многообразиях // Сибирские электронные математические известия. 2006. Т. 3. С. 451–463.



## О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПРЯМОЙ

М. С. Сгибнев

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; sgibnev@math.nsc.ru*

В [1] исследовался вопрос о единственности ограниченного решения уравнения

$$z(x) = g(x) + \int_{\mathbb{R}} z(x-u) F(du), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где  $F$  — распределение вероятностей в  $\mathbb{R}$ ,  $g$  — заданная функция, а  $z$  — ограниченная борелевская функция. Если  $z(x)$  удовлетворяет однородному уравнению

$$z(x) = \int_{\mathbb{R}} z(x-u) F(du), \quad x \in \mathbb{R},$$

где  $F$  — неарифметическое распределение вероятностей в  $\mathbb{R}$ , то существует такое  $c \in \mathbb{R}$ , что почти всюду (п. в.) в смысле меры Лебега  $z(x) = c$ .

Как показано в [2], если распределение  $F$ , например, обладает ненулевой абсолютно непрерывной компонентой, то решение  $z$  уравнения (1) можно представить в виде  $z = z_1 + z_2$ , где  $z_1 \in L^1(\mathbb{R})$ , а  $z_2 \in C_l$  (функция  $z_2(x)$  непрерывна и имеет конечные пределы  $z_2(\pm\infty)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ ). Поэтому при рассмотрении вопроса о единственности решения естественно расширить класс допустимых решений и рассматривать такие решения, которые можно представить в виде суммы функций из  $L^1(\mathbb{R})$  и  $L^\infty(\mathbb{R})$ .

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$z_i(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}} z_j(x-u) F_{ij}(du), \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

где  $g_i \in L_1(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, \dots, m$ , а  $\mathbf{F} = (F_{ij})$  — матрица неотрицательных конечных мер на  $\mathbb{R}$ . Обозначим через  $\mathbf{a}(x) = (a_1(x), \dots, a_m(x))^T$  вектор-столбец с координатами  $a_1(x), \dots, a_m(x)$ . В матричной форме система (2) принимает вид  $\mathbf{z}(x) = \mathbf{g}(x) + \mathbf{F} * \mathbf{z}(x)$ , где  $(\mathbf{F} * \mathbf{z}(x))_i$  по определению равно сумме в правой части (2). Пусть  $\mathbf{G} = (G_{ij})$  — также матрица порядка  $m \times m$ , элементы которой суть конечные неотрицательные меры на  $\mathbb{R}$ . Свертка  $\mathbf{F} * \mathbf{G}$  — это матрица с элементами  $(\mathbf{F} * \mathbf{G})_{ij} := \sum_{l=1}^m F_{il} * G_{lj}$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ . Далее,  $\mathbf{F}^{1*} := \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F}^{(k+1)*} := \mathbf{F}^{k*} * \mathbf{F} = \mathbf{F} * \mathbf{F}^{k*}$ . Спектральный радиус произвольной числовой матрицы  $\mathbf{A}$  обозначим через  $\varrho(\mathbf{A})$ . По теореме Перрона — Фробениуса любая неотрицательная неразложимая матрица  $\mathbf{A}$  имеет положительное собственное значение кратности 1, равное  $\varrho(\mathbf{A})$ , и существуют положительные правый и левый собственные векторы, соответствующие этому собственному значению. Положим  $\mathbf{F}(\infty) := (F_{ij}(\mathbb{R}))$ .

Распределение вероятностей  $F$  на  $\mathbb{R}$  называется *арифметическим*, если оно сосредоточено на множестве точек вида  $0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \dots$ . Наибольшее  $\lambda$ , обладающее этим свойством, называется *шагом*  $F$ . Распределение  $F$  на  $\mathbb{R}$  называется *решетчатым*, если оно сосредоточено на множестве точек вида  $a + j\lambda$ , где  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$  — постоянные числа, а  $j \in \mathbb{Z}$ . Наибольшее  $\lambda$ , обладающее этим свойством, называется *шагом*  $F$ . Аналогичным образом определяются арифметические и решетчатые меры на  $\mathbb{R}$ .

Матрица мер  $\mathbf{F} = (F_{ij})$  порядка  $m \times m$  называется *вырожденной*, если существуют постоянные  $\beta_1, \dots, \beta_m$  такие, что меры  $F_{ij}$  сосредоточены в точках  $\beta_j - \beta_i$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ .

Мы будем рассматривать только невырожденные матрицы мер  $\mathbf{F}$ . Если  $\nu$  — конечная мера, то обозначим через  $\nu(t)$  ее функцию распределения:  $\nu(t) := \nu((-\infty, t])$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Матрица мер  $\mathbf{F}$  называется *решетчатой* [3], если выполняются следующие условия:

- 1) каждая мера  $F_{ij}$ ,  $i \neq j$ , решетчата с шагом  $\lambda_{ij}$ , каждая мера  $F_{ii}$  арифметична с шагом  $\lambda_{ii}$ ;
- 2) все  $\lambda_{ij}$  кратны некоторому числу, наибольшее из таких чисел обозначим через  $\lambda$ ;

3) если  $a_{ij}$ ,  $a_{jk}$  и  $a_{ik}$  — точки роста функций распределения  $F_{ij}(t)$ ,  $F_{jk}(t)$  и  $F_{ik}(t)$  соответственно, то  $a_{ij} + a_{jk} = a_{ik} + l\lambda$ , где  $l \in \mathbb{Z}$ ; иными словами,  $a_{ij} + a_{jk} \equiv a_{ik} \pmod{\lambda}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathbf{F}$  — нерешетчатая матрица мер порядка  $m \times m$  такая, что матрица  $\mathbf{F}(\infty)$  неразложима и  $\varrho[\mathbf{F}(\infty)] = 1$ , и пусть  $\mathbf{z}(x)$  — измеримая по Борелю вектор-функция такая, что  $\mathbf{z} \in L^1(\mathbb{R}) + L^\infty(\mathbb{R})$ . Предположим, что

$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{F} * \mathbf{z}(x)$$

для каждого  $x \in \mathbb{R}$ . Тогда существует постоянный вектор  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)^T$  такой, что п. в.  $\mathbf{z}(x) = \mathbf{c}$ ; при этом  $\mathbf{c}$  — правый собственный вектор матрицы  $\mathbf{F}(\infty)$ , отвечающий ее собственному значению единицы.

Абсолютно непрерывную компоненту произвольной неотрицательной меры  $\nu$  обозначим через  $\nu_c$ , а ее сингулярную компоненту — через  $\nu_s$ :  $\nu_s = \nu - \nu_c$ ; таким образом, под сингулярной компонентой меры здесь понимается сумма ее обычной сингулярной и дискретной компонент. Условимся о том, что все операции над матрицами мер и вектор-функциями осуществляются по-элементно; например,  $\mathbf{F}_s := ((F_{ij})_s)$ . Как обычно, полагаем  $c/\infty := 0$ , где  $c$  — произвольная постоянная.

Теорема 1 позволяет дополнить результат работы [4] о существовании решения системы (2) утверждением о его единственности с точностью до п. в. постоянного векторного слагаемого.

**Теорема 2.** Пусть  $\mathbf{F}$  — матрица порядка  $m \times m$ , элементы которой суть конечные неотрицательные меры на  $\mathbb{R}$ . Предположим, что матрица  $\mathbf{F}(\infty)$  неразложима и  $\varrho[\mathbf{F}(\infty)] = 1$ . Выберем левый и правый собственные векторы  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_m)$  и  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m)^T$  с положительными координатами, отвечающие собственному значению 1 матрицы  $\mathbf{F}(\infty)$ . Допустим, что  $\mu := \mathbf{l} \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r} \in (0, +\infty]$  и  $\varrho[(\mathbf{F}^{q*})_s(\infty)] < 1$  при некотором целом  $q \geq 1$ . Пусть  $\mathbf{g} \in L^1(\mathbb{R})$  — вектор-функция. Тогда существует решение  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$  системы (2) такое, что  $\mathbf{z}_1 \in C_l$ ,  $\mathbf{z}_2 \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\mathbf{z}_1(-\infty) = (0, \dots, 0)^T$  и

$$\mathbf{z}_1(+\infty) = \frac{\mathbf{r} \mathbf{l} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{g}(x) dx}{\mathbf{l} \int_{\mathbb{R}} x \mathbf{F}(dx) \mathbf{r}}.$$

Если  $\mathbf{z}_* \in L^1(\mathbb{R}) + L^\infty(\mathbb{R})$  — любое другое решение системы (2), то найдется постоянный вектор  $\mathbf{c}$  такой, что  $\mathbf{z}_* - \mathbf{z} = \mathbf{c}$  п. в.; при этом  $\mathbf{F}(\infty)\mathbf{c} = \mathbf{c}$ .

Отметим, что в отличие от соответствующего результата работы [4] теорема 2 охватывает и случай  $\mu = +\infty$  благодаря применению в ее доказательстве полного матричного аналога теоремы восстановления Блеквелла.

## Литература

1. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
2. Sgibnev M. S. Stone’s decomposition of the renewal measure via Banach-algebraic techniques // Proceedings of the American Mathematical Society. 2002. V. 130. P. 2425–2430.
3. Ступа К. S. On systems of renewal equations // J. Math. Anal. Appl. 1970. V. 30. P. 425–434.
4. Сгибнев М. С. Системы интегральных уравнений типа восстановления на прямой // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 1. С. 128–137.
5. Сгибнев М. С. Матричный аналог теоремы восстановления Блеквелла на прямой // Математический сборник. 2006. Т. 197, № 3. С. 69–86.

## БИЛИНЕЙНЫЕ СПАРИВАНИЯ ПЕТЕРСОНА ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ $(q, \rho)$ -ФОРМ

О. А. Сергеева

*Кемеровский государственный университет, Кемерово; oko.in@yandex.ru*

**Определение 1.** *Мультипликативной автоморфной формой порядка  $q$  с характером  $\rho$  ( $(q, \rho)$ -формой) на  $D$  называется класс эквивалентности измеримых функций  $\phi(z)$  с условием  $\phi(Az)A'(z)^q = \rho(A)\phi(z)$  для всех  $A \in G$  и  $z \in D$ .*

Будем считать, что  $(q, \rho)$ -форма и  $(q, \frac{1}{\rho})$ -форма являются  $\rho$ -двойственными, а  $(q_1, \rho)$ -форма и  $(q_2, \rho)$ -форма —  $q$ -двойственными формами для  $q = q_1 + q_2$ .

Пусть  $C$  — квазикривость в  $\bar{\mathbb{C}}$ ,  $D_1 = \text{Int } C$ ,  $D_2 = \text{Ext } C$ ;  $\lambda(z)|dz|$  — метрика Пуанкаре, заданная в  $D_1 \cup D_2$ ;  $G$  — отмеченная конечнопорожденная квазифуксова группа первого рода дробно-линейных преобразований  $\bar{\mathbb{C}}$  с инвариантной кривой  $C$  такая, что  $D_1/G$  — компактная риманова поверхность рода  $h \geq 2$ ;  $k_q = \frac{4^{2(q-1)}2\pi}{q}$  — константа для  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \geq 2$ .

Голоморфные  $(q, \rho)$ -формы  $\phi$  на  $D_1$  с условием  $\|\phi\|_{q,p,G,\rho}^p = \iint_{D_1/G} \lambda(z)^{2-pq} \left| \frac{\phi(z)}{f_1(z)} \right|^p |dz \wedge d\bar{z}| < \infty$  для некоторого  $p$ ,  $1 \leq p \in \mathbb{R}$ , где  $f_1$  — мультипликативная единица для несущественного характера  $\rho_1$  в разложении Фаркаша — Кра  $\rho = \rho_0\rho_1$ , образуют замкнутое нормированное пространство  $A_q^p(D_1, G, \rho)$  голоморфных  $(q, \rho)$ -форм, интегрируемых со степенью  $p$  (см. [3]).

Для форм  $\phi_1$  и  $\phi_2$  одного порядка  $q$  из пространств  $A_q^p(D_1, G, \rho)$  и  $A_q^{p'}(D_1, G, \rho)$  соответственно, с условием  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , определим билинейное спаривание

$$(\phi_1, \phi_2)_{q,\rho,G,D_1} = \frac{i}{2} \iint_{D_1/G} \lambda(z)^{2-2q} \frac{\phi_1(z)\overline{\phi_2(z)}}{|f_1(z)|^2} dz \wedge d\bar{z}. \quad (1)$$

Для голоморфных  $(q, \rho)$ -форм  $\varphi$  на  $D_1$  зададим интегральный оператор, обращающий характер формы,

$$(\mathcal{B}_C^{hom}\varphi)(z) = \frac{i}{2} \iint_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}\overline{\varphi(\zeta)}}{(\zeta - z)^{2q}f_1(\zeta)f_1(z)} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \quad z \in D_2. \quad (2)$$

**Теорема 1.** *Для  $\rho \in \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$  оператор  $\mathcal{B}_C^{hom}$  является антилинейным непрерывным отображением между пространствами  $\rho$ -двойственных форм:  $\mathcal{B}_C^{hom}: A_q^p(D_1, G, \rho) \rightarrow A_q^p(D_2, G, \frac{1}{\rho})$ ,  $p \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , с нормой  $\|\mathcal{B}_C^{hom}\| \leq k_q$ . Кроме того, для любых  $\varphi \in A_q^p(D_1, G, \rho)$  и  $\psi \in A_q^{p'}(D_2, G, \frac{1}{\rho})$ , с  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , верно  $(\mathcal{B}_C^{hom}\varphi, \psi)_{q,\frac{1}{\rho},D_2,G} = \overline{(\varphi, \mathcal{B}_{-C}^{hom}\psi)_{q,\rho,D_1,G}}$ .*

Пусть  $\varphi \in A_{q_1}^p(D, G, \rho)$ ,  $\psi \in A_{q_2}^{p'}(D, G, \frac{1}{\rho})$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ,  $q = q_1 + q_2$ ,  $q_1 \geq 2$ ,  $q_2 \geq 2$ , т. е.  $\varphi$  и  $\psi$  — это  $(q, \rho)$ -двойственные формы на  $D$ . Для таких форм определим симметричное билинейное спаривание:

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{q_1,q_2,D,G} = \frac{i}{2} \iint_{D/G} \mu_q(z)\varphi(z)\psi(z) dz \wedge d\bar{z}, \quad (3)$$

где  $D$  либо совпадает с  $D_1$ , либо с  $D_2$ ,  $\mu_q$  — фиксированный обобщенный коэффициент Бельтрами класса  $C^1(D)$  для  $q = q_1 + q_2$  с характеристическим свойством  $|\mu(z)| \leq K\lambda(z)^{2-q}$  п. в. на  $\bar{\mathbb{C}}$ , где  $K = \text{const}$ .

Введём интегральный оператор, который  $q$ -двойственно меняет порядок дифференциала, но не изменяет характер. Для  $(\rho, q_1)$ -формы  $\varphi$  на  $D_1$  положим

$$(\mathcal{B}_C^{ord}\varphi)(z) = \frac{i}{2} \iint_{D_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta) f_1(z)}{(\zeta - z)^{2q_2} f_1(\zeta)} \varphi(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \quad z \in D_2 \quad (4)$$

**Теорема 2.** Для  $\rho \in \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$  оператор  $\mathcal{B}_C^{ord}$  является ограниченным линейным отображением из  $A_{q_1}^p(D_1, G, \rho)$  в  $A_{q_2}^p(D_2, G, \rho)$ ,  $p \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , с нормой  $\|\mathcal{B}_C^{ord}\| \leq K k_{q_2}$  (где  $K$  – константа для  $\mu$  при  $q = q_1 + q_2$ ), и для любых голоморфных  $\varphi \in A_{q_1}^p(D_1, G, \rho)$  и  $\psi \in A_{q_1}^{p'}(D_2, G, \frac{1}{\rho})$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , верно  $\langle \varphi, \mathcal{B}_{-C}^{ord}\psi \rangle_{q_1, q_2, D_1, G} = \langle \mathcal{B}_C^{ord}\varphi, \psi \rangle_{q_2, q_1, D_2, G}$ .

**Теорема 3.** Антилинейный оператор  $\mathcal{B}_{-C}^{ord} \circ \mathcal{B}_C^{hom}$  осуществляет непрерывное вложение  $A_{q_1}^1(D_1, G, \rho) \hookrightarrow A_{q_2}^1(D_1, G, \frac{1}{\rho})$   $(q, \rho)$ -двойственных пространств голоморфных форм и справедлива оценка  $\|\mathcal{B}_{-C}^{ord} \circ \mathcal{B}_C^{hom}\| \leq K k_{q_1} k_{q_2}$ , где  $K$  – константа для  $\mu$  при  $q = q_1 + q_2$ . Кроме того, для любых голоморфных  $\varphi \in A_{q_1}^p(D_1, G, \rho)$  и  $\psi \in A_{q_1}^{p'}(D_1, G, \rho)$  на  $D_1$  с  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  верно равенство  $\langle \varphi, \mathcal{B}_{-C}^{ord} \circ \mathcal{B}_C^{hom}\psi \rangle_{q_1, q_2, D_1, G} = \langle \mathcal{B}_C^{ord}\varphi, \mathcal{B}_C^{hom}\psi \rangle_{q_2, q_1, D_2, G}$ .

### Литература

1. Кра И. Автоморфные формы и клейновы группы. М. Мир, 1975.
2. Bers L. A non-standard integral equation with applications to quasiconformal mappings // Acta Mathematica. 1966. V. 116. С. 115–134.
3. Сергеева О. А. Банаховы пространства мультипликативных автоморфных форм // Вестник НГУ. 2005. Т. 5, вып. 4. С. 45–63.

# НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КОГОМОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КАТЕГОРНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ\*

Е. Е. Скурихин

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток; eesku@iam.dvo.ru*

Идея категорного топологического пространства состоит в рассмотрении структуры обобщённых подобъектов объекта произвольной категории и задании на этой структуре топологии Гротендика, что позволяет использовать для изучения указанного объекта теорию пучков и в том числе пучковые когомологии. Пусть  $(K, \tau)$  — сайт, т. е. категория  $K$  с заданной на ней топологией Гротендика  $\tau$ ,  $D$  — предпучок множеств на  $K$  (контравариантный функтор на  $K$  со значением в категории множеств),  $K_D$  — частично упорядоченный по включению класс подпредпучков  $D$ . В терминах топологии Гротендика  $\tau$  задаётся [1] отображение  $[\cdot]_\tau : K_D \rightarrow K_D$ . Обозначим его образ через  $K_{D,\tau}$ . Если он является множеством, то  $D$  называется *категорным топологическим пространством*. Известно [2], что в этом случае  $K_{D,\tau}$  является фреймом. Каноническая топология Гротендика на нём задаёт, с помощью отображения  $[\cdot]_\tau$ , топологию Гротендика на  $K_D$ .

Поскольку каждый объект произвольной категории с точностью до изоморфизма задаётся представляющим его предпучком, то любой объект каждой категории наделяется структурой категорного топологического пространства, которая может варьироваться.

Если  $X$  — топологическое или равномерное пространство, то рассматривая различные топологии Гротендика на категории всех его открытых подмножеств, мы можем рассматривать на  $X$  различные структуры категорных топологических пространств и получаем возможность развивать когомологические теории практически не накладывая ограничений на топологию или равномерность на  $X$ , получая попутно содержательные новые результаты даже для полиэдров [1–3].

В общем случае когомологии категорного топологического пространства являются производными функторами обратного предела, так что частными случаями результатов, относящихся к когомологиям, являются результаты, относящиеся к производным функторам обратного предела на дистрибутивных решётках и линейно упорядоченных множествах [4].

Рассмотрим пример другого рода. Тройка  $\mathcal{X} = (X, Y, r : X \times Y \rightarrow \{0, 1\})$ , где  $X, Y$  — множества,  $r$  — отображение, называется *Чу-пространством* [5–7]. Определим множества  $X_y \subset X$  и  $Y_x \subset Y$ , полагая  $x \in X_y \Leftrightarrow y \in Y_x \Leftrightarrow r(x, y) = 1$ . *Левой длиной*  $lL\mathcal{X}$  назовём супремум мощностей множеств  $X_y$ , а *правой*  $rL\mathcal{X}$  — супремум мощностей множеств  $Y_x$ . Пусть  $\alpha = \{X_y \mid y \in Y\}$ . Определим топологию Гротендика  $\tau_l$  на упорядоченном по включению множестве всех подмножеств  $X$  так. Если  $B$  непусто, то семейство  $\beta$  подмножеств  $X$  принадлежит  $\tau_l(B) \Leftrightarrow \alpha \cap B$  вписано в  $\alpha$  и объединение его равно  $B$ . Если  $B$  пусто, то предполагаем, что пустое семейство принадлежит  $\tau_l(B)$ . Левые когомологии Гротендика  $H_l^n(\mathcal{X}, \mathcal{A})$  с коэффициентами в предпучке  $\mathcal{A}$  определяются как функторы  $R^n\Gamma_X(S_l(\mathcal{A}))$ , где функтор  $\Gamma_X$  из категории  $\tau_l$ -пучков в категорию абелевых групп задаётся равенством  $\Gamma_X(\mathcal{C}) = \mathcal{C}(X)$ , а  $S_l(\mathcal{A})$  обозначает  $\tau_l$ -пучок, порождённый  $\mathcal{A}$ . Аналогично, с участием множества  $Y$ , определяются правые когомологии  $H_r^n(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ .

**Лемма.** Пусть  $\mathcal{X} = (X, M, r : X \times M \rightarrow \{0, 1\})$  — Чу-пространство, где  $X$  — множество,  $M$  — некоторое множество его непустых подмножеств, отображение  $r$  задаётся равенством  $r(x, A) = 1 \Leftrightarrow x \in A$ . Тогда  $lL\mathcal{X}$  равняется супремуму мощностей элементов  $M$ . Предположим, что условия  $A \in M$  и  $B \subset A$  влекут  $B \in M$ . Тогда, если  $lL\mathcal{X} = n$ , то имеется абелев  $\tau_r$ -пучок  $\mathcal{A}$  такой, что  $H_r^n(\mathcal{X}, \mathcal{A}) \neq 0$  и для любого предпучка  $\mathcal{B}$  и любого  $k > n$   $H_r^k(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = 0$ .

**Теорема 1.** Пусть  $X$  — нётерово топологическое пространство,  $\mathcal{X} = (I(X), M, r : I(X) \times M \rightarrow \{0, 1\})$  — Чу-пространство, где  $I(X)$  — множество всех замкнутых неприводимых подмножеств  $X$ ,  $M$  — множество линейно упорядоченных по включению подмножеств  $I(X)$ ,  $r(A, M) = 1 \Leftrightarrow A \in M$ . Тогда размерность  $X$  равна правой когомологической размерности  $\mathcal{X}$ ,

\* Работа выполнена при поддержке гранта ДВО РАН 06-III-A-01-015 и гранта НШ9004.2006.1.

т. е. максимальному  $n$  такому, что  $H_r^n(\mathcal{X}, \mathcal{A}) \neq 0$  для некоторого  $\tau_r$ -пучка  $\mathcal{A}$ . В частности, это так, если  $X$  — алгебраическое многообразие.

Пусть  $\mathcal{X} = (X, Y, r : X \times Y \rightarrow \{0, 1\})$  и  $\mathcal{X}' = (X', Y', r' : X' \times Y' \rightarrow \{0, 1\})$  — Чу-пространства. Морфизмом  $\mathcal{X}$  в  $\mathcal{X}'$  называется пара отображений  $(f : X \rightarrow X', g : Y' \rightarrow Y)$  такая, что для любых  $x$  и  $y'$ ,  $r'(f(x), y') = r(x, g(y'))$ .

**Теорема 2.** Пусть  $(f : X \rightarrow X', g : Y' \rightarrow Y)$  — морфизм Чу-пространств,  $\alpha' = \{X'_{y'} \mid y' \in Y'\}$ ,  $\beta = \{Y_x \mid x \in X\}$ ,  $S(X)$  — множество всех подмножеств  $X$ , упорядоченное по включению.

1) Для любого абелева предпучка  $\mathcal{A}$  на  $S(X)$  такого, что  $\mathcal{A}(\emptyset) = 0$ , существует спектральная последовательность со вторым членом  $E_2^{pq} = H_1^p(\mathcal{X}', \mathcal{E}_f^q(\mathcal{A}))$ , сходящаяся к  $H^*(f^{-1}(\alpha')_X, \mathcal{A})$ , где предпучок  $\mathcal{E}_f^q(\mathcal{A})$  на  $S(X')$  задаётся равенством

$$\mathcal{E}_f^q(\mathcal{A})(C) = H^q(f^{-1}(\alpha')_X \wedge f^{-1}(C), \mathcal{A}) = H^q(f^{-1}(\alpha')_X \wedge f^{-1}(C), S_l(\mathcal{A})).$$

Здесь семейство  $\gamma_X$  получается из семейства  $\gamma$  подмножеств  $X$  добавлением всех одноточечных подмножеств  $X$ , не входящих в объединение  $\gamma$ .

2) Для любого абелева предпучка  $\mathcal{B}$  на  $S(Y')$  такого, что  $\mathcal{B}(\emptyset) = 0$ , существует спектральная последовательность со вторым членом  $E_2^{pq} = H_1^p(\mathcal{X}, \mathcal{E}_g^q(\mathcal{B}))$ , сходящаяся к  $H^*(g^{-1}(\beta)_{Y'}, \mathcal{B})$ , где предпучок  $\mathcal{E}_g^q(\mathcal{B})$  на  $S(Y)$  задаётся равенством

$$\mathcal{E}_g^q(\mathcal{B})(C) = H^q(g^{-1}(\beta)_{Y'} \wedge g^{-1}(C), \mathcal{B}) = H^q(g^{-1}(\beta)_{Y'} \wedge g^{-1}(C), S_r(\mathcal{B})).$$

## Литература

1. Скурихин Е. Е. Пучковые когомологии предпучков множеств и некоторые их приложения // Тр. Матем. института им. В. А. Стеклова РАН. 1992. Т. 193. С. 169–173.
2. Скурихин Е. Е. Пучковые когомологии и полные брауэровы решетки. Владивосток: Дальнаука, 1993. 218 с.
3. Скурихин Е. Е. Пучковые когомологии и размерность равномерных пространств // Успехи мат. наук. 2003. Т. 58, вып. 4. С. 157–158.
4. Скурихин Е. Е. Пучковые когомологии и размерность упорядоченных множеств // Тр. Матем. института им. В. А. Стеклова РАН. 2002. Т. 239. С. 289–317.
5. Pratt V. R. Chu spaces. Notes for school on category theory and applications. Technical report, University of Coimbra, Portugal, 1999.
6. Barr M. \*-Autonomous categories // In: Lecture Notes in Mathematics. V. 752. Springer-Verlang, 1979.
7. Скурихин Е. Е., Сухонос А. Г. Когомологии и размерности пространств Чу // Дальневосточный мат. журнал. 2005. Т. 6, № 1–2. С. 14–22.

## О КОНТАКТНЫХ СТРУКТУРАХ НА НЕКОТОРЫХ ПЯТИМЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ

Я. В. Славолубова

*Кемеровский государственный университет, Кемерово; jar1984@mail.ru*

Дифференцируемое  $(2n + 1)$ -мерное многообразие  $M$  класса  $C^\infty$  называется *контактным*, если на нём задана 1-форма  $\eta$  такая, что  $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$  всюду на  $M^{2n+1}$ . Контактная форма  $\eta$  определяет на многообразии  $M^{2n+1}$  распределение  $E = \{X \in TM : \eta(X) = 0\}$  размерности  $2n$ , которое называется *контактным*. Кроме того, контактное многообразие  $M^{2n+1}$  имеет всюду ненулевое векторное поле, обозначаемое  $\xi$ , которое определяется свойствами:  $\eta(\xi) = 1$  и  $d\eta(\xi, X) = 0$  для всех векторных полей  $X$  на  $M^{2n+1}$ . Векторное поле  $\xi$  называется *полем Роба* или *характеристическим векторным полем контактной структуры*. Если  $M^{2n+1}$  — контактное многообразие с контактной формой  $\eta$ , то *контактной метрической структурой* называется четвёрка  $(\eta, \xi, \varphi, g)$  со свойствами: 1)  $(\varphi)^2 = -I + \eta \otimes \xi$ ; 2)  $d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y)$ ; 3)  $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$ . Риманова метрика  $g$  контактной метрической структуры называется *ассоциированной* [1]. Из свойства 3) следует, что ассоциированная метрика для контактной структуры  $\eta$  полностью определяется аффином  $\varphi$ , поэтому ассоциированные метрики будем задавать аффином  $\varphi$ .

Если в качестве многообразия рассматривается группа Ли, то естественно рассматривать левоинвариантные контактные структуры. В этом случае контактная форма  $\eta$ , векторное поле Роба  $\xi$ , аффином  $\varphi$  и ассоциированная метрика  $g$  задаются своими значениями в единице.

В работе [2] дана классификация контактных структур на пятимерных группах Ли. В этой классификации имеются несколько групп Ли, которые задаются двумя параметрами. В данной работе изучается контактная структура на одной из таких параметрических групп Ли. А именно рассмотрена группа Ли  $G$ , для которой алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  имеет базис  $e_1, \dots, e_5$  со следующими скобками Ли:  $[e_1, e_2] = e_3$ ,  $[e_1, e_5] = -e_1$ ,  $[e_2, e_5] = -pe_2$ ,  $[e_3, e_5] = -(1+p)e_3$ ,  $[e_4, e_5] = qe_4$ . Алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  является разрешимой и не имеет центра. Её первый производный идеал  $D\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$  образован векторами  $e_1, e_2, e_3, e_4$ . Идеал  $D\mathfrak{g}$  имеет двумерный центр  $Z(D) = \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_4$ . Второй производный идеал  $D^2\mathfrak{g} = [D\mathfrak{g}, D\mathfrak{g}]$  образован вектором  $e_3$ . Данная группа Ли имеет матричную реализацию, общий элемент  $S$  данной группы Ли имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} e^{(1+p)x_5} & -x_2 e^{x_5} & x_1 e^{px_5} & 2x_3 & 0 & 0 \\ 0 & e^{x_5} & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{px_5} & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{qx_5} \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -x_2 & x_1 & 2x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Из этого матричного представления легко видеть, что группа Ли  $G$  является полупрямым произведением группы  $G_1$  и  $\mathbb{R}$ . Группа  $G_1$  является прямым произведением группы Гейзенберга  $H^3$  и  $\mathbb{R}$ . Общий элемент  $S_1$  группы  $G_1$  указан в формуле (1).

Базис  $e_1, \dots, e_5$  состоит из матриц, соответствующих координатному базису  $\partial/\partial x_i$ ,  $i=1, \dots, 5$ . Согласно классификации [2] контактная структура задаётся левоинвариантной 1-формой  $\eta = e_3^* + e_4^*$ . Из условия  $\eta \wedge (d\eta)^n = 2(1+p+q)e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_5^* \neq 0$  легко видеть, что данная алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  является контактной, если  $1+p+q \neq 0$ . Дифференциал 1-формы  $\eta$  имеет вид  $d\eta = -e_1^* \wedge e_2^* + (1+p)e_3^* \wedge e_5^* - qe_4^* \wedge e_5^*$ . Следовательно, поле Роба  $\xi$  имеет вид  $\xi = \frac{q}{1+p+q}e_3 + \frac{1+p}{1+p+q}e_4$ . Легко видеть, что поле Роба лежит в центре идеала  $D\mathfrak{g}$ .

**Замечание.** Любая 1-форма  $\eta$  вида  $\eta = \alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \alpha_3 e_3^* + \alpha_4 e_4^* + \alpha_5 e_5^*$  является контактной, если  $\alpha_3, \alpha_4, 1+p+q \neq 0$ . Действительно,  $\eta \wedge (d\eta)^n = 2\alpha_3^2 \alpha_4 (1+p+q) e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_4^* \wedge e_5^* \neq 0$ .

Если мы будем считать базис  $e_1, \dots, e_5$  ортонормированным, то соответствующая левоинвариантная риманова метрика не задаёт контактную метрическую структуру. Выберем другую левоинвариантную метрику  $g_0$  на  $G$ , считая базис  $E_1 = e_1$ ,  $E_2 = e_2$ ,  $E_3 = e_5$ ,  $E_4 = \frac{e_3 - e_4}{1+p+q}$ ,

$E_5 = \frac{qe_3+(1+p)e_4}{1+p+q}$  ортонормированным. Базис контактного распределения  $E^4$  составляют следующие векторы:  $E_1, E_2, E_3, E_4$ . Скобки Ли имеют вид:  $[E_1, E_2] = (1+p)E_4 + E_5$ ,  $[E_1, E_3] = -E_1$ ,  $[E_2, E_3] = -pE_2$ ,  $[E_3, E_4] = -(1+p-q)E_4 + E_5$ ,  $[E_3, E_5] = q(1+p)E_4$ .

**Теорема 1.** *Контактная риманова метрика  $g_0$  имеет знакопеременную секционную кривизну при любых значениях параметров  $p$  и  $q$ . Скалярная кривизна имеет следующее выражение*

$$s = -q^2p - \frac{1}{2}p^2q^2 - \frac{5}{2}q^2 + 5qp + 5q - 11p - \frac{13}{2}p^2 - \frac{15}{2}.$$

Скалярная кривизна достигает максимального значения, равного  $s_0 = -2,709183639$  при  $p = -0,7141901951$  и  $q = 0,3501123282$ . Контактная метрическая структура является  $k$ -контактной структурой при  $p \neq 1, q = 0$  и при  $p = -1, q \neq 0$ . Контактная метрическая структура является структурой Сасаки при  $p = 1, q = 0$ . В частности при  $p = 1, q = 0$  получается  $k$ -контактная структура Сасаки и матрица оператора Риччи имеет диагональный вид  $\text{Ric}(g) = \text{diag}(-\frac{13}{2}, -\frac{13}{2}, -\frac{13}{2}, -\frac{13}{2}, 1)$ .

**Ассоциированные контактные метрические структуры на группе  $(G, \eta)$ .** На контактной алгебре Ли можно определить аффиноор  $\varphi$ , который обладает свойствами:  $\varphi^2|_{E^4} = -I$ ,  $\varphi\xi = 0$  и  $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ . Отметим, что такой аффиноор задается неоднозначно. В качестве примера можно взять естественный аффиноор  $\varphi_0$ ,  $\varphi_0(E_1) = E_2$ ,  $\varphi_0(E_2) = -E_1$ ,  $\varphi_0(E_3) = E_4$ ,  $\varphi_0(E_4) = -E_3$ ,  $\varphi_0(E_5) = 0$ . Как уже ранее отмечалось, при фиксированной контактной форме  $\eta$  можно найти ассоциированную метрику  $g$  по аффиноору  $\varphi$  по формуле  $g(X, Y) = d\eta(\varphi X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$ .

В работе [3] показано, что при выбранной ассоциированной метрике  $g_0$  и аффинооре  $\varphi_0$ , каждый другой аффиноор  $\varphi$  задается оператором  $P$  на алгебре Ли, который обладает свойствами: 1)  $P$  антикоммутирует с аффиноором  $\varphi_0$ ,  $P\varphi_0 = -\varphi_0P$ ; 2)  $P$  симметричен относительно метрики  $g_0$ , соответствующей  $\varphi_0$ ; 3)  $I - P^2$  невырожденный. Тогда  $\varphi = \varphi_0(I + P)(I - P)^{-1}$ . Из свойств оператора  $P$  следует, что он имеет следующую матрицу

$$P = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} s & t \\ t & -s \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Соответствующие ассоциированные аффиноор и метрика зависят от 8 параметров  $u, v, x, y, a, b, p, q$ . Полное описание таких метрик затруднительно. Поэтому мы рассмотрим такие метрики при некоторых особых значениях параметров  $(p, q)$ . Будем также рассматривать классы ассоциированных метрик, для которых аффиноор  $\varphi$  задается матрицей  $P$  трех типов

$$P|_{E^4} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix}, P|_{E^4} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P|_{E^4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}. \quad (3)$$

**Теорема 2.** *При  $p \neq -1, q = 0$  и при  $p = -1, q \neq 0$  ассоциированная контактная метрическая структура, соответствующая аффиноору  $\varphi$ , заданному оператором общего вида (2), является  $k$ -контактной, а при  $p = 1, q = 0$  является структурой Сасаки независимо от параметров  $u, v, x, y, a, b$ .*

Для особых значений параметров  $p$  и  $q$  ( $p \neq -1, q = 0$ ;  $p = -1, q \neq 0$  и  $p = 1, q = 0$ ) вычислены характеристики кривизны ассоциированных метрик для указанных выше трех типов (3).

### Литература

1. Blair D. E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Mathematics. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1976.
2. Diatta A. Left invariant contact structures on Lie groups. Preprint. arXiv: math. DG/0403555 v2 24 Sep 2004.
3. Смоленцев Н. К. Пространства римановых метрик // Современная математика и её приложения. 2003. Т. 31. С. 69–146.



# МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СТЕПЕННЫМ ВЕСОМ

Е. С. Смаилов

Институт прикладной математики, Караганда; *esmailov@mail.ru*

В данном докладе будет рассмотрено пространство с весом  $\Lambda_{pq}$ .

Пусть  $0 < p, q < +\infty$ . Будем говорить, что измеримая на  $\mathbb{R}_n$  по Лебегу функция  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  принадлежит пространству  $\Lambda_{pq}$ , если

$$\|f\|_{\Lambda_{pq}} = \left( \int_{\mathbb{R}_n} |f(x)|^q |x|^{n\left(\frac{q}{p}-1\right)} dx \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty$$

при  $0 < q < +\infty, 0 < p \leq +\infty$ ,

$$\|f\|_{\Lambda_{p\infty}} = \sup_{x \in \mathbb{R}_n} |x|^{\frac{n}{p}} |f(x)| < +\infty$$

при  $q = +\infty, 0 < p \leq +\infty$ . Через  $F$  и  $F^{-1}$  обозначим прямое и обратное преобразования Фурье. Функция  $\varphi(x)$  является мультипликатором из  $\Lambda_{p_0q_0}$  в  $\Lambda_{p_1q_1}$ , если оператор  $T_\varphi(f) = F^{-1}(\varphi F f)$  ограничен из  $\Lambda_{p_0q_0}$  в  $\Lambda_{p_1q_1}$  (см. [1]).

Множество всех мультипликаторов из  $\Lambda_{p_0q_0}$  в  $\Lambda_{p_1q_1}$  обозначим через  $M_{p_0q_0}^{p_1q_1}$ . Множество  $M_{p_0q_0}^{p_1q_1}$  является линейным нормированным пространством с нормой

$$\|\varphi\|_{M_{p_0q_0}^{p_1q_1}} \stackrel{def}{=} \|T_\varphi\|_{\Lambda_{p_0q_0} \rightarrow \Lambda_{p_1q_1}}.$$

Для пространства мультипликаторов  $M_{p_0q_0}^{p_1q_1}$  справедливы следующие теоремы вложения, позволяющие описывать данное пространство мультипликаторов в терминах пространств Лоренца и О. В. Бесова.

**Теорема 1.** Пусть  $1 < p_0 < 2 < p_1, p_0 \leq q_0, q_1 \leq p_1, \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{s} = \left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0}\right)_+$ . Тогда имеет место вложение  $L_{rs} \hookrightarrow M_{p_0q_0}^{p_1q_1}$ .

**Теорема 2.** Пусть  $1 \leq p_0 \leq q_0 \leq q_1 \leq p_1 < 2, \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{r} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{s} = \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}$ . Тогда справедливо вложение

$$B_{rs}^\alpha \hookrightarrow M_{p_0q_0}^{p_1q_1}.$$

**Теорема 3.** Пусть  $2 < p_0 \leq q_0 \leq q_1 \leq p_1, \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{2}, \frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}, 1 - \frac{1}{s} = \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}$ . Тогда справедливо вложение

$$B_{rs}^\alpha \hookrightarrow M_{p_0q_0}^{p_1q_1}.$$

**Теорема 4.** Пусть  $1 < p_0 < p_1, 1 < q_1 \leq q_0, \frac{1}{r} - \frac{\alpha}{n} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}, \frac{1}{s} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0}$ ,

$$\frac{\alpha}{n} > \max \left\{ \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_0} - \frac{1}{p_0}, \text{dist} \left( \frac{1}{2}, \left[ \frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_0} \right] \right) \right\}.$$

Тогда  $B_{rs}^\alpha \hookrightarrow M_{p_0q_0}^{p_1q_1}$ .

**Теорема 5.** Пусть  $1 \leq p_0 < 2 \leq p_1 \leq +\infty$  и  $\frac{2}{2-p_0} > \frac{p_1}{p_0}, q_1 \leq p_1, p_0 \leq q_0, \frac{1}{r} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} < \frac{1}{2}, \frac{1}{s} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_0} > 0$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существует функция  $\psi_\varepsilon(x)$  такая, что

$$\psi_\varepsilon(x) \in L_{r,s+\varepsilon}, \quad \text{но} \quad \psi_\varepsilon(x) \notin M_{p_0q_0}^{p_1q_1}.$$

## Литература

1. Трибелль Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

## О ШКОЛЕ ЛАВРЕНТЬЕВА — БЕЛИНСКОГО ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

**А. В. Сычѐв**

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; btp@math.nsc.ru*

Начиная с основополагающих работ М. А. Лаврентьева и П. П. Белинского 1930–1950-х годов по плоским квазиконформным отображениям прослеживается развитие этой школы за полувековой период её существования. Обзор результатов школы позволяет заключить, что в настоящее время созданное ею направление представляет собой далеко продвинутый раздел геометрической теории функций, имеющий самые различные приложения как в самой математике, так и в механике.

## ХИРУРГИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ С КАСПАМИ\*

В. В. Таркаев

Челябинский государственный университет, Челябинск;  
Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург;  
trk@csu.ru

Первые таблицы трехмерных гиперболических многообразий с каспами были построены Дж. Уиксом в его диссертации 1985 г. Несколько позднее составление аналогичных таблиц было начато С. В. Матвеевым и А. Т. Фоменко. Подробные описания можно найти в [1, 2]. В настоящее время интерес к этим таблицам возрос из-за того, что они крайне необходимы для разумного оформления результатов работы компьютерной программы «Распознаватель трехмерных многообразий». В ее основе лежат разработанные С. Матвеевым [3] алгоритмы преобразования и распознавания многообразий, представленных своими специальными спайнами.

Программа распознает многообразия весьма эффективно. Если на выходе появляется многообразие Зейферта или граф-многообразие Вальдхаузена, то никаких проблем с его описанием не возникает, поскольку такие многообразия полностью классифицированы. Если же в ответе появляется гиперболическое многообразие, то приходится либо ограничиться выдачей частичной информации (например, гиперболического объема и группы гомологий), либо выводом его представления в виде заполнения Дена одного из табличных многообразий с каспами. Трудность состоит в том, что число таких табличных многообразий довольно велико и что нет канонического способа введения систем координат на торах, отрезающих каспы. Это делает эффективность описанных представлений весьма условной. Особенно отчетливо эта трудность проявляется в случае, когда исследуемое многообразие получается склеиванием нескольких блоков, как гиперболических, так и нет. Тогда приходится ссылаться на таблицы по несколько раз, а матрицы склеивания записывать в неких условных координатах.

Естественный путь решения этой проблемы состоит в представлении гиперболических блоков в виде частичных заполнений Дена дополнительных пространств зацеплений в 3-сфере. Мы будем называть такие представления *хирургическими*. Знание хирургических представлений табличных гиперболических многообразий с каспами чрезвычайно полезно как для эффективной работы «Распознавателя», так и для нахождения хирургических представлений исследуемых многообразий. Это объясняется следующими причинами.

Во-первых, знание хирургического представления трехмерного многообразия с торическим краем позволяет описать его весьма экономным образом — достаточно указать соответствующее зацепление и оснащения некоторых его компонент.

Во-вторых, оставшиеся свободными компоненты края обладают каноническими системами координат, наследуемыми из стандартных координат типа (меридиан, главная параллель) на крае дополнительного пространства зацепления. Это позволяет задавать параметры заполнений Дена для таких многообразий без дополнительных объяснений, какие именно координаты имеются в виду.

Цель настоящей работы состоит в нахождении хирургических представлений для большого класса табличных гиперболических многообразий с одним или двумя каспами и применении полученных результатов для описания замкнутых многообразий.

Разумеется, какое-нибудь хирургическое представление каждого конкретного табличного многообразия можно найти вручную. Однако, хотелось бы найти самые экономные представления, причем так, чтобы они были организованы в не слишком большое число многопараметрических серий.

Основная идея решения этой задачи состоит в следующем. Вместо того, чтобы перебирать табличные многообразия и находить их хирургические представления, нужно поступить наоборот: перебирать оснащенные зацепления, распознавать отвечающие им многообразия и среди них отбирать табличные.

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00293).

Хирургии рассматривались вдоль десяти гиперболических зацеплений из трех компонент, имеющих диаграммы с  $\leq 8$  пересечениями. Из них два зацепления имеют по 6 пересечений, одно — 7 и семь по 8 пересечений. Всего гиперболических зацеплений с  $\leq 8$  пересечениями не 10, а 11, но зацепление  $8_8^3$  можно не рассматривать, так как его дополнительное пространство гомеоморфно дополнительному пространству зацепления  $6_1^3$  (мы пользуемся известной таблицей Д. Рольфсена).

Всего было рассмотрено более 30 тысяч многообразий, задаваемых как перестройки трехмерной сферы вдоль этих десяти зацеплений. В результате были найдены хирургические представления для 1942 из 4587 многообразий с 1 каспом и для 118 из 225 многообразий с 2 каспами. Причем 1452 из них (1380 с 1 каспом и 72 с 2 каспами) могут быть представлены как перестройки вдоль единственного зацепления  $6_1^3$ .

Доказательство следующей теоремы было получено с помощью анализа полученных результатов.

**Теорема 1.** Любое замкнутое ориентируемое трехмерное гиперболическое многообразие сложности  $\leq 12$  получается рациональной перестройкой трехмерной сферы по хотя бы одному из 10 гиперболических зацеплений типа  $n_k^3$ , где  $n = 6, 7, 8$ . Аналогичный факт верен и для гиперболических блоков, входящих в составные многообразия сложности  $\leq 12$ : каждый такой блок получается заполнениями Дена некоторых компонент зацеплений указанного типа.

Более подробно результаты представлены в приводимых ниже таблицах. Опишем структуру первой таблицы. В ее первом столбце перечислены возможные значения сложности табличных многообразий с одним каспом. В следующих 10 столбцах указаны числа табличных многообразий каждой сложности, полученных перестройками по двум компонентам упомянутых 10 зацеплений. Два последних столбца показывают, сколько табличных многообразий получается перестройкой хотя бы по одному из 10 зацеплений (число  $l_n^1$ ), и общее число  $W_n^1$  табличных многообразий сложности  $n$ . Вторая таблица имеет аналогичную структуру.

$n$	$6_1^3$	$6_2^3$	$7_1^3$	$8_1^3$	$8_2^3$	$8_3^3$	$8_4^3$	$8_5^3$	$8_6^3$	$8_9^3$	$l_n^1$	$W_n^1$
2	2	2	2	0	0	1	1	0	0	2	2	2
3	9	6	8	5	6	2	2	4	0	6	9	9
4	45	17	20	12	17	3	4	4	2	18	51	52
5	146	34	44	30	39	9	9	13	4	44	191	223
6	405	63	68	63	74	20	17	27	5	102	558	913
7	773	118	106	95	122	33	37	51	14	207	1131	3388
Итого	1380	240	248	205	258	68	70	99	25	379	1942	4587

**Таблица 1.** Число найденных хирургических представлений табличных многообразий с 1 каспом.

$n$	$6_1^3$	$6_2^3$	$7_1^3$	$8_1^3$	$8_2^3$	$8_3^3$	$8_4^3$	$8_5^3$	$8_6^3$	$8_9^3$	$l_n^2$	$W_n^2$
4	4	1	1	1	1	0	0	0	0	1	4	4
5	10	1	1	3	1	0	0	1	0	1	11	11
6	19	1	2	8	1	1	1	0	0	3	33	48
7	39	3	4	16	1	2	1	2	1	7	70	162
Итого	72	6	8	28	4	3	2	3	1	12	118	225

**Таблица 2.** Число найденных хирургических представлений табличных многообразий с 2 каспами.

### Литература

1. Callahan P. J., Hilbrand M. V., Weeks J. R. A census of cusped hyperbolic 3-manifolds // Math. Comp. 1999. V. 68, № 225. P. 321–332.
2. Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Изощренгетические поверхности интегрируемых гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий // Успехи математических наук. 1988. Т. 43, № 1. С. 5–22.
3. Matveev S. V. Algorithmic topology and classification of 3-manifolds // Springer ACM-monographs. V. 9. 2003. 480 pp.

# ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ ГРАФ-МНОГООБРАЗИЙ\*

Е. А. Фоминых

Челябинский государственный университет, Челябинск;  
Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург;  
fominukh@csu.ru

Точные значения сложности (см. [1]) известны только для конечного числа замкнутых ориентируемых трёхмерных многообразий (см. [2]). В работах [3, 4] построены верхние оценки сложности для линзовых пространств и замкнутых ориентируемых многообразий Зейферта. Оказалось, что предложенные оценки совпадают с истинным значением сложности, если последнее не превосходит 12. В данной работе мы строим верхние оценки сложности для граф-многообразий.

Граф-многообразия Вальдхаузена получаются из многообразий Зейферта склеиванием их граничных торов. Граф-многообразия удобно задавать в виде оснащённых молекул. *Оснащённой молекулой* называется граф, вершинам которого соответствуют многообразия Зейферта, а рёбрам — склейки их граничных торов. Мы предполагаем, что каждая вершина молекулы содержит полную информацию о соответствующем зейфертовом многообразии и системах координат на его граничных торах. Каждое ребро молекулы ориентировано и помечено матрицей порядка 2 с определителем  $\pm 1$ , задающей соответствующий гомеоморфизм.

Каждое граф-многообразие допускает различные представления в виде оснащённых молекул. В частности, можно согласованным образом изменять вторые параметры особых слоев многообразий Зейферта и матрицы на ребрах. Будем называть оснащённую молекулу приведённой, если каждая её вершина представлена в виде

$$(F, (p_1, q_1), \dots, (p_k, q_k), (1, t)),$$

где  $k$  — число особых слоев,  $F$  — база многообразия Зейферта с  $d$  компонентами края. Кроме того, все параметры особых слоев приведены, т. е.  $p_i > q_i > 0$ , а параметр  $t$  удовлетворяет условию

$$\chi(F) - k \leq t \leq 1 - d - \chi(F).$$

Опишем правило, сопоставляющее каждой связной приведённой молекуле  $\Gamma$  целое число  $c^*(\Gamma)$ . Каждой вершине молекулы  $\Gamma$  сопоставим число  $6(1 - \chi(F)) - 3d + \sum_{i=1}^k (S(p_i, q_i) + 1)$ , где  $S(p, q)$  — сумма всех неполных частных в разложении числа  $p/q$  в непрерывную дробь. Каждому ребру сопоставим число  $\max\{S(|a| + |b|, |c| + |d|) - 2, 0\}$ , где  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  — метка ребра. Пусть  $n$  — число вершин,  $m$  — число рёбер молекулы  $\Gamma$ . Тогда  $c^*(\Gamma)$  есть сумма всех чисел, сопоставленных вершинам и ребрам молекулы, плюс  $6(m - n + 1)$ .

**Теорема.** Пусть  $M$  — связное замкнутое ориентируемое неприводимое граф-многообразие Вальдхаузена, заданное приведённой молекулой  $\Gamma$ . Тогда сложность  $c(M)$  многообразия  $M$  удовлетворяет неравенству

$$c(M) \leq c^*(\Gamma).$$

## Литература

1. Matveev S. V. Complexity theory of three-dimensional manifolds // Acta Appl. Math. 1990. V. 19, № 2. P. 101–130.
2. Matveev S. V. Распознавание и табулирование трёхмерных многообразий // Докл. АН. 2005. Т. 400, № 1. С. 26–28.
3. Matveev S. V. Algorithmic topology and classification of 3-manifolds. Springer, 2003.
4. Martelli B., Petronio C. Complexity of geometric 3-manifolds // Geom. Dedicata. 2004. V. 108. P. 15–69.

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05–01–00293).

# ПОВЕДЕНИЕ ВЕКТОРНОЙ СЛОЖНОСТИ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ПРИ РАЗРЕЗАНИИ ПО ПОВЕРХНОСТИ\*

О. Н. Шатных

Челябинский государственный университет, Челябинск; shon@csu.ru

Пусть  $M$  — компактное трехмерное многообразие. Под *сложностью* многообразия  $M$  (обозначается  $c(M)$ ) понимается число истинных вершин его минимального почти простого спайна. Эта характеристика не увеличивается при разрезании трехмерного многообразия по несжимаемой гранично несжимаемой поверхности (см. [1]). Решается задача — расширить понятие сложности таким образом, чтобы при разрезании по несжимаемой гранично несжимаемой поверхности эта характеристика всегда уменьшалась.

Напомним, что собственный диск  $D$  в многообразии  $M$  называется *существенным*, если его граничная окружность  $\partial D$  нетривиальна на  $\partial M$ .

**Определение 1.**  $D$ -корнем (сердцевинной [1]) неприводимого трехмерного многообразия  $M$  называется гранично неприводимое трехмерное многообразие  $R(M)$ , ни одна из связных компонент которого не гомеоморфна трехмерному шару, и  $R(M)$  получено из  $M$  с помощью следующих операций:

- 1) разрезание многообразия по существенному диску;
- 2) отбрасывание связной компоненты, гомеоморфной трехмерному шару.

Для любого неприводимого трехмерного многообразия  $D$ -корень существует и единственен с точностью до изотопии (см. [1]). Многообразие может быть получено из своего  $D$ -корня добавлением трехмерных шаров и приклеиванием ручек индекса 1.

**Замечание.** Пусть поверхность  $F$  — компонента края многообразия  $M$ . Если  $F$  несжимаема, то она не содержит граничных окружностей существенного диска. Следовательно, поверхность  $F$  сохраняется при разрезании по существенным дискам и является компонентой края корня  $R(M)$ . Обратное также верно: если  $F$  совпадает с компонентой края корня, то  $F$  несжимаема.

**Определение 2.**  $I$ -компонентой многообразия  $M$  будем называть компоненту связности его  $D$ -корня вида  $G \times I$ , где  $G$  — замкнутая ориентируемая поверхность либо вида  $G \times I$ , где  $G$  — замкнутая неориентируемая поверхность. Поверхность  $G$  в обоих случаях называется *базой*  $I$ -компоненты.

**Определение 3.**  $I$ -числом трехмерного многообразия  $M$  будем называть число  $I(M) = 3I_0^+(M) + I_1^+(M) + I_2^+(M) + 4I_0^-(M) + 2I_1^-(M)$ , где  $I_0^+(M)$  — число  $I$ -компонент многообразия  $M$  с ориентируемой базой и без несжимаемых поверхностей края,  $I_1^+(M)$  — число  $I$ -компонент многообразия  $M$  с ориентируемой базой и одной несжимаемой поверхностью края,  $I_2^+(M)$  — число  $I$ -компонент многообразия  $M$  с ориентируемой базой и двумя несжимаемыми поверхностями края,  $I_0^-(M)$  — число  $I$ -компонент многообразия  $M$  с неориентируемой базой и без несжимаемых поверхностей края,  $I_1^-(M)$  — число  $I$ -компонент многообразия  $M$  с неориентируемой базой и одной несжимаемой поверхностью края.

**Определение 4.** *Расширенной сложностью* компактного трехмерного многообразия  $M$  называется пятерка  $\bar{c}(M) = (c(M), c_1(M), -\partial_I(M), I(M), g^{(2)}(\partial M))$ , где  $c(M)$  — обычная сложность многообразия  $M$ ,  $c_1(M)$  — минимальное число тройных окружностей, взятое по всем почти простым спайнам многообразия  $M$  с  $c(M)$  вершинами,  $\partial_I(M)$  — число несжимаемых поверхностей в  $\partial M$ , которые не лежат в  $I$ -компонентах многообразия  $M$ ,  $I(M)$  —  $I$ -число многообразия  $M$ ,  $g^{(2)}(\partial M) = \sum_i g^2(F_i)$ , где  $g(F_i)$  — род компонент  $F_i \subset \partial M$ , и суммирование ведется по всем компонентам края  $\partial M$ .

Наборы рассматриваются в лексикографическом порядке.

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00293).

Например,  $S^3$  имеет расширенную сложность  $(0, 0, 0, 0, 0)$ , а  $I$ -расслоения над замкнутой поверхностью  $F = (0, 0, 0, 2, (n - 1)^2)$ , если  $F$  — связная сумма  $n$  проективных плоскостей, и  $(0, 0, 0, 1, 2g^2)$ , если  $F$  — ориентируемая поверхность рода  $g$ .

**Определение 5.** Собственную поверхность  $F \subset M$  будем называть *существенной поверхностью*, если  $F$  несжимаема, гранично несжимаема, не параллельна краю  $\partial M$  и отлична от тривиальных сферы и диска.

Существует тесная связь между разбиениями на ручки и спайнами многообразия  $M$ . Зная спайн многообразия, можно построить его разбиение на ручки и обратно ([1], п. 4.2).

Через  $M_F$  обозначим трехмерное многообразие, полученное из многообразия  $M$  разрезанием вдоль собственной поверхности  $F$ .

**Лемма 1.** Пусть разбиение на ручки  $\xi$  неприводимого трехмерного многообразия  $M$  отвечает его почти простому минимальному клеточному спайну  $P$ ,  $F$  — связная существенная нормальная поверхность в  $M$ . Тогда  $\bar{c}(M_F) < \bar{c}(M)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $F$  — связная существенная поверхность в неприводимом трехмерном многообразии  $M$ . Тогда  $\bar{c}(M_F) < \bar{c}(M)$ .

Идея доказательства состоит в следующем. Пусть  $\xi$  — разбиение на ручки трехмерного многообразия  $M$ , соответствующее его почти простому минимальному спайну. Нормализуем поверхность  $F$ . Процедура нормализации заключается в сжатии трубок и туннелей и удалении получающихся дисков и сфер.

Показываем, что нормализация поверхности  $F$  не меняет первые две компоненты расширенной сложности и не уменьшает остальные, а затем, используя лемму 1, заключаем, что  $\bar{c}(M_F) < \bar{c}(M)$ .

**Теорема 2.** Процесс разрезания неприводимого трехмерного многообразия по существенной поверхности конечен.

Доказательство этой теоремы основано на следующих фактах. Во-первых, разрезание по существенной поверхности уменьшает расширенную сложность многообразия, т. е. уменьшает одну из компонент этой сложности. Во-вторых, все компоненты сложности ограничены снизу. Компоненты сложности, кроме третьей, неотрицательны. Третья компонента  $-\partial_I(M) \geq -(4c(M) + 3c_1(M))$  (так как к каждой истинной вершине спайна многообразия  $M$  подходит не более 4 компонент края многообразия, а к каждой его тройной линии не более 3). Следовательно, число шагов, уменьшающих каждую компоненту конечно.

Так как шагов, уменьшающих расширенную сложность трехмерного многообразия, конечное число, то процесс разрезания многообразия по существенным поверхностям также конечен.

## Литература

1. *Matveev S.* Algorithmic topology and classification of 3-manifolds. Springer ACM-monographs, V. 9. 2003.
2. *Hog-Angeloni C., Matveev S.* Roots of 3-manifolds and cobordisms // MPIM-Preprint. 2005. № 26. arXiv:math.GT/0504223.
3. *Shatnykh O.* The extended complexity of three-manifolds // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2005. V. 2. С. 194–195.
4. *Шатных О. Н.* Расширение сложности трехмерных многообразий // В кн.: Проблемы теоретической и прикладной математики. Тр. 38-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. С. 80–84.

## СПЕКТР Sol-МНОГООБРАЗИЙ В АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ\*

А. А. Яковлев

*Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа;  
yakovlevandrey@yandex.ru*

Пусть  $(M, F)$  — компактное многообразие со слоением,  $g$  — риманова метрика на  $M$ . Касательное расслоение  $TM$  к многообразию  $M$  представимо в виде прямой суммы  $TM = TF \oplus H$ , где  $TF$  — касательное расслоение к слоению  $F$  и  $H = TF^\perp$  — ортогональное дополнение к  $TF$ . Таким образом, метрику  $g$  можно записать в виде  $g = g_{TF} + g_H$ , где  $g_{TF}$  — ограничение метрики  $g$  на  $TF$  и  $g_H$  — ограничение метрики  $g$  на  $H$ .

Определим однопараметрическое семейство  $\{g_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$  римановых метрик на  $M$  по формуле

$$g_\varepsilon = g_{TF} + \varepsilon^{-2}g_H.$$

Для любого  $\varepsilon > 0$  рассмотрим оператор Лапласа — Бельтрами  $\Delta_\varepsilon$ , ассоциированный с метрикой  $g_\varepsilon$ . Оператор  $\Delta_\varepsilon$  является самосопряженным, эллиптическим дифференциальным оператором с положительно определенным, скалярным главным символом в гильбертовом пространстве  $L^2(M, g_\varepsilon)$  квадратично интегрируемых функций на  $M$ , наделенном скалярным произведением, индуцированным метрикой  $g_\varepsilon$ . Для любого  $\varepsilon > 0$  спектр оператора  $\Delta_\varepsilon$  состоит из собственных значений конечной кратности:

$$0 = \lambda_0(\varepsilon) < \lambda_1(\varepsilon) \leq \dots, \quad \lambda_j(\varepsilon) \rightarrow +\infty \text{ при } j \rightarrow \infty.$$

Функция распределения спектра  $N_\varepsilon(\lambda)$  оператора  $\Delta_\varepsilon$  задается формулой:

$$N_\varepsilon(\lambda) = \#\{j : \lambda_j(\varepsilon) < \lambda\}.$$

Рассмотрим действие дискретной группы  $\mathbb{Z}$  на цилиндре  $\widetilde{M}^3 = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ , определяемое диффеоморфизмом

$$T_A : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R},$$

задаваемым по формуле

$$T_A : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \\ z + 1 \end{pmatrix},$$

где  $(x, y)$  — стандартные периодические координаты по модулю 1 на торе  $\mathbb{T}^2$ ,  $z \in \mathbb{R}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  — такая матрица, что  $|\text{tr } A| > 2$ .

Sol-многообразием  $M_A^3$  называется факторпространство  $\widetilde{M}^3/\mathbb{Z}$ .

Известно, что  $\widetilde{M}^3$  может быть реализована как подгруппа Ли группы Ли  $\text{GL}(3, \mathbb{R})$ , состоящая из матриц вида

$$\gamma(u, v, w) = \begin{pmatrix} e^w & 0 & u \\ 0 & e^{-w} & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая алгебра Ли  $\mathfrak{m}^3$  является подалгеброй Ли алгебры Ли  $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ , состоящей из матриц вида

$$X(u, v, w) = \begin{pmatrix} w & 0 & u \\ 0 & -w & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ .

Римановым Sol-многообразием  $M_A^3$  назовем пару  $(G_A \backslash \widetilde{M}^3, g)$ , где

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06-01-00208).



- $G_A$  — дискретная подгруппа группы Ли  $\widetilde{M}^3$  такая, что факторпространство  $G_A \backslash \widetilde{M}^3$  является компактным многообразием;
- $g$  — риманова метрика на  $G_A \backslash \widetilde{M}^3$ , чей подъем на  $\widetilde{M}^3$  инвариантен при левых сдвигах на элементы группы  $\widetilde{M}^3$  (такие метрики мы будем называть *локально левоинвариантными*).

Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим левоинвариантное векторное поле на  $\widetilde{M}^3$ , ассоциированное с

$$X(1, \alpha, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{m}^3.$$

Орбиты соответствующего векторного поля на  $M_A^3$  определяют одномерное слоение  $F$ .

Получены асимптотические формулы для функции  $N_\varepsilon(\lambda)$  в адиабатическом пределе, а именно

**Теорема.** При любом фиксированном  $\lambda \in \mathbb{R}$  и при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеют место асимптотические формулы:

1) при  $\alpha \neq 0$

$$N_\varepsilon(\lambda) = C_1 \varepsilon^{-1} \lambda + o(\varepsilon^{-1}),$$

2) при  $\alpha = 0$

$$N_\varepsilon(\lambda) = C_2 \varepsilon^{-2} \ln(\varepsilon) + o(\varepsilon^{-2} \ln(\varepsilon)),$$

где  $C_1, C_2$  — некоторые константы не зависящие от  $\varepsilon$ .

# HYPERBOLIC AND SPHERICAL VOLUMES OF OCTAHEDRA WITH SOME SYMMETRIES\*

N. V. Abrosimov

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk; abrosimov@math.nsc.ru*

The calculation of volume of polyhedron is very old and difficult problem. A few years ago it was shown by I. H. Sabitov [1] that the volume of Euclidean polyhedron is a root of algebraic equation whose coefficient are function depending of combinatorial type and lengths of polyhedra. In hyperbolic and spherical spaces the situation is much more complicated. Gauss, who is one of creators of hyperbolic geometry, use the word “*die Dschungel*” in relation with volume calculation in non-Euclidean geometry. Since Lobachevsky and Schläfli (see [2] and [3] respectively) the volume formula for biorthogonal tetrahedron (orthoscheme) is known. The volume of the Lambert cube and some other polyhedron were calculated by R. Kellerhals [4], D. A. Derevnin, A. D. Mednykh [5], A. D. Mednykh, J. Parker, A. Yu. Vesnin [6], and others. The volume of regular polyhedron was obtained by G. Martin [7]. The volume of ideal hyperbolic polyhedron in many important particular cases was found by E. Vinberg [8]. The general formula for volume of tetrahedron remained to be unknown for a long time. A few years ago Y. Choi, H. Kim [9], J. Murakami, U. Yano [10], and A. Ushijima [11] were succeeded in finding of a such formula. D. Derevnin, A. Mednykh [12] suggested an elementary integral formula for the volume of hyperbolic tetrahedron. It was discovered by J. Milnor [13] and by D. Derevnin, A. Mednykh and M. Pashkevich [14] that in the case when all faces of tetrahedron are mutually congruent the volume formula can be obtained in a very explicit way. Surprisingly, but in 1906 essential advance in volume calculation was achieved by Italian Duke Gaetano Sforza. Unfortunately, his outstanding work has been completely forgotten till recently.

In present paper we consider octahedron  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(a, b, c, d, A, B, C, D)$  with edge lengths  $a, b, c, d$  and corresponding dihedral angles  $A, B, C, D$  which has  $2|m$  symmetry (Fig. 1).

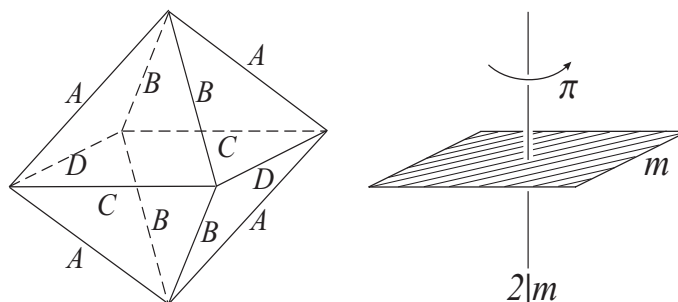


Fig. 1 Octahedron  $\mathcal{O}(a, b, c, d, A, B, C, D)$  with  $2|m$  symmetry.

**Theorem 1 (Galiulin, Mikhalev, Sabitov, 2004)** [15]. *Euclidean volume of octahedron with  $2|m$  symmetry is a root of equation*

$$Q(v) = v^8 + (4C^2D - 4CB^2 + 8CBA - 8CBD - 4CA^2 - 8CAD + 4CD^2 + 8B^3 - 8B^2A - 4B^2D - 8BA^2 + 8BAD + 8A^3 - 4A^2D)v^7$$

To find a volume of such octahedron in spherical space we obtain the following trigonometrical identity at first

**Theorem 2 (The Sine-Tangent Rule).** *Let  $\mathcal{O}(a, b, c, d, A, B, C, D)$  be a spherical octahedron with  $2|m$  symmetry. Then the following trigonometric rule holds*

$$\frac{\sin^2 A}{\tan^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\tan^2 b} = \frac{\sin^2 \frac{C+D}{2}}{\tan^2 \frac{c+d}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{C-D}{2}}{\tan^2 \frac{c-d}{2}} = \tan^2 \theta$$

---

\*This work was partially supported by RFBR (grant 06-01-00153), Integration project SB RAS – UB RAS and Leading scientific schools support programm (grant SS-8526.2006.1).

where  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  is a number defined by

$$\tan^2 \theta + \frac{(1+X)(1+Y)(1+Z)(1+W)}{X+Y+Z+W} = 0,$$

$$X = \cos A, Y = \cos B, Z = \cos \frac{C+D}{2} \text{ and } W = \cos \frac{C-D}{2}.$$

Thus, what we have realized is the important fact that a symmetric spherical octahedron is completely determined by its dihedral angles, hence  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(A, B, C, D)$ . With this identity we are able to prove the following

**Theorem 3.** *Let  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(A, B, C, D)$  be a spherical octahedron with  $2|m$  symmetry. Then the volume of  $\mathcal{O}$  is given by the formula*

$$V(\mathcal{O}) = \int_{\pi/2}^{\theta} \left( \operatorname{arth}(X \cos \tau) + \operatorname{arth}(Y \cos \tau) + \operatorname{arth}(Z \cos \tau) + \operatorname{arth}(W \cos \tau) \right) \frac{d\tau}{\cos \tau}$$

where  $X = \cos A$ ,  $Y = \cos B$ ,  $Z = \cos \frac{C+D}{2}$ ,  $W = \cos \frac{C-D}{2}$ , and  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  is a number defined by

$$\tan^2 \theta + \frac{(1+X)(1+Y)(1+Z)(1+W)}{X+Y+Z+W} = 0.$$

Analogous propositions like Theorem 2 and Theorem 3 take a place in hyperbolic case to.

### References

1. *Sabitov I. Kh.* The volume of polyhedron as a function of the lengths of its edges (Russian) // Vestnik Moskov. Univ. Ser. I (Mat. Mekh.). 1996. V. 6, № 113. P. 89–91. English translation in: Moscow Univ. Math. Bull. 1996. V. 6, № 51. P. 58–59.
2. *Lobatschefskij N. I.* Imaginäre Geometrie und ihre Anwendung auf einige Integrale // In: Deutsche Übersetzung von H. Liebmann, Leipzig: Teubner, 1904.
3. *Schläfli L.* Theorie der vielfachen Kontinuität // In: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Basel: Birkhäuser, 1950.
4. *Kellerhals R.* On the volume of hyperbolic polyhedra // Math. Ann. 1989. V. 285. P. 541–569.
5. *Derevnin D. A., Mednykh A. D.* On the volume of spherical Lambert cube. Preprint. arXiv: math.MG/0212301, 22 pp.
6. *Mednykh A. D., Parker J., Vesnin A. Yu.* On hyperbolic polyhedra arising as convex cores of quasi-Fuchsian punctured torus groups // In: Seoul National University: RIM-GARC Preprint Series 02–01, 2002.
7. *Martin G. J.* The volume of regular tetrahedra and sphere packings in hyperbolic 3-space // Math. Chronicle. 1991. V. 20. P. 127–147.
8. *Vinberg E. B.* Geometry II. New York: Springer-Verlag, 1993.
9. *Cho Yu., Kim H.* On the volume formula for hyperbolic tetrahedra // Discrete and Computational Geometry. 1999. V. 22. P. 347–366.
10. *Murakami J., Yano M.* On the volume of hyperbolic tetrahedron // Preprint. 2001. <http://faculty.web.waseda.ac.jp/murakami/papers/tetrahedronrev3.pdf>
11. *Ushijima A.* A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra // Preprint. 2002. <http://www.math.titech.ac.jp/Users/ushijima/welcome-e.html>
12. *Derevnin D. A., Mednykh A. D.* A formula for the volume of a hyperbolic tetrahedron. (Russian) // Usp. Mat. Nauk. 2005. V. 60, № 2. P. 346–348. English translation in: Russian Math. Surveys. 2005. V. 60, № 2. P. 346–348.
13. *Milnor J. W.* How to compute volume in hyperbolic space // In: Collected Papers. V. 1: Geometry. Publish or Perish, 1994. P. 189–212.
14. *Derevnin D. A., Mednykh A. D., Pashkevich M. G.* Volume of hyperbolic tetrahedron in hyperbolic and spherical spaces // Siber. Math. J. 2004. V. 45. P. 840–848.
15. *Galiulin R. V., Mikhalev S. N., Sabitov I. Kh.* Some applications of the formula for the volume of an octahedron // Math. Notes. 2004. V. 76, № 1. P. 25–40.

# ULTRARAPIDLY DECREASING ULTRADIFFERENTIABLE FUNCTIONS, WIGNER DISTRIBUTIONS, AND DENSITY MATRICES

J.-M. Aubry

*Laboratoire de Mathématiques, Université de Paris 12, Paris, France; jmaubry@math.cnrs.fr*

Let  $\omega : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  be a weight function satisfying modified Braun, Meise, Taylor [2] hypotheses:

- (i)  $\Omega : t \mapsto \omega(e^t)$  is convex
- (ii)  $\log(t) = o(\omega(t))$
- (iii)  $\omega(2t) = O(\omega(t))$
- (iv)  $\limsup \frac{\omega(t)}{t^2} \leq \frac{1}{2}$ .

Motivated by quantum optics, we consider Banach spaces  $\mathcal{S}_\omega$  of functions  $f$  satisfying

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (|f(x)| + |\widehat{f}(x)|) e^{\omega(x)} < \infty$$

then  $\mathcal{S}_{\{\omega\}} := \bigcup_{\epsilon > 0} \mathcal{S}_{\epsilon\omega}$  and  $\mathcal{S}_{(\omega)} := \bigcap_{N < +\infty} \mathcal{S}_{N\omega}$ , endowed respectively with the inductive limit and projective limit topologies (we show that both are complete). Let  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be the Fock orthonormal basis (Hermite functions) and  $H : f \mapsto (\langle f, h_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ . Our main result is the following (see [3] for the definition of *tame*).

**Theorem 1.** *If  $\limsup \frac{\omega(t)}{t^2} < \infty$ , then  $H$  is a tame isomorphism:  $\mathcal{S}_{\{\omega\}} \rightarrow \Lambda_{\{\omega\}}$ .*

*If  $\limsup \frac{\omega(t)}{t^2} = 0$ , then  $H$  is a tame isomorphism:  $\mathcal{S}_{(\omega)} \rightarrow \Lambda_{(\omega)}$ .*

These results are used to link decrease properties of density matrices to corresponding properties of the Wigner distribution.

## References

1. AUBRY, J.-M. Ultrarapidly decreasing ultradifferentiable functions, Wigner distributions and density matrices. Preprint on <http://arxiv.org/abs/math.FA/0703884>, 2007.
2. BRAUN, R. W., MEISE, R., AND TAYLOR, B. A. Ultradifferentiable functions and Fourier analysis. *Results Math.* 17, 3-4 (1990), 206–237.
3. HAMILTON, R. S. The inverse function theorem of Nash and Moser. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 7, 1 (1982), 65–222.

# A BASIS FOR MEROMORPHIC PRYM $q$ -DIFFERENTIALS AND A MULTIPLE DIVISOR ON A VARIABLE COMPACT RIEMANN SURFACE\*

V. V. Chueshev

*Kemerovo State University, Kemerovo; vvchueshev@ngs.ru*

A meromorphic Prym  $(\rho, q)$ -differential  $\phi = \phi(z) dz^q$  associated to a representation  $\rho$  on compact Riemann surface  $F_\mu$  of genus  $g \geq 2$  is a meromorphic single-valued function  $\phi(z)$  on  $w^\mu(U)$  such that

$$\phi(T^\mu(z))[(T^\mu)'(z)]^q = \rho(T^\mu)\phi(z),$$

for  $z \in w^\mu(U)$ ,  $[\mu] \in \mathbf{T}_g$  is the Teichmueller space of genus  $g$ ,  $T^\mu \in \Gamma^\mu$  is quasifuchsian group with invariant component  $w^\mu(U)$ ,  $U = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ . Here  $U/\Gamma = F_0$ . Let  $\mathbf{P}_q(D)$  be Prym vector bundle, which have fibre over point  $([\mu], \rho) \in \mathbf{T}_g \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*)$  consisting of meromorphic Prym  $(\rho, q)$ -differential  $\phi$ , multiple divisor  $D^\mu$ , on  $F_\mu$  for  $q \geq 1$ ,  $q \in \mathbf{N}$ .

**Proposition 1.** *For every  $g \geq 2$ , the hermitian holomorphic Prym vector bundle  $\mathbf{P}_q(1)$ ,  $q \geq 1$ , over  $\mathbf{T}_g \times L_g$  is analytically equivalent to a trivial holomorphic vector bundle of rank  $g$  for  $q = 1$  and of rank  $(2q - 1)(g - 1)$  for  $q > 1$ .*

**Theorem 2.** *For every  $g \geq 2$ , the Prym vector bundle  $\mathbf{P}_1(1)$  over  $\mathbf{T}_g \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus L_g$  is a hermitian holomorphic vector bundle of rank  $g - 1$ .*

**Theorem 3.** *The Prym vector bundle  $\mathbf{P}_q(1)$  over  $\mathbf{T}_g \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*)$  is a hermitian holomorphic vector bundle of rank  $d = (2q - 1)(g - 1)$  for every  $g \geq 2$ ,  $q \geq 2$ .*

**Theorem 4.** *For every  $g \geq 2$ , divisor  $D = P_1 \dots P_l$  on  $F_0$ ,  $l \geq 1$ , the Prym vector bundle  $\mathbf{P}_1(1/D)$  is a hermitian holomorphic vector bundle of rank  $d = g - 1 + l$  over  $\mathbf{T}_g \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ .*

**Theorem 5.** *For every  $g \geq 2$ , divisor  $D = P_1 \dots P_l$  on  $F_0$ ,  $l \geq 1$ ,  $q \geq 2$ , the Prym vector bundle  $\mathbf{P}_q(1/D)$  is a hermitian holomorphic vector bundle of rank  $d = (2q - 1)(g - 1) + l$  over  $\mathbf{T}_g \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ .*

**Theorem 6.** *The Prym vector bundle  $\mathbf{P}_q(D)$  is a hermitian holomorphic vector bundle of rank  $d = (2q - 1)(g - 1) - l$  over  $\mathbf{T}_g \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ , if  $g \geq 2$ , divisor  $D = P_1 \dots P_l$  on  $F_0$ ,  $q \geq 2$ , under condition  $2(q - 1)(g - 1) > l \geq 1$ .*

**Theorem 7.** *For every  $g \geq 2$ ,  $q \geq 2$  and divisor  $D \neq 1$ ,  $\deg D = 0$  on  $F_0$ , the hermitian holomorphic vector bundles  $\mathbf{P}_q(D)$  and  $\mathbf{P}_q(1)$  of rank  $d = (2q - 1)(g - 1)$  over  $\mathbf{T}_g \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*)$  is isomorphically biholomorphic.*

---

\*The work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (№ 06-01-00153).

## SHARP GEOMETRIC RIGIDITY ON HEISENBERG GROUPS\*

D. V. Isangulova

*Sobolev Institute of mathematics SB RAS, Novosibirsk; dasha@math.nsc.ru*

We consider a Heisenberg group  $\mathbb{H}^n$  with Carnot – Carathéodory distance  $d$ . A nonconstant mapping  $f: U \rightarrow \mathbb{H}^n$  of the Sobolev class  $W_{1,\text{loc}}^1$  is *quasiisometry* if  $f$  does not change orientation on  $U$  and there is a constant  $L \geq 1$  such that  $L^{-1}|\xi| \leq |D_h f(x)\xi| \leq L|\xi|$  for all horizontal vectors  $\xi$  for almost all  $x \in U$ . We denote by  $I(L, U)$  the class of quasiisometries on  $U$  with the constant  $L$ . If  $L = 1$  then  $f$  is an isometry.

A domain  $U \subset \mathbb{H}^n$  is a *John domain*  $J(\alpha, \beta)$  [1],  $0 < \alpha \leq \beta$ , if there exists a point  $x_0 \in U$  such that every  $x \in U$  can be joined in  $U$  to  $x_0$  by a rectifiable curve  $\gamma$  parameterized by the arc length,  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(l) = x_0$ ,  $l \leq \beta$ , and  $\text{dist}(\gamma(s), \partial U) \geq \frac{\alpha s}{\beta}$  for all  $s \in [0, l]$ .

**Theorem.** *Let  $U$  be a John domain  $J(\alpha, \beta)$  on  $\mathbb{H}^n$ . There exists constant  $N > 0$  depending only on  $n$  such that for any mapping  $f \in I(1 + \varepsilon, U)$  there is an isometry  $\varphi$  such that*

$$\sup_{x \in U} d(f(x), \varphi(x)) \leq N \frac{\beta^2}{\alpha} (\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon).$$

Moreover, if  $n > 1$  then there is a constant  $M > 0$  depending only on  $n$  such that

$$\int_U \exp\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2n+3} \frac{M}{\varepsilon} |D_h f(x) - D_h \varphi(x)|\right) dx \leq 2|U|.$$

The dilation  $\delta_{1+\varepsilon}$  shows that the orders of closeness in the theorem are asymptotically sharp.

In the case  $n > 1$  the proof of the theorem explores the method of Yu. G. Reshetnyak [2] in Euclidean spaces. It relies on constructing some first-order differential operator with finite dimensional kernel. In the case  $n = 1$  the proof is purely geometrical and it is based on the paper of P. P. Belinskii [3].

The talk is based on a joint work with S. Vodopyanov [4].

## References

1. *John F.* Rotation and strain // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 391–413.
2. *Reshetnyak Yu. G.* Stability theorems in geometry and analysis. Mathematics and its Applications (Dordrecht). 304. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.
3. *Belinskii P. P.* On the order of closeness of a spatial quasiconformal mapping to conformal // Sib. Math. J. 1973. V. 14. P. 325–331.
4. *Isangulova D., Vodopyanov S.* Sharp geometric rigidity on Heisenberg groups. Preprint. 2007.

---

\*The work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (№ 06–01–00735).

# ON GEOMETRIC MEASURE THEORY ON METRIC STRUCTURES\*

M. Karmanova

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk; maryka@math.nsc.ru*

We study geometric measure theory on metric structures, namely, «metric» analogues of the coarea formula. There are many applications of it in theory of exterior forms and currents, minimal surface problems, proof of Stokes formula, etc. There are two main directions of research: the mappings of a rectifiable metric space into an *arbitrary* metric space, and the mappings of two Carnot — Carathéodory spaces (*CC*-spaces).

Such a division is natural, since *CC*-spaces are an example of *non-rectifiable* metric spaces.

• In the first direction, we study as a model case the Lipschitz mappings  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{X}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^n$ , with  $\dim \ker(MD(\varphi, x)) = n - k$  a. e., where  $MD(\varphi, x)$  is a metric differential of  $\varphi$  at  $x$ . For such mappings, we obtain that a preimage of every point  $\varphi^{-1}(z) \setminus \Sigma$ ,  $\mathcal{H}^n(\Sigma) = 0$ , is  $\mathcal{H}^{n-k}$ -rectifiable set. This statement is a base for the next result:

**Theorem 1.** *The coarea formula for a mapping  $\varphi$  is valid if and only if the image  $\varphi(E) \subset \mathbb{X}$  consists of an  $\mathcal{H}^k$ -rectifiable metric space, and of an image of an  $\mathcal{H}^n$ -measure zero set.*

As a consequence, we obtain that the coarea formula is valid for the mappings with  $\mathcal{H}^k$ - $\sigma$ -finite image. We also construct examples of metric spaces that do not enjoy the above «necessary» properties. For Lipschitz mappings with values in such spaces, the coarea formula fails.

All these results are generalized for mappings defined on  $\mathcal{H}^n$ -rectifiable metric space  $\mathbb{Y}$ . The coarea formula for Lipschitz mappings  $\varphi : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}^k$  was proved by L. Ambrosio and B. Kirchheim in [1].

The problem about necessary and sufficient conditions is essentially new even for  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^m$ ,  $m, n \geq k$ . The short communications can be seen in [2, 3], and the proof can be seen in [4].

• In the second direction, we study geometric properties of *CC*-spaces and apply them to problems of the geometric measure theory. We consider smooth contact mappings  $\varphi : \mathbb{M}_1 \rightarrow \mathbb{M}_2$ . It is well known, that in the proof of the sub-Riemannian coarea formula, there are many specific difficulties that do not arise in Riemannian case:

- to show the relation of «Riemannian» and Hausdorff measures on level sets in «regular points»;
- to show that the characteristic set does not influence the right-hand part of the coarea formula.

By results of [5], smooth contact mappings are *hc*-differentiable (i. e., differential in sub-Riemannian sense). We call a point «regular» if the *hc*-differential is non-degenerate, and we call a point characteristic of the *hc*-differential is degenerate but the classical differential is non-degenerate.

This first problem is quite complicated since the geometry of the intersection of a level set and a sub-Riemannian ball is much different from the one of the intersection of a level set and a Riemannian ball. Obviously, the tangency order  $o(r)$  is insufficient for investigation of such a geometry. Thus, the new method is constructed. It is based both on Riemannian and sub-Riemannian properties. Using this method we obtain that the relation of measures can be expressed by the «Gram determinant» of *hc*-differential. This result motivates the definition of the sub-Riemannian coarea factor.

From this definition, we have that it vanishes in characteristic points. So, it is necessary to show that the characteristic set does not influence the right-hand part of the coarea formula. To do this, we construct a new method of approximation of the initial *CC*-structure with the non-equivalent *CC*-structures. Thus, we have the following essentially new result [6]:

**Theorem 2.** *The coarea formula holds for smooth contact mappings of two *CC*-spaces.*

The previous results concerning the coarea formula, were obtained only for different cases of  $\mathbb{R}^k$ -valued mappings with the group structure of the preimage. For the first time, it was proved by P. Pansu for functions defined on a Heisenberg group [7]. Later this result was generalized by J. Heinonen for the function defined on Carnot groups [8], and recently, V. Magnani [9] proved the coarea formula for  $\mathbb{R}^k$ -valued mappings defined on a Carnot group.

---

\*The work was partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (№ 06-01-00735).

**References**

1. *Ambrosio L., Kirchheim B.* Rectifiable sets in metric and Banach spaces // *Math. Ann.* 2000. V. 318. P. 527–555.
2. *Karmanova M.* Rectifiable Sets and Coarea Formula for Metric-Valued Mappings // *Doklady Mathematics.* 2005. V. 73, № 3. P. 323–327.
3. *Karmanova M.* Metric Differentiability of Mappings and Geometric Measure Theory // *Doklady Mathematics.* 2005. V. 71, № 2. P. 224–227.
4. *Karmanova M.* Geometric Measure Theory Formulas on Rectifiable Metric Spaces // *Contemporary Mathematics.* 2007. V. 424 «The Interaction of Analysis and Geometry». P. 103–136.
5. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot — Carathéodory Spaces and Differentiability of Mappings // *Contemporary Mathematics.* 2007. V. 424 «The Interaction of Analysis and Geometry». P. 247–301.
6. *Karmanova M., Vodopyanov S.* Coarea Formula for Smooth Contact Mappings of Carnot Manifolds // *Doklady Mathematics.* 2007. (to appear)
7. *Pansu P.* Geometrie du groupe d’Heisenberg // These: Univ. Paris VII, 1982.
8. *Heinonen J.* Calculus on Carnot groups // In: Fall school in analysis (Jyväskylä, 1994). Jyväskylä: University of Jyväskylä, 1994. P. 1–32.
9. *Magnani V.* Blow-up of regular submanifolds in Heisenberg groups and applications // *Cent. Eur. J. Math.* 2006. V. 4, №1. P. 82–109.



## A TWO-DIMENSIONAL SLICE THROUGH THE PARAMETER SPACE OF TWO-GENERATOR KLEINIAN GROUPS

N. V. Kopteva<sup>1</sup>, E. Ya. Klimenko<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia; *natasha@math.nsc.ru*

<sup>2</sup> Max Planck Institute for Mathematics, Bonn, Germany; *klimenko@mpim-bonn.mpg.de*

A marked two-generator subgroup  $\Gamma = \langle f, g \rangle$  of  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  is determined up to conjugacy by its parameters  $\beta = \beta(f) = \mathrm{tr}^2 f - 4$ ,  $\beta' = \beta(g) = \mathrm{tr}^2 g - 4$ , and  $\gamma = \gamma(f, g) = \mathrm{tr}[f, g] - 2$  whenever  $\gamma \neq 0$  [1]. So the conjugacy class of an ordered pair  $(f, g)$  can be identified with a point in the parameter space  $\mathbb{C}^3 = \{(\beta, \beta', \gamma)\}$  whenever  $\gamma \neq 0$ . The subspace  $\mathcal{K}$  of  $\mathbb{C}^3$  that corresponds to the discrete non-elementary groups  $\Gamma = \langle f, g \rangle$  is called the *parameter space of two-generator Kleinian groups*. Clearly, the same two-generator Kleinian group  $\Gamma$  can be represented by different points in  $\mathcal{K}$  depending on the generating pair.

Among all two-generator subgroups of  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ , we distinguish the class of  $\mathcal{RP}$  groups, that is, the class of marked groups for which the chosen generating pair has real parameters. More formally, a triple  $(\Gamma; f, g)$ , where  $\Gamma = \langle f, g \rangle$ , is called an  $\mathcal{RP}$  group if the pair  $(f, g)$  has real parameters  $(\beta, \beta', \gamma)$ .

In the paper we determine all points in  $\mathbb{C}^3$  that represent discrete non-elementary  $\mathcal{RP}$  groups with one generator parabolic:

$$S_\infty = \{(\gamma, \beta) : (\beta, 0, \gamma) \text{ are parameters for some } (\Gamma; f, g) \in \mathcal{DRP}\},$$

where  $\mathcal{DRP}$  denotes the class of all discrete non-elementary  $\mathcal{RP}$  groups. Geometrically,  $S_\infty$  is a two-dimensional slice through the six-dimensional parameter space  $\mathcal{K}$ .

The slice  $S_\infty$  has a non-empty intersection with the well-known Riley slice  $(0, 0, \gamma)$ ,  $\gamma \in \mathbb{C}$ , which consists of all Kleinian groups generated by two parabolics, see [2]. In [3], another slice,  $S_2$ , through the parameter space  $\mathcal{K}$  was considered.  $S_2$  consists of all parameters for discrete  $\mathcal{RP}$  groups with an elliptic generator of order 2 and plays an important rôle in the theory of Kleinian groups.

In Fig. 1, a part of  $S_\infty$  is plotted in the  $\gamma\beta$ -plane to give an idea of how the slice looks like. We remark the following important properties of  $S_\infty$ :

- (S0) Since we consider only non-elementary discrete groups, the intersection of  $S_\infty$  with the vertical strip  $\{(\gamma, \beta) : |\gamma| < 1\}$  is empty.
- (S1)  $S_\infty$  has countably many connected components.
- (S2) The 2-dimensional connected components of  $S_\infty$  are the sets  $A$ ,  $B$ ,  $C_k$ , and  $D_k$ , where  $k = 1, 2, 3, \dots$
- (S3)  $(\beta, 0, \gamma)$  are parameters for a discrete free  $\mathcal{RP}$  group if and only if  $(\gamma, \beta)$  lies in a 2-dimensional connected component of  $S_\infty$ .
- (S4) All points of a 1-dimensional connected component correspond to isomorphic groups.
- (S5) Isolated points and 1-dimensional connected components correspond to groups containing elliptic elements of finite order.

In fact, if  $\mathcal{C} \subset S_\infty$  is a connected component and  $\overline{\mathcal{C}}$  is the Zariski closure of  $\mathcal{C}$ , then  $\overline{\mathcal{C}}$  is one of the following:

1. a point with coordinates in  $\overline{\mathbb{Q}}$ ;
2. a curve defined over  $\overline{\mathbb{Q}}$  which is a line, parabola, or hyperbola;
3.  $\mathbb{R}^2$ .

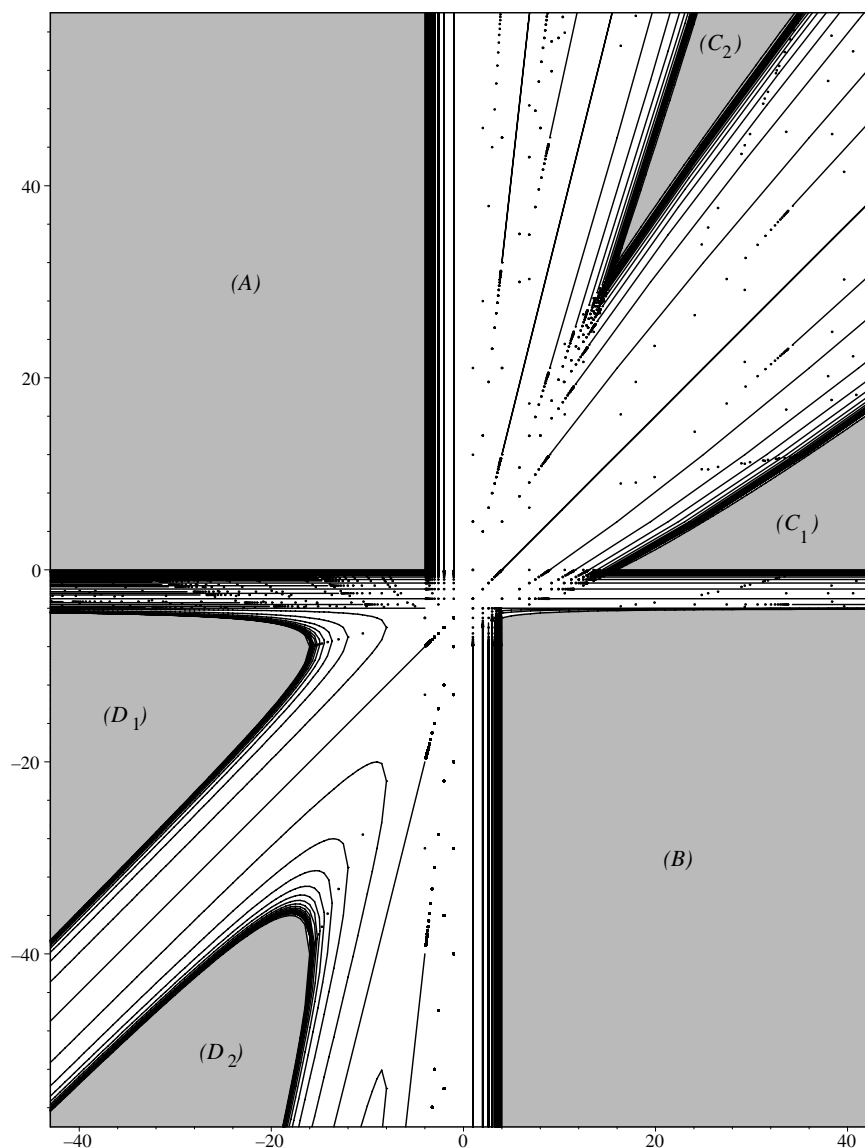


Fig. 1. The slice  $S_\infty$ .

### References

1. Gehring F. W., Martin G. J. Stability and extremality in Jørgensen's inequality // Complex Variables Theory Appl. 1989. V. 12, no. 1-4. P. 277–282.
2. Riley R. Applications of a computer implementation of Poincaré's theorem on fundamental polyhedra // Math. Comput. 1983. V. 40. P. 607–632.
3. Gehring F. W., Gilman J. P., Martin G. J. Kleinian groups with real parameters // Commun. Contemp. Math. 2001. V. 3, no. 2. P. 163–186.

$L_{p,q}$ -COHOMOLOGY OF SOME RIEMANNIAN MANIFOLDS\*

Ya. A. Kopylov

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk; yakop@math.nsc.ru*

We consider some problems concerning the  $L_{p,q}$ -cohomology of Riemannian manifolds.

(1) We study the question of the normal solvability of the operator  $d$  of exterior derivation on differential forms on a surface of revolution  $M \subset \mathbb{R}^{n+2}$ ,

$$f^2(x_1) = x_2^2 + \cdots + x_{n+2}^2, \quad (x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}, \quad 0 \leq x_1 < b,$$

( $f$  is a smooth positive function) regarded as an unbounded linear operator from  $L_p$ -forms to  $L_q$ -forms. It turns out that if  $f$  is unbounded then  $d$  is not normally solvable for  $\frac{1}{q} - \frac{1}{p} < \frac{1}{n+1}$ .

(2) We prove that the first  $L_{p,q}$ -cohomology of the general Heisenberg group  $\mathbb{H}_n$  is nontrivial provided that  $p < q$ .

---

\*Supported by INTAS (Grant 03–51–3251) and the State Maintenance Program for the Leading Scientific Schools of the Russian Federation (Grants NSh 311.2003.1, NSh 8526.2006.1).

# ON NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR A CURVE TO BE THE GRADIENT RANGE OF A $C^1$ -SMOOTH FUNCTION\*

M. V. Korobkov

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk; korob@math.nsc.ru*

Many mathematicians (J. Ball, S. Müller, V. Sverak, B. Kirchheim, and others) studied the following problem: under which conditions on a set  $K$  the differential relation  $Dv \in K$  has a nontrivial Lipschitz solution? We study the similar problem for  $C^1$ -smooth (not only Lipschitz) solutions to the differential relations. In a particular, we prove that if the gradient range of a  $C^1$ -smooth function  $v$  is a continuous arc, then this arc has tangents in a weak sense and these tangents are rank-one matrices. Moreover, the direction of these tangents is a function of bounded variation.

In this talk we extend our previous plane results [1] to the multidimensional case.

Our main tool is the following result.

**Theorem.** *Let  $\gamma : \mathbb{R} \ni s \mapsto (\gamma_{ij}(s)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  be a continuous injective function such that for any linear mapping  $L : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^2$  the image  $L(\gamma(\mathbb{R}))$  is a nondense set in  $\mathbb{R}^2$ , i. e.,  $\text{Int } L(\gamma(\mathbb{R})) = \emptyset$ . Let  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  be a  $C^1$ -smooth function of a domain  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Suppose the following inclusion is fulfilled:*

$$Dv(\Omega) \subset \gamma(\mathbb{R}).$$

*Then for any point  $x_0 \in \Omega$  there exists a hyperplane  $H = H(x_0) \ni x_0$  such that  $Dv \equiv \text{const}$  on the connected component of the set  $H \cap \Omega$  containing  $x_0$ .*

## References

1. Korobkov M. V., Panov E. Yu. Necessary and sufficient conditions for a curve to be the gradient range of a  $C^1$ -smooth function // Sib. Math. J. 2007. V. 48, № 4. P. 629–647.

---

\*The research was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant 05-01-00482-a), the Russian Science Support Foundation for the Young Candidates of Sciences, and the President Grant for Leading Scientific Schools of the Russian Federation (Grant 8526.2006.1).

## MULTIPLIERS IN WEIGHTED SOBOLEV SPACES

L. Kussainova

*Institute of Applied Mathematics, Karaganda, Kazakhstan; leili2006@mail.ru*

In this paper we present results providing conditions for a function  $\gamma$  to belong to the multiplier class  $M(W_1 \rightarrow W_2) = \{\gamma : \gamma f \in W_2, f \in W_1\}$ . We denote by  $W = W_p^l(\rho, v)$  a weighted Sobolev space with a norm  $\|u\|_W = \|\nabla_l u\|_{L_{p\rho}} + \|u\|_{L_{pv}}$ , where  $\|\cdot\|_{L_{p\rho}}$  is a Lebesgue norm with weight on a domain  $\Omega \subset R^n$ . Let  $Q = Q_d(x) = \{y \in R^n : |y_i - x_i| < d/2, i = 1, 2, \dots, n\}$ . Let  $d(\cdot)$  is a positive bounded function on  $\Omega$  for which the conditions hold:  $Q(x) = Q_{d(x)}(x) \subset \Omega$ , and there exist  $0 < \eta < 1, 0 < \varepsilon < 1$  such that  $d(y) \geq \eta d(x)$  as soon as  $y \in Q_{(\varepsilon)}(x) = (1 - \varepsilon)Q(x)$ .

We construct a local maximal operator  $M^* f(x) = \sup_{Q \in \mathcal{B}(x)} |Q|^{-1} \int_Q |f|$  on a differential basis  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{(\varepsilon)} = \bigcup_{x \in Q} \{Q : Q \subset Q_{(\varepsilon)}(x)\}$ ,  $\mathcal{B}(x) = \{Q : Q \in \mathcal{B}, x \in Q\}$ . Let  $\delta \in (0, 1)$  and  $\mathcal{N}_{(\delta)}(Q) = \{e \subset Q : |e| \leq \delta |Q|\}$ . We write  $v \in \Pi_{p,l}$  if there exist  $\delta \in (0, 1)$  and  $\tau > 0$  such that

$$\mathcal{M}_{(\delta, \varepsilon), p, l}(x; v) = d(x)^{l-n/p} \inf_{e \in \mathcal{N}_{(\delta)}(Q)} \left( \int_{Q \setminus e} v \right)^{1/p} \geq \tau \quad \text{a. e. in } \Omega,$$

where  $Q = Q_{(\varepsilon)}(x)$ . We use a notation  $\omega \in A^*$ , if there exist  $\tau \in (0, 1)$  and  $T > 1$  such that for all  $Q \in \mathcal{B}$   $\sup_Q M(\omega \chi_Q) \leq T \sup_{Q \setminus e} M(\omega \chi_Q)$  if  $e \in \mathcal{N}_\tau(Q)$ , where  $\chi_Q$  is the indicator of  $Q$ ,  $Mf$  is the Hardy maximal operator on  $R^n$ . In all results, stated below,  $0 < m < l$ . Taking  $\alpha_i = 0, 1$  ( $i = 1, 2$ ) we set

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{pq}(x|\gamma; \omega_1, \omega_2; \alpha_1, \alpha_2) = & \sup_{Q \subset Q_{(\varepsilon)}(x)} |Q|^{-1/p+l/n} \left( \left( \int_Q |\nabla_m \gamma|^q M^*(\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2) \right)^{1/q} \right. \\ & \left. + (\alpha_1 - \alpha_2) \left( \int_Q |\gamma|^q (\alpha_2 \omega_1 + \alpha_1 \omega_2) \right)^{1/q} + |Q|^{-m/n} \left( \int_Q |\gamma|^q M^*(\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2) \right)^{1/q} \right). \end{aligned}$$

**Theorem.** Let  $1 \leq p \leq q < \infty, p < q$  for  $1 < p < n/l; v \in \Pi_{p,l}; \omega_i \in A^*$ , and

$$K = \text{ess sup}_{x \in \Omega} \mathcal{K}_{p,q}(x|\gamma; \omega_1, \omega_2; 1, 0) < \infty.$$

Then

$$\gamma \in M(W_p^l(\Omega; 1, v) \rightarrow W_q^m(\Omega; \omega_1, \omega_2))$$

with  $\|\gamma\| \leq cK$ . Further, if  $1 < p < n/l$  then

$$\|\gamma\|_{M(W_p^l(\Omega; 1, v) \rightarrow W_q^m(\Omega; \omega_1, \omega_2))} \leq c \text{ess sup}_{x \in \Omega} \mathcal{K}_{p,p}(x|\gamma; \omega_1, \omega_2; 1, 1).$$

If  $1 < p < \infty, pl \neq n$ , then

$$\|\gamma\|_{M(W_p^l(R^n) \rightarrow W_q^m(R^n))} \asymp \sup_{Q_h, 0 < h \leq 1} h^{l-n/p} \left( \|\nabla_m \gamma\|_{L_p(Q_h)} + h^{-m} \|\gamma\|_{L_p(Q_h)} \right).$$

## References

1. Kussainova L. Multipliers in weighted Sobolev spaces // Math. Sbornik. 2005. V. 196, N 8. P. 21–48.

## THE CALL OF MATHEMATICS

S. S. Kutateladze

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk; sskut@math.nsc.ru*

Mathematics prevails in knowledge as the most ancient of sciences. However, in the beginning was the word. We must remember that the olden “logos” resides beyond grammar. Today’s mathematics became the bastion of logic, the savior of the order of mind and the objectivity of reasoning.

The intellectual field resides beyond the grips of the law of diminishing returns. The more we know, the huger become the frontiers with the unbeknown, the oftener we meet the mysterious. The twentieth century enriched our geometrical views with the concepts of space-time and fractality. Each instance of knowledge is an event, a point in the Minkowski 4-space. The realm of our knowledge comprises a clearly bounded set of these instances. The frontiers of science produce the boundary between the known and the unknown which is undoubtedly fractal and we have no grounds to assume it rectifiable or measurable. It is worth noting in parentheses that rather smooth are the routes to the frontiers of science which are charted by teachers, professors, and all other kinds of educationists. Pedagogics dislikes saltations and sharp changes of the prevailing paradigm. Possibly, these topological obstructions reflect some objective difficulties in modernizing education. The proofs are uncountable of the fractality of the boundary between the known and the unbeknown. Among them we see such negative trends as the unleashed growth of pseudoscience, mysticism, and other forms of obscurantism which creep into all lacunas of the unbeknown. As revelations of fractality appear the most unexpected, beautiful, and stunning interrelations between seemingly distant areas and directions of science. Mathematics serves as the principal catalyst of the unity of science. There is evidence galore of the indispensability of mathematics in modernization and sustainable development.

We are granted the blissful world that has the indisputable property of unique existence. The solitude of reality was perceived by our ancestors as the ultimate proof of unicity. Mathematics has never liberated itself from the tethers of experimentation. The reason is not the simple fact that we still complete proofs by declaring “obvious.” Alive and rather popular are the views of mathematics as a toolkit for the natural sciences. These stances may be expressed by the slogan “mathematics is experimental theoretical physics.” Not less popular is the dual claim “theoretical physics is experimental mathematics.” The coupled mottoes reflect the close affinity of the trails of thought in mathematics and the natural sciences.

It is worth observing that the dogmata of faith and the principles of theology are also well reflected in the history of mathematical theories. Variational calculus was invented in search of better understanding of the principles of mechanics, resting on the religious views of the universal beauty and harmony of the act of creation.

Mathematics is a rather specific area of intellectual creativity which possess its own unparallel particularities. Georg Cantor, the founder of set theory, wrote in one of his classical papers in 1883 as follows: “...das *Wesen* der *Mathematik* liegt gerade in ihrer *Freiheit*.” In other words, “the essence of mathematics resides in its freedom.” The freedom of modern mathematics does not reduce to the absence of exogenous limitations of the objects and methods of research. To a great extent, the freedom of mathematics is disclosed in the new intellectual tools it provides for taming the universe, liberating a human being, and expanding the boundaries of his or her independence.

The twentieth century marked an important twist in the content of mathematics. Mathematical ideas imbued the humanitarian sphere and, primarily, politics, sociology, and economics. Social events are principally volatile and possess a high degree of uncertainty. Economic processes utilize a wide range of the admissible ways of production, organization, and management. The nature of nonunicity in economics transpires: The genuine interests of human beings cannot fail to be contradictory. The unique solution is an oxymoron in any nontrivial problem of economics which refers to the distribution of goods between a few agents. It is not by chance that the social sciences and instances of humanitarian mentality invoke the numerous hypotheses of the best organization of production and consumption, the justest social structure, the codices of rational behavior and moral conduct, etc.

The twentieth century became the age of freedom. Plurality and unicity were confronted as collectivism and individualism. Many particular phenomena of life and culture reflect their distinction. The

dissolution of monarchism and tyranny were accompanied by the rise of parliamentarism and democracy. In mathematics the quest for plurality led to the abandonment of the overwhelming pressure of unicity and categoricity. The latter ideas were practically absent, at least minor, in Ancient Greece and sprang to life in the epoch of absolutism and Christianity. Quantum mechanics and Heisenberg’s uncertainty incorporated plurality in physics. The waves of modernism in poetry and artistry should be also listed. Mankind had changed all valleys of residence and dream.

The thesis of universal mathematization enlightens many trends of today’s thought. Many new synthetical areas of research are the gains of mathematics which are decorated with outstanding advances in economical cybernetics, theoretical programming, mathematical linguistics, mathematical chemistry, and mathematical biology. Mathematization of the human sciences and the human dimension of the natural sciences are familiar features of modernism.

Mathematics is a human science involving the abstractions in which the human beings perceive forms and relations. Mathematics is impossible without the disciples, professional mathematicians. Obviously, the essence of mathematics is disclosed to us only as expressed in the contributions of scientists. Therefore, it would be not a great exaggeration to paraphrase the words of Cantor and say that *the essence of a mathematician resides and reveals itself in his or her freedom*.

In science we appraise and appreciate that which makes us wiser. The notions of a good theory open up new possibilities of solving particular problems. Rewarding is the problem whose solution paves way to new fruitful concepts and methods. Condescension is the mother of mediocrity. A fresh product of a mediocrity is called a banality. Time makes banal the most splendid achievements, seminal theories, and challenging problems. Indispensability is the most important quality of a good problem or theory which refrains us from producing banalities.

The greatest minds create indispensable scientific concepts and ponder them over. They pose indispensable scientific problems and contemplate over their solutions. The indispensable theories and problems propel science. The best scientists propounded not only indispensable theories and addressed not only indispensable problems. But only indispensable theorems and problems make these scientists great.

A good theory enables us to settle some indispensable problems. We know many classical examples of fruitful and powerful theories. Euclidean geometry and differential calculus were gigantic breakthroughs in the understanding and mastering the reality. Centuries witness the strength and power of these theories yielding everyday’s solutions of uncountably many practical problems. Solution of an indispensable problem is a grind stone for a good theory since it requires a new conceptual technique and revision of the available theoretical gadgets. Squaring the circle, the variational principles of mechanics, and the majority of the Hilbert problems provide examples of the questions that brought about sweeping changes in the theoretical outlooks of science.

We must not narrow and simplify the concept of a problem. Science endeavors to make the complex the simple. Therefore, always actual are the reconsideration and inventory of the available theories as well as their simplification, generalization, and unification. The history of science knows many examples of the perfection, beauty, and practical power of the theories that arose by way of abstraction and codification of the preceding views. The success of a new theory proves that this theory was indispensable.

Freedom in science is the consciousness and appreciation of the indispensable, a vaccine against banality. The call of freedom is inseparable from the call of mathematics.

# QUASILINEARIZATION, ENFLO’S 2-ROUNDNESS, AND ALEXANDROV’S CURVATURE

I. G. Nikolaev

*University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana-Champaign, USA; inik@math.uiuc.edu*

This is a joint work with Professor I. D. Berg.

We characterize Alexandrov  $\mathfrak{R}_0$  domains [1] (also known as CAT(0) spaces) by introducing a *quasilinearization* for an abstract metric space via the notion of the quadrilateral cosine,  $\text{cosq}$ , and by employing an analogy between quasilinearization and some characteristic properties of inner product spaces. Quasilinearization enables us to formulate a Cauchy — Schwarz inequality which forces the upper curvature bound of zero. We call an ordered pair of points  $(A, B)$  in a metric space a *bound vector*  $\overrightarrow{AB}$ . Certain bound vectors can be added in the natural way, head to tail, and we can define the *quasi-inner product*  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  between each pair of bound vectors. Loosely speaking, quasilinearization is “the quasi-inner product space” of all bound vectors. We prove that the quasi-inner product between a pair of non-zero bound vectors in  $\mathcal{M}$  is given by  $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \rangle = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{CD}\| \text{cosq}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ , where

$$\text{cosq}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\rho^2(A, D) + \rho^2(B, C) - \rho^2(A, C) - \rho^2(B, D)}{2\rho(A, B)\rho(C, D)}$$

is called the *quadrilateral cosine* between  $\overrightarrow{AB}$  and  $\overrightarrow{CD}$ .

We consider the following conditions for a metric space  $(\mathcal{M}, \rho)$ .

(i) **The four point  $\text{cosq}$  condition:**  $\text{cosq}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \leq 1$ , for every pair of distinct points  $(A, B)$  and  $(C, D)$  in  $\mathcal{M}$ .

L. Euler [3] proved that  $AC^2 + BD^2 \leq AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$  for any Euclidean quadrilateral  $ABCD$ . In 1968, P. Enflo [2] defined the notion of  $p$ -roundness for a metric space and applied it to the study of uniformly continuous homeomorphisms of Banach spaces. In our work we employ Enflo’s 2-roundness condition that applies Euler’s inequality to metric spaces:

(ii) **Enflo’s 2-roundness condition:**

$$\rho^2(A, C) + \rho^2(B, D) \leq \rho^2(A, B) + \rho^2(B, C) + \rho^2(C, D) + \rho^2(A, D),$$

for every quadruple  $\{A, B, C, D\} \subseteq \mathcal{M}$ .

Our main results are

**Theorem 1.** *A geodesically connected metric space is an  $\mathfrak{R}_0$  domain if and only if it satisfies the four point  $\text{cosq}$  condition.*

The notion of the quadrilateral cosine enables us to relax axioms describing complete  $\mathfrak{R}_0$  domains. Recall that a metric space without the triangle inequality axiom is called a *semimetric space*. We call a semimetric space *weakly convex* if, for every  $A, B \in \mathcal{M}$  there is  $\lambda$ ,  $0 < \lambda < 1$ , such that, for every  $\varepsilon > 0$ , there is  $C_\varepsilon \in \mathcal{M}$  satisfying the inequalities  $|\rho(A, C_\varepsilon) - \lambda\rho(A, B)| < \varepsilon$  and  $|\rho(B, C_\varepsilon) - (1 - \lambda)\rho(A, B)| < \varepsilon$ .

**Theorem 2.** *A semimetric space  $(\mathcal{M}, \rho)$  is isometric to a complete  $\mathfrak{R}_0$  domain if and only if the following conditions are satisfied:*

- (a)  $(\mathcal{M}, \rho)$  is weakly convex.
- (b) Each Cauchy sequence in  $(\mathcal{M}, \rho)$  has a limit.
- (c)  $(\mathcal{M}, \rho)$  satisfies the four point  $\text{cosq}$  condition.

The following theorem characterizes  $\mathfrak{R}_0$  domains in terms of Enflo’s 2-roundness condition.

**Theorem 3.** *A geodesically connected metric space is an  $\mathfrak{R}_0$  domain if and only if it satisfies Enflo’s 2-roundness condition. In addition, if  $(\mathcal{M}, \rho)$  is a geodesically connected metric space with Enflo’s 2-roundness condition and  $\mathcal{Q} = \{A, B, C, D\}$  is a quadruple of distinct points in  $\mathcal{M}$  for which*

$$\rho^2(A, C) + \rho^2(B, D) = \rho^2(A, B) + \rho^2(B, C) + \rho^2(C, D) + \rho^2(A, D),$$



then the geodesic convex hull of the set  $\{A, B, C, D\}$  is either isometric to a parallelogram in the Euclidean plane or a segment of straight line.

Let  $r \in \mathbb{N}$  and  $M_r$  denote the set of all symmetric  $r \times r$  matrices with zero diagonal entries and non-negative entries otherwise. Let  $\mathcal{X}$  be a set and  $d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  be a non-negative function such that  $d(P, Q) = d(Q, P)$  and  $d(P, Q) = 0$  if and only if  $P = Q$ , for all  $P, Q \in \mathcal{X}$ . Then  $K_r(\mathcal{X})$  consists of all matrices  $A = (a_{ij})$  in  $M_r$  such that for every  $A \in K_r(\mathcal{X})$  there is an  $r$ -tuple  $\{P_1, P_2, \dots, P_r\} \subseteq \mathcal{X}$  satisfying  $a_{ij} = d(P_i, P_j)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, r$ . A subset  $\mathcal{K} \subseteq M_r$  defines the (global)  $\mathcal{K}$ -curvature class as follows. The  $\mathcal{K}$ -curvature class consists of all  $(\mathcal{X}, d)$  such that  $K_r(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{K}$ . Gromov’s curvature problem ([4], Section 1.19+) is the problem of a meaningful geometric description of  $\mathcal{K}$ -curvature classes. Let  $\mathfrak{M}_G$  denote the set of all geodesically connected metric spaces and  $\mathfrak{M}_S$  denote the set of all semimetric spaces satisfying conditions (a) and (b) of Theorem 2. Set

$$\mathcal{K}_{\text{cosq}} = \left\{ (a_{ij})_{i,j=1,2,3,4} \in M_4 \mid a_{13}^2 + a_{24}^2 \leq a_{23}^2 + a_{14}^2 + 2a_{12}a_{34} \right\}$$

and

$$\mathcal{K}_E = \left\{ (a_{ij})_{i,j=1,2,3,4} \in M_4 \mid a_{13}^2 + a_{24}^2 \leq a_{23}^2 + a_{14}^2 + a_{12}^2 + a_{34}^2 \right\}.$$

The following theorem gives a complete solution to the Gromov curvature problem in the context of metric spaces of non-positive curvature.

**Theorem 4.** (i)  $(\mathcal{X}, \rho) \in \mathfrak{M}_G$  is in the  $\mathcal{K}_{\text{cosq}}$ -curvature class if and only if  $(\mathcal{X}, \rho)$  is isometric to an  $\mathfrak{R}_0$  domain.

(ii)  $(\mathcal{X}, \rho) \in \mathfrak{M}_G$  is in the  $\mathcal{K}_E$ -curvature class if and only if  $(\mathcal{X}, \rho)$  is isometric to an  $\mathfrak{R}_0$  domain.

(iii)  $(\mathcal{X}, \rho) \in \mathfrak{M}_S$  is in the  $\mathcal{K}_{\text{cosq}}$ -curvature class if and only if  $(\mathcal{X}, \rho)$  is isometric to a complete  $\mathfrak{R}_0$  domain.

Recall that a semimetric space  $(\mathcal{M}, \rho)$  is called *Ptolemaic*, if for each quadruple  $\mathcal{Q}$  of points  $\{X_1, X_2, X_3, X_4\} \subset \mathcal{M}$  the following inequality (called the *Ptolemaic inequality*) holds:

$$\rho(X_1, X_4) \rho(X_2, X_3) \leq \rho(X_1, X_2) \rho(X_3, X_4) + \rho(X_1, X_3) \rho(X_2, X_4).$$

We show that the quadrilateral inequality condition implies the Ptolemaic inequality. In particular, each Alexandrov’s space of curvature  $\leq 0$  is locally Ptolemaic and, equivalently, each geodesically connected metric space satisfying 2-roundness condition or the four point cosq condition is Ptolemaic.

## References

1. *Alexandrov A. D.* A theorem on triangles in a metric space and some of its applications // Trudy Mat. Inst. Steklov. 1951. V. 38. P. 5–23.
2. *Enflo P.* On the nonexistence of uniform homeomorphisms between  $L_p$ -spaces // Ark. Mat. 1969. V. 8. P. 103–105.
3. *Euler L.* Variarum demonstrationes geometriae // Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. 1750. V. 1. P. 49–66.
4. *Gromov M.* Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. Progress in Mathematics, 152. Birkhäuser: Boston, Inc., Boston, MA, 1999.

# A CRITERION FOR AN INTERPOLATION EQUALITY\*

A. I. Parfenov

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk; pai79@sibmail.ru*

Take an integer  $n \geq 2$  and consider the cubes  $F = (0, 1)^{n-1}$ ,  $E = (0, 1) \times F = (0, 1)^n$ . For  $p > n$  introduce the subspaces

$$Z = \{u \in W_p^1(E) : \text{the trace of function } u \text{ vanishes on all faces of } E \text{ except for the face } S = 0 \times F\}$$

$$\text{and } Z_0 = \{u \in Z : \text{the trace of } u \text{ on } S \text{ also vanishes}\} = \mathring{W}_p^1(E)$$

in the Sobolev space  $W_p^1(E)$ . Norm  $Z$  and  $Z_0$  by

$$\|u\|_Z = \left( \int_E |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}, \quad |\nabla u| = \left( \sum_{i=1}^n |\partial u / \partial x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Let  $\mu$  be a finite positive Borel measure in  $E$ . Write  $H$  for the space  $L_2$  in  $E$  with respect to  $\mu$ , normed by  $\|v\|_H^2 = \int_E |v|^2 d\mu$ . The Sobolev embedding theorem forces  $W_p^1(E)$  to consist of continuous functions, thus, an operator  $R : Z \rightarrow H$  may be defined regarding a continuous  $u \in Z$  an element of  $H$ . Norm vector subspaces  $RZ_0$  and  $RZ$  of  $H$  with the help of expressions

$$\|v\|_{RZ_0} = \inf_{u \in Z_0 : Ru=v} \|u\|_{Z_0}, \quad \|v\|_{RZ} = \inf_{u \in Z : Ru=v} \|u\|_Z.$$

The basic theory of indefinite spectral problems gave rise to the condition

$$\exists \theta \in (0, 1) \quad (H, RZ_0)_{\theta, 2} = (H, RZ)_{\theta, 2} \tag{1}$$

where the brackets denote the real interpolation method for Banach spaces. Condition (1) is better known in the form “ $\exists \theta \in (0, 1) \quad (L_{2,g}, W_2^m)_{\theta, 2} = (L_{2,g}, \mathring{W}_2^m)_{\theta, 2}$ ” when  $p = 2$  and a Radon – Nikodým derivative  $g = \frac{d\mu}{dx} > 0$  of  $\mu$  with respect to Lebesgue measure exists (cf. [2]). Theorem 2 of [1] shows that (1) is equivalent to the condition

$$\text{there exist a mapping } T : Z \rightarrow Z \text{ and constants } N_1 \in (0, 1), N_2 > 1 \text{ such that} \tag{2}$$

$$\text{any } u \in Z \text{ verifies } T(u) - u \in Z_0, \|RT(u)\|_H \leq N_1 \|Ru\|_H \text{ and } \|T(u)\|_Z \leq N_2 \|u\|_Z.$$

This characterization was used in [1] to establish both the necessary condition (3) for the validity of (1), to be formulated below in terms of  $\mu$ , and some sufficient conditions. Note that a criterion for the validity of the interpolation equality in question was in the one-dimensional case  $n = 1$  previously obtained by the author.

It turns out that not only (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) but also (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1). Thus (3) is a criterion for the validity of the interpolation equality (1) in the most fortunate multidimensional case when “the space  $W_p^m$  is such that  $m = 1$  and  $W_p^1 \subset C^n$ ”. Unfortunately, this criterion is inapplicable to indefinite spectral problems in view of  $p \neq 2$ .

Describe the details. Let  $I \subset F$  be a cube, that is, the Cartesian product of length  $|I|$  intervals. Fix  $\gamma = 3/4$ . For  $\delta \in (0, 1/2]$  consider the sets  $\Gamma_I = (0, \delta|I|) \times \gamma I$  and  $\Theta_I = (0, |I|) \times I$  where  $\gamma I$  is concentric with  $I$  and is of sidelength  $\gamma|I|$ .

The main condition upon  $\mu$  reads as

$$\text{for any } \varepsilon > 0 \text{ there exists } \delta \in (0, 1/2] \text{ such that} \tag{3}$$

$$\text{all cubes } I \subset F \text{ satisfy the inequality } \mu(\Gamma_I) \leq \varepsilon \mu(\Theta_I).$$

**Theorem.** (3) $\Rightarrow$ (2), consequently, (1) $\Leftrightarrow$ (3).

---

\*Partially supported by the Presidential Young Scientists Support Grant MK-3099.2007.1.

**Sketch of the proof.** Think of an arbitrary  $u \in Z$  as being continuous and extended from  $E$  to  $S \cup E$  by continuity. Endow  $\mathbb{R}^n$  with the metric  $d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|/2, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|, \dots, |x_n - y_n|\}$  and define the ball

$$B(x, r) = \{y \in S \cup E : d(x, y) < r\}.$$

For  $\xi \in S$  let  $\rho_u(\xi)$  be 0 if  $u(\xi) = 0$  or the least solution  $r$  of the equation

$$\frac{\inf_{B(\xi, r)} |u|}{\sup_{B(\xi, r)} |u|} = \frac{1}{2} \quad \text{otherwise.}$$

The function  $\rho_u : S \rightarrow [0, \infty)$  turns out to be 1-Lipschitz. For some  $0 < \sigma_1 < \sigma < 1$ , consider

$$\varphi \in C^1[0, \infty), \quad 0 \leq \varphi \leq 1, \quad \varphi(s) = 1 \text{ in case } s \geq 1/\sigma_1, \quad \varphi(s) = 0 \text{ in case } s \leq 1/\sigma.$$

Put

$$T(u)(x) = u(x)\varphi(\rho_u(x_-)/x_1), \quad x = (x_1, x_*) \in E, \quad x_- = (0, x_*) \in S.$$

The preservation-of-boundary-values property  $T(u) - u \in Z_0$  is obvious.

In order to prove  $\|RT(u)\|_H \leq N_1 \|Ru\|_H$ , take  $0 < \beta < 1$  and apply the well-known  $5r$ -covering lemma to the family  $\left\{B\left(\xi, \frac{\beta\gamma}{5}\rho_u(\xi)\right) : \xi \in S, u(\xi) \neq 0\right\}$  or, alternatively, the  $3r$ -covering lemma to the family  $\left\{B\left(\xi, \frac{\beta\gamma}{3}\rho_u(\xi)\right) : \xi \in S, u(\xi) \neq 0\right\}$ . We get a subfamily with a nice bound for the covering constant. Choose  $\varepsilon$  small compared with this constant, find  $\delta$  from (3), and take  $\sigma$  proportional to  $\delta$ . It remains to apply (3) to the cubes  $I$  corresponding to the elements of the subfamily and to sum up the estimates.

The straightforward differentiation reduces  $\|T(u)\|_Z \leq N_2 \|u\|_Z$  to the estimate

$$J := \int_S \rho_u(\xi)^{1-p} |u(\xi)|^p d\xi \lesssim \int_E |\nabla u|^p dx.$$

In case  $u(\xi) = \rho_u(\xi) = 0$  the uncertainty  $\rho_u(\xi)^{1-p} |u(\xi)|^p$  is obviously treated as 0. By analogy with the previous considerations, apply the  $3r$ -covering lemma to the family  $\{B(\xi, \rho_u(\xi)/6) : \xi \in S, u(\xi) \neq 0\}$ . To any element of the resulting subfamily there correspond a  $\xi_i \in S$ , a ball  $B_{\xi_i} = B(\xi_i, \rho_u(\xi_i))$ , and a Hölder bound in the space  $W_q^1$  (with  $q$  fixed,  $p > q > n$ ). All this permits us to estimate

$$J \lesssim \sum_i \rho_u(\xi_i)^{n-np/q} \left( \int_{B_{\xi_i}} |\nabla u|^q dx \right)^{p/q}.$$

An appropriate Hölder inequality with exponents  $\frac{p}{q}$  and  $\frac{p}{p-q}$  completes the proof.

## References

1. *Parfenov A. I.* On the existence of a contraction mapping preserving boundary values // Vestnik NGU. Ser.: Matematika, Mekhanika, Informatika. 2007. V. 7, № 2. (to appear in Russian)
2. *Pyatkov S. G.* Properties of eigenfunctions of linear sheaves // Siberian Math. J. 1989. V. 30, № 4. P. 587–597.

## NEW MODELS FOR EXOTIC 7-SPHERES\*

**T. Püttmann**

*Universität Bonn, Mathematisches Institut, Bonn, Germany; puttmann@math.uni-bonn.de*

In my talk I will report on recent work with C. Duran and A. Rigas [1] on a new method to construct all exotic 7-spheres.

Exotic spheres are manifolds that are homeomorphic but not diffeomorphic to standard spheres. The first examples were found by Milnor in 1956 among the  $S^3$ -bundles over  $S^4$ . It turned out, however, that there are exotic 7-spheres that are not diffeomorphic to an  $S^3$ -bundle over  $S^4$ . A method to construct all 28 exotic 7-spheres (actually all exotic spheres that bound parallelizable manifolds) in a consistent way was given by Brieskorn in 1966.

In 1974 Gromoll and Meyer constructed an exotic 7-sphere,  $\Sigma_{\text{GM}}^7$ , as quotient of the compact group  $Sp(2)$  by a two-sided  $S^3$ -action. This construction provided  $\Sigma_{\text{GM}}^7$  automatically with a metric of nonnegative sectional curvature ( $K \geq 0$ ). The Gromoll — Meyer sphere  $\Sigma_{\text{GM}}^7$  was the only exotic sphere known to admit such a metric until 1999 when Grove and Ziller constructed metrics with  $K \geq 0$  on all Milnor spheres. In 2002 Totaro and independently Kapovitch and Ziller showed that  $\Sigma_{\text{GM}}^7$  is the only exotic sphere that can be modeled by a biquotient of a compact group and thus underlined the singular status of the Gromoll — Meyer sphere among all models for exotic spheres.

We nevertheless provide an elementary generalization of the Gromoll — Meyer construction. The essential components in this construction are the  $n$ -powers of unit octonions,  $n \in \mathbb{Z}$ . In terms of quaternions these maps are defined by

$$\rho_n : S^7 \rightarrow S^7, \quad (\cos t + p \sin t, w \sin t) \mapsto (\cos nt + p \sin nt, w \sin nt)$$

where  $p$  is an imaginary quaternion and  $w$  is a quaternion such that  $|p|^2 + |w|^2 = 1$ . Let  $\langle u, v \rangle := \bar{u}^t v$  denote the standard Hermitian product on  $\mathbb{H}^2$ . The submanifolds

$$E_n^{10} := \{(u, v) \in S^7 \times S^7 \mid \langle \rho_n(u), v \rangle = 0\}$$

come equipped with a free action of the unit quaternions:

$$S^3 \times E_n^{10} \rightarrow E_n^{10}, \quad q \star (u, v) = (qu\bar{q}, qv).$$

Here,  $qu\bar{q}$  means that the two quaternionic components of  $u$  are simultaneously conjugated by  $q \in S^3$ . The quotient of  $E_n^{10}$  by the free  $\star$ -action is a smooth manifold

$$\Sigma_n^7 := E_n^{10} / S^3.$$

**Theorem 1.** *The differentiable manifold  $\Sigma_n^7$  is a homotopy sphere and represents the  $(n \bmod 28)$ -th element in the group of homotopy 7-spheres  $\Theta_7 \approx \mathbb{Z}_{28}$ .*

**Theorem 2.** *From their symmetries, geodesics and submanifolds the exotic spheres  $\Sigma_{2k}^7$  resemble the standard sphere  $S^7$  much better than any exotic Milnor or Brieskorn sphere.*

I will make the second statement precise in my talk and discuss its possible application for constructing exotic spheres with positive sectional curvature.

### References

1. Duran C., Püttmann T., Rigas A. An infinite family of Gromoll — Meyer spheres, Preprint. arXiv:math. DG/0610349.

---

\*The author was supported by DFG.

**WILD EMBEDDINGS OF CANTOR SETS INTO 3-MANIFOLDS\*****D. Repovš***University of Ljubljana, Ljubljana, Slovenia; dusan.repovs@guest.arnes.si*

In recent years there has been a revival of interest in constructions of wild Cantor sets in  $R^3$  which were first discovered in the 1920's. These new wild examples have some additional properties, for example they are Lipschitz homogeneously embedded, or rigid with simply connected complement. In some proofs well-known link invariants have been used with great effectiveness, in particular the Kauffmann bracket polynomial.

This will be a survey talk. We shall begin with a history of the problem. In the second part we shall report on recent work on wild Cantor sets, ending with the latest constructions using the Bing and the Whitehead links. We shall also state some open problems and conjectures.

**References**

1. *Garity D. J., Repovš D., Željko M.* Uncountably many inequivalent Lipschitz homogeneous Cantor sets in  $R^3$  // *Pacif. J. Math.* 2005. V. 222, no. 2. P. 287–299.
2. *Garity D. J., Repovš D., Željko M.* Rigid Cantor sets in  $R^3$  with simply connected complement // *Proc. Amer. Math. Soc.* 2006. V. 134, no. 8. P. 2447–2456.
3. *Garity D. J., Repovš D., Wright D. G., Željko M.* On Bing-Whitehead Cantor sets. Preprint.

---

\*The author were supported by the Slovenian Research Agency program P1-0292-0101-04.

---

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

## DIFFERENTIAL EQUATIONS AND MATHEMATICAL PHYSICS

---

### ЧАСТИЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Д. С. Аниконов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; anik@math.nsc.ru*

В теории обратных задач для уравнений математической физики часто встречаются задачи, в которых требуется найти некоторые коэффициенты уравнения при известных остальных коэффициентах. Такой подход, в лучшем случае, предполагает большую зависимость от априорной информации. К тому же, при этом нередко используются ограничения, вытекающие из потребностей используемого метода исследования, но не вполне адекватные декларируемым целям. Как следствие, появляются результаты, имеющие только теоретическое значение. Стоит заметить, что такой путь исследования долгое время использовался многими высококвалифицированными авторами, получившими многочисленные результаты по широкому кругу вопросов. Однако, как показывают наблюдения, сейчас дальнейший прогресс в этом же направлении связан с всевозрастающими трудозатратами и приводит, как правило, к все менее значимым результатам.

В связи с этим обстоятельством, можно предложить иной подход к исследованию обратных задач, в котором требуется найти только часть неизвестных величин (без определения остальных), но при этом постараться не использовать специфические предположения, снижающие практическую ценность выводов. Иначе говоря, предлагается понизить количество искомой информации, но при одновременном повышении качества ограничений. Естественно, новый подход представляет ценность только при его перспективности, что может быть подтверждено успешными случаями его реализации.

Приведем некоторые примеры таких успешных реализаций. Первый из них относится к специальной задаче интегральной геометрии. В ограниченной области  $n$ -мерного пространства рассматриваются всевозможные прямые, пересекающие эту область. Заданы интегралы вдоль пересечений таких прямых с областью от неизвестной кусочно-гладкой функции, зависящей не только от точек области, но и от переменных, характеризующих прямые. Естественно, найти полностью неизвестную функцию не представляется возможным ввиду ее зависимости от слишком большого числа переменных. Поэтому ставится более скромная, но все же полезная задача: найти поверхности разрывов подынтегральной функции. При ограничениях общего характера и при условии наличия искомого поверхностей доказывается единственность решения этой задачи и строится соответствующий алгоритм (Д. С. Аниконов). Другим примером подобного типа является исследование задачи томографии, рассматриваемой как обратная задача для полихроматического стационарного дифференциального уравнения переноса, в которой по данным на границе удается выделить прямые, касательные к неизвестным включениям внутри обследуемой среды. Тем самым, оказывается возможным получить часть информации о строении неизвестного тела при довольно широких ограничениях (Д. С. Коновалова).

Обращаясь к исследованиям А. И. Прилепко, В. Н. Страхова и их учеников по обратным задачам гравиметрии, отметим часть работ, основанных на эффекте выделения особенностей заданного внешнего потенциала. Тем самым, на первом этапе определялись некоторые точки искомого границ, а далее, на втором этапе, по ним выстраивалось и все искомое тело, но при дополнительных, весьма специфических предположениях. Однако, в рамках концепции частичного решения обратных задач, во втором этапе нет необходимости, т. е. предлагается ограничиться

первым этапом и не ухудшать окончательный результат введением искусственных ограничений, вызванных только выбранным методом исследования.

Число подобных примеров нетрудно увеличить. Однако вряд ли указанный подход является плодотворным для всех обратных задач. Тем не менее, его можно рекомендовать, как один из способов исследования обратных задач для уравнений математической физики, а также для пересмотра некоторых, уже достигнутых результатов.

## О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ДЛЯ ОПЕРАТОРА КОШИ — РИМАНА\*

Э. В. Арбузов<sup>1</sup>, А. Л. Бухгейм<sup>2</sup>

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;*

<sup>1</sup> *arbuzov@math.nsc.ru,* <sup>2</sup> *bukhgeim@math.nsc.ru*

В работе, для области  $\Omega$  в комплексной плоскости, рассматривается следующая система уравнений

$$\begin{aligned} 2\bar{\partial}w_1(\zeta) - q_1 e^{-i\tau} {}^{2\chi(\zeta)}w_2(\zeta) &= g_1(\zeta), \\ 2\partial w_2(\zeta) - q_2 e^{i\tau} {}^{2\chi(\zeta)}w_1(\zeta) &= g_2(\zeta), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\chi(\zeta)$  — мнимая часть некоторой аналитической в  $\Omega$  функции, и  $\tau$  — вещественное число.

**Теорема.** *Если  $\mathbf{g} = (g_1, g_2) \in L_p(\Omega)$ ,  $p > 1$ ,  $q_1, q_2 \in C(\Omega)$ , то можно указать число  $\tau_0$ , такое, что при  $\tau > \tau_0$  существует решение  $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$  системы (1), и для него выполняется оценка*

$$\|\mathbf{w}\|_{L_p(\Omega)} \leq C \|\mathbf{g}\|_{L_p(\Omega)},$$

где константа  $C$  не зависит от  $\tau$ .

Рассматривая систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} w_1(\zeta) - \frac{1}{2}\mathbb{P}(q_{21}e^{-i2\tau\chi}w_2) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}g_1, \\ w_2(\zeta) - \frac{1}{2}\bar{\mathbb{P}}(q_{12}e^{i2\tau\chi}w_1) &= \frac{1}{2}\bar{\mathbb{P}}g_2, \end{aligned}$$

где

$$\mathbb{P}(A)(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{A(\eta)}{\eta - \zeta} \mathbf{d}\eta$$

— интегральный оператор Коши, получим, что

$$w_2(\zeta) - \frac{1}{4}\bar{\mathbb{P}}(q_{12}e^{i2\tau\chi}\mathbb{P}(q_{21}e^{-i2\tau\chi}w_2)) = \frac{1}{4}\bar{\mathbb{P}}(q_{12}e^{i2\tau\chi}\mathbb{P}g_1) + \frac{1}{2}\bar{\mathbb{P}}g_2,$$

или

$$w_2 + \mathbb{S}(w_2) = g.$$

При этом, в силу свойств интегрального оператора Коши [1], оператор

$$\mathbb{S}w = -\frac{1}{4}\bar{\mathbb{P}}(q_{12}e^{i2\tau\chi}\mathbb{P}(q_{21}e^{-i2\tau\chi}w))$$

является вполне непрерывным в  $L_p(\Omega)$ ,  $p > 1$ , а правая часть уравнения

$$g = \frac{1}{4}\bar{\mathbb{P}}(q_{12}e^{i2\tau\chi}\mathbb{P}g_1) + \frac{1}{2}\bar{\mathbb{P}}g_2 \in L_p(\Omega).$$

Используя дифференциальные свойства оператора  $\mathbb{P}$ , доказанные также в [1], показывается, что при  $\tau$  большем некоторого  $\tau_0$  оператор  $\mathbb{S}$  является сжимающим.

---

\*Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00250), Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный интеграционный проект № 2006-48) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (НШ-7157.2006.1), второго автора — при частичной поддержке NSF Grant DMS-0505470.



Решение данной системы уравнений даёт возможность получить формулы типа Карлемана и оценки условной устойчивости, позволяющие находить решение задач Коши для эллиптических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами на плоскости

$$\Delta u(x, y) + a_1(x, y)u_x(x, y) + a_2(x, y)u_y(x, y) + a_0(x, y)u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x, y)|_M = u_0(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u(x, y)|_M = u_1(x, y),$$

где коэффициенты  $a_0(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ ,  $a_1(x, y), a_2(x, y) \in C^1(\bar{\Omega})$ , данные Коши  $u_0(x, y) \in C^1(M)$ ,  $u_1(x, y) \in C(M)$ , и  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  — вектор единичной внешней нормали.

Эллиптическое уравнение общего вида, с помощью соответствующей замены переменных, приводится к каноническому виду (2) во всей области  $\Omega$  [1].

Кроме этого, формулы типа Карлемана можно получить для решения задач, которые сводятся к уравнениям данного вида. Например, для задачи Коши для системы уравнений Максвелла в плоском случае, которая сводится к двум уравнениям Гельмгольца.

### Литература

1. Веква И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.

# КОРРЕКТНОСТЬ МОДИФИЦИРОВАННОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ВЯЗКОМ ГАЗЕ\*

А. М. Блохин<sup>1</sup>, Д. Л. Ткачев<sup>2</sup>

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;*

<sup>1</sup> *blokhin@math.nsc.ru*, <sup>2</sup> *tkachev@math.nsc.ru*

При постановке физического эксперимента, а также при численном моделировании течений вязкого теплопроводного газа (рассматривается модель Навье – Стокса) особенный интерес вызывают характерные качественные свойства таких движений — детальная информация о них позволяет существенно эффективнее организовать процесс изучения явления. Одно из свойств течений — образование в ряде случаев узких, так называемых переходных зон, в которых параметры, характеризующие движения (компоненты вектора скорости, плотность, давление, температура и т. д.) испытывают резкие изменения (большие градиенты) по пространственным переменным, оставаясь при этом непрерывными. Возникают течения типа “вязкого профиля” [1, 2]. Так происходит, например, когда вязкий теплопроводный газ обтекает затупленное тело.

В связи с этим очень перспективна идея приближенной замены узких переходных зон поверхностями сильного разрыва, т. е. ударными волнами, — в этом суть метода “ударных волн”. Такой подход имеет ряд существенных преимуществ: во-первых, резко сокращается объем вычислений; во-вторых, математическая теория сильных разрывов относительно хорошо развита не только для одномерных, но и для многомерных течений, созданы эффективные численные алгоритмы.

Следует отметить, что предлагаемый разрывный подход к исследованию волн в вязком теплопроводном газе используется и в теоретических исследованиях. Так, при исследовании устойчивости плоских ударных волн с целью оценки влияния малой вязкости на развитие возмущений предполагается, что шириной переходной зоны можно пренебречь. Поэтому задача об изучении развития возмущений сводится, как и в невязком газе, к исследованию линейной смешанной задачи с граничными условиями на фронте ударной волны, полученными после линеаризации уравнений сильного разрыва.

Однако, ранее на примере математической модели Навье – Стокса для сжимаемой жидкости была показана неприемлемость подхода, основанного на представлении ударных волн в вязком газе как поверхностей сильного разрыва. Оказывается, что такой вывод можно сделать уже по линейному приближению. С этой целью изучается смешанная задача, полученная путем линеаризации нестационарных уравнений Навье – Стокса и уравнений сильного разрыва относительно кусочно-постоянного решения. Это кусочно-постоянное решение описывает следующий режим течения вязкого газа: сверхзвуковой стационарный поток вязкого газа (при  $x < 0$ ) отделяется от дозвукового стационарного потока (при  $x > 0$ ) поверхностью сильного разрыва — ударной волной (с уравнением  $x = 0$ ). В упомянутых выше работах было показано, что ударная волна неустойчива вне зависимости от характера линеаризованных граничных условий при  $x = 0$ . Это обстоятельство является следствием того факта, что число независимых параметров, определяющих произвольное малое возмущение разрыва, больше числа линеаризованных граничных условий на разрыве. Таким образом, ударная волна в вязком газе, рассматриваемая как поверхность сильного разрыва, подобна неэволюционным разрывам в идеальных средах.

Заметим, что с математической точки зрения построенные для доказательства неустойчивости частные, экспоненциально растущие со временем решения есть, по существу, примеры Адамара, которые показывают некорректность упомянутой выше линейной смешанной задачи. Обнаруженную неустойчивость можно, также, трактовать как косвенное доказательство невозможности нахождения стационарных режимов обтекания затупленных тел вязким газом с головным скачком уплотнения в виде поверхности сильного разрыва методом установления. С физической точки зрения этот факт означает практическую нереализуемость вышеописанного стационарного режима течения вязкого газа с ударной волной.

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-01-00585).

Вместе с тем, учитывая изложенные выше преимущества разрывного подхода, хотелось бы модифицировать этот подход так, чтобы можно было бы обоснованно применить его, например, в задачах о нахождении стационарных режимов обтекания методом установления для сред с диссипацией.

Суть идеи заключается в том, чтобы дописать к исходной линейной задаче об устойчивости дополнительные граничные условия так, чтобы для вновь сформулированной смешанной задачи стационарный режим течения газа с ударной волной, описанный выше, стал бы асимптотически устойчив (по Ляпунову). Отсюда следует, что по крайней мере на линейном уровне был бы обоснован метод установления, что означало бы возможность определения стационарного режима течения вязкого газа с ударной волной этим методом. Упомянутые же выше дополнительные граничные условия предлагается конструировать с учетом априорной информации о разыскиваемом методе установления стационарном режиме течения вязкого газа с ударной волной.

В докладе обсуждается вопрос о постановке дополнительных граничных условий при исследовании неоднородной линейной задачи об устойчивости ударной волны — разрыва в вязком газе и об исследовании корректности модифицированной задачи. Заметим, что рассмотрение многомерного случая необходимо, чтобы естественным образом подойти, например, к изучению уже упомянутой задачи об обтекании затупленного тела вязким газом. Основные результаты доклада опубликованы в работах [3–5].

### Литература

1. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
2. *Zumbrun K., Serre D.* Viscous and inviscid stability of multidimensional planar viscous shock waves // *Indiana Univ. Math. J.* 1999. Vol. 48. P. 937–992.
3. *Esipov D. V., Tkachev D. L., Blokhin A. M.* Well-posedness of a modified initial-boundary value problem on stability of shock waves in a viscous gas // In: Abstracts of the International Conference “Eleventh International Conference on Hyperbolic Problems. Theory. Numerics. Applications”. Lyon. France. July 17–21. 2006. P. 65–67.
4. *Blokhin A. M., Tkachev D. L., Baldan L. O.* Well-posedness of a modified initial-boundary value problem on stability of shock waves in a viscous gas. Part. I // *J. Math. Anal. Appl.* 2007. Vol. 331, no 1. P. 408–423.
5. *Blokhin A. M., Tkachev D. L., Esipov D. V.* Well-posedness of a modified initial-boundary value problem on stability of shock waves in a viscous gas. Part. II // *J. Math. Anal. Appl.* 2007. Vol. 331, no 1. P. 424–442.

# НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА НЬЮТОНА К УРАВНЕНИЯМ НАВЬЕ – СТОКСА \*

М. Е. Боговский

*Российский Университет дружбы народов, Москва; mbogovskii@sci.pfu.edu.ru*

Как известно, при численном решении начально-краевых задач для нелинейной системы уравнений Навье – Стокса реализация знаменитого своей сверхсходимостью метода Ньютона осложняется двумя сугубо практическими проблемами: обращением производной Фреше соответствующего нелинейного отображения и выбором начального приближения из достаточно малой окрестности искомого решения. Разработка новых эффективных подходов к решению этих двух практических проблем и является целью настоящей работы.

В ограниченной или неограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  с компактной границей  $\partial\Omega \in C^2$  рассматривается начально-краевая задача для нелинейной системы Навье – Стокса

$$\begin{cases} v_t + (v, \nabla)v - \nu\Delta v + \nabla q = f(x, t), \\ \operatorname{div} v = 0, \quad (x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T), \\ v|_{t=0} = a(x), \quad \operatorname{div} a = 0, \quad x \in \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T), \quad a|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Сильное решение задачи (1) определяется как упорядоченная пара  $\{v, \nabla q\} \in W_{2,x,t}^{2,1}(Q_T; \mathbb{R}^3) \times L_2(Q_T; \mathbb{R}^3)$  с анизотропным пространством Соболева  $W_{2,x,t}^{2,1}$  векторных полей  $v : Q_T \rightarrow \mathbb{R}^3$ , имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные по Соболеву  $v_t, D_x^\alpha v \in L_2(Q_T; \mathbb{R}^3)$  для всех мультииндексов  $\alpha$  таких, что  $|\alpha| \leq 2$ . Случай некомпактной границы  $\partial\Omega$  здесь не затрагивается лишь по той причине, что определение сильного решения в этом случае нуждается в уточнении и требует особого внимания ввиду возможной неединственности сильного решения.

Подпространство  $H_T = \{v(x, t) \in W_{2,x,t}^{2,1}(Q_T; \mathbb{R}^3) : \operatorname{div} v = 0, v|_{\partial\Omega} = 0\}$  рассматривается как гильбертово пространство с индуцированной нормой. Аналогичным образом, через  $G_T$  обозначим замкнутое подпространство всех потенциальных векторных полей  $\nabla_x \psi \in L_2(Q_T; \mathbb{R}^3)$ , считая его гильбертовым пространством с индуцированной нормой. Для нелинейного отображения, соответствующего начально-краевой задаче (1), обращение производной Фреше на элементе  $\{v, \nabla q\} \in H_T \times G_T$  требует решения линейной задачи

$$\begin{cases} u_t + (u, \nabla)v + (v, \nabla)u - \nu\Delta u + \nabla\psi = g, \\ u|_{t=0} = b, \quad \{u, \nabla\psi\} \in H_T \times G_T \end{cases} \quad (2)$$

для всех  $g \in L_2(Q_T; \mathbb{R}^3)$ ,  $b \in J(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{w(x) \in W_2^1(\Omega; \mathbb{R}^3) : \operatorname{div} w = 0, w|_{\partial\Omega} = 0\}$ , при любом заданном фиксированном  $v \in H_T$ . Современное состояние стандартной техники решения как самой нелинейной задачи (1), так и связанных с ней линейных задач, достаточно полно представлено в монографии [1].

Искусственно вводя комплексный параметр  $z \in \mathbb{C}$ , рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} u_t + z \cdot (u, \nabla)v + z \cdot (v, \nabla)u - \nu\Delta u + \nabla\psi = z \cdot g, \\ u|_{t=0} = z \cdot b, \quad \{u, \nabla\psi\} \in H_T \times G_T. \end{cases} \quad (3)$$

Решение задачи (2) в силу своей единственности совпадет с решением задачи (3) при  $z = 1$ . Справедлива следующая

**Теорема 1.** *Для каждого  $g \in L_2(Q_T; \mathbb{R}^3)$ ,  $b \in J(\Omega)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , существует единственное решение задачи (3). Это решение является целой функцией  $z \in \mathbb{C}$  со значениями в  $H_T \times G_T$ .*

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00725).

В силу теоремы 1 сильное решение задачи (3) представимо в виде ряда Тейлора

$$\{u(x, t, z), \nabla\psi(x, t, z)\} = \sum_{k=1}^{\infty} \{u^k(x, t), \nabla\psi^k(x, t)\} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (4)$$

сходящегося в норме  $H_T \times G_T$  на любом компакте в  $\mathbb{C}$ . Очевидно, члены ряда (4) образуют рекуррентную последовательность, которая строится с помощью разрешающего оператора линейной задачи Стокса без конвективных членов:

$$\begin{cases} u_t^1 - \nu\Delta u^1 + \nabla\psi^1 = g, \\ u^1|_{t=0} = b, \{u^1, \nabla\psi^1\} \in H_T \times G_T, \end{cases} \quad \begin{cases} u_t^k - \nu\Delta u^k + \nabla\psi^k = -k \cdot (u^{k-1}, \nabla)v - k \cdot (v, \nabla)u^{k-1}, \\ u^k|_{t=0} = 0, \{u^k, \nabla\psi^k\} \in H_T \times G_T, \quad k \geq 2. \end{cases}$$

Из теоремы 1 и неравенства Коши (см. [3], с. 348) вытекает, что ряд (4) сходится в норме  $H_T \times G_T$  со скоростью геометрической прогрессии со сколь угодно малым знаменателем.

При решении нелинейной задачи (1) методом Ньютона для построения подходящего начального приближения оказывается эффективной регуляризация Варнхорна [2] задачи (1), сводящаяся к введению запаздывания в конвективном члене. Точнее, рассмотрим задачу с малым параметром  $\varepsilon > 0$  вида

$$\begin{cases} v_t + (\mathcal{S}_\varepsilon v, \nabla)v - \nu\Delta v + \nabla q = f, \\ v|_{t=0} = a, \{v, \nabla q\} \in H_T \times G_T, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\mathcal{S}_\varepsilon$  — оператор сдвига по  $t$  такой, что  $\mathcal{S}_\varepsilon v(x, t) = v(x, t - \varepsilon)$  при  $t \geq \varepsilon$ , тогда как  $\mathcal{S}_\varepsilon v(x, t) = a(x)$  при  $t < \varepsilon$ . Нетрудно убедиться, что всякое сильное решение задачи (1) при  $\varepsilon \rightarrow +0$  аппроксимируется в норме  $H_T \times G_T$  последовательностью регуляризованных решений (5).

Вводя по аналогии с (3) комплексный параметр  $z \in \mathbb{C}$ , рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} v_t + z \cdot (\mathcal{S}_\varepsilon v, \nabla)v - \nu\Delta v + \nabla q = z \cdot f, \\ v|_{t=0} = z \cdot a, \{v, \nabla q\} \in H_T \times G_T. \end{cases} \quad (6)$$

Ввиду единственности сильного решения задачи (1) оно должно совпасть с решением задачи (6) при  $z = 1$ . Справедлива следующая

**Теорема 2.** Для каждого  $f \in L_2(Q_T; \mathbb{R}^3)$ ,  $a \in J(\Omega)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\varepsilon > 0$ , существует единственное решение задачи (6). Это решение является целой функцией  $z \in \mathbb{C}$  со значениями в  $H_T \times G_T$ .

В силу теоремы 2, при  $\varepsilon > 0$  сильное решение задачи (6) представимо в виде ряда Тейлора

$$\{v(x, t, z), \nabla q(x, t, z)\} = \sum_{k=1}^{\infty} \{v^k(x, t), \nabla q^k(x, t)\} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (7)$$

сходящегося в норме  $H_T \times G_T$  на любом компакте в  $\mathbb{C}$ . При этом члены ряда (7) образуют рекуррентную последовательность, которая строится с помощью разрешающего оператора линейной задачи Стокса без конвективных членов:

$$\begin{cases} v_t^1 - \nu\Delta v^1 + \nabla q^1 = f, \\ v^1|_{t=0} = a, \{v^1, \nabla q^1\} \in H_T \times G_T, \end{cases} \quad \begin{cases} v_t^k - \nu\Delta v^k + \nabla q^k = -k! \sum_{m=1}^{k-2} \frac{(\mathcal{S}_\varepsilon v^m, \nabla)v^{k-1-m}}{m!(k-1-m)!}, \\ v^k|_{t=0} = 0, \{v^k, \nabla q^k\} \in H_T \times G_T, \quad k \geq 3, \end{cases}$$

где  $\{v^2, \nabla q^2\} = 0$ . Из теоремы 2 и неравенства Коши (см. [3], с. 348) вытекает сходимость ряда (7) в норме  $H_T \times G_T$  со скоростью геометрической прогрессии со сколь угодно малым знаменателем.

### Литература

1. *Sohr H.* The Navier–Stokes equations. An elementary functional analytic approach. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser Vlg., 2001.
2. *Varnhorn W.* The Stokes equations. Berlin: Akademie Vlg., 1994.
3. *Шварц Л.* Анализ. Т. 2. М.: Мир, 1972.

## УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Л. Н. Бондарь

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск; b\_lina@ngs.ru*

В работе рассматриваются краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических систем следующего вида:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(D_x)U = F(x), & x \in R_n^+, \\ B(D_x)U|_{x_n=0} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Сформулируем условия на матричные дифференциальные операторы  $\mathcal{L}(D_x)$  и  $B(D_x)$ . Обозначим через  $l_{kj}(i\eta)$ ,  $b_{kj}(i\eta)$  элементы матриц  $\mathcal{L}(i\eta)$ ,  $B(i\eta)$  соответственно.

**Условие 1.** Символ  $\mathcal{L}(i\eta)$  оператора  $\mathcal{L}(D_x)$  — матрица размера  $m \times m$ . Элементы матрицы  $\mathcal{L}(i\eta)$  однородны относительно вектора  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , т. е. для любого  $c > 0$  справедливы равенства  $l_{kj}(c^\alpha i\eta) = cl_{kj}(i\eta)$ ,  $1/\alpha_k$  — натуральные числа.

**Условие 2.** Равенство  $\det \mathcal{L}(i\eta) = 0$ ,  $\eta \in R_n$ , имеет место тогда и только тогда, когда  $\eta = 0$ .

Матричные операторы, удовлетворяющие условиям 1, 2, входят в класс квазиэллиптических операторов [1].

Из условия 2 вытекает, что уравнение  $\det \mathcal{L}(is, i\lambda) = 0$ ,  $s \in R_{n-1} \setminus \{0\}$ , не имеет вещественных корней по  $\lambda$ . Обозначим через  $\mu$  число корней, лежащих в верхней полуплоскости.

**Условие 3.** Будем считать, что матрица  $B(i\eta)$  имеет размер  $\mu \times m$ , и ее элементы однородны относительно вектора  $\alpha$ , т. е. для любого  $c > 0$  существует вектор  $(\beta_1, \dots, \beta_\mu)$ ,  $0 \leq \beta_k < 1$ , такой, что справедливы равенства  $b_{kj}(c^\alpha i\eta) = c^{\beta_k} b_{kj}(i\eta)$ .

**Условие 4.** Краевая задача (1) удовлетворяет условию Лопатинского.

Будем использовать следующие обозначения:

$$l = (1/\alpha_1, \dots, 1/\alpha_n), \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad 1 < p < \infty, \quad 1/p + 1/p' = 1, \quad \langle x \rangle^2 = \sum_{i=1}^n x_i^{2/\alpha_i}.$$

Пусть  $\mathfrak{L}_{p,N}(R_n^+)$  — подпространство в  $L_p(R_n^+)$ , состоящее из функций  $f(x)$ , удовлетворяющих условиям

$$(1 + \langle x \rangle)^{N + \alpha_{\max}} f(x) \in L_1(R_n^+), \quad \alpha_{\max} = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\},$$

$$\int_{R_n^+} x^\nu f(x) dx = 0 \quad \text{для всех мультииндексов } \nu \text{ таких, что } \alpha\nu \leq N.$$

Обозначим через  $V_{\alpha,p}$  множество мультииндексов  $\nu^* = (\nu_1^*, \dots, \nu_n^*)$ , для которых выполнены неравенства  $|\alpha|/p' + \alpha\nu^* + \alpha_{\min} > 1 \geq |\alpha|/p' + \alpha\nu^*$ ,  $\alpha_{\min} = \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ .

Из работы [2] следует, что краевая задача (1) однозначно разрешима в соболевском пространстве  $W_p^l(R_n^+)$  при  $|\alpha| > p'$ . В случае, когда  $|\alpha| \leq p'$ , краевая задача может быть неразрешимой в  $W_p^l(R_n^+)$  даже при  $F(x) \in C_0^\infty(R_n^+)$ . Для квазиэллиптических уравнений это было установлено в [3].

В настоящей работе исследуется разрешимость краевой задачи вида (1) в соболевском пространстве  $W_p^l(R_n^+)$ , когда  $|\alpha| \leq p'$ . Доказана следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $|\alpha| \leq p'$ , число  $N$  определяется из условия  $N = \max_{\nu^* \in V_{\alpha,p}} (\alpha\nu^*)$ . Тогда краевая задача (1) имеет единственное решение  $U(x) \in W_p^l(R_n^+)$  для любой вектор-функции  $F(x) \in \mathfrak{L}_{p,N}(R_n^+)$  и справедлива оценка

$$\|U(x), W_p^l(R_n^+)\| \leq c(\|F(x), L_p(R_n^+)\| + \|(1 + \langle x \rangle)^{N + \alpha_{\max}} F(x), L_1(R_n^+)\|)$$

с константой  $c > 0$ , не зависящей от  $F(x)$ .

**Литература**

1. *Волевич Л. Р.* Локальные свойства решений квазиэллиптических систем // *Мат. сб.* 1962. Т. 59, № 3. С. 3–52.
2. *Demidenko G. V.* On solvability of boundary value problems for quasi-elliptic systems in  $R_+^n$  // *Journal of Analysis and Applications.* 2006. Vol. 4, no 1. P. 1–11.
3. *Демиденко Г. В.* Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями. II // *Сиб. мат. журн.* 1994. Т. 35, № 1. С. 41–65.

# АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ЗАРЯДА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Р. С. Бушманов

Новосибирский государственный университет, Новосибирск; roman.s.bushmanov@gmail.com

Математическое моделирование физических процессов в полупроводниковых устройствах имеет огромное значение для технических приложений и в последнее время превратилось в быстро развивающуюся область прикладной математики. Современный уровень развития микроэлектронных технологий позволяет создавать полупроводниковые приборы все более и более малых размеров. Точность, обеспечиваемая упрощенными аналитическими моделями становится неприемлемой для анализа и проектирования таких приборов. Необходимы математические модели, более полно описывающие физические процессы, происходящие в полупроводнике. Одна из таких моделей — гидродинамическая модель, полученная с помощью так называемого принципа максимума энтропии (МЕР), предложена в работах [1, 2].

Если классические модели достаточно полно изучены с математической точки зрения, то для новых гидродинамических моделей здесь остаются вопросы. В реальных полупроводниковых приборах при незначительном напряжении смещения отсутствует поток электронов. Поэтому, чтобы говорить об адекватности описания моделью переходного процесса при снятии напряжения смещения необходимо, чтобы решение, описывающее отсутствие потока электронов, было асимптотически устойчивым. Для МЕР модели рассматриваются вопросы существования и асимптотического поведения решения.

Исследуемая модель переноса заряда записывается в виде системы моментных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nV^i)}{\partial x^i} &= 0, \\ \frac{\partial(nP^i)}{\partial t} + \frac{\partial(nU^{ij})}{\partial x^j} + neE^i &= nC_P^i, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial(nW)}{\partial t} + \frac{\partial(nS^i)}{\partial x^i} + neV_iE^i &= nC_W, \\ \frac{\partial(nS^i)}{\partial t} + \frac{\partial(nF^{ij})}{\partial x^j} + neE_jG^{ij} &= nC_W^i, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $n$  — электронная плотность,

$V^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , — компоненты средней скорости электрона,

$P^i (= m^*V^i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , — компоненты среднего момента кристалла,

$m^*$  — эффективная масса электрона,

$U^{ij} = \frac{2}{3}W\delta^{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , — поток момента кристалла,

$W$  — средняя энергия электрона,

$F^{ij} = \frac{9}{10}\frac{W^2}{m^*}\delta^{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , — поток потока энергии,

$G^{ij} = \frac{5}{3}\frac{W}{m^*}\delta^{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$e$  — абсолютное значение заряда электрона,

$E^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  — компоненты электрического поля,

$S^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , — компоненты потока энергии,

$C_W$ ,  $C_P^i$ ,  $C_W^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , — члены производства, зависящие от  $W$ .

Система (1) рассматривается совместно с уравнением Пуассона

$$\epsilon\Delta\Phi = e(n - N), \tag{2}$$

где  $N = N_D - N_A$ ,  $N_D$  и  $N_A$  — плотности доноров и акцепторов соответственно,  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная.



Для системы (1), (2) в одномерном случае ставится тестовая задача о баллистическом диоде. Исследуется асимптотическое поведение решения поставленной задачи в нелинейной постановке: получена глобальная априорная оценка решения, доказана глобальная теорема существования и асимптотическая устойчивость состояния равновесия.

В двумерном случае для системы (1), (2) рассматривается задача, описывающая транзистор MESFET прямоугольной формы. В линейном приближении получена глобальная априорная оценка, доказана асимптотическая устойчивость состояния равновесия.

### Литература

1. *Anile A. M., Romano V.* Non parabolic band transport in semiconductors: closure of the moment equations // *Cont. Mech. Thermodyn.* 1999. Vol. 11. P. 307–325.
2. *Romano V.* Non parabolic band transport in semiconductors: closure of the production terms in the moment equations // *Cont. Mech. Thermodyn.* 2000. Vol. 12. P. 31–51.

# ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЦЕНТРА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СОВЕРШЕННО ИЗОХРОННЫХ СИСТЕМ\*

Е. П. Волокитин

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; volok@math.nsc.ru*

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -y + xH(x, y), \quad \dot{y} = x + yH(x, y),$$

где  $H(x, y)$  — многочлен от переменных  $x, y$ ,  $H(0, 0) = 0$ .

Система имеет единственную точку покоя  $(0, 0)$ , которая является центром по линейному приближению и обладает свойством совершенной изохронности: траектории двигаются вокруг точки покоя с постоянной угловой скоростью, равной 1.

Проблема характеристики центров для полиномиальных совершенно изохронных систем привлекала внимание многих авторов и остается открытой (см. [1–4] и процитированную там литературу).

В работе рассматриваются совершенно изохронные системы вида

$$\dot{x} = -y + x(H_n(x, y) + H_{2n}(x, y)), \quad \dot{y} = x + y(H_n(x, y) + H_{2n}(x, y)),$$

где  $H_n(x, y)$ ,  $H_{2n}(x, y)$  — однородные многочлены от переменных  $x, y$  степени  $n$ ,  $2n$  соответственно.

Для случаев  $n=3$  и  $n=4$  получены достаточные условия центра в виде условий на коэффициенты многочленов  $H_k(x, y)$ .

Метод получения этих условий основан на сведении рассматриваемых систем к уравнению Абеля

$$\frac{dR}{d\vartheta} = c_2(\vartheta)R^2 + c_3(\vartheta)R^3.$$

С другой стороны, к такому же уравнению сводятся системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = -y + P_{n-1}(x, y), \quad \dot{y} = x + Q_{n-1}(x, y),$$

где  $P_{n-1}(x, y)$ ,  $Q_{n-1}(x, y)$  — однородные многочлены от переменных  $x, y$  степени  $n-1$ .

Для последних при  $n=3$ ,  $n=4$  известны условия центра, откуда могут быть выведены условия центра для рассматриваемых систем.

С использованием полученных результатов можно построить новые примеры изохронных систем с центром, в частности, совершенно изохронную полиномиальную систему с центром, которая не является реверсивной и не коммутирует с нетривиальной полиномиальной системой. Вопрос о существовании такой системы был поставлен в [2, 3].

## Литература

1. Chavarriga J., Sabatini M. A survey of isochronous centers // Qualitative Theory of Dynamical Systems. 1999. Vol. 1, no 1. P. 1–70.
2. Algaba A., Reyes M., Bravo A. Geometry of the uniformly isochronous centers with polynomial commutators // Differential Equations Dynam. Systems. 2002. Vol. 10, no 3–4. P. 257–275.
3. Algaba A., Reyes M. Centers with degenerate infinity and their commutators // J. Math. Anal. Appl. 2003. Vol. 78, no 1. P. 109–124.
4. Algaba A., Reyes M. Computing center conditions for vector fields with constant angular speed // J. Comput. Appl. Math. 2003. Vol. 154, no 1. P. 143–159.

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05–01–00302).

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕННЫХ СЕТЕЙ\*

Ю. А. Гайдов<sup>1</sup>, В. П. Голубятников<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Новосибирский государственный университет, Новосибирск; *gja822@ngs.ru*

<sup>2</sup> Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; *glbntn@math.nsc.ru*

Одна из основных целей наших исследований — дать математическое объяснение результатам некоторых численных экспериментов с периодическими траекториями в моделях генных сетей, проводившихся в последнее время в совместных проектах ИМ СО РАН, ИЦиГ СО РАН и НГУ, см. например [1–6].

1. Рассмотрим трехмерную нелинейную динамическую систему, моделирующую регуляцию генной сети с отрицательными обратными связями:

$$\dot{x} = \Phi_1(z, x), \quad \dot{y} = \Phi_2(x, y), \quad \dot{z} = \Phi_3(y, z). \quad (1)$$

Здесь  $\Phi_i$  — достаточно гладкие и монотонно убывающие по обоим своим аргументам функции, а переменные  $x \equiv x_1, y \equiv x_2, z \equiv x_3 \in [0, \infty)$  ( $x_{i-1} = x_3$  при  $i = 1$ ) описывают концентрации белков в моделируемых генных сетях. Будем считать, что  $\Phi_i(x_{i-1}, 0) > 0$  и  $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}(x_{i-1}, x_i) \leq \delta_i < 0$ . Для подобных систем будем иногда использовать векторную форму их записи  $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$ . Система (1) и каждый ее нечетномерный аналог имеет единственную стационарную точку  $M_*$ ,  $\Phi(M_*) = 0$ . Ее топологический индекс равен  $-1$ , что легко проверяется при рассмотрении подходящего инвариантного параллелепипеда  $[0, a_1] \times [0, a_2] \times [0, a_3] \subset R_+^3$ .

Линеаризация системы (1) в окрестности точки  $M_*$  имеет одно отрицательное собственное значение  $\lambda_1 < 0$ , все координаты соответствующего собственного вектора имеют одинаковые знаки. Остальные собственные значения  $\lambda_2, \lambda_3$  этой линеаризации комплексно сопряжены. Если  $\operatorname{Re} \lambda_2, \operatorname{Re} \lambda_3 < 0$ , то стационарная точка  $M_*$  устойчива, и к ней притягиваются все траектории системы (1).

**Теорема 1.** *Если  $\operatorname{Re} \lambda_2, \operatorname{Re} \lambda_3 > 0$ , то динамическая система (1) имеет по крайней мере один цикл в инвариантной области.*

Доказательство теоремы основано на известном принципе тора и на теореме Брауэра о неподвижной точке.

2. Другой класс генных сетей, особенно интересный для генетиков, регулируется комбинациями положительных и отрицательных обратных связей. Как и в [1, 3, 6], для простоты изложения ограничимся специальным случаем, симметричным относительно циклических перестановок переменных  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ . Рассмотрим динамическую систему типа Гласса-Макки с унимодальными правыми частями:

$$\dot{x} = \frac{\alpha z}{1 + z^\gamma} - x, \quad \dot{y} = \frac{\alpha x}{1 + x^\gamma} - y, \quad \dot{z} = \frac{\alpha y}{1 + y^\gamma} - z. \quad (2)$$

Пусть в динамической системе (2) параметры  $\alpha$  и  $\gamma$  достаточно велики. Тогда эта система имеет во внутренности положительного октанта семь стационарных точек. Четыре из них имеют индекс  $-1$ , а оставшиеся три имеют индекс  $+1$ . Еще одна стационарная точка этой системы находится в начале координат, ее индекс также равен  $+1$ .

Если у этих стационарных точек, имеющих индекс  $-1$ , линеаризации системы (2) имеют по одному отрицательному собственному числу и по два комплексных собственных числа с положительными вещественными частями, то, как показывают численные эксперименты, система (2) имеет по крайней мере четыре периодических траектории; одна из них вращается вокруг диагонали  $\Delta = \{x = y = z\}$ , а три других расположены вблизи от координатных осей. Аналогичным образом выглядят фазовые портреты и других подобных трехмерных динамических

---

\*Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта СО РАН № 46 и гранта 8526.2006.1 Президента РФ для поддержки научных школ.

систем с унимодальными правыми частями. В больших размерностях у некоторых таких систем было отмечено появление хаотических режимов — соответствующие отображения Пуанкаре в силу теоремы Шарковского имеют периодические точки любых порядков (см. [3]).

**3.** Следуя Р. А. Смитту [7], с целью исследования устойчивости обнаруженных циклов рассмотрим векторную форму системы (1) для случая  $\Phi_i(w, v) = f_i(w) - v$ :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A \cdot \mathbf{X} + \Psi(\mathbf{X}), \quad (3)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\eta \\ -\eta & -1 & 0 \\ 0 & -\eta & -1 \end{pmatrix}, \quad \Psi(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \eta \cdot z + f_1(z) \\ \eta \cdot x + f_2(x) \\ \eta \cdot y + f_3(y) \end{pmatrix}.$$

Здесь параметр  $\eta$  положителен и постоянен, а функции  $f_i$  монотонно убывают и принимают положительные значения.

**Теорема 2.** Если система (3) удовлетворяет условиям теоремы 1, и для всех точек  $M(x, y, z)$  инвариантной области выполняются неравенства

$$-\frac{7}{4}\eta < f'_{i+1}(x_i) < -\frac{1}{4}\eta, \quad i = 1, 2, 3,$$

то эта система (3) имеет в инвариантной области по крайней мере одну орбитально устойчивую периодическую траекторию.

Устойчивые циклы в динамических системах, моделирующих функционирование генных сетей, появляются и при выполнении условий теоремы Андронова-Хопфа о бифуркациях (см. [1, 4, 5, 6]).

Авторы выражают благодарность Е. П. Волокитину и А. Г. Клещеву за полезные обсуждения и помощь в компьютерных экспериментах.

### Литература

1. Golubyatnikov V. P., Likhoshvai V. A., Volokitin E. P., Gaidov Yu. A., Osipov A. F. Periodic trajectories and Andronov–Hopf bifurcations in models of gene networks // In: Bioinformatics of Genome Regulation and Structure II, Springer Science+Business Media Inc, 2006. P. 405–414.
2. Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И. Задачи теории функционирования генных сетей // Молекулярная биология. 2001. Т. 35, № 6. С. 926–932.
3. Golubyatnikov V. P., Likhoshvai V. A., Gaidov Yu. A., Kleshchev A. G., Lashina E. A. Regular and chaotic dynamics in the gene networks modeling // Proc. 8-th International conf. “Human and Computers”, University of Aizu, Japan, 2005. P. 7–12.
4. Golubyatnikov V. P., Gaidov Yu. A., Kleshchev A. G. Mathematical modeling of asymmetric gene networks with different types of regulation mechanisms // Proc. 9-th International conf. “Human and Computers”, University of Aizu, Japan, 2006. P. 1–6.
5. Волокитин Е. П., Тресков С. А. Бифуркация Андронова–Хопфа в модели гипотетических генных сетей // Сиб. журн. индустриальной математики. 2005. Т. 8, № 1. С. 30–40.
6. Голубятников В. П., Клещев А. Г., Клещева К. А., Кудрявцева А. В. Исследование фазовых портретов трехмерных моделей генных сетей // Сиб. журн. индустриальной математики. 2006. Т. 9, № 1. С. 75–84.
7. Smith R. A. Orbital stability for ordinary differential equations // Journ. of Diff. Equations. 1987. Vol. 69, no 2. P. 265–287.

# О ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРАНСЗВУКОВОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

С. Н. Глазатов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; glaz@math.nsc.ru*

Хорошо известно уравнение, описывающее нестационарные плоско-параллельные околосзвуковые течения вязкого и теплопроводящего газа (ВТ уравнение). Оно имеет вид

$$u_{xt} - \mu u_{xxx} + u_x u_{xx} - u_{yy} = f(x, y, t), \quad (1)$$

где  $\mu > 0$  — постоянная.

Уравнение (1) рассматривается в области  $Q = (0, 2\pi) \times (0, 1) \times (0, T)$ , где  $x \in (0, 2\pi)$ ,  $y \in (0, 1)$ ,  $0 < T < +\infty$ .

**Начально-краевая задача.** Найти в области  $Q$  решение уравнения (1), удовлетворяющее начально-краевым условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad (2)$$

$$D_x^j u|_{x=0} = D_x^j u|_{x=2\pi}, \quad j = 0, 1, 2, \quad (3)$$

$$u_y|_{y=0} = u_y|_{y=1} = 0. \quad (4)$$

При определенных условиях на правую часть  $f(x, y, t)$  и начальную функцию  $\varphi(x, y)$ , главным из которых является малость этих функций в нормах подходящих анизотропных пространств С. Л. Соболева, доказаны существование и единственность гладкого решения задачи (1)–(4) такого, что  $\int_0^{2\pi} u(x, y, t) dx = 0$  для всех  $(y, t) \in (0, 1) \times (0, T)$ .

Также при определенных условиях на функции  $f(x, y, t)$  и  $\varphi(x, y)$  доказана теорема о повышении гладкости этого решения по переменной  $t$ .

Кроме этого в области  $Q$  для линеаризованного уравнения Линя–Рейсснера–Цзяня

$$u_{xt} + (k(x, y, t)u_x)_x - u_{yy} = f(x, y, t)$$

рассмотрена начально-краевая задача, аналогичная задаче (1)–(4).

Здесь  $k(x, y, t)$  — произвольная гладкая в  $\bar{Q}$  функция, периодическая по переменной  $x$ .

Доказаны теоремы существования и единственности гладкого решения этой задачи, такого, что  $\int_0^{2\pi} u(x, y, t) dx = 0$  для всех  $(y, t) \in (0, 1) \times (0, T)$ .

Для последней задачи обоснован принцип линеаризации и показано, что полученный результат адекватен предположениям, при которых выведено исходное уравнение.

# ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ВОЛНОВОМУ УРАВНЕНИЮ\*

В. М. Гордиенко

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; gordienk@math.nsc.ru*

Пусть функция  $\Phi$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = f. \quad (1)$$

при  $t > 0$ .

Тогда вектор-функция  $U$ , образованная первыми производными функции  $\Phi$ ,

$$U \equiv \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_t \\ \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{bmatrix} \quad (2)$$

удовлетворяет при  $t > 0$  симметрической системе

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} k & -l & -m & -n \\ -l & k & 0 & 0 \\ -m & 0 & k & 0 \\ -n & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l & -k & 0 & 0 \\ -k & l & m & n \\ 0 & m & -l & 0 \\ 0 & n & 0 & -l \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} m & 0 & -k & 0 \\ 0 & -m & l & 0 \\ -k & l & m & n \\ 0 & 0 & n & -m \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & -k \\ 0 & -n & 0 & l \\ 0 & 0 & -n & m \\ -k & l & m & n \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ -l \\ -m \\ -n \end{bmatrix} f, \quad (3) \end{aligned}$$

где  $k, l, m, n$  — любые функции от  $t, x, y, z$ . Но мы будем предполагать выполненными условия

$$k > 0, \quad l^2 + m^2 + n^2 < k^2, \quad (4)$$

обеспечивающие положительную определённую матрицу при  $\frac{\partial}{\partial t}$  и, следовательно, гиперболичность по Фридрихсу системы (3).

В работе доказывается обратное утверждение. А именно, пусть вектор-функция

$$U = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

является решением симметрической гиперболической системы (3) (т. е. условия (4) выполнены), и пусть для начальных условий при  $t = 0$  справедливо

$$\operatorname{rot} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix} = 0.$$

---

\* Работа выполнена при поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (НШ-9019.2006.1) и Сибирского отделения Российской академии наук (интеграционные проекты № 5, № 2.15).

Тогда при  $t > 0$  для решения  $U$  выполняется:

$$\begin{bmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} u_t - p_x \\ v_t - p_y \\ w_t - p_z \end{bmatrix} = 0, \quad p_t - u_x - v_y - w_z = f. \quad (5)$$

Из (5) уже следует, что существует функция  $\Phi$  такая что выполняется (2), и эта функция  $\Phi$  удовлетворяет волновому уравнению (1).

Сформулированные утверждения о связи между решениями волнового уравнения (1) и гиперболической системы (3) переносятся на случай краевой задачи, удовлетворяющей условию Лопатинского.

# УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ\*

Г. В. Демиденко<sup>1</sup>, И. И. Матвеева<sup>2</sup>

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;*

<sup>1</sup> demidenk@math.nsc.ru, <sup>2</sup> matveeva@math.nsc.ru

В настоящей работе мы рассматриваем системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом следующего вида

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau) + F(t, y(t), y(t - \tau)), \quad t > \tau > 0, \quad (1)$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$  — матрицы размера  $n \times n$  с непрерывными  $T$ -периодическими элементами, т. е.

$$A(t + T) \equiv A(t), \quad B(t + T) \equiv B(t), \quad T > \tau,$$

$F(t, u, v)$  — вещественно-значная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица и

$$\|F(t, u, v)\| \leq q\|u\|^{1+\omega}, \quad q, \omega \geq 0 \text{ — постоянные.}$$

Мы исследуем асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1), получаем оценки решений, характеризующие скорость убывания при  $t \rightarrow \infty$ , и указываем множество притяжения нулевого решения. Из полученных результатов вытекает, что асимптотические свойства решений системы (1) определяются интегралами вида

$$\int_0^T \frac{\alpha(s)}{\|H(s)\|} ds, \quad \int_0^T \frac{\|H(s)\|}{\beta(s)} ds, \quad \alpha(s) > 0, \quad \beta(s) > 0,$$

где  $H(t)$  — эрмитово положительно определенное решение матричного дифференциального неравенства типа Риккати

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + H(t)B(t)K^{-1}(\tau)B^*(t)H(t) < -K(0), \quad t \in [0, T],$$

$$K(s) = K^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0, \tau].$$

Эти результаты обобщают результаты авторов из работы [1], в которой аналогичные исследования были проведены для систем уравнений с запаздывающим аргументом в случае постоянных коэффициентов в линейных членах.

## Литература

1. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-01-00289).



## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ЛЯПУНОВА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ\*

Г. В. Демиденко<sup>1</sup>, И. И. Матвеева<sup>2</sup>, Ю. Ю. Клевцова<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; demidenk@math.nsc.ru*

<sup>2</sup> *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; matveeva@math.nsc.ru*

<sup>3</sup> *Новосибирский государственный университет, Новосибирск; yu\_klevtsova@ngs.ru*

В литературе хорошо известны условия асимптотической устойчивости решений, а также экспоненциальной дихотомии системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad (1)$$

где  $A(t)$  — матрица размера  $N \times N$  с непрерывными  $T$ -периодическими элементами (см., например, [1, 2]). Наша цель — изложить условия в терминах краевых задач для дифференциального уравнения Ляпунова

$$\frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -C(t), \quad 0 < t < T, \quad (2)$$

а также установить равномерные оценки решений системы (1), нормы матрицы Грина и модулей мультипликаторов в терминах норм интегралов типа Ляпунова. Мы следуем схеме, изложенной в работе [3].

**1. Асимптотическая устойчивость.** При получении условий асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) мы рассматриваем краевую задачу для уравнения (2):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -C(t), & 0 < t < T, \\ H(0) = H(T), \end{cases} \quad (3)$$

где  $C(t)$  — эрмитова неотрицательно определенная кусочно-непрерывная матрица, при этом  $C(t) > 0$  на некотором промежутке  $\langle t_1, t_2 \rangle \subset [0, T]$ . Мы доказываем, что если краевая задача (3) имеет эрмитово решение  $H(t)$  такое, что  $H(0) > 0$ , то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво, при этом для решений справедливо неравенство вида

$$\|y(t)\| \leq \alpha(t)\|H(0)\| \exp\left(-\int_0^t \frac{\beta(s)}{\|H(s)\|} ds\right) \|y(0)\|, \quad t > 0, \quad (4)$$

где  $H(t)$  —  $T$ -периодическое продолжение решения задачи (3),  $\alpha(t), \beta(t) \geq 0$  — функции, зависящие от  $C(t)$  и  $H(t)$ . Для мультипликаторов системы (1) устанавливаются оценки вида

$$|\mu_j| \leq \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^T \frac{\beta(s)}{\|H(s)\|} ds\right), \quad j = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Отметим, что неравенства вида (4), (5) были установлены в работе [3] в случае, когда матрица  $C(t)$  в (3) была единичной.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-01-00289).



# О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕКЛАССИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

И. Е. Егоров, Т. А. Сафонова

*Научно-исследовательский институт математики,  
Якутский государственный университет, Якутск; niipmi@sitc.ru*

В последние годы в работах С. Г. Пяткова и других получены фундаментальные результаты по исследованию базисности по Риссу собственных функций спектральной задачи  $Lu = \lambda Bu$ , где  $L$  — положительно определенный оператор, а  $B$  является самосопряженным оператором в некотором гильбертовом пространстве. Используя полученные результаты можно исследовать ряд краевых задач для уравнений смешанного типа. В данной работе рассматривается задача Дирихле для неклассического дифференциально-операторного уравнения второго порядка.

Пусть дано дифференциально-операторное уравнение второго порядка

$$Bu_{tt} + Lu = Bf(t), \quad t \in S = [0, T], \quad (1)$$

где  $B$  — самосопряженный оператор в  $H$  с областью определения  $D(B)$ , а  $L$  — самосопряженный и положительно определенный оператор с плотной в  $H$  областью определения  $D(L)$  [1].

**Задача Дирихле.** Найти решение уравнения (1) такое, что

$$u(0) = 0, \quad u(T) = 0,$$

где  $f(t) \in L_2(S, H_0)$ . Здесь  $H_0$  — пополнение  $D(B)$  по норме  $\|u\|_{H_0} = \sqrt{(|B|u, u)}$ .

В исследовании задачи Дирихле используем метод Фурье [2], причем разложение неизвестной функции проводится по собственным функциям одной неклассической спектральной задачи [1]. Результатом работы является доказательство существования обобщенного решения задачи Дирихле при определенных условиях на спектр оператора  $B^{-1}L$ .

## Литература

1. Егоров И. Е., Попов С. В., Пятков С. Г. Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Наука, 2000.
2. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

## ОБ АППРОКСИМАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ\*

А. О. Егоршин

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; egorshin@math.nsc.ru*

1. В работе рассматривается задача кусочно-линейно-стационарной (КЛС-) аппроксимации в конечных интервалах динамических (наблюдаемых, желаемых и т. д.) процессов. Решается вариационная задача аппроксимации финитной последовательности отсчётов  $\psi = \{\psi_i\}_0^{N+n}$  функции  $\psi$  в  $l^2[0, N+n]$  решениями  $\varphi = \{\varphi_i\}_0^{N+n}$  обыкновенного линейного с постоянными коэффициентами (здесь для простоты однородного и скалярного) разностного уравнения РУ:

$$J = \|\psi - \varphi\|_{l^2}^2, \text{ если } p_\alpha(s)\varphi_k = \sum_0^n \varphi_{k+i}\alpha_i = 0, \quad s\varphi_k = \varphi_{k+1}, \quad \alpha_n \neq 0, \quad k = \overline{0, N}. \quad (1)$$

Отсюда следует, что таким образом решаются также задачи соответствующей дискретизации, моделирования и идентификации обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ).

2. Рекуррентное решение вариационной задачи (1) основывается на следующих фактах.

Пусть  $\{S_N = S(Y_N), S = S_{N+n}\} \subset H$  — замкнутые оболочки ортонормированной системы векторов  $\{Y_N = \{y_i\}_0^N, Y = Y_{N+n}\} \in H$  в гильбертовом пространстве (ГП)  $H$ . Пусть  $U$  — частично (в общем случае) изометрический оператор, т. ч.  $Y = \{U^i y_0\}_0^{N+n}$ . Пусть далее  $p = p_\gamma(U) = \sum_0^n U^i \gamma_i$ , — степенной полином порядка  $n$  от  $U$ . Нетрудно показать [1], что это оператор умножения  $p(U) : S_N \rightarrow S$ . В (1) имеем  $p(s) : l^2[0, N] \rightarrow l^2[0, N+n]$ . Пусть также  $\bar{p} = p_{\gamma^*}(U) = \sum_0^n U^i \gamma_i^*$  — аналогичный полином, но с сопряжёнными коэффициентами (если коэффициенты  $\gamma$  — действительные скаляры, то  $p = \bar{p}$ ). Наконец, пусть  $P(X) = P(S(X))$  — ортопроектор на оболочку  $S(X)$  элементов  $X \in H$ . Тогда имеет место такой результат.

**Теорема 1.** *Последовательность  $[\varphi] = \{\varphi_i\}_0^{N+n}$  координат  $\varphi_i = (\varphi, y_i)_H$  любого элемента  $\varphi = \sum_0^{N+n} \varphi_i y_i \in M$  из ортогонального дополнения (и только из него)  $M$  к  $pS_N$  в  $S$ :  $M = S \ominus pS_N = P(S)H \ominus pS_N$  удовлетворяет РУ с характеристическим полиномом  $\bar{p}$ .*

Пусть  $X = X_{N+n} = \{x_i\}_0^{N+n} = \{U^i x_0\}_0^{N+n}$  — однородная система векторов в ГП с изометрическим оператором  $U$ ,  $\Pi_k = \Pi_k(X) = \Pi_{0,k}(X) = I - P_k$  — ортопроектор на ортогональное дополнение  $M = S(X) \ominus S(X_k)$ . Пусть  $\Pi_{-1} = \Pi_{k+1,k} = I$ ,  $f_0 = \tilde{f}_0 = x_0$ . Определим:  $f_{k+1} = \Pi_k x_{k+1}$ ,  $\tilde{f}_{k+1} = \Pi_{1,k+1} x_0$ ,  $k = \overline{-1, N-1}$  — ортогонализирующие векторы  $(k+1)$ -го шага двух встречных процессов ортогонализации Грама — Шмидта. Напомним, что  $\Pi_{k+1}(\cdot) = \Pi_k - f_{k+1} a_{k+1}(\cdot, f_{k+1})$ ,  $\Pi_{k+1}(\cdot) = \Pi_{1,k+1} - \tilde{f}_{k+1} \tilde{a}_{k+1}(\cdot, \tilde{f}_{k+1})$ , где  $a_k = (f_k, f_k)^{-1}$ ,  $\tilde{a}_k = (\tilde{f}_k, \tilde{f}_k)^{-1}$  и  $a_0 = \tilde{a}_0 = (x_0, x_0)^{-1}$ .

**Теорема 2.** *Справедливы следующие уравнения для рекуррентного вычисления ортогонализирующих векторов  $f_k, \tilde{f}_k, k = \overline{0, N-1}$  и проекторов  $\Pi$  в системе  $X$ :  $f_{k+1} = U f_k - f_k \tilde{\theta}_{k+1}$ ,  $\tilde{f}_{k+1} = \tilde{f}_k - U f_k \theta_{k+1}$ , где  $\theta_{k+1} = a_k \mu_{k+1}$ ,  $\tilde{\theta}_{k+1} = \tilde{a}_k \mu_{k+1}^*$ ,  $\mu_{k+1} = (\tilde{f}_k, U f_k)$ , причём  $a_{k+1} = (I - \theta_{k+1} \tilde{\theta}_{k+1})^{-1} a_k$ ,  $\tilde{a}_{k+1} = (I - \tilde{\theta}_{k+1} \theta_{k+1})^{-1} \tilde{a}_k$ .*

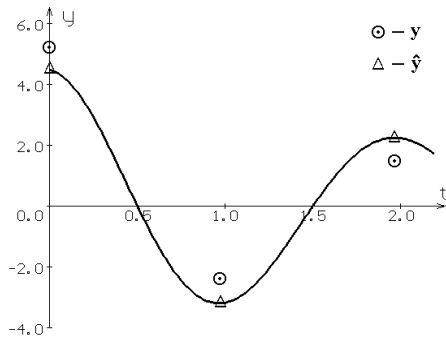
**Теорема 3.** *Пусть  $x_0 = p y_0 = \sum_0^n y_i \gamma_i = \sum_0^n U^i y_0 \gamma_i$ . Тогда  $X_N = p Y_N$ ,  $M = S \ominus X_N$  (см. теорему 1) и встречные процессы ортогонализации однородной (изометрической) системы  $X$  удовлетворяют уравнениям теоремы 2, а последовательность координат  $\varphi_i$  любого элемента  $\varphi$  подпространства  $M$  (и только его) удовлетворяет РУ из теоремы 1:  $\sum_0^n \varphi_{k+i} \gamma_i^* = 0, k = \overline{0, N}$ .*

Коэффициенты  $\gamma_i^*$  могут быть комплексными и  $m \times l$ -матричными ( $l \geq m$ ). Если  $l > m$ , имеем дело с неоднородным уравнением или  $m$ -системой, если  $m > 1$ . При этом  $\gamma_i^* = |\alpha_i^*, \beta_i^*|^*$ ,  $\alpha \in (m \times m, \beta \in (m \times (l - m)), \det \alpha_n \neq 0, l \geq m$ . Задача усложняется из-за некоммутативности этих матриц и требует специальных приёмов [1]. Если  $m = 1$ , т. е.  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  — скаляры, тогда в теореме 3:  $\tilde{\theta} = \theta^*, a = \tilde{a}$ , — скаляры и  $a_{k+1} = a_k / (1 - |\theta|^2)$ .

3. На рисунках 1, 2 представлен простейший пример ( $n = 1, N = 1$ ), иллюстрирующий задачу (1). В этом примере имеем РУ первого порядка и три ( $i = \overline{0, N+n}$ ) отсчёта  $y_0, y_1, y_2$ , которые нужно аппроксимировать его решениями — отсчётами  $\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2$  — подобрав оптимальные как начальные условия ( $\hat{y}_0$ ), так и коэффициент  $\alpha = \alpha_0$  этого РУ. Последний определит коэффициент  $a = a_0$  соответствующего ДУ. Например, если  $\dot{y}(t_i) \approx (y_{i+1} - y_i) / h$ , то  $a \approx (\alpha + 1) / h$ .

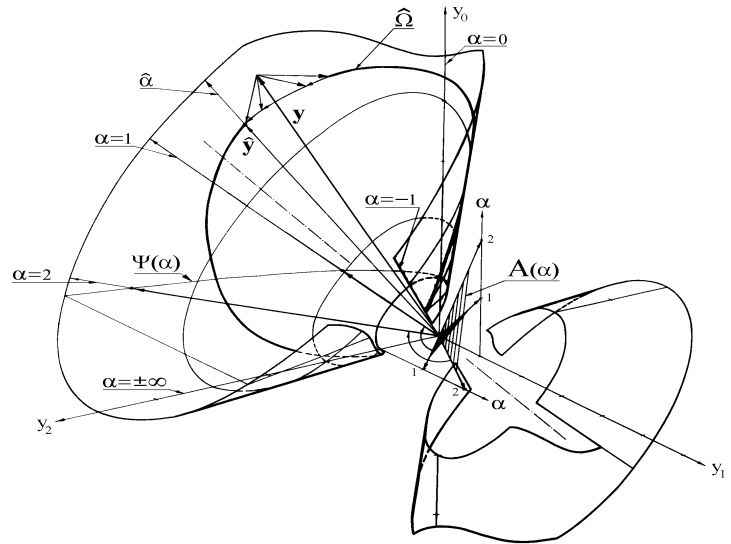
\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06-01-00776).

На рисунках 1, 2  $h = 1$ ,  $a \approx \alpha + 1$ . Точные дискретизация ДУ и дедискретизация РУ (особенно последняя задача) — не простые проблемы [2]. Заметим, что задача (1) есть и способ дискретизации ДУ по его равноотстоящим отсчётам при отсутствии ошибок в исходных данных.



**Рис. 1.** Аппроксимация трех отсчетов некоторой функции  $y(t)$  решением дифференциального уравнения первого порядка. Поскольку функция  $y(t)$  имеет колебательный характер, то  $\hat{y}(t)$  — решение ДУ первого порядка с комплексным коэффициентом. В этом примере имеем ДУ:

$$\dot{y} + a_0 y = 0, \quad a_0 = \ln \sqrt{2} + i \cdot \pi.$$



**Рис. 2.** Вариационное проектирование (пример на рис. 1).

Рисунок 2 иллюстрирует сложность вариационной задачи математического моделирования даже в таком простейшем примере. Более подробно он описан в работе [3], кратко — в [1].

4. Вариационный метод математического моделирования является альтернативой распространённому подходу к оценке коэффициентов ДУ и РУ по их невязке при подстановке исходных данных в соответствующее ДУ или РУ [1,3]. Это простой в вычислительном отношении подход имеет своим теоретическим обоснованием статистическую теорию сигналов. Поскольку в ней не учитываются свойства реальных (физически реализуемых) объектов (в частности, вполне непрерывность моделирующих их операторов), то эти методы не являются достаточно устойчивыми к ошибкам (неадекватности) в исходных данных. Поэтому их практическое применение ограничено. Вариационный подход является существенно более сложным в вычислительном и аналитическом отношении, но обеспечивает гораздо большие возможности для математического моделирования в конечных интервалах, при малом объёме исходных данных и/или значительной их неадекватности принятому классу моделей. Математические и практические свойства подобных задач нельзя считать достаточно изученными. Пусть  $\alpha_i \rightarrow \gamma_i$  в (1).

**Теорема 4.** Задача идентификации — минимизации функционала  $J$  из (1) по вектору  $\gamma$  — сводится к задаче безусловной минимизации функционала  $\hat{J}(\gamma) = J(\hat{\varphi})$  — квадрата длины перпендикуляра от элемента  $\psi$  до подпространства  $\ker \hat{p}_\gamma$  в (1). Он может быть представлен в виде квадратичной формы, матрица которой не постоянна на сфере в  $E_{[\gamma]} \ni \gamma$ ,  $\hat{J} = \gamma^T Q(\gamma) \gamma$ .

Автором предложен эффективный метод минимизации этого функционала [2]. Он, как и проекции  $\hat{\varphi}$ , вычисляется на основе уравнений теоремы 2, где  $a, \tilde{a}$  —  $m \times m$ -матрицы [1].

Представленные результаты показывают роль двусторонних встречных процессов ортогонализации не только в теории, но и в приложениях. Другие ссылки имеются в работах [1–3].

## Литература

1. Егоршин А. О. Идентификация стационарных моделей в унитарном пространстве // Автоматика и телемеханика. 2004. Т. 65. С. 29–48.
2. Егоршин А. О. Вариационная дискретизация и идентификация линейных стационарных дифференциальных уравнений // Тр. III Междунар. конф. “Идентификация систем и задачи управления”, SICPRO '04. М.: ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН, 2004. С. 1824–1883.
3. Егоршин А. О. Об одном способе оценки коэффициентов моделирующих уравнений для последовательностей // Сиб. журн. индустриальной математики. 2000. Т. 3, № 2. С. 78–96.

# ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ\*

А. О. Егоршин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; [egorshin@math.nsc.ru](mailto:egorshin@math.nsc.ru)

**Введение.** Доклад посвящён демонстрации встречных (counter) процессов Грама – Шмидта (Г–Ш) ортогонализации систем векторов гильбертовых пространств как основания важнейших рекуррентных (последовательных, возвратных) алгоритмов вычислительной алгебры — обращения, факторизации, ортогональные разложения, — а также применению уравнений этих процессов для численного решения одного типа обратных задач для динамических систем. Это вариационные задачи кусочно-линейно-стационарной аппроксимации (КЛС-аппроксимации) дифференциальных (ДУ) и разностных (РУ) уравнений с оценкой их коэффициентов.

Особая специфика имеет место для изометрических (однородных) систем. Они порождаются степенями изометрических операторов. Их начальный вектор — полином от такого оператора, порождающего некоторую ортонормальную систему. Этот полином моделирует динамический процесс, описываемый РУ или ДУ на конечном интервале [1, 2].

**1. Математическое моделирование реальных процессов.** Особое значение процессов Г–Ш и упомянутых однородных структур связано со следующими обстоятельствами.

Треугольные преобразования могут рассматриваться как математические модели причинных систем. Это системы, текущее состояние которых определяется только прошлыми состояниями. При прямой (forward) ориентации независимого аргумента (временная или пространственная координата) это верхне- (право-) треугольные преобразования  $\mathbb{R}$ , при обратной (возвратной — backward) ориентации — это нижне- (лево-) треугольные преобразования  $\mathbb{L}$ . Процессы ортогонализации Г–Ш — прямой и возвратный — порождают именно такие преобразования [3].

Изометрические системы векторов могут рассматриваться как абстрактные модели т. н. однородных систем: изотропных сред, стационарных процессов. Таким образом, процессы Г–Ш в изометрических системах есть абстрактный аналог причинных, т. е. физически реализуемых, преобразований в однородных системах. Одним из интересных и новых, обнаруженных автором приложений теории и алгоритмов встречных процессов в однородных системах являются некоторые задачи обработки сигналов в стационарных динамических системах. В частности, это задачи математического моделирования, в которых отсчёты функций аппроксимируются решениями ДУ или РУ с неизвестными коэффициентами. Такие задачи являются обобщением классических задач аппроксимации полиномами в конечном интервале:  $y^{(n)} = 0 \implies \sum_0^n y^{(i)} a_i = 0$ .

**2. Векторные системы.** Здесь и далее в статье конструкция  $\{x_i\}_0^N$  считается столбцом (( $N + 1$ )-столбцом) некоторых элементов. Пусть в унитарном или гильбертовом пространстве (ГП)  $H$  задана система векторов

$$X = X_N = |x_0, \dots, x_N| = (\{x_i^*\}_0^N)^* \in H \otimes E, \quad E = E_N = \bigoplus_0^N E_{(i)}, \quad x_i \in E_{(i)} (i = \overline{0, N}).$$

Здесь и далее \* — символ сопряженного элемента. Элемент  $x_i$  представляет собой набор из  $m_i$  векторов  $x_{ij} \in H, j = \overline{1, m_i}: x_i = |x_{i,1}, \dots, x_{i,m_i}|$ . Число  $m_i$  называется размером элемента. Далее для простоты полагаем все  $m_i = 1$ . Такой случай далее называется скалярным.

Символы  $X$  и  $x_i$  (как это следует из их определения) считаем строками. Тогда символ  $x_i^*$  будет в  $H \otimes E$  столбцом сопряженных элементов из  $H$ , а  $X^*$  будет столбцом этих столбцов.

Пусть скалярное произведение в ГП  $H$  определяется равенством:  $(u, v)_H = (u, v)$ . Тогда матрицы Грама системы  $X$  и ее элементов  $x_i$  записываются так:  $\Gamma = \Gamma(X) = \{\gamma_{ij}\}_0^N = \{(x_j, x_i)\}_0^N = (X, X)_H = (X, X)$ . Если  $\det \gamma_{ii} = 0$ , то соответствующий элемент называется вырожденным. В скалярном случае (все  $m_i = 1$ ) такой элемент равен нулю. Если  $\det \Gamma = 0$ , система векторов  $X$  называется вырожденной.

Через  $X_{l,k}$  ( $k = \overline{0, N}, l = \overline{0, k}$ ) обозначаем отрезок  $|x_l, \dots, x_k|$  последовательности  $X$ , а через  $X_k$  — ее начальный отрезок  $|x_0, \dots, x_k|$ . Через  $S(x, \dots, y)$  обозначаем подпространство — замкнутую линейную оболочку векторов аргументов  $x, \dots, y$ . В частности,  $S = S(X), S_k = S(X_k), S_{l,k} = S(X_{l,k})$ . Обозначим через  $\Pi_{l,k} = I - P_{l,k} = \Pi(X_{l,k}) = \Pi(S_{l,k})$  — проектор на  $S_{l,k}^\perp = H \ominus S_{l,k}$ . В частности,  $\Pi_{0,k} = \Pi_k$ . Удобно считать, что  $\Pi_{-1} = \Pi_{1,0} = \Pi_{k+1,k} = I$ .

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06-01-00776).

**Определение 1** (встречных процессов ортогонализации). **а)** Прямой:  $f_k = \Pi_{k-1}x_k$ ,  $h_k = \|f_k\|^2$ ,  $k = \overline{0, N}$ . **б)** Возвратный:  $f_{i/k} = \Pi_{1+i, k}x_i$ ,  $f_{0/k} = \tilde{f}_k$ ,  $h_{i/k} = \|f_{i/k}\|^2$ ,  $h_{0/k} = \tilde{h}_k$ ,  $i = \overline{0, k}$ .

**Теорема 1 (о встречающихся процессах ортогонализации).** Пусть  $X$  — невырожденная система векторов. Тогда: **1)** элементы  $f_l$  и  $f_{i/l}$  процессов ортогонализации не вырождены:  $\det h_l \neq 0$ ,  $\det h_{i/l} \neq 0$ ,  $l = \overline{0, N}$ ,  $i = \overline{0, l}$ ; **2)** проекторы  $\Pi_k$  с помощью элементов ортогонализации  $f_k$  и  $\tilde{f}_k$  определяются рекуррентными формулами с начальными условиями  $\Pi_{-1} = \Pi_{1,0} = I$ ; **3)** для значений  $k = \overline{-1, N-1}$  имеют место следующие равенства:  $\Pi_{k+1}(\cdot) = \Pi_k - f_{k+1}a_{k+1}(\cdot, f_{k+1})$ ,  $\Pi_{k+1}(\cdot) = \Pi_{1, k+1} - \tilde{f}_{k+1}\tilde{a}_{k+1}(\cdot, \tilde{f}_{k+1})$ , где  $a_{k+1} = h_{k+1}^{-1}$  и  $\tilde{a}_{k+1} = \tilde{h}_{k+1}^{-1}$ .

**3. Элементы линейной алгебры.** Из этой леммы вытекают представления:  $\Phi = XR$  и  $\tilde{\Phi} = XL$ , где  $\Phi$  и  $\tilde{\Phi}_n$  — строки ортонормальных элементов в  $H$ . Отсюда следуют рекуррентно вычисляемые  $QR$   $QL$  представления. Из этих представлений выводятся рекуррентные формулы обращения и факторизации для матриц Грама:  $(X, X)^{-1} = RR^*$  — Фробениуса и  $(X, X) = R^{-*}R^{-1}$  — Холесского. Из  $(X, X)^{-1} = RR^* = LL^*$  получим известные уравнения Риккати для обращения матриц с аддитивными факторизованными приращениями. Общий вид перечисленных уравнений (а не только для самосопряженных матриц) получается из двусторонних алгоритмов биортогонализации двух независимых систем  $X$  и  $Y$  [3].

Показано, что в цепи подпространств системы  $X$  существует базис с заданной матрицей Грама. В частности, существует базис с треугольной матрицей Грама. Ей (и только ей) соответствует однородная система векторов [3].

#### 4. Однородные системы.

**Определение 2.** Систему  $X$  назовем однородной, если ее элементы связаны изометрическими соотношениями:  $x_{i+1} = Ux_i$ ,  $x_i = U^*x_{i+1}$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ .

**Теорема 2 (о быстрых алгоритмах).** Пусть система  $X$  невырождена и  $k = \overline{0, N-1}$ . Тогда:

**1)** для векторов ортогонализации  $f$  и  $\tilde{f}$  имеем  $f_0 = \tilde{f}_0 = x_0$  и  $f_{k+1} = Uf_k - \tilde{f}_k\tilde{\theta}_{k+1}$ ,  $\tilde{f}_{k+1} = \tilde{f}_k - Uf_k\theta_{k+1}$ , где  $\theta_{k+1} = a_k\mu_{k+1}$ ,  $\tilde{\theta}_{k+1} = \tilde{a}_k\mu_{k+1}^*$ ,  $\mu_{k+1} = (f_k, Uf_k)$ ;

**2)** матрицы Грама  $h$  и  $\tilde{h}$  не вырождены и связаны следующими нелинейными рекуррентными соотношениями:  $h_0 = \tilde{h}_0 = (x_0, x_0)$  и  $h_{k+1} = h_k - \mu_{k+1}\tilde{h}_k^{-1}\mu_{k+1}^*$ ,  $\tilde{h}_{k+1} = \tilde{h}_k - \mu_{k+1}^*h_k^{-1}\mu_{k+1}$ ;

**3)** для нормирующих множителей  $a$  и  $\tilde{a}$  эти уравнения могут быть представлены в виде:  $a_0 = \tilde{a}_0 = h_0^{-1}$  и  $a_{k+1} = (I - \theta_{k+1}\tilde{\theta}_{k+1})^{-1}a_k$ ,  $\tilde{a}_{k+1} = (I - \tilde{\theta}_{k+1}\theta_{k+1})^{-1}\tilde{a}_k$ ;

**4)** если система векторов  $X$  одномерна ( $m = 1$ ), то для всех  $k = \overline{0, N}$ :  $a_{k+1} = (1 - \theta_{k+1}^2)^{-1}a_k$ ,  $1 - \theta_{k+1}^2 > 0$ .

**5. Динамические системы.** В  $E = E^{N+n+1}$  задан оператор  $\mathcal{R} : E \rightarrow E^{N+1}$  такой, что для  $y \in E$  имеем:  $\mathcal{R}y = \{\sum_{i=0}^n \alpha_i^* y_{k+i}\}_0^N = A^*y$ . Матрица этого оператора в  $E$  есть  $A^*$ , где  $A$  — ленточная, треугольная  $(N+n+1) \times (N+1)$ -матрица “скользящего” вектора — коэффициентов  $\alpha$  оператора  $\mathcal{R}$ . Его ядро есть  $K = S^\perp(A)$ .

Рассматривается следующая вариационная задача математического моделирования (аппроксимационной идентификации). Для последовательности отсчетов  $y = \{y_i\}_1^{N+n}$  найти минимум величины  $J = J(\tilde{y}) = \|y - \tilde{y}\|_E^2$  при условии, что  $A^*\tilde{y} = 0$  [2].

Решение поставленной задачи сглаживания — проекция  $\hat{y}$  вектора  $y$  на ядро  $K$ . Это “обычная” линейная задача проектирования. Задача же идентификации является существенно нелинейной. Это минимизация по  $\alpha$  длины соответствующего перпендикуляра [2]. Здесь — величины  $\hat{J} = J(\hat{y}) = \hat{J}(\alpha) = y^*A(A^*A)^{-1}A^*y$ . Развитая в пп. 2, 4 теория позволяет использовать при решении этих задач (в том числе при реализации специальных итерационных процедур поиска оптимальных коэффициентов уравнения  $\alpha$ ) быстрые алгоритмы теоремы 2 [1, 2].

### Литература

1. *Егоршин А. О.* Об одном способе оценки коэффициентов моделирующих уравнений для последовательностей // Сиб. журн. индустриальной математики. 2000. Т. 3, № 2. С. 78–96.
2. *Егоршин А. О.* Идентификация стационарных моделей в унитарном пространстве // Автоматика и телемеханика. 2004. Т. 65. С. 29–48.
3. *Егоршин А. О.* Симметрия порядка: некоторые следствия в анализе и приложениях для разностных и дифференциальных уравнений // Труды III международной конференции “Симметрия и дифференциальные уравнения” (25–29 августа 2002 г., Красноярск). Красноярск: Изд-во Ин-та вычислительного моделирования СО РАН. 2002. С. 84–90.



# О НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПО ДАРБУ\*

А. В. Жибер<sup>1</sup>, О. С. Костригина<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа; zhiber@mail.ru*

<sup>2</sup> *Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа; kostrigina@mail.ru*

В работе рассматриваются нелинейные гиперболические системы уравнений

$$u_{xy}^i = F^i(u, u_x, u_y), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

интегрируемые по Дарбу, а именно системы обладающие интегралами первого и второго порядков.

Введем набор независимых переменных

$$u, u_1 = u_x, \quad \bar{u}_1 = u_y, \quad u_2 = u_{xx}, \quad \bar{u}_2 = u_{yy}, \dots$$

Обозначим через  $\bar{D}(D)$  оператор полного дифференцирования по переменной  $y$  ( $x$ ).

**Определение 1.** Функция  $W(u, u_1, u_2, \dots, u_m)$  называется  $x$ -интегралом порядка  $m$  системы (1), если  $\bar{D}(W) = 0$ .

Аналогично,  $y$ -интеграл  $m$ -го порядка — это функция  $\bar{W}(u, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m)$ , удовлетворяющая соотношению  $D(\bar{W}) = 0$ .

$x$ -интегралы  $W^1, W^2, \dots, W^k$  называются независимыми, если  $D^i W^j$  функционально независимы. В статье [1] показано, что максимальное число независимых  $x$ -интегралов равно порядку  $n$  исходной системы.

**Определение 2.** Система уравнений (1) называется интегрируемой по Дарбу, если у нее существует максимальное число независимых  $x$ - и  $y$ -интегралов.

Определим  $x$ - и  $y$ -характеристические алгебры Ли системы уравнений (1). Пусть  $F$  — пространство локально аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных  $\bar{u}_1, u, u_1, u_2, \dots, u_k \dots$ . Оператор  $\bar{D}$  на функциях из  $F$  действует по правилу

$$\bar{D} = \bar{u}_2^i X_i + X_{n+1},$$

где

$$X_i = \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$X_{n+1} = \bar{u}_1^i \frac{\partial}{\partial u^i} + F^i \frac{\partial}{\partial u_1^i} + D(F^i) \frac{\partial}{\partial u_2^i} + \dots + D^{k-1}(F^i) \frac{\partial}{\partial u_k^i} + \dots$$

$X$ -характеристическая алгебра Ли уравнений (1) есть алгебра  $A$ , порожденная векторными полями  $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$ . Аналогично определяется  $y$ -характеристическая алгебра Ли  $\bar{A}$ .

Отметим, что впервые понятие характеристической алгебры Ли для частного случая системы (1) было введено в работе [2].

**Теорема 1.** Система уравнений (1) интегрируема по Дарбу, если и только если, характеристические алгебры Ли  $A$  и  $\bar{A}$  конечномерны. При этом если  $n_k$  — число  $x$ -интегралов  $k$ -го порядка,  $k = 1, 2, \dots, m$ , то

$$\dim A = n + \sum_{i=1}^m n_i.$$

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06–01–92051–КЭ, № 05–01–00775).

**Лемма.** Система уравнений (1) с полным набором  $x$ - и  $y$ -интегралов первого порядка  $\omega^i(u, u_1)$ ,  $\bar{\omega}^i(u, \bar{u}_1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , имеет вид

$$u_{xy}^i = -\Gamma_{kj}^i(u)u_1^k\bar{u}_1^j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

**Теорема 2.** Система уравнений (2) обладает максимальным числом  $x$ - и  $y$ -интегралов первого порядка, если и только если, выполнены соотношения

$$\tilde{R}_{pqj}^i = \frac{\partial}{\partial u^q}\Gamma_{pj}^i - \frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma_{pq}^i + \Gamma_{pj}^s\Gamma_{sq}^i - \Gamma_{vj}^i\Gamma_{pq}^v = 0,$$

$$R_{qrpj}^i = \frac{\partial}{\partial u^p}\Gamma_{jq}^i - \frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma_{pq}^i + \Gamma_{ps}^i\Gamma_{jq}^s - \Gamma_{jv}^i\Gamma_{pq}^v = 0.$$

Здесь  $R_{qrpj}^i$  — тензор Римана, а  $\tilde{R}_{pqj}^i$  — сопряженный тензор Римана.

$X$ -интегралы  $\omega^i(u, u_1)$  задаются формулами

$$\omega^i(u, u_1) = A_s^i(u)u_1^s, \quad \frac{\partial}{\partial u^k}A_s^i(u) - \Gamma_{sk}^j A_j^i(u) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**Теорема 3.** Любая невырожденная система уравнений (1) (при  $n = 2$ ) с интегралами

$$\omega^1(u, u^1), \quad \omega^2(u, u_1, u_2), \quad \bar{\omega}^1(u, \bar{u}_1), \quad \bar{\omega}^2(u, \bar{u}_1) \quad (3)$$

точечной заменой приводится к одному из следующих видов

$$u_{xy}^i = \Gamma_{kj}^i(u)u_1^k\bar{u}_1^j, \quad i = 1, 2,$$

или

$$u_{xy}^1 = u_1^1\bar{u}_1^2, \quad u_{xy}^2 = \bar{r}(u, \bar{u}_1)u_1^1. \quad (4)$$

Система (4) обладает интегралами вида (3) тогда и только тогда, когда функция  $\bar{r}$  является решением следующего уравнения

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} + \bar{u}_1^2 \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{u}_1^1} + \bar{r} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{u}_1^2} + \bar{u}_1^1 \frac{P'(u^1)}{2} + P(u^1)\bar{u}_1^2 = 0.$$

При этом

$$\omega^1 = e^{-u^2} u_1^1, \quad \omega^2 = u_2^2 - u_1^2 \frac{D\omega^1}{\omega} - \frac{(u_1^2)^2}{2} + \frac{1}{2}P(u^1)e^{2u^2}(\omega^1)^2,$$

а  $y$ -интегралы  $\bar{\omega}^1$  и  $\bar{\omega}^2$  определяются из уравнения в частных производных первого порядка

$$\left( \frac{\partial}{\partial u^1} + \bar{u}_1^2 \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1^1} + \bar{r} \frac{\partial}{\partial \bar{u}_1^2} \right) \bar{\omega} = 0.$$

### Литература

1. Гурьева А. М., Жибер А. В. О характеристическом уравнении квазилинейной гиперболической системы уравнений // Вестник УГАТУ. 2005. Т. 6, № 2. С. 26–33.
2. Лезнов А. Н., Смирнов В. Г., Шабат А. Б. Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем // Теоретическая и математическая физика. 1982. Т. 51, № 1. С. 10–21.

## ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ СТЕРЖНЕ. ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

О. Г. Жукова

*Омский государственный технический университет, Омск; ogzh@mail.ru*

Рассматривается краевая задача, моделирующая процесс теплопереноса в полубесконечном стержне при заданном температурном режиме на границе в рамках гиперболического закона теплопроводности [1]:

$$\begin{cases} c\rho\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, & \tau\frac{\partial q}{\partial t} + k\frac{\partial T}{\partial x} + q = 0, & (x, t) \in [0, \infty) \times [0, t_0], \\ (T, q)_{t=0} = (\varphi, \psi), & T(0, t) = \mu(t), & \mu(0) = \varphi(0). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $T, q$  — температура и тепловой поток,  $c, \rho, k$  — удельная теплоемкость, плотность, удельная теплопроводность,  $\tau$  — период релаксации, уравнения (1) — закон сохранения энергии и обобщенный закон Фурье,  $\varphi, \psi, \mu \in C$ . Краевая задача (1) однозначно разрешима (в обобщенном смысле) в классе непрерывных функций с некоторыми дополнительными условиями гладкости [2, 3].

В рамках модели (1) тепловой импульс распространяется с конечной скоростью  $a = \sqrt{k/(\tau c\rho)}$ . Зафиксируем  $x_0 \in (0, at_0)$ ,  $\Phi(x) \in C[0, x_0]$ . Поставим задачу вычисления управления  $\mu(t)$ , удовлетворяющего требованиям

$$T(x, t_0) = \Phi(x) \text{ на } x \in [0, x_0], \quad \mu(t_0) = \Phi(0). \quad (2)$$

В римановых инвариантах  $u_1 = T + \beta q$ ,  $u_2 = T - \beta q$ ,  $\beta = \sqrt{\tau/(k c\rho)}$  гиперболическая система (1) принимает вид

$$Lu = \left( \frac{\partial}{\partial t} + A \frac{\partial}{\partial x} + B \right) u = 0, \quad A = \text{diag}(a, -a), \quad B = \frac{1}{2\tau} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица Римана гиперболического оператора  $L$  дается формулой (см. [3])

$$V(x, t) = (v_{ij}) = \exp(-t/(2\tau)) \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{at+x}{at-x}} I_1\left(\frac{r}{2\tau}\right) & I_0\left(\frac{r}{2\tau}\right) \\ I_0\left(\frac{r}{2\tau}\right) & \sqrt{\frac{at-x}{at+x}} I_1\left(\frac{r}{2\tau}\right) \end{pmatrix},$$

где  $r = \sqrt{t^2 - (x/a)^2}$ ,  $I_k(x)$  — функции Бесселя мнимого аргумента [4].

Введем класс  $M = \left\{ \mu \in C[0, t_0], \mu = \varphi(0) \text{ при } 0 \leq t \leq t_1 = t_0 - \frac{x_0}{a} \right\}$ . Обозначим

$$K(x, s) = \sum v_{ij}(x - s + at_0, t_0), \quad f(x) = 2[\Phi(x + at_0) - T^*(x + at_0, t_0)],$$

$$T^*(x, t) = \exp(-t/(2\tau)) \left[ \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} - \varphi(0) + \sqrt{\frac{\tau}{k c\rho}} \cdot \frac{\psi(x - at) - \psi(x + at)}{2} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x-at}^{x+at} \left[ \sum v_{ij}(\varphi - \varphi(0)) + \sqrt{\frac{\tau}{k c\rho}} (v_{11} - v_{22}) \psi \right] ds, \quad \text{здесь } v_{ij} = v_{ij}(x - s, t).$$

**Теорема.** Задача управления (1), (2) имеет точно одно решение  $\mu \in M$ . Имеет место формула

$$\mu(t) = \mu_0(t) + \varphi(0), \quad t \in [t_1, t_0],$$

где

$$\mu_0(t) = \frac{1}{2} \left( \exp(-t/(2\tau))\lambda(-at) + \int_{-at}^{-at_1} \sum \mathbf{v}_{ij}(s, t)\lambda(s)ds \right),$$

$\lambda(x)$  решение на  $[-at_0, -at_1]$  уравнения Вольтерра

$$\exp(-t_0/(2\tau))\lambda(x) + \int_x^{-at_1} K(x, s)\lambda(s)ds = f(x).$$

### Литература

1. *Карташов Э. М., Ремизова О. И.* Новые интегральные соотношения в теории нестационарного теплопереноса на основе уравнения гиперболического типа // Изв. РАН. Сер. Энергетика. 2002. № 3. С. 146–156.
2. *Воробьева Е. В., Романовский Р. К.* Метод характеристик для гиперболических краевых задач на плоскости // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 3. С. 531–540.
3. *Романовский Р. К., Жукова О. Г.* Гиперболическая модель задачи граничного управления процессом теплопереноса в одномерном твердом материале // Доклады АН ВШ РФ. 2006. № 1. С. 69–77.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

## ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОКОНВЕКЦИИ\*

С. А. Загребина

*Челябинский государственный педагогический университет, Челябинск; zsophiya@mail.ru*

Пусть  $\mathfrak{U}$  и  $\mathfrak{F}$  — банаховы пространства; оператор  $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$  (т. е. линеен и непрерывен), а оператор  $M \in Cl(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$  (т. е. линеен, замкнут и плотно определен), причем оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -секториален справа и слева [1]. И пусть относительный спектр  $\sigma^L(M) = \sigma_{in}^L(M) \cup \sigma_{ex}^L(M)$ , причем  $\sigma_{in}^L(M)$  содержится в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{C}$  с кусочно гладкой границей  $\partial\Omega$  и  $\partial\Omega \cap \sigma^L(M) = \emptyset$ . Тогда существуют проекторы

$$P_{in} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}), \quad Q_{in} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_{\mu}^L(M) d\mu \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}),$$

где контур  $\gamma = \partial\Omega$ , такие, что операторы

$$L \in \mathcal{L}(\ker P_{in}; \ker Q_{in}) \cap \mathcal{L}(\operatorname{im} P_{in}; \operatorname{im} Q_{in}) \quad \text{и} \quad M \in Cl(\ker P_{in}; \ker Q_{in}) \cap Cl(\operatorname{im} P_{in}; \operatorname{im} Q_{in}).$$

Положим  $P_{ex} = P - P_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$  — проектор.

Возьмем  $T \in \mathbb{R}_+$ ,  $u_0, u_T \in \mathfrak{U}$  и рассмотрим задачу

$$P_{ex}(u(0) - u_0) = 0, \quad P_{in}(u(T) - u_T) = 0 \tag{1}$$

для системы уравнений

$$(\lambda - \Delta)\Delta\psi_t = \nu\Delta^2\psi - \alpha\theta_x + \xi, \quad \theta_t = \delta\Delta\theta - \beta\psi_x + \zeta, \tag{2}$$

заданных в области  $\Omega = (0, a) \times (0, b) \in \mathbb{R}^2$  с краевыми условиями Бенара

$$\psi(x, 0, t) = \Delta\psi(x, 0, t) = \psi(x, h, t) = \Delta\psi(x, h, t) = 0, \quad \theta(x, 0, t) = \theta(x, h, t) = 0, \tag{3}$$

$$\text{функции } \psi \text{ и } \theta \text{ периодичны по } x \text{ с периодом } l, \tag{4}$$

моделирующую в линейном приближении плоскопараллельную термоконвекцию вязкоупругой несжимаемой жидкости [2, 3]. Верна следующая

**Теорема.** *При любых  $\alpha, \beta, \lambda, \nu \in \mathbb{R}$ ;  $\delta, T \in \mathbb{R}_+$ ,  $u_0, u_T \in \mathfrak{U}$ ;  $\xi, \zeta \in C^1([0, T]; L_2(\Omega))$  существует единственное решение  $u = \operatorname{sol}(\psi, \theta) \in C^1((0, T); \mathfrak{U}) \cap C^0([0, T]; \mathfrak{U})$  задачи (1) для уравнений (2) с краевыми условиями (3), (4).*

### Литература

1. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht – Boston – Köln – Tokyo: VSP, 2003.
2. *Свиридюк Г. А.* Разрешимость задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости // Изв. вузов. Математика. 1990. № 12. С. 65–72.
3. *Свиридюк Г. А.* Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6, № 5. С. 252–272.

---

\* Работа выполнена при поддержке Правительства Челябинской области (проект урчел\_07\_01\_96057).

# ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ SH ВОЛН В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ\*

Х. Х. Имомназаров

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск;  
imom@omzg.ssc.ru*

Рассмотрим плоскую задачу распространения сейсмических SH волн в пористой среде с криволинейной свободной границей  $z = f(x)$  от источника  $g(t, x, z)$ , которые порождают поле скоростей смещений упругого тела  $u(t, x, z)$  и жидкости  $v(t, x, z)$ , описываемые уравнениями [1–3]

$$\rho_{0,s}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mu(x) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \chi(x) \rho_{0,l}^2(x) \frac{\partial u}{\partial t} + \chi^2(x) \rho_{0,l}^3(x) (u - v) + (\rho_{0,s}(x) + \chi(x) \rho_{0,l}^2(x)) g(t, x, z), \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \chi(x) \rho_{0,l}(x) (u - v) + g(t, x, z). \quad (2)$$

Здесь  $\mu(x)$  — модуль сдвига,  $\chi(x)$  — коэффициент трения,  $\rho_{0,s}(x)$  и  $\rho_{0,l}(x)$  — парциальные плотности упругого пористого тела и жидкости соответственно, считаются произвольными функциями горизонтальной координаты  $x$ .

Система (1), (2) рассматривается со следующими граничными условиями

$$u|_{z=f(x)} = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=b} = 0, \quad (3)$$

и нулевыми начальными данными Коши

$$v|_{t=0} = u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

Используя подход, предложенный в работе [4], построен алгоритм расчета сейсмических волновых полей.

## Литература

1. Доровский В. Н., Перепечко Ю. В., Роменский Е. И. Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // ФГВ. 1993. № 1. С. 100–111.
2. Blokhin A. M., Dorovsky V. N. Mathematical modeling in the theory of multivelocity continuum. New York: Nova Science, 1995.
3. Имомназаров Х. Х. Численное моделирование некоторых задач теории фильтрации для пористых сред // Сиб. журн. индустриальной математики 2001. Т. 4, № 2. С. 154–165.
4. Михайленко Б. Г., Сергеев-Альбов Н. Н. Обратная задача восстановления формы свободной сейсмической границы // Препринт ВЦ СО АН СССР. 1992. № 954. 31 с.

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05–05–98001).

## РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ\*

С. И. Кабанихин

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; kabanikh@math.nsc.ru*

Термин “обратная задача” начал регулярно появляться в научной литературе в начале двадцатого века, хотя ученые формулировали и решали обратные задачи намного раньше. Например, одну из первых обратных задач (проективной геометрии) решил Аристотель: анализируя тень Земли на поверхности Луны, он пришел к выводу, что Земля шарообразна. С появлением вычислительных машин изучением обратных задач занялись практически все исследователи, применяющие математические методы, и сейчас трудно найти области естествознания, в которых эти задачи не пытаются решить.

Обратные задачи математической физики традиционно формулируются [1, 2, 4–9] на основе соответствующей постановки *прямой задачи*, которая, как правило, *классически корректна*, то есть, ее решение существует, единственно и устойчиво по отношению к малым вариациям данных. Для постановки прямой задачи математической физики требуется задать уравнение (коэффициенты), область (границу области), начальные (в нестационарном случае) и граничные условия. Если все перечисленные объекты (данные прямой задачи) выбраны надлежащим образом, то задача корректна. Но если не все данные прямой задачи известны, то возникает задача их нахождения (*обратная задача*) и для её решения привлекают дополнительную информацию о решении прямой задачи. Например, можно задать след решения прямой задачи или его частных производных на границе области или в каких-либо точках области, или же значение решения в определенные моменты времени (*кинематические обратные задачи*), или же спектральные (частотные) характеристики процесса (*обратные задачи рассеяния и спектральные обратные задачи*).

В математической физике под *прямыми задачами* обычно понимают задачи моделирования каких-либо физических полей, процессов или явлений (электромагнитных, акустических, сейсмических, тепловых и т. п.). В прямых задачах требуется найти функцию, описывающую физическое поле или процесс в каждой точке исследуемой области и в каждый момент времени (если поле нестационарное).

Рассмотрим прямую начально-краевую задачу для уравнения акустики. В области

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \quad \text{с границей} \quad \Gamma = \partial\Omega \quad (1)$$

требуется найти решение  $u(x, t)$  уравнения акустики

$$c^{-2}(x)u_{tt} = \Delta u - \nabla \ln \rho(x) \cdot \nabla u + h(x, t), \quad (2)$$

удовлетворяющее начальным

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (3)$$

и граничным условиям

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = g(x, t). \quad (4)$$

Здесь  $u(x, t)$  — акустическое давление,  $c(x)$  — скорость распространения звука,  $\rho(x)$  — плотность,  $h(x, t)$  — функция источников. Эта задача (как большинство прямых задач математической физики) корректна, то есть, однозначно разрешима и устойчива по отношению к малым вариациям данных. Данными для решения прямой задачи (1)–(4) являются область  $\Omega$ , коэффициенты  $c(x)$ ,  $\rho(x)$  и функция  $h(x, t)$  в уравнении (2), начальные условия  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  в (3) и граничные условия  $g(x, t)$  в (4).

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05–01–00171, № 05–01–00559).

В обратной задаче помимо  $u(x, t)$  неизвестны какие-либо функции, входящие в прямую задачу. Эти неизвестные называются *решением обратной задачи*. Для их определения к (1)–(4) добавляется какая-либо дополнительная информация о решении прямой задачи — *данные обратной задачи*. Пусть, например, такой дополнительной информацией будет след решения прямой задачи (2)–(4) на границе

$$u|_{\Gamma} = f(x, t). \quad (5)$$

В обратной задаче требуется по данным  $f(x, t)$  определить неизвестные функции, входящие в формулировку прямой задачи (1)–(4).

В зависимости от того, какие функции в (1)–(4) неизвестны, обратные задачи разделяют на *ретроспективные* (требуется найти  $\varphi$  и  $\psi$ ), *граничные* ( $g$ ), *задачи продолжения* (найти  $u$ , если  $g$  и  $f$  известны только на части границы  $\Gamma$ ), *задачи об источнике* ( $h$ ), и наиболее сложные (нелинейные) *коэффициентные обратные задачи* ( $c, \rho$ ). Сказанное относится и к обратным задачам электродинамики [5, 6, 8], теплопроводности [8] и другим.

На примере обратной динамической задачи акустики (1)–(5) будут рассмотрены различные варианты постановок обратных задач и численные методы их решения (прямые и итерационные). Приведены теоремы о регуляризирующих свойствах и о сходимости.

В линейном случае большинство обратных задач сводится к уравнению  $Aq = f$ , в котором  $A : Q \rightarrow F$  — компактный оператор,  $Q$  и  $F$  — сепарабельные гильбертовы пространства. В работе рассматриваются три наиболее часто применяемые группы методов регуляризации: градиентные [2, 6, 8]

$$J(q) = \|Aq - f\|^2 \rightarrow \min,$$

тихоновская регуляризация [1, 2]

$$M_{\alpha}(q) = J(q) + \alpha\|q\|^2 \rightarrow \min,$$

сингулярное разложение [9]

$$A = U\Sigma V^*.$$

В нелинейном случае будут рассмотрены: метод Ньютона — Канторовича [3, 8, 9]

$$q_{n+1} = q_n - (A'(q_n))^{-1}(Aq_n - f),$$

оптимизационный метод

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n J' q_n$$

и метод Гельфанда — Левитана.

## Литература

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
2. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Наука, 1962.
3. Канторович Л. В. Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи матем. наук. 1948. Т. 3, № 6. С. 89–115.
4. Романов В. Г. Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный Мир, 2005.
5. Romanov V. G., Kabanikhin S. I. Inverse problems for Maxwell's equations. VSP, The Netherlands, 1994.
6. Kabanikhin S. I., Lorenzi A. Identification problems of wave phenomena. VSP, The Netherlands, 1999.
7. Kabanikhin S. I., Satybaev A. D., Shishlenin M. A. Direct methods of solving multidimensional inverse hyperbolic problems. VSP, The Netherlands, 2004.
8. Кabanikhin С. И., Бектемесов М. А., Нурсеитова А. Т. Итерационные методы решения обратных задач и некорректных задач с данными на части границы. Алматы–Новосибирск: ОФ “Международный фонд обратных задач”, 2006.
9. Engl H. W., Hanke M., Neubauer A. Regularization of inverse problems. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1996.



## ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

А. И. Кожанов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; kozhanov@math.nsc.ru*

Уравнения, неразрешенные относительно выделенной производной, изучались столь многими авторами, что даже их краткое перечисление заняло бы очень много места. Поэтому отметим лишь, что фактически исследование таких уравнений началось с работы С. Л. Соболева [1], поэтому во многих источниках такие уравнения часто называются “уравнения соболевского типа”. Одно из направлений теории уравнений соболевского типа, связанное со свойствами регулярности решений краевых задач для вырождающихся уравнений, разрабатывает с 1992 года автор настоящей работы. Результаты его исследований, в основном последних лет, и будут изложены здесь.

Уравнения, исследованные ниже, будем рассматривать в цилиндрической области  $Q = G \times (0, T)$ ,  $G$  — ограниченная область пространства  $R^n$  с компактной границей  $\Gamma$ ,  $0 < T < +\infty$ . Поскольку нашей целью будет описание достаточных условий (не минимальных), обеспечивающих существование регулярных или почти регулярных решений той или иной краевой задачи, то мы будем предполагать, что коэффициенты всех возникающих ниже операторов и граница  $\Gamma$  настолько гладки, насколько это необходимо (для простоты можно считать, что все коэффициенты бесконечно дифференцируемы, граница же  $\Gamma$  есть многообразие класса  $B^{k,\rho}$  с достаточно большим числом  $k$  [2]).

Далее, во многих ситуациях мы ограничимся описанием модельных случаев, поскольку более общий случай, как правило, отличается от рассмотренного лишь громоздкими, но не существенными подробностями.

Всюду ниже  $A, B, C, A_k, B_k$  и т. д., суть *эллиптико-параболические операторы второго порядка, действующие по пространственным переменным*.

Основными объектами исследования являются:

уравнения нечетного порядка по выделенной переменной

$$D_t^{2m+1}Au + Bu = f(x, t) \quad \left( D_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad m \geq 0 - \text{целое} \right);$$

системы уравнения первого порядка по выделенной переменной

$$A_{kl}u_{lt} + B_{kl}u_l = f_k(x, t), \quad k = 1, \dots, m;$$

“гиперболические” уравнения высокого порядка

$$\frac{\partial^{m+2}}{\partial t^{m+2}}(A_m u) + \frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m+1}}(B_m u) + \frac{\partial^m}{\partial t^m}(C_m u) + \sum_{k=1}^m \frac{\partial^{m-k}}{\partial t^{m-k}}(A_{m-k} u) = f(x, t);$$

уравнения “переменного направления” второго порядка

$$K(t)u_{tt} - Au_t - Bu = f(x, t),$$

$K(t)$  — произвольного знака;

уравнения “переменного направления” первого порядка

$$Au_t + \text{sign}(2t - T)Bu = f(x, t);$$

уравнения с пространственными операторами разных порядков

$$Au_t - B_1 B_2 u = f(x, t).$$

Изучаются и некоторые другие классы вырождающихся уравнений соболевского типа.

### Литература

1. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
2. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой // Итоги науки. Сер. Математика. Математический анализ, 1969. М.: ВИНТИ, 1971.

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

**А. И. Кожанов**

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; kozhanov@math.nsc.ru*

Задачи, о которых ниже будет идти речь, предполагают, что в дифференциальном уравнении неизвестными являются как решение, так и коэффициент (коэффициенты) самого уравнения; другое название подобных задач — обратные задачи. В обратных задачах, как правило, в качестве исходной задается информация, соответствующая той или иной корректной краевой задаче для рассматриваемого класса уравнений, далее задается информация о структуре неизвестного коэффициента (неизвестных коэффициентов) и дополнительная граничная или иная (нелокальная, интегральная, функциональная) информация, обусловленная наличием неизвестного коэффициента (неизвестных коэффициентов).

В рамках класса задач, описанного выше, нами исследованы ряд новых обратных задач для параболических уравнений;  
для некоторых классов уравнений составного типа;  
для некоторых классов уравнений с кратными характеристиками.

# ОБРАТНАЯ КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ НА ВРЕМЕННЫХ СЛОЯХ

О. А. Колтуновский

*Южно-Сахалинский институт экономики, права и информатики, Южно-Сахалинск;  
koltoleg@rambler.ru*

В прямоугольнике  $D = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$  рассматривается уравнение

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x, t)u_t = f(x, t), \quad (1)$$

где коэффициент

$$q(x, t) = \sum_{k=1}^m a_k(x, t)q_k(x),$$

функции  $f(x, t)$ ,  $a_k(x, t)$ ,  $k = \overline{1, m}$ , заданы в  $\overline{D}$ .

Для уравнения (1) изучается *обратная задача*. Найти функции  $u(x, t)$  и  $q_k(x)$ ,  $k = \overline{1, m}$ , связанные в  $D$  уравнением (1) и такие, что выполняются условия

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_0(t), & u(1, t) = \mu_1(t), & 0 < t < T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & u_t(x, 0) = u_1(x), & 0 < x < 1, \\ u(x, t_k) = u_{0k}(x), & k = \overline{1, m}, & 0 < x < 1. \end{cases} \quad (2)$$

Функции  $\mu_0(t)$ ,  $\mu_1(t)$ ,  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $u_{0k}(x)$ ,  $k = \overline{1, m}$ , заданы при  $x \in [0, 1]$ ,  $t \in [0, T]$ . Числа  $t_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ , известны и таковы, что  $0 < t_1 < \dots < t_m = T$ .

Доказаны теоремы существования и единственности решения  $\{u(x, t), q_1(x), \dots, q_m(x)\}$  обратной задачи (1), (2) такого, что

$$u(x, t) \in W_2^2(D) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(0, 1)), \quad u_t(x, t) \in W_2^2(D) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(0, 1)),$$

$$u_{tt}(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^1(0, 1)), \quad q_k(x) \in L_\infty(0, 1), \quad k = \overline{1, m}.$$

При доказательстве применяются методы априорных оценок, регуляризации и неподвижной точки.

# КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ МЕДЛЕННЫМИ И ОДНОЙ БЫСТРОЙ ПЕРЕМЕННЫМИ\*

Л. И. Кононенко

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; volok@math.nsc.ru*

Рассматривается сингулярно возмущенная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, y, \varepsilon), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, y, \varepsilon), \\ \varepsilon \dot{y} &= g(x_1, x_2, y, \varepsilon),\end{aligned}$$

где  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  — медленные,  $y \in \mathbb{R}$  — быстрая переменные,  $\varepsilon$  — малый положительный параметр;  $f_1, f_2, g$  — достаточно гладкие функции по всем переменным в некоторой области  $W$ ;  $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}$  — производные по времени.

Функция  $g$  имеет вид

$$g(x_1, x_2, y, \varepsilon) = -(y - \varphi_1(x_1, x_2))(y - \varphi_2(x_1, x_2))(y - \varphi_3(x_1, x_2)),$$

где  $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , и при  $\varepsilon = 0$  описывает медленную  $S$ -образную поверхность (поверхность с двумя складками)  $g(x_1, x_2, y, 0) = 0$ , состоящую из трех листов  $y = \varphi_i(x_1, x_2)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Проведен качественный анализ системы, основанный на использовании метода интегральных многообразий с выделением таких объектов динамического поведения, как быстрые и медленные движения; стационарные состояния на устойчивых листах; колебания различных типов, в частности, релаксационные [1].

Приведены достаточные условия существования релаксационных колебаний в данной системе, которые близки к условиям в [2, 3] и сводятся к следующим:

- 1)  $\varphi_3(x_1, x_2) \leq \varphi_2(x_1, x_2) \leq \varphi_1(x_1, x_2)$ ;
- 2) на линии срыва (кривой складок), склеивающей листы  $y = \varphi_1(x_1, x_2)$  и  $y = \varphi_2(x_1, x_2)$  ( $\varphi_1(x_1, x_2) = \varphi_2(x_1, x_2)$ ), имеем

$$g(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2), 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2), 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2), 0) \neq 0;$$

на линии срыва (кривой складок), склеивающей листы  $y = \varphi_2(x_1, x_2)$  и  $y = \varphi_3(x_1, x_2)$  ( $\varphi_2(x_1, x_2) = \varphi_3(x_1, x_2)$ ), имеем

$$g(x_1, x_2, \varphi_3(x_1, x_2), 0) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x_1, x_2, \varphi_3(x_1, x_2), 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_1, x_2, \varphi_3(x_1, x_2), 0) \neq 0;$$

- 3) листы  $y = \varphi_1(x_1, x_2)$ ,  $y = \varphi_3(x_1, x_2)$  — устойчивые, а  $y = \varphi_2(x_1, x_2)$  — неустойчивый, т. е. выполняются неравенства:

$$-(\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1 - \varphi_3) < 0, \quad -(\varphi_2 - \varphi_3)(\varphi_2 - \varphi_1) > 0, \quad -(\varphi_3 - \varphi_1)(\varphi_3 - \varphi_2) < 0,$$

где  $\varphi_i = \varphi_i(x_1, x_2)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $(x_1, x_2) \in W$ ;

- 4) существует инвариантная притягивающая прямая, которая трансверсально пересекает общую часть проекций устойчивых листов на плоскость  $(x_1, x_2)$ .

## Литература

1. Гольдштейн В. М., Соболев В. А. Качественный анализ сингулярно возмущенных систем. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1988.
2. Кононенко Л. И. Влияние формы интегрального многообразия на возникновение релаксационных колебаний // Сиб. журн. индустриальной математики. 2006. Т. 9, № 2. С. 75–80.
3. Shmolyan P., Wechselberg M. Relaxation oscillations in  $R^3$  // J. Differential Equations. 2004. Vol. 200, no 1. P. 69–104.

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00302).

# ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. В. Красник

*Институт математики, экономики и информатики,  
Иркутский государственный университет, Иркутск; aleandr38@mail.ru*

Рассматривается задача Коши вида:

$$u^{(4)}(t) = A_1 u^{(2)}(t) + A_0 u(t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$u^{(i)}(0) = u_i, \quad i = \overline{0, 3}, \quad (2)$$

где  $A_1, A_0$  — линейные коммутирующие операторы с  $\overline{D(A_1)} = \overline{D(A_0)} = E$ ,  $E$  — банахово пространство,  $u_i \in E$ ,  $i = \overline{0, 3}$ .

В работе представлено исследование свойства равномерной корректности ( $\omega$ -корректности) для задачи Коши (1), (2). Основой для данной работы явились теории полугрупп операторов, теория косинус-функций [3] и теория  $M, N$ -функций [1]. Были построены семейства ограниченных оператор-функций, разрешающие уравнение (1). Получен аналог теоремы Филлипса и теоремы МФФХИ.

Приведем определение корректности задачи Коши (1), (2), аналогичное определению в [1], которым будем пользоваться в рамках данной работы.

**Определение 1.** Задача Коши (1), (2) называется  $\omega$ -равномерно корректной на  $Y_i$ ,  $i = \overline{0, 3}$ ,  $\overline{Y_i} = E$ , если:

- а) решение существует для любых  $u_i \in Y_i$ ,  $i = \overline{0, 3}$ ;
- б)  $\exists K > 0, \omega \geq 0 : \|u(t)\| \leq K \exp(\omega t) \left[ \sum_{i=0}^3 u_i \right], t \geq 0$ .

Далее резольвентой операторов  $A_1, A_0$  будем называть оператор

$$R(\lambda^4, A_1, A_0) = (A_0 + \lambda^2 A_1 - \lambda^4 I)^{-1},$$

ограниченный на  $E$ .

**Определение 2.** Однопараметрические семейства ограниченных коммутирующих операторов  $C_1(t), C_2(t)$  называются  $\omega$ -сильно непрерывным семейством косинус-функций 2-го рода (порожденных операторами  $A_1, A_0$ ), если:

- 1)  $C_1(t+h) = 2(C_1(t)C_1(h) + A_0 C_2(t)C_2(h))$ ,  
 $C_2(t+h) = 2(C_1(t)C_2(h) + C_2(t)C_1(h) + A_1 C_2(t)C_2(h))$ ,  $t, h \in \mathcal{R}^1$ ;
- 2)  $\exists C_i^{(j)}(t) \in C([0, +\infty), E)$ ,  $j = \overline{0, 4}$ ,  $i = 1, 2$ , причем  $C_1^{(j)}(0) = \delta_{0j}I$ ,  $C_2^{(j)}(0) = \delta_{2j}I$ ,  $j = \overline{0, 3}$ ;  
операторы  $C_1^{(4)}(0) = A_0$ ,  $C_2^{(4)}(0) = A_1$  называются производящими для семейства косинус-функций 2-го рода;
- 3) оператор-функции  $C_1(t), C_2(t)$  сильно непрерывны по  $t \in \mathcal{R}^1$ ;
- 4)  $\exists K > 0, \omega \geq 0 : \|C_i(t)\| \leq K \exp(\omega t)$ ,  $t \in \mathcal{R}^1, i = 1, 2$ .

Пусть  $C_1(t), C_2(t)$   $\omega$ -сильно непрерывное семейство косинус-функций 2-го рода. Определим соответствующие им синус-функции 2-го рода по формуле:

$$S_i(t)u = \int_0^t C_i(s)u ds, \quad i = 1, 2, \quad u \in E.$$

**Теорема.** Пусть  $A_1, A_0$  — линейные коммутирующие замкнутые операторы с непустыми резольвентными множествами и областями определения такими, что множества  $D(A_1 A_0)$  и  $D(A_1^2) \cap D(A_0)$  плотны в пространстве  $E$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(I) задача Коши (1), (2)  $\omega$ -равномерно корректна на  $Y_i = D(A_1 A_0)$ ,  $i = 0, 1$ , и  $Y_i = D(A_1^2) \cap D(A_0)$ ,  $i = 2, 3$ ;

(II) операторы  $A_1, A_0$  являются производящими  $\omega$ -сильно непрерывного семейства косинус-функций 2-го рода;

(III) для резольвенты имеет место оценка типа МФФХИ:

$$\frac{1}{n!} \left\| \frac{d^n}{dt^n} R(\lambda^4, A_1, A_0) \right\| \leq K (\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{-(n+1)}.$$

При этом решение имеет вид:

$$u(t) = C_1(t)u_0 + S_1(t)u_1 + C_2(t)u_2 + S_2(t)u_3, \quad u_i \in Y_i, \quad i = \overline{0, 3},$$

а для резольвенты операторов  $A_1, A_0$  при  $\operatorname{Re} \lambda > \omega$  имеет место равенство

$$R(\lambda^4, A_1, A_0)u = - \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) S_2(t)u \, ds, \quad u \in E.$$

Иллюстрирует теорию пример, приведённый в монографии [2]. В среде с бесконечной проводимостью и однородным магнитным полем, направленным вдоль оси  $x_1$ , возмущения удовлетворяют уравнению:

$$\frac{\partial^4 \varphi(t, x)}{\partial t^4} - (a^2 + b^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \varphi(t, x) + a^2 b^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \nabla^2 \varphi(t, x) = 0,$$

которое при следующих начальных условиях:  $\varphi^{(i)}(0, x) = \psi_i(x)$ ,  $i = \overline{0, 3}$ , является конкретной реализацией абстрактной задачи Коши (1), (2).

### Литература

1. Иванов В. К., Мельникова И. В., Филликов А. И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Физмалит, 1995.
2. Узем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
3. Fattorini H. O. Second order linear differential equations in Banach spaces. Amsterdam – New York – Oxford: North-Holland, 1985.

# СУММАРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ В АНАЛИЗЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ\*

А. А. Ломов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; lomov@math.nsc.ru*

Точки  $z \in \mathbb{R}^{nN}$  будем рассматривать как отрезки временных рядов:

$$z = (z[1]; \dots; z[N]).$$

Пусть  $G = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \dots & \gamma_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r(N-p) \times nN}$ ,  $T = \begin{bmatrix} \tau_0 & \dots & \tau_q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_1(N-q) \times nN}$  — блочно-теплицевые матрицы, ассоциированные с разностными уравнениями

$$\gamma_p z[k+p] + \dots + \gamma_0 z[k] = 0, \quad k \in \overline{1, N-p}, \quad (1)$$

$$\tau_q z[k+q] + \dots + \tau_0 z[k] = 0, \quad k \in \overline{1, N-q}. \quad (2)$$

Множества решений (1), (2) обозначим  $\text{nul } G$ ,  $\text{nul } T$ .

Известно, что система вида (1) *управляема* в обычном смысле тогда и только тогда, когда  $\forall s \in \mathbb{C}$  строки матрицы  $\gamma(s) = \gamma_p s^p + \dots + \gamma_1 s + \gamma_0$  линейно независимы.

*Суммарной системой* называем разностное уравнение

$$\pi_l z[k+l] + \dots + \pi_0 z[k] = 0, \quad k \in \overline{1, N-l},$$

с матрицей  $P = \begin{bmatrix} \pi_0 & \dots & \pi_l \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_2(N-l) \times nN}$  :  $\text{nul } P = \text{nul } G + \text{nul } T$ .

**Теорема 1.** *Суммарные системы неуправляемы.*

**Теорема 2.** *Система (1) неуправляема тогда и только тогда, когда*

$$\exists G' = \begin{bmatrix} \gamma'_0 & \dots & \gamma'_{p'} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r'(N-p') \times nN},$$

$$\exists G'' = \begin{bmatrix} \gamma''_0 & \dots & \gamma''_{p''} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r''(N-p'') \times nN},$$

$$\text{nul } G = \text{nul } G' + \text{nul } G''.$$

**Теорема 3.** *Соотношение  $\text{nul } G \cap \text{nul } T = \{0\}$  имеет место тогда и только тогда, когда*

$\forall s \in \mathbb{C}$  столбцы матрицы  $R(s) = \begin{pmatrix} \gamma(s) \\ \tau(s) \end{pmatrix}$  линейно независимы.

Суммарные системы естественным образом возникают при вычислении решений разностных уравнений (1), (2) по наблюдениям сумм решений с возмущениями [2, 4, 5]. К таким задачам сводятся задачи оценки трендов временных рядов [1]. Из теоремы 3 вытекают новые условия единственности [2, 3]. Из теоремы 1 следуют ограничения на класс методов, применимых для идентификации параметров уравнений (1), (2) по наблюдениям сумм решений [2, 5]. Теорема 2 по-новому характеризует классическое понятие управляемости.

Приводятся примеры расчетов.

## Литература

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 1, 2. М.: Мир, 1974.
2. Ломов А. А. Орторегрессионные методы оценивания параметров и задачи отделения трендов в линейных системах // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2005. № 2. С. 1–86.
3. Ломов А. А. Восстановление сигналов в линейных системах с трендами // Автоматика и телемеханика. (принято в печать)
4. Ломов А. А. Восстановление сигналов в линейных системах с трендами (II) // Автоматика и телемеханика. (в печати)
5. Ломов А. А. Оценка трендов и идентификация динамики временных рядов на коротких интервалах наблюдения // Известия РАН ТСУ. (в печати)

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06–01–00776).



## КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ КЭЛИ — ДАРБУ\*

М. В. Нецадим

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; neshch@math.nsc.ru*

Уравнение Кэли–Дарбу имеет вид (см. [1], стр. 69)

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{22} & c_{33} & 2c_{12} & 2c_{23} & 2c_{31} \\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & 2u_{12} & 2u_{23} & 2u_{31} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & 0 & 0 & u_2 & 0 & u_3 \\ 0 & u_2 & 0 & u_1 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 & u_2 & u_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $u = u(x_1, x_2, x_3)$  — функция от переменных  $x_1, x_2, x_3$ ,  $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ,  $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $u_{ijk} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$ ,  $c_{ij} = \sum_{s=1}^3 (u_s u_{ijs} - 2u_{is} u_{js})$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ . Функция  $u = u(x_1, x_2, x_3)$  удовлетворяет уравнению Кэли–Дарбу тогда и только тогда, когда семейство поверхностей  $u(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$  можно включить в триортогональную систему поверхностей в пространстве  $R^3(x_1, x_2, x_3)$  (см. [1], стр. 69, и [2], стр. 92). В [1] (стр. 70) показано, что уравнение (1) выдерживает конформные преобразования и только их.

В настоящей работе на основе техники группового анализа дифференциальных уравнений доказана

**Теорема.** *Группа касательных преобразований уравнения (1) совпадает с группой точечных преобразований Ли.*

В процессе доказательства теоремы передоказывается то, что группа точечных преобразований Ли уравнения (1) совпадает с группой конформных преобразований.

### Литература

1. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей. Т. 2. ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.
2. Аминов Ю. А. Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06-01-00439) и Сибирского отделения Российской академии наук (интеграционные проекты № 2.15, № 48-2006).

## О НЕКОТОРЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ\*

С. Г. Пятков

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;  
Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск;  
pyatkov@math.nsc.ru*

Мы рассматриваем задачу об определении вместе с решением одного или нескольких коэффициентов в параболическом уравнении вида

$$r(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} - L_0 u = a(x, t, u, \nabla u), \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (1)$$

где  $L_0$  — линейный эллиптический оператор. Уравнение (1) дополняется начально-краевыми условиями:

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_S = \varphi(x, t), \quad S = \Gamma \times (0, T), \quad \Gamma = \partial G. \quad (2)$$

Первый тип задач, который мы рассмотрим, — это задачи об определении вместе с решением младшего коэффициента  $a_0$  в операторе  $L_0$ , в этом случае  $L_0$  имеет вид

$$L_0 u = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) u_{x_i} + a_0 u.$$

Условие переопределения имеет вид

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = \psi(x, t), \quad (3)$$

где  $n$  — единичная внешняя нормаль к  $S$ .

Второй тип задач — это задача об определении вместе с решением одного или нескольких коэффициентов оператора  $L_0$  и кроме того коэффициентов, которые могут входить в нелинейное слагаемое  $a(x, t, u, \nabla u)$ . Пусть  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $x'' = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$  ( $0 \leq m \leq n-1$ ),  $S_i = \{(x, t) \in Q : x'' = x''_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , где  $\{x''_i\}$  — набор фиксированных различных точек в  $\mathbb{R}^{n-m}$ . В качестве условий переопределения для нахождения вместе с решением одного или нескольких коэффициентов уравнения (1), которые зависят от переменных  $x', t$ , мы рассматриваем условия на семействе плоскостей вида

$$u|_{S_i} = \varphi_i(x', t), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (4)$$

$$u_{x_{k_{ir}}}|_{S_i} = \varphi_{ir}(x', t), \quad m < k_{ir} \leq n \quad \forall r = 1, 2, \dots, s_i, \quad s_i \leq n - m, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (5)$$

В частности, возможно, что  $s_i = 0$ , это по определению означает, что дополнительные условия (5) на  $S_i$  отсутствуют. Положим  $s_0 = \sum_{i=1}^s s_i + s$ . Считаем, что оператор  $L_0$  и функция  $a(x, t, u, p)$  имеют следующую структуру:

$$L_0 u = \sum_{i=k+1}^{s'_1} q_i(x', t) L_i u + L_{s'_1+1} u, \quad L_i u = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha^i(x, t) D^\alpha u(x, t),$$

$$a(x, t, u, p) = \sum_{i=1}^k q_i(x', t) a_i(x, t, u, p) + a_0(x, t, u, p),$$

где  $s'_1 = s_0$ , если коэффициент  $r(x, t)$  в уравнении известен (в этом случае полагаем, что  $r(x, t) \equiv 1$ ) и  $s'_1 = s_0 - 1$ , если коэффициент  $r$  неизвестен (в этом случае предполагаем, что он не зависит от переменной  $x''$ , положим  $r(x', t) = q_{s_0}(x', t)$ ).

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06-01-00439).

В этом случае задача формулируется так.

Найти коэффициенты  $q_i(x', t)$  ( $i = 1, 2, \dots, s_0$ ) и решение  $u$  уравнения (1), удовлетворяющее начально-краевым условиям (2) и условиям переопределения (4), (5).

Подобные обратные задачи возникают при описании процессов теплопереноса, диффузионных процессов, процессов распространения примесей и т. п. (см. [1–5]). Близкие результаты имеются в работах Ю. Е. Аниконова, Ю. Я. Белова, М. Иванчова и ряда других авторов.

При естественных условиях на данные задачи мы доказываем, что задачи (1)–(3) и (1), (2), (4), (5) разрешимы локально по времени.

### Литература

1. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
2. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
3. *Ivanchov M.* Inverse problems for equation of parabolic type. Math. Studies. Monograph Series. Vol. 10. Lviv: WNTL Publishers, 2003.
4. *Belov Ya. Ya.* Inverse problems for parabolic equations. Utrecht: VSP, 2002.
5. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics. New-York: Marcel Dekker, Inc. 1999.

## ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ДИХОТОМИИ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕЙ

Р. К. Романовский, Л. В. Бельгарт

*Омский государственный технический университет, Омск; Belgart@mail.rambler.ru*

1. Взаимным наклоном подпространств  $E_1, E_2$  пространства  $E = \mathbb{C}^N$  будем называть [1] число  $Sn(E_1, E_2) = \inf |x_1 + x_2|$  ( $x_k \in E_k, |x_k| = 1$ ). Здесь и далее  $|\cdot|$  — эрмитова норма в  $E$ . Будем говорить, что для системы

$$x_{n+1} = A_n x_n, \quad x_n : \mathbb{Z} \rightarrow E, \quad (1)$$

с почти периодической (п.п.) матрицей  $A_n$  с отделённым от нуля определителем и матрицей Коши  $U_n$  имеет место свойство экспоненциальной дихотомии (э-дихотомии), если фазовое пространство  $E$  распадается в прямую сумму подпространств  $E_1, E_2$  так, что при некоторых  $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2 > 0$

$$\begin{aligned} 1) \quad & x \in E_1 \Rightarrow |U_n x| \leq \mu_1 e^{-\nu_1(n-m)} |U_m x| \quad (n \geq m), \\ 2) \quad & x \in E_2 \Rightarrow |U_n x| \leq \mu_2 e^{-\nu_2(m-n)} |U_m x| \quad (n \leq m) \end{aligned}$$

и при этом  $Sn(E_1(n), E_2(n)) \geq \text{const} > 0, E_k(n) = U_n E_k$ .

Почти периодичность означает выполнение критерия компактности С. Бохнера [2]: семейство сдвигов  $A_{n+k}, k \in \mathbb{Z}$ , — предкомпакт в банаховом пространстве ограниченных функций  $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Mat}(N, \mathbb{C})$  с равномерной нормой.

В частном случае  $A_n = A = \text{const}$  свойство э-дихотомии равносильно распаду спектра матрицы  $A$  на два подмножества, лежащие соответственно внутри и вне окружности  $|\lambda| = 1$ . В случае любой ограниченной  $A_n$  для выполнения свойства э-дихотомии необходимо и достаточно существование эрмитовой индефинитной невырожденной ограниченной матрицы  $G_n$  (см. п. 2) такой, что при некотором  $m > 0$  выполняется неравенство  $F_n \leq -mI$  (обоснование проводится аналогично [3]). В классе почти периодических систем (1) имеет место усиление этого результата в сторону достаточности.

2. Обозначим через  $\mathcal{J}$  класс эрмитовых индефинитных п.п. матриц  $G_n : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Mat}(N, \mathbb{C})$  с отделённым от нуля  $|\det G_n|, G_n^* = G_n$ . Рассмотрим эрмитову форму  $v(x, n) = \langle G_n x, x \rangle$ . Разностная производная формы  $v$  вдоль траекторий системы (1)

$$\dot{v}(x, n) = \langle F_n x, x \rangle, \quad F_n = A_n^* G_{n+1} A_n - G_n. \quad (2)$$

**Теорема.** Если для системы (1) с почти периодической матрицей  $A_n$  существует матрица  $G_n \in \mathcal{J}$  такая, что

1°)  $F_n \leq 0$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ),

2°) форма (2) отлична от тождественного нуля на каждом решении  $x_n \neq 0$  системы (1):  $\dot{v}(x_n, n) \neq 0$ ,

то система (1) э-дихотомична.

**Пример.** Пусть в (1)

$$x_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad A_n = \begin{bmatrix} \sqrt{1+a_n} & \sqrt{a_n^{-1}} \\ 1 & \sqrt{1+a_n^{-1}} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon \leq a_n < 1 \quad (\varepsilon > 0), \quad (3)$$

$a_n$  — почти периодическая функция  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ . Покажем, что система  $x_{n+1} = A_n x_n$  э-дихотомична.

Ввиду  $a_n \geq \varepsilon$  матрица  $A_n$  почти периодична,  $\det A_n = \sqrt{a_n} \geq \sqrt{\varepsilon}$ . Положим  $G = \text{diag}(1; -1)$ . Тогда

$$F_n = A_n^* G A_n - G = \text{diag}(a_n - 1; 0) \leq 0.$$

Нетрудно убедиться: если  $x_n = (\xi_n, \eta_n)$  — ненулевое решение системы  $x_{n+1} = A_n x_n$ , то  $\xi_n \neq 0$ , поэтому

$$\dot{v}(x_n, n) = x_n^* F_n x_n = (a_n - 1)\xi_n^2 \neq 0.$$

Выполнены все условия теоремы, тем самым утверждение доказано. Отметим, что здесь не выполняется условие  $F_n \leq -mI$  ( $m > 0$ ), гарантирующее выполнение свойства э-дихотомии при любой  $a_n$  со свойством (3).

### Литература

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
2. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.
3. *Кулик В. Л.* Квадратичные формы и дихотомия решений систем линейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. 1982. Т. 34, № 1. С. 41–49.
4. *Кириченко О. В., Котюргина А. С., Романовский Р. К.* Метод функций Ляпунова для систем линейных разностных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 1. С. 170–174.

# УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р. К. Романовский, М. В. Мендзив

*Омский государственный технический университет, Омск; menmar@mail.ru*

Работа является продолжением цикла исследований [1–4] по устойчивости почти периодических (п.п.) систем. Получен прямым методом Ляпунова признак устойчивости решений краевой задачи для одномерной гиперболической п.п. системы с ослабленным условием на производную функционала Ляпунова в силу системы.

1. Рассмотрим в области  $\Pi = [0, 1] \times [0, \infty)$  краевую задачу

$$\begin{aligned} Lu = \left( \frac{\partial}{\partial t} + A(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, t) \right) u = 0, \quad u|_{t=0} = h_0(x), \\ u^+(0, t) = P_0 u^-(0, t), \quad u^-(1, t) = P_1 u^+(1, t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $u : \Pi \rightarrow \mathbb{C}^N$ ,  $A, B$  — гладкие матрицы, п.п. по  $t$  при каждом  $x \in [0, 1]$ ,  $A = \text{diag}(a_1 I_1, \dots, a_n I_n)$ ,  $a_1 > \dots > a_m > 0 > a_{m+1} > \dots > a_n$ ,  $I_k$  — единичная матрица порядка  $N_k$ ,  $\sum N_k = N$ ,  $h_0 \in C^1[0, 1]$ ,  $u^+ = (u_1, \dots, u_m)^\tau$ ,  $u^- = (u_{m+1}, \dots, u_n)^\tau$ ,  $u_k$  — строка размера  $N_k$ ,  $\tau$  — знак транспонирования,  $P_k$  — постоянные матрицы соответствующих размеров, выполняются условия согласования нулевого и первого порядков

$$h_k^+(0) = P_0 h_k^-(0), \quad h_k^-(1) = P_1 h_k^+(1) \quad (k = 0, 1), \quad h_1 = Ah_0' + Bh_0. \tag{2}$$

При указанных условиях задача (1) однозначно разрешима в классе гладких функций.

Обозначим  $H$  — линейал гладких функций  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^N$ , удовлетворяющих условиям (2) со скалярным произведением  $\langle g, h \rangle = \int_0^1 h^* g \, dx$  и нормой  $\|h\| = \sqrt{\langle h, h \rangle}$ . Ограничение решения  $u(x, t)$  задачи (1) на каждую горизонталь  $t = \text{const}$  — элемент  $H$ ; будем обозначать его  $u(t)$ .

Будем говорить, что решение  $u = 0$  краевой задачи (1) экспоненциально устойчиво, если существуют такие постоянные  $\mu > 0$ ,  $\nu > 0$ , что для любого решения имеет место оценка

$$\|u(t)\| \leq \mu \exp(-\nu t) \|h_0\| \quad (t \geq 0, \quad \mu, \nu = \text{const} > 0)$$

Построим по фиксированной матрице  $G = \text{diag}(G_1, \dots, G_n)$  с диагональными блоками порядков  $N_1, \dots, N_n$  со свойствами  $G^* = G$ ,  $G, G'_x, G'_t$  п.п. по  $t$  при каждом  $x \in [0, 1]$ ,  $m_1 I \leq G \leq m_2 I$  ( $m_k > 0$ ), матрицы

$$F(x, t) = G'_t + (GA)'_x - GB - B^*G, \tag{3}$$

$$F_0(t) = [(GA)^- + P_0^* (GA)^+ P_0]_{x=0}, \quad F_1(t) = [(GA)^+ + P_1^* (GA)^- P_1]_{x=1},$$

где  $(GA)^+ = \text{diag}(a_1 G_1, \dots, a_m G_m)$ ,  $(GA)^- = \text{diag}(a_{m+1} G_{m+1}, \dots, a_n G_n)$ .

**Теорема.** Пусть существует матрица  $G$  с указанными свойствами такая, что

$$\begin{aligned} a) \quad F \leq 0 \quad (t \geq 0), \quad F \leq -mI \quad \text{хотя бы при одном } t_0 \geq 0; \\ b) \quad F_0 \leq 0, \quad F_1 \geq 0 \quad (t \geq 0). \end{aligned}$$

Тогда решение  $u = 0$  задачи (1) экспоненциально устойчиво.

**2. Пример.** Рассмотрим краевую задачу для телеграфной системы в полуполосе  $\Pi = [0, 1] \times [0, \infty)$

$$\begin{cases} \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon_1(t)i = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial x} + \varepsilon_2(t)v = 0, \\ (i, v)_{t=0} = (\varphi, \psi) \in C^1[0, 1], \\ i(0, t) = v(1, t) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $\varepsilon_k(t)$  — неотрицательные непрерывные периодические функции с периодом  $T = 1$  и малыми носителями на периоде  $[0, 1]$ :

$$\begin{cases} \varepsilon_k(t+1) = \varepsilon_k(t), \\ \varepsilon_k > 0 & \text{при } t \in (\alpha_k, \beta_k) \in [0, 1], \quad \beta_k - \alpha_k \ll 1, \\ \varepsilon_k = 0 & \text{при } t \in [0, 1] \setminus (\alpha_k, \beta_k), \quad k = 1, 2; \end{cases}$$

начальные функции удовлетворяют условиям согласования нулевого и первого порядков

$$\varphi(0) = \psi(1) = 0, \quad \psi'(0) = \varphi'(1) = 0.$$

Замена  $(i, v) \rightarrow (u_1, u_2)$  по формулам

$$i = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad v = \frac{u_1 - u_2}{2}$$

приводит краевую задачу (4) к виду (1), где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 & \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{bmatrix},$$

$$h_0 = \begin{bmatrix} \varphi + \psi \\ \varphi - \psi \end{bmatrix}, \quad P_0 = -1, \quad P_1 = 1.$$

Положим в (3)  $G = I$ , тогда для матриц (3) имеют место равенства

$$F = -2B, \quad F_0 = F_1 = 0.$$

Нетрудно усмотреть: при условии

$$(\alpha_1, \beta_1) \cap (\alpha_2, \beta_2) \neq \emptyset$$

выполняются все требования теоремы, и тем самым решение  $(i, v) = (0, 0)$  краевой задачи (4) экспоненциально устойчиво.

Обратим внимание, что здесь не выполняется условие Ляпунова  $\dot{v} < 0$ : имеет место равенство  $\det F = 0$  на множестве  $[0, 1] \setminus \bigcup_k (\alpha_k, \beta_k)$  и его сдвигах на периоды  $n \in \mathbb{Z}$ .

### Литература

1. Добровольский С. М., Котюргина А. С., Романовский Р. К. Об устойчивости решений линейных систем с почти периодической матрицей // Мат. заметки. 1992. Т. 52, № 6. С. 10–14.
2. Алексенко Н. В., Романовский Р. К. Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем с почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 2. С. 147–153.
3. Романовский Р. К., Троценко Г. А. Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем нейтрального типа с почти периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 444–453.
4. Добровольский С. М., Rogozin А. В. Прямой метод Ляпунова для почти периодической разностной системы на компакте // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 1. С. 98–105.

# РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЧАПЛЫГИНА И ИХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ АНАЛОГОВ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ\*

А. И. РЫЛОВ

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; rylov@math.nsc.ru*

1. Система уравнения Чаплыгина первого порядка и уравнение Чаплыгина второго порядка на плоскости годографа  $(z, \theta)$  для стационарных потенциальных течений газа таковы:

$$k\psi_\theta + \varphi_z = 0, \quad \psi_z - \varphi_\theta = 0; \quad k\psi_{\theta\theta} + \psi_{zz} = 0 \quad \left( z = \int \frac{\rho}{q} dq, \quad k(z) = \frac{1 - M^2}{\rho^2} \right). \quad (1)$$

На плоскости потенциала  $(\varphi, \psi)$  уравнения газовой динамики имеют вид:

$$kz_\varphi + \theta_\psi = 0, \quad z_\psi - \theta_\varphi = 0. \quad (2)$$

Здесь и далее в данном разделе  $\varphi$  — потенциал,  $\psi$  — функция тока,  $q$  и  $\theta$  — модуль и угол наклона вектора скорости,  $\rho$  — плотность,  $M$  — число Маха.

На важные свойства решений уравнений (1) указывает следующая теорема [1]:

**Теорема 1.** *Каждому решению  $\varphi = U(z, \theta)$ ,  $\psi = V(z, \theta)$  уравнений (1) на плоскости годографа  $(z, \theta)$  отвечают система уравнений на плоскости потенциала  $(\varphi, \psi)$*

$$kV_\varphi + U_\psi = 0, \quad V_\psi - U_\varphi = 0, \quad (3)$$

*второе из которых дает закон сохранения на плоскости  $(\varphi, \psi)$ , а также закон сохранения на физической плоскости  $(x, y)$*

$$(U\rho u + Vv)_x + (U\rho v - Vu)_y = 0. \quad (4)$$

**Замечание.** Из теоремы 1 и из свойств уравнений (1) следует, что уравнения газовой динамики (2) допускают неограниченное число замен зависимых переменных  $(z, \theta)$  на  $(V, U)$  при сохранении структуры системы (2).

В данной работе теорема 1 интересует нас главным образом с точки зрения построения новых законов сохранения, роль которых в физике и механике общеизвестна [2–4].

Наиболее известным методом решения уравнений (1) является метод разделения переменных (Фурье метод) [5, 6]. С помощью этого метода и теоремы 1 в работе [1] построено бесконечное множество законов сохранения, в число которых входят и известные законы сохранения массы, циркуляции и обеих компонент вектора импульса. Кроме того, в [1] построено бесконечное множество так называемых дополнительных законов сохранения [7], в каждом из которых сложным образом задействованы все четыре решения, отвечающих одной константе разделения. В число этих законов входит закон сохранения момента импульса.

Менее известным и относительно недавно опубликованным [8] является метод построения решений уравнения второго порядка (1) в виде полиномов по четным или нечетным степеням угла наклона вектора скорости  $\theta$

$$\psi = V^{2n} = \sum_{i=n}^{i=0} g_i(z)\theta^{2i} \quad \text{или} \quad \psi = V^{2n+1} = \sum_{i=n}^{i=0} g_i(z)\theta^{2i+1}.$$

В обоих случаях предполагается, что  $g_n(z)$  является заданной линейной функцией от  $z$ , что обеспечивает равенство  $g_n(z)'' = 0$ . Далее, подстановка каждого из приведенных выражений для  $\psi$  в уравнение второго порядка из (1) приводит к цепочке рекуррентных соотношений,

---

\*Работа выполнена в рамках Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН “Актуальные проблемы теории функций и гидродинамики” (№ 117).



позволяющих последовательно выписать выражения для  $g_i(z)$  для всех  $i = n - 1, \dots, 0$  через квадратуры и произвольные константы [8, 9]. Затем с помощью системы уравнений Чаплыгина строится полиномиальное выражение для потенциала  $\varphi$ . И, наконец, включение полиномиальных выражений для  $\psi$  и  $\varphi$  в теорему 1 приводит к бесконечному множеству полиномиальных законов сохранения для плоских стационарных потенциальных течений газа.

**Замечание.** В уравнениях газовой динамики (2) на плоскости потенциала зависимые переменные отвечают простейшим полиномиальным решениям, а именно:  $\psi = z$ ,  $\varphi = \theta$ .

**2.** Рассмотрим одномерные нестационарные течения с плоскими волнами. В этом случае аналогом системы уравнений Чаплыгина и уравнения Чаплыгина второго порядка из (1) будут следующие уравнения на плоскости спидографа  $(p, u)$  [9]:

$$h\psi_u + t_p = 0, \quad \psi_p + t_u = 0; \quad h\psi_{uu} - \psi_{pp} = 0 \quad (h = a^{-2}\rho^{-2}). \quad (5)$$

Здесь  $t$  — время,  $x$  — геометрическая координата,  $\psi$  — функция частицы (лагранжева координата):  $d\psi = \rho dt - \rho u dt$ ,  $\rho$  и  $p$  — плотность и давление,  $a$  — скорость звука.

Аналогом теоремы 1 для рассматриваемых нестационарных течений является теорема 2 [9]:

**Теорема 2.** Каждому решению  $t = U(p, u)$ ,  $\psi = V(p, u)$  системы (5) на плоскости спидографа  $(p, u)$  отвечают система уравнений на плоскости  $(\psi, t)$

$$hV_t - U_\psi = 0, \quad V_\psi - U_t = 0, \quad (6)$$

второе из которых дает закон сохранения на плоскости  $(\psi, t)$ , и закон сохранения на плоскости событий  $(x, t)$

$$(\rho u U - V)_x + (\rho U)_t = 0.$$

Теорема 2 и решения уравнений (4), получаемые с помощью разделения переменных, приводят к бесконечному множеству законов сохранения, в том числе и дополнительных законов сохранения [10].

Полиномиальные решения для  $\psi$  имеют вид [9]:  $\psi = V^{2n} = \sum_{i=n}^{i=0} g_i(p)u^{2i}$  или  $\psi = V^{2n+1} = \sum_{i=n}^{i=0} g_i(p)u^{2i+1}$ .

Здесь, как и в предыдущем разделе, функция  $g_n(p)$  в обоих случаях является произвольной линейной функцией от  $p$ . Для  $i = n - 1, \dots, 0$  функция  $g_i(p)$  в обоих случаях выписывается через ряд квадратур и констант. И, наконец, функция  $t$ , отвечающая каждому из выражений для  $\psi$ , определяется с помощью системы уравнений из (4).

### Литература

1. Рылов А. И. Уравнения С. А. Чаплыгина и бесконечное множество однородно-дивергентных уравнений газовой динамики // Докл. АН. 2002. Т. 383, № 1. С. 34–36.
2. Шмыглевский Ю. Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
3. Денисова Н. В., Козлов В. В. Полиномиальные интегралы обратимых механических систем с конфигурационным пространством в виде двумерного тора // Мат. сборник. 2000. Т. 191, № 2. С. 43–63.
4. Козлов В. В., Трещев Д. В. Полиномиальные законы сохранения квантовых систем // Теорет. и матем. физика. 2004. Т. 140, № 3. С. 460–479.
5. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: ИЛ, 1961.
6. Черный Г. Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988.
7. Годунов С. К. Элементы механики сплошных сред. М.: Наука, 1978.
8. Polyanin A. D. Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2002.
9. Рылов А. И. Бесконечное множество полиномиальных законов сохранения в газовой динамике // Докл. АН. 2007. (в печати)
10. Рылов А. И. Нестационарный аналог уравнений Чаплыгина в одномерной газовой динамике // ПММ. 2005. Т. 69, вып. 2. С. 245–257.

# ИСТИННО НЕЛИНЕЙНОЕ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ КОЛМОГОРОВСКОГО ТИПА\*

С. А. Саженов

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск; sazhenkovs@yahoo.com*

Рассматривается квазилинейное ультрапараболическое уравнение

$$u_t + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} a_i(x, t, u) - \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i} (a_{ij}(x, t) \partial_{x_j} b(u)) = 0,$$

у которого матрица коэффициентов диффузии  $(a_{ij})$  неотрицательна и в случае, когда она диагональна, может менять ранг, а коэффициенты конвекции  $\partial_u a_i(x, t, u)$  могут быть разрывными функциями. Устанавливается [1], что если уравнение априори допускает принцип максимума и удовлетворяет дополнительному условию истинной нелинейности, то задача Коши с произвольно заданными ограниченными начальными данными имеет по меньшей мере одно энтропийное решение, и всякое равномерно ограниченное множество энтропийных решений относительно компактно в  $L^1_{loc}$ . Доказательства основаны на введении в рассмотрение и систематическом изучении кинетической формулировки для исследуемого уравнения и на применении модификации  $H$ -мер Тартара, предложенной Е. Ю. Пановым. Обсуждаются некоторые обобщения и приложения [2] полученных результатов.

## Литература

1. Саженов С. А. Истинно нелинейное ультрапараболическое уравнение Гратца–Нуссельта // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 431–454.
2. Sazhenkov S. A. Entropy solutions to a genuinely nonlinear ultraparabolic Kolmogorov-type equation // In: Mathematical physics. Proc. of the 12th Regional conference on mathematical physics held on March 27 – April 1 in Islamabad, Pakistan. Singapore: World Scientific, 2007. 6 p.

---

\*Работа выполнена при поддержке Национальной исследовательской программы Комиссии по высшему образованию Пакистана (название проекта: “Современный анализ явления анизотропной диффузии и распространения волн в пористой среде”) и Российского фонда фундаментальных исследований (№ 03–01–00829, № 07–01–00309).

# О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ У ГАМИЛЬТОНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ГАМИЛЬТониАНОМ, ИМЕЮЩИМ НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР\*

В. В. Сказка

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; skazka@math.nsc.ru*

Рассмотрим следующее уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A^2 u + \varepsilon B(\omega t)u \quad (1)$$

в гильбертовом пространстве  $H$ . Здесь  $A$  — линейный самосопряженный оператор,  $B(t)$  —  $2\pi$ -периодическая оператор-функция. Стандартным способом уравнение (1) может быть представлено в виде гамильтонового уравнения

$$\mathcal{J} \frac{\partial w}{\partial t} = \mathcal{H}(t)w,$$

где  $\mathcal{J}$  — обратимый антисимметричный оператор, а  $\mathcal{H}$  (гамильтониан) — эрмитов. Уравнение (1) рассматривалось многими авторами. Нас будет интересовать явление так называемого параметрического резонанса, т. е. ситуация, когда при  $\varepsilon = 0$  решения уравнения (1) устойчивы, а при любых достаточно малых положительных  $\varepsilon$  нет. В том случае, если (1) — система обыкновенных дифференциальных уравнений, была построена достаточно полная теория параметрического резонанса [1, 2]. Вопросами устойчивости (1) в различных пространствах и с различными операторами  $A$ ,  $B(t)$  посвящено большое количество работ (подробную библиографию см., например, [3, 4, 6]). При этом при определенных  $\omega$  у уравнения (1) при любых  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ , появляются экспоненциально растущие решения. Но во всех этих работах предполагалось, что у оператора  $A$  спектр точечный. В тоже время возникают задачи, когда спектр оператора  $A$  является непрерывным [5, 6].

В данной работе строится пример уравнения типа (1), у которого оператор  $A$  имеет непрерывный спектр, и у которого экспоненциально растущие решения могут появляться только при  $\varepsilon$  больших, чем некоторое пороговое значение.

В пространстве  $L_2(1, 2)$  рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + x^2 u - \varepsilon \cos(\omega t)(x-1)(x-2) \int_1^2 (\xi-1)(\xi-2)u(t, \xi) d\xi &= 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Задача (2), как это следует из общей теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, разрешима для любых  $u_0$  и  $u_1$ , причем имеет место оценка

$$\|u\|_{L_2(1,2)} \leq C \left( \|u_0\|_{L_2(0,1)} + \|u_1\|_{L_2(0,1)} \right) e^{\Lambda t} \quad \text{с некоторым } \Lambda > 0.$$

Наша цель показать следующее утверждение.

**Утверждение.** *Существует  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для задачи (2) при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  для любого  $\omega$  справедлива оценка*

$$\|u(\cdot, t)\|_{L_2(1,2)} \leq C(t+1) \left( \|u_0\|_{L_2(0,1)} + \|u_1\|_{L_2(0,1)} \right).$$

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06-08-00386), Президиума Российской академии наук (программа № 14, проект № 115) и Сибирского отделения Российской академии наук (интеграционные проекты № 1.6, № 42).

Тем самым мы покажем, что для достаточно малых  $\varepsilon$  у уравнения (2) нет экспоненциально растущих решений, и они могут возникать только при  $\varepsilon$  больших, чем некоторое пороговое значение.

**Доказательство.** Сведем решение задачи (2) к решению интегрального уравнения. Для этого обозначим

$$v(t) = \int_1^2 (\xi - 1)(\xi - 2)u(t, \xi) d\xi.$$

Для нахождения  $v(t)$  получается интегральное уравнение:

$$v(t) = F(t) + \varepsilon \int_0^t K(t, \tau)v(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Здесь обозначено

$$F(t) = \int_1^2 \left( u_0(x) \cos(xt) + u_1(x) \frac{\sin(xt)}{x} \right) (x - 1)(x - 2) dx,$$

$$K(t, \tau) = \cos(\omega\tau) \int_1^2 (x - 1)^2 (x - 2)^2 \frac{\sin(x(t - \tau))}{x} dx.$$

Решение уравнения (3) можно выписать в виде ряда по степеням  $\varepsilon$ , причем он будет мажорироваться рядом  $\left( \|u_0\|_{L_2(0,1)} + \|u_1\|_{L_2(0,1)} \right) \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (8\varepsilon)^n \right)$ , откуда нетрудно получить необходимую оценку.

### Литература

1. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964.
2. Якубович В. А., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987.
3. Фомин В. Н. Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.
4. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
5. Dorovsky V. N., Belonosov V. S., Belonosov A. S. Numerical investigation of parametric resonance in water-oil structures containing gas // Math. Comput. Mod. 2002. Vol. 36, no 1–2. P. 203–209.
6. Белоносов В. С., Доровский В. Н., Белоносов А. С., Доровский С. В. Гидродинамика газосодержащих слоистых систем // Успехи механики. 2005. Т. 3, № 2. С. 37–70.

# ДИССИПАТИВНЫЕ СИММЕТРИЗАТОРЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Ю. Л. Трахинин

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; trakhin@math.nsc.ru*

В докладе проводится обзор результатов [1–5], полученных за последние годы для ударных волн и характеристических разрывов для уравнений магнитной гидродинамики идеальной сжимаемой жидкости в многомерном случае. Основное внимание уделяется энергетическому методу вывода априорных оценок, из которых следует корректность линейризованной задачи, т. е. устойчивость соответствующего плоского разрыва, а также локальное по времени существование и единственность решения исходной нелинейной задачи для неплоского разрыва.

Энергетический метод вывода априорных оценок для линейных гиперболических задач формализуется с помощью введения понятий диссипативного и строго диссипативного  $p$ -симметризатора [4]. Это позволяет доказать локальную по времени теорему существования и единственности для лавсовских ударных волн для абстрактной симметрической системы гиперболических законов сохранения при условии, что для соответствующей линейризованной задачи построен строго диссипативный  $p$ -симметризатор. Эта теорема автоматически делает “нелинейными” все результаты, полученные ранее методом интегралов энергии для линейризованных задач для ударных волн для различных гиперболических моделей механики сплошной среды, в том числе, для уравнений магнитной гидродинамики [1]. В частности, из нее следует локальное по времени существование и единственность решения уравнений магнитной гидродинамики с поверхностью быстрой ударной волны при условии слабости магнитного поля в начальный момент времени. Заметим, что полное исследование устойчивости быстрых магнитогидродинамических ударных волн в политропном газе проведено в [2] спектральным методом.

Особое внимание в докладе уделяется тангенциальному магнитогидродинамическому разрыву [4, 5]. Поверхность этого разрыва является характеристической свободной границей для уравнений магнитной гидродинамики. Найден новый симметрический вид уравнений магнитной гидродинамики [4], который позволяет построить диссипативный  $0$ -симметризатор [3] для линейризованной задачи для тангенциального разрыва. С помощью этого симметризатора впервые для общего случая невозмущенного течения плазмы удалось аналитически найти достаточное условие устойчивости [4] плоского тангенциального магнитогидродинамического разрыва. В астрофизике это условие трактуется как условие макроскопической устойчивости гелиопаузы (границы солнечной системы).

Так как задача для тангенциального разрыва является гиперболической задачей с характеристической границей, в априорных оценках имеется неизбежная потеря контроля над “нормальными” производными. В силу этого естественным функциональным пространством является весовое анизотропное пространство Соболева  $H_*^m$  (см. [4, 5]). С другой стороны, ввиду того, что для линейризованной задачи нарушается равномерное условие Лопатинского (см. [1, 2]), т. е. тангенциальный разрыв является нейтрально устойчивым, для этой задачи выводятся априорные оценки только с потерей гладкости. Поэтому локальная по времени теорема существования и единственности [5] решения нелинейной задачи доказывается с помощью итераций Нэша – Мозера. Ключевым моментом в доказательстве сходимости этих итераций является так называемая “подручная” априорная оценка (tame estimate) в  $H_*^m$  для линейризованной задачи.

## Литература

1. Блохин А. М., Трахинин Ю. Л. Устойчивость сильных разрывов в магнитной гидродинамике и электрогидродинамике. М. – Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004.
2. Trakhinin Yu. A complete 2D stability analysis of fast MHD shocks in an ideal gas // Comm. Math. Phys. 2003. Vol. 236. P. 65–92.

3. *Trakhinin Yu.* On existence of compressible current-vortex sheets: variable coefficients linear analysis // Arch. Rational Mech. Anal. 2005. Vol. 177. P. 331–366.
4. *Trakhinin Yu.* Dissipative symmetrizers of hyperbolic problems and their applications to shock waves and characteristic discontinuities // SIAM J. Math. Anal. 2006. Vol. 37. P. 1988–2024.
5. *Trakhinin Yu.* The existence of current-Vortex sheets in ideal compressible magneto-hydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal. (to appear)

# ОБОБЩЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА И ПРИЛОЖЕНИЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ\*

С. В. Успенский<sup>1</sup>, Е. Н. Васильева<sup>1</sup>, Т. Е. Денисова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Московский государственный университет природообустройства, Москва*

<sup>2</sup> *Московский городской психолого-педагогический университет, Москва; tdenissova@mail.ru*

Доклад посвящен изучению новых функциональных пространств, построенных на основе классических пространств Соболева и Пэли-Винера. Впервые эти пространства были введены С. В. Успенским и получили название функциональных пространств Соболева – Винера. Теоремы вложения для пространств Соболева – Винера, полученные авторами, позволяют не только изучить дифференциальные свойства, но и дают и качественную характеристику функций, устанавливают условия осцилляции функции по выделенной переменной на  $(0, \infty)$ , условия суммируемости и монотонности.

В качестве приложения разработанных методов изучаются асимптотические свойства решений первой начально-краевой задачи для уравнений соболевского типа. Авторами даны полные характеристики поведения решения рассматриваемой задачи при  $t \rightarrow \infty$ . В терминах функциональных пространств Соболева – Винера установлены качественные свойства решений такие, как осцилляция, монотонность, суммируемость. Полученные условия являются точными и дают полную характеристику решения задачи.

Введем функциональные пространства Соболева – Винера  $\widehat{W}_{p,N}^{l,r}(G)$ , где  $N \geq 0$ ,  $r \geq 0$ ,  $l = (l_0, \dots, l_n)$ ,  $l_0 \geq 1$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $G = \{(x, t) : x = (x_1, \dots, x_n) \in g, 0 \leq t < \infty\}$ ,  $g$  – ограниченная область в  $E_n$ . Обозначим  $\widehat{f}(\gamma) = \int_0^\infty e^{-\gamma t} f(t) dt$ ,  $\gamma \geq 0$ . Будем говорить, что функция  $u(x, t)$

принадлежит пространству  $\widehat{W}_{p,N}^{l,r}(G)$ , если  $u(x, t)$  принадлежит весовому пространству Соболева с нормой

$$\|u, W_{p,N}^{l,r}(G)\| = \left( \sum_{k=0}^{l_0} \int_0^\infty \int_g (1+t)^{-N} \left| D_t^{k+r} u(x, t) \right|^p dx dt + \sum_{k=0}^{l_0} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty \int_g (1+t)^{-N} \left| D_t^{k+r} D_{x_i}^{l_i} u(x, t) \right|^p dx dt \right)^{1/p} < \infty,$$

и норма

$$\|u, \widehat{W}_{p,N}^{l,r}(G)\| = \|u, W_{p,N}^{l,r}(G)\| + \left( \sup_{0 < \gamma \leq \delta} \sum_{k=0}^{l_0} \int_g \left| \widehat{D}_t^{k+r} u(x, \gamma) \right|^p dx + \sum_{k=0}^{l_0} \sum_{i=1}^n \int_g \left| D_{x_i}^{l_i} \widehat{D}_t^{k+r} u(x, \gamma) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

конечна, где  $\delta > 0$  – некоторое действительное число, а преобразование Лапласа рассматривается при действительных  $\gamma$ , принадлежащих промежутку  $(0, \delta]$ .

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для уравнений вида

$$D_t^2 L_0[x, D_x]u(x, t) + L_1[x, D_x]u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in g \times (0, \infty), \quad (1)$$

$$u|_{\partial g \times [0, \infty)} = 0, \quad u|_{t=0} = u_1(x), \quad D_t u|_{t=0} = u_2(x), \quad (2)$$

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-01-00289).

в цилиндре  $G = \{(x, t) : x \in g, 0 \leq t < \infty\}$ , где  $g \in E_n$  — ограниченная область с гладкой границей. Предположим, что операторы  $L_0(x, D_x)$ ,  $L_1(x, D_x)$  имеют следующий вид

$$L_0(x, D_x)u(x, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_i(a_{ij}(x)D_j u(x, t)), \quad L_1(x, D_x)u(x, t) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p D_k(b_{kl}(x)D_l u(x, t)),$$

где  $1 \leq p \leq n-1$ , коэффициенты  $a_{ij}(x)$ ,  $b_{kl}(x)$  бесконечно дифференцируемы на  $\bar{g}$ ,  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ ,  $b_{kl}(x) = b_{lk}(x)$  для всех  $x \in \bar{g}$ , и выполнены следующие неравенства

$$\mu_0 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i \xi_j \leq \mu_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \nu_0 \sum_{k=1}^p \xi_k^2 \leq \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p b_{kl}(x)\xi_k \xi_l \leq \nu_1 \sum_{k=1}^p \xi_k^2,$$

где  $\mu_0 > 0$ ,  $\mu_1 > 0$ ,  $\nu_0 > 0$ ,  $\nu_1 > 0$  — некоторые константы,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in E_n$ ,  $x \in g$ .

К рассматриваемой задаче приводится широкий класс модельных задач гидродинамики. Все рассматриваемые в этих задачах уравнения не разрешены относительно старшей производной, они не удовлетворяют условиям Коши – Ковалевской, имеют корректные постановки начально-краевых задач, отличные от классических, асимптотические свойства их решений существенно зависят от областей, в которых рассматриваются задачи. Первые исследования таких задач были проведены ещё А. Пуанкаре. Дальнейшие исследования связаны с работами С. Л. Соболева, в которых были заложены основы теории корректных начально-краевых задач для уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной. Эти работы были продолжены в многочисленных исследованиях. Обширная библиография работ в этом направлении содержится в монографиях Г. В. Демиденко и С. В. Успенского, Н. Д. Копачевского, С. Г. Крейна и Нго Зуи Кан, О. А. Ладыженской, В. Н. Масленниковой, С. А. Габова и А. Г. Свешникова, Дж. Серрин, Р. Темам, С. В. Успенского и Е. Н. Васильевой и др.

Определим обобщенное решение задачи (1), (2). Положим  $G_T = \{(x, t) : x \in g, 0 \leq t \leq T\}$ . Будем говорить, что  $f \in W_2^{m,l}(G)$ ,  $l \geq 2$ ,  $m \geq 2$ , если  $f$  имеет обобщенные производные до  $m + 1$ -го порядка по  $x$ ,  $t$  в  $G_T$  и

$$\|f, W_2^{m,l}(G_T)\| = \|f, L_2(G_T)\| + \sum_{k=0}^l \sum_{|\alpha| \leq m} \|D_t^k D_x^\alpha f, L_2(G_T)\| < \infty$$

для любого  $T \in (0, \infty)$ . Будем говорить, что функция  $u \in W_2^{m,l}(G)$ ,  $l \geq 2$ ,  $m \geq 2$  является обобщенным решением уравнения (1), если для любой финитной на  $G_T$  функции  $\varphi \in W_2^{m,l}(G_T)$ ,  $l \geq 2$ ,  $m \geq 2$  выполняется равенство

$$\iint_{G_T} \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) D_t D_j u D_t D_i \varphi - \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^p b_{kl}(x) D_l u D_k \varphi \right) dx dt = 0$$

для любого  $T > 0$ . Будем говорить, что функция  $u \in W_2^{m,l}(G)$ ,  $l \geq 2$ ,  $m \geq 2$  является обобщенным решением задачи (1), (2), если  $u$  является обобщенным решением уравнения (1) на  $G_T$  для любого  $T > 0$  и как элемент пространства  $W_2^{m,l}(G_T)$  принимает заданные значения (2) на  $\partial g \times [0, T]$  для любого  $T > 0$ .

Обозначим область  $g_\delta = \{x \in g, r(x, \partial g) \geq \delta\}$ , где  $r(x, \partial g)$  — расстояние от точки  $x$  до границы  $\partial g$ . Положим  $G_\delta = \{(x, t) : x \in g_\delta, t \in [0, \infty)\}$ . Имеет место следующая теорема об асимптотике обобщенного решения смешанной задачи (1), (2).

**Теорема.** Пусть  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  — бесконечно дифференцируемые финитные функции на  $g$ . Тогда каждое обобщенное решение задачи (1), (2)  $u \in W_2^{m,l}(G)$ ,  $l \geq 2m + 2$ ,  $m \geq 2$ , принадлежит функциональному пространству Соболева – Винера  $\widehat{W}_{2,N}^{\bar{l},r}(G_\delta)$  для любого  $\delta > 0$ , где  $\bar{l} = (l_0, m, \dots, m)$ ,  $l_0$  — целое,  $l_0 \geq m + 1$ ,  $N = 2m$ ,  $r = m + 1$ . Положим  $\bar{k} = (k_0, k_1, \dots, k_n)$ ,



$k = (0, k_1, \dots, k_n)$ ,  $k_j \geq 0$ ,  $k_j$  — целые,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Если  $1 - \frac{|k|}{m} - \frac{n+1}{2m} > 0$ , то производные  $D_t^{r+k_0} D_x^k u(x, t)$ ,  $k_0 = 0, 1, 2$ , после возможного изменения на множестве меры 0, являются непрерывными функциями на  $G_\delta$ . Тогда в каждой внутренней точке  $x_0 \in g$  функция  $D_t^{k_0+r} D_x^k u(x_0, t)$ , рассматриваемая как функция от  $t$ , имеет следующие свойства:

1) функция  $D_t^{k_0+r} D_x^k u(x_0, t)$  является либо осциллирующей на  $(0, \infty)$ , либо суммируема на  $[0, \infty)$  и имеет постоянный знак в некоторой окрестности бесконечности;

2) если  $\int_0^\infty \left| D_t^{k_0+r} D_x^k u(x_0, t) \right| dt = \infty$ , то функция  $D_t^{k_0+r} D_x^k u(x_0, t)$  является осциллирующей на  $(0, \infty)$  и имеет место оценка

$$\sup_{0 < \gamma \leq \delta} \left| \int_0^\infty e^{-\gamma t} D_t^{k_0+r} D_x^k u(x_0, t) dt \right| \leq C \left\| u, \widehat{W}_{p, 2m}^{\bar{l}, r}(G) \right\|; \quad (3)$$

3) если  $\int_0^\infty \left| D_t^{k_0+r} D_x^k u(x_0, t) \right| dt < \infty$ , то предел функции  $D_t^{k_0+r-1} D_x^k u(x_0, t)$  при  $t \rightarrow \infty$  существует и равен нулю:  $\lim_{t \rightarrow \infty} D_t^{k_0+r-1} D_x^k u(x_0, t) = 0$ , и имеет место оценка вида (3).

## ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

М. Д. Хриптун

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; khriptun@math.nsc.ru*

В докладе рассматривается дифференциальное уравнение

$$\left(\delta + \frac{\nu + 1}{m - 1}\right) \dots \left(\delta + \frac{\nu + m - 1}{m - 1}\right) (\delta - \nu)U(z) = \frac{z^m}{(m - 1)^{m-1}}U(z), \quad (1)$$

где  $\delta = z \frac{d}{dz}$ ,  $\nu = -(m - 1)p$ ,  $p$  — комплексный параметр,  $z$  — комплексная переменная. Неособые решения уравнения (1) имеют вид

$$U_{\nu_s}^{(s)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/m)^{\nu_s + mk}}{[(m - 1)k + s - 1]! \Gamma[k + \nu_s - (s - 1) + 1]}, \quad s = 1, \dots, m - 1, \quad (2)$$

$$U_{\nu_m}^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/m)^{\nu_m + mk}}{k! \Gamma[(m - 1)k + \nu_m + 1]}, \quad (3)$$

где  $\nu_s = p + m(s - 1)/(m - 1)$ ,  $\nu_m = \nu = -(m - 1)p$ ,  $\Gamma(t)$  — гамма-функция. При  $m = 2$  функции (2), (3) являются модифицированными функциями Бесселя, а уравнение (1) переходит в соответствующее уравнение Бесселя. Теория обобщенных функций Бесселя изучалась автором в статьях [1–3], где были найдены линейное уравнение (1), все его линейно независимые решения, рекуррентные соотношения для этих решений, теоремы сложения и умножения, их интегральные представления и другие, аналогичные свойства, как у функции Бесселя. Обобщенные функции Бесселя, удовлетворяющие уравнению порядка выше двух, находят приложения в операционном исчислении, в теории чисел, теории массового обслуживания и в других исследованиях.

В докладе приводятся некоторые примеры, где можно использовать теорию обобщенных функций Бесселя при решении дифференциальных уравнений как обычных так и в частных производных, которые часто встречаются на практике.

1. В теории упругости применяются полигармонические уравнения

$$\underbrace{\Delta \dots \Delta}_{n+1} u + g(r)u = 0,$$

где  $u = u(x, y, z)$ ,  $g(r)$  — непрерывная функция,  $g(r) > 0$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\int_0^{\infty} g(r) dr = \infty$ . Соответствующими заменами эти уравнения сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям по  $r$  вида

$$\frac{d^{2n+2}}{dr^{2n+2}} v + g(r)v = 0, \quad \text{где } v = ur.$$

При  $n = 0$ ,  $g(r) = r^m$  оно решается в функциях Бесселя

$$v = \sqrt{r} Z_{1/m+2} \left( \frac{2}{m+2} \sqrt{r^{m+2}} \right), \quad m = -1, 0, 1, 2, \dots$$

При произвольном  $n$  и  $g(r) = 1/r$ , оно решается в обобщенных функциях Бесселя.

2. Обобщенное дифференциальное уравнение Бесселя заменами переменной  $z = \gamma t^\beta$  и функции  $U = t^\alpha v$  можно свести к дифференциальному уравнению определенного вида, решения которого будут выражаться через обобщенные функции Бесселя. Например, уравнение

$$y^{(m)} + \frac{y}{x} = 0$$

имеет решение

$$y = \sqrt[m]{x^{m-1}} \tilde{U}_{m-1}^{m-1} \left( m \sqrt[m]{\frac{x^{m-1}}{m-1}} \right),$$

где  $p = \frac{1}{m-1}$ ,  $s = m - 1$ ,  $\tilde{U}(z) = (-1)^{p/m} U(i_m z)$ ,  $i_m = \sqrt[m]{-1}$ .

3. В работе [4] при решении одноканального уравнения массового обслуживания была получена функция

$$J_n^k(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{n+(k+1)r}}{r!(rk+n)!}, \quad \text{где } n - \text{целое,}$$

с помощью которой общее решение уравнения получается в явной форме. Функция  $J_n^k(z)$  есть частный случай нашей функции  $U_{\nu_m}^{(m)}\left(\frac{mz}{2}\right)$  при  $\nu_m = n$  и  $m = k + 1$ .

### Литература

1. Хриптун М. Д. Про одне диференціальне рівняння вищого порядку // Доповіді АН УРСР. 1960. № 3. С. 289–293.
2. Хриптун М. Д. Об одном линейном обыкновенном дифференциальном уравнении высшего порядка // Укр. мат. журн. 1963. Т. 15, № 3. С. 277–289.
3. Хриптун М. Д. Теоремы умножения для решений обобщенного дифференциального уравнения Бесселя  $m$ -го порядка // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11, № 2. С. 287–299.
4. Luchak G. The solution of the single-channel queuing equations characterized by a time-dependent Poisson-distributed arrival rate and a general class of holding times // Operations Res. 1956. Vol. 4. P. 711–732.

## ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПОРЯДКА $2m$

Н. А. Чуешева

*Кемеровский государственный университет, Кемерово; chuesheva@ngs.ru*

Целью данной работы является исследование разрешимости краевой задачи для дифференциального уравнения порядка  $2m$  с вырождающимся по времени  $t$  коэффициентом. Такие исследования при  $m = 1$  для линейного уравнения были проведены в работах В. Н. Врагова, А. Н. Терехова, Н. А. Ларкина. С различными вырождениями уравнения высокого порядка рассматривались в книге И. Е. Егорова, С. Г. Пяткова, С. В. Попова, А. И. Кожанова.

Пусть  $\Omega$  — ограниченная односвязная область в пространстве  $R^n$  переменной  $y = (y_1, \dots, y_n)$  с достаточно гладкой границей  $\Gamma_1$ , цилиндрическая область  $G = \Omega \times (0, X)$  с границей  $\Gamma$ , цилиндрическая область  $Q = G \times (0, T)$  с боковой границей  $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ , область  $Q_t = G \times (0, t)$ ,  $t \in [0, T]$ .

Пусть в области  $Q$  задано уравнение

$$Pu \equiv (-1)^m \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} + k(x, y, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial t} - Lu + |u|^\rho u = f(x, y, t), \quad (1)$$

где оператор  $L$  — самосопряженный эллиптический дифференциальный второго порядка по переменной  $y = y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $k(x, y, t) \geq 0$ . Обозначим через  $\gamma = \{(x, y, 0) \in \bar{Q} : k(x, y, 0) > 0\}$ .

**Краевая задача.** Найти решение уравнения (1) в области  $Q$ , удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{\Sigma} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \dots = \frac{\partial^{2m-2} u}{\partial x^{2m-2}} \Big|_{x=0} = \dots = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=X} = \dots = \frac{\partial^{2m-2} u}{\partial x^{2m-2}} \Big|_{x=X} = u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\bar{\gamma}} = 0. \quad (2)$$

**Лемма.** Пусть существует константа  $\lambda_0 \geq 0$  такая, что выполнено неравенство

$$2a(x, y, t) - \frac{\partial k(x, y, t)}{\partial t} + \lambda_0 k(x, y, t) \geq \delta > 0. \quad (3)$$

Тогда существует константа  $\lambda_1 \geq \lambda_0$ , что для всех функций  $u(x, y, t)$  из класса  $H_{2m,2}(Q) \cap L_{\rho+2}(Q)$  имеет место неравенство

$$|u(t)|_{H_{m,1}(G)}^2 + |u(t)|_{L_{\rho+2}(G)}^{\rho+2} + \|u(t)\|_{H_{m,1}(Q_t)}^2 + \|u(t)\|_{L_{\rho+2}(Q_t)}^{\rho+2} \leq C \int_0^t \left( Lu, \frac{\partial u}{\partial t} e^{-\lambda \tau} \right) d\tau.$$

**Теорема.** Пусть выполнены следующие условия:

1) коэффициенты дифференциального оператора  $P$  принадлежат пространству  $C^3(\bar{Q})$ ;

2)  $2a(x, y, t) - \left| \frac{\partial k(x, y, t)}{\partial t} \right| \geq \delta > 0$ ;

3)  $\rho \leq \frac{2}{n-1}$  при  $n \geq 2$ ,  $\rho$  любое при  $n = 1$ ;

4) правая часть уравнения (1) — функция  $f(x, y, t)$  такая, что  $f(x, y, t) \in L_2(Q)$ ,  $\frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} \in L_2(Q)$ ,  $f(x, y, 0) = 0$ .

Тогда существует и притом единственное решение граничной задачи (2) для уравнения (1) из пространства  $H_{2m,2}(Q)$ .

**Замечание 1.** Аналогично как в книге В. Н. Врагова [1] можно привести пример того, что условие (3) леммы является существенным для единственности решения классической смешанной задачи для уравнения (1).

**Замечание 2.** Можно привести пример, что при нарушении условия 2 теоремы, какой бы гладкостью ни обладала правая часть уравнения (1), вообще говоря, решений смешанной задачи из пространства  $H_{2m,2}(Q)$  не существует.

### Литература

1. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1983.
2. *Терехов А. Н.* Краевая задача для управления смешанного типа // В кн.: Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1979. С. 128–137.

# ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА В КИНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГЕТЕРОГЕННОЙ КАТАЛИТИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

Г. А. Чумаков<sup>1,3</sup>, Н. А. Чумакова<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; chumakov@math.nsc.ru*

<sup>2</sup> *Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, Новосибирск; chum@catalysis.ru*

<sup>3</sup> *Новосибирский государственный университет, Новосибирск*

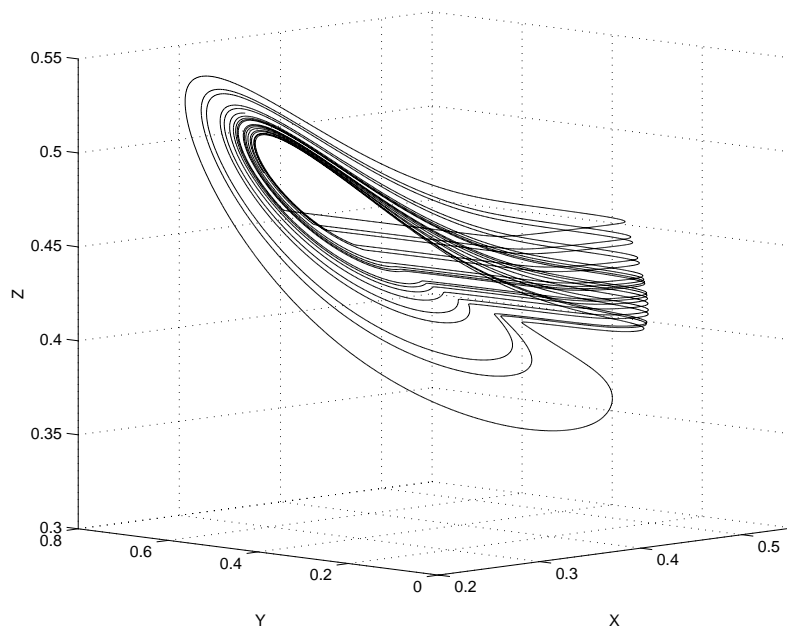
В работе обсуждается явление возникновения хаотической динамики скорости реакции в трехмерной кинетической модели каталитического окисления водорода с быстрой, умеренной и медленной переменными [1, 2]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= K_1(1-x-y)^2 - K_{-1}x^2 - 2K_3(y)x^2y \equiv \varepsilon F_1(x_1, x_2), \\ \dot{y} &= K_2(1-x-y)^2 - K_{-2}y^2 - K_3(y)x^2y - K_4(y, z)y \equiv F_2(x, y, z), \\ \dot{z} &= \mu[y(1-z) - \alpha z(1-x-y)] \equiv \mu h(x, y, z),\end{aligned}$$

где  $K_3(y) = k_{30} \exp(-\mu_3 y)$ ,  $K_4(y, z) = k_{40} \exp(-\mu_4 y + \mu_5 z)$ ;  $x, y$  — степени покрытия поверхности водородом и кислородом соответственно,  $x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1$ ;  $z$  — концентрация растворенного кислорода — медленная переменная по сравнению с  $x$  и  $y$ ,  $z \in [0, 1]$ ;  $K_1, K_{-1}, K_2, K_{-2}, k_{30}, k_{40}, \mu_3, \mu_4, \mu, \alpha$  — неотрицательные параметры скоростей отдельных стадий химической реакции;  $\mu \ll \varepsilon < 1$ .

Динамический хаос, который мы изучаем в этой работе, является гомоклиническим. Он обусловлен существованием трансверсальных гомоклинических орбит, которые всегда ассоциируются с подковами Смейла (инвариантные гиперболические Канторовы множества).

Численные эксперименты показывают, что в системе происходит субгармонический каскад бифуркаций удвоения периода при изменении одного параметра, который приводит к глобальному аттрактору с бесконечным числом неустойчивых периодических орбит [3–5].



Мы представим одномерное доказательство существования гомоклинической орбиты. В ее окрестности имеется экстремально запутанный комплекс седловых периодических решений, которые являются заузленными, образуют зацепление высокого порядка и имеют большие периоды. Численные результаты подтверждают, что типичная траектория на аттракторе будет асимптотически хаотической (см. рисунок).

### Литература

1. *Чумаков Г. А., Слинъко М. Г.* Кинетическая турбулентность (хаос) скорости взаимодействия водорода с кислородом на металлических катализаторах // Докл. АН СССР. 1982. Т. 706, № 5. С. 1190–1138.
2. *Чумаков Г. А.* Математические вопросы моделирования автоколебаний скорости гетерогенной каталитической реакции. I // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 5. С. 1179–1189.
3. *Chumakova N. A., Chumakova L. G., Kiseleva A. V., Chumakov G. A.* Computation of periodic orbits in a three-dimensional kinetic model of catalytic hydrogen oxidation // Selcuk J. Appl. Math. 2002. Vol. 3, no 1. P. 3–20.
4. *Chumakov G. A., Chumakova N. A.* Relaxation oscillations in a kinetic model of catalytic hydrogen oxidation involving a chase on canards // Chem. Eng. J. 2003. Vol. 91, no 2–3. P. 151–158.
5. *Лашина Е. А., Чумаков Г. А., Чумакова Н. А.* Максимальные семейства периодических решений кинетической модели гетерогенной каталитической реакции // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, вып. 4. С. 3–20.

## INCREASING THE SMOOTHNESS OF SOLUTIONS TO SOME HYPERBOLIC PROBLEMS ON THE PLANE

N. A. Lyulko

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk; lyulko@online.sinor.ru*

It is well known that the smoothness of solutions of the Cauchy problem for the wave equation and for the linear hyperbolic systems on the plane  $(x, t)$  is not higher the smoothness the initial data given at  $t = 0$ . In the case to the mixed problems in the half-strip  $\Pi = \{(x, t) : 0 < x < 1, t > 0\}$  we can give such the boundary conditions on the lateral surfaces  $\Pi$ , at which smoothness of any solutions corresponding boundary problems will increase with growing  $t$ .

Consider the following initial boundary value problem:

$$\begin{aligned} U_t + K(x)U_x &= A(x)U + F(x, t, U), & (x, t) \in \Pi, \\ I_0U(0, t) + I_1U(1, t) &= 0, & U(x, 0) = U_0(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Here  $U(x, t)$  is the  $n$ -dimensional vector of unknown functions,  $F(x, t, U)$  is a column vector of smooth functions;  $K(x)$  is the diagonal matrix with the elements  $k_i(x) \neq k_j(x) \neq 0, (i \neq j)$ ,  $A(x)$ ,  $I_0, I_1$  are  $n \times n$  matrices;  $n \geq 2$ .

**Definition.** Let's speak that the problem (1) has the property of increase of smoothness of solutions up to order  $k$ , if there exists such number  $T(k) > 0$ , that any solution  $U(x, t)$  of the problem will be  $k$  times continuously differentiated for  $t > T(k)$ . In the case of the linear problem  $F(x, t, U) \equiv F(x, t)$  the solution satisfies for  $t > T(k)$  the estimate

$$\|D_{x,t}^{\alpha,\beta}U(x, t)\|_{C[0,1]} \leq K(t)(\|\bar{U}_0(x)\|_{L_2(0,1)} + \|F(x, t)\|_{C^k([0,1] \times [0,t])}),$$

where  $\alpha + \beta \leq k$ , the constant  $K(t)$  independent of function  $\bar{U}_0(x)$  but depend on the coefficients of the problem.

For the linear system (1) in [1] the class B-regular boundary conditions is isolated. The following theorem is proved:

**Theorem.** Let  $F(x, t, U) \equiv F(x, t)$ ,  $A(x), K(x) \in C^{k+2}[0, 1]$ . B-regularity of the boundary conditions is a sufficient and necessary condition, that the problem (1) has the property of increase of smoothness of solutions up to order  $k$ , if  $U_0(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $F(x, t) \in C^{k+2}([0, 1] \times [0, t])$ ;  $k \geq 0$ .

It was shown in [2] that some nonlinear hyperbolic problems (1) in the half-strip  $\Pi$  have the property of increase of smoothness of solutions, too. The boundary conditions on the lateral surfaces  $\Pi$  were formulated for the wave equation

$$u_{tt} - a^2u_{xx} = f(x, t), \quad (x, t) \in \Pi, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x)$$

in [3]. It was shown that the smoothness of any solution of this problem will increase with growing  $t$ .

In [4] was considered for the linear system (1) ( $F(x, t, U) \equiv F(x, t)$ ) the following boundary conditions with time delay:

$$\sum_{k=0}^m (A_kU(0, t - \tau_k) + B_kU(1, t - \tau_k)) + \sum_{k=1}^m \sum_{r=0,1} \left( \int_0^{\tau_k} \Phi_k^r(\xi)U(r, t - \xi) d\xi \right) = 0. \tag{2}$$

Here  $A_k, B_k, \Phi_k^r(\xi)$  are  $n \times n$  matrices;  $n \geq 2$ ,  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m$  are fixed reals (the delay times),  $m \geq 0$ . There was considered well-posedness the boundary value problem (1), (2) with the data

$$U(x, t)|_{\Gamma} = \bar{U}(x, t). \tag{3}$$

Let's note that the homogeneous linear problems (1)–(3) with time delay in the boundary conditions, as a systems with decomposable boundary conditions without delay [1], have a property of increase of smoothness of solutions by executing some algebraic ratios between elements of the matrices  $K(x), A(x), A_k, B_k, k = 0, \dots, m$ .



**References**

1. *Eltysheva N. A.* On qualitative properties of solutions to some hyperbolic systems on the plane // Mat. Sb. 1988. Vol. 135, no 2. P. 186–209.
2. *Laurentiev M. M. (Jr.), Lyulko N. A.* Increasing of smoothness of the solutions to some hyperbolic problems // Sib. Mat. J. 1997. Vol. 38, no 2. P. 109–124.
3. *Lyulko N. A.* Increasing of smoothness of the solutions to a boundary value problem for the wave equation on the plane // MPAG 2004. Vol. 11, no 2. P. 169–176.
4. *Lyulko N. A.* The mixed problem for a hyperbolic system on the plane with delay in the boundary conditions // Sib. Mat. J. 2005. Vol. 46, no 5. P. 1100–1125.

---

**ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ  
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА**  
**PROBABILITY THEORY  
AND MATHEMATICAL STATISTICS**

---

**МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ЗНАКОВЫЙ МЕТОД  
ТЕСТИРОВАНИЯ ФРАКТАЛЬНОСТИ  
ГАУССОВСКОГО ШУМА\***

**А. П. Ковалевский**

*Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск; pandorra@ngs.ru*

Фрактальный гауссовский шум — это стационарная гауссовская последовательность случайных величин с нулевым средним, суммы которых обладают свойством стохастического самоподобия. В случае независимости случайных величин параметр самоподобия равен  $1/2$ . Знаковый критерий проверки гипотезы о равенстве параметра  $1/2$  против близкой альтернативы основывается на подсчете частоты перемены знака элементами последовательности. В работе предлагается его модификация: подсчитываются индикаторы перемены знака не только исходными случайными величинами, но и величинами, образованными суммированием соседних слагаемых. Веса индикаторов перемены знака оптимизируются для наилучшего различения близких гипотез. Проведено сравнение исходного и модифицированного критериев.

Гауссовские процессы, обладающие свойством стохастического самоподобия, были введены независимо А. Н. Колмогоровым и Н. Винером в 1940 году. В 1968 году Б. Мандельброт и его соавторы (см., например, [1]) предложили использовать такие процессы в качестве моделей геофизических данных и предложили название — фрактальное броуновское движение. В 1990-х годах предложено использование таких процессов для моделирования экономических данных [2] и трафика компьютерных сетей [3]. Ответ на вопрос о том, действительно ли параметр самоподобия  $H$  отличается от  $1/2$ , то есть временной ряд имеет фрактальный характер, требует построения статистического критерия тестирования фрактальности. Такой статистический критерий может быть основан, в частности, на эффективной оценке параметра  $H$  [4]. Мы предлагаем другой подход, основанный на модифицированном знаковом методе. Его недостаток в том, что заранее предполагается гауссовость процесса  $S_n$ . Однако подход имеет то преимущество, что он инвариантен относительно строго возрастающего (например, экспоненциального) преобразования фазового пространства исходного процесса, так как такое преобразование сохраняет знаки приращений.

Знаковый метод [5] оценивания корреляционной функции гауссовской стационарной последовательности с нулевым математическим ожиданием основан на подсчете частоты перемены знака элементами последовательности.

В [5] на с. 236 доказана следующая лемма: *если  $(\xi, \eta)$  — двумерная нормальная случайная величина с нулевым вектором математического ожидания, то*

$$\mathbf{P}\{\xi\eta < 0\} = \frac{1}{\pi} \arccos \rho,$$

где  $\rho$  — коэффициент корреляции случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ .

---

\*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект РНП.2.1.1.1379), фонда Президента РФ (грант НШ-8980.2006.1)

Отметим, что для стационарной (в широком смысле) последовательности ([6], с. 272) при  $j > 0$

$$\mathbf{E}X_i X_{i+j} = \frac{1}{2}(\mathbf{D}S_{j+1} + \mathbf{D}S_{j-1} - 2\mathbf{D}S_j).$$

Здесь  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ .

Если стационарная гауссовская последовательность  $X_1, \dots, X_n$  — фрактальный гауссовский шум, то есть

$$\mathbf{D}S_n = \sigma^2 n^{2H},$$

где  $H$  — показатель Херста ( $0 < H \leq 1$ ), то нормированная корреляционная функция последовательности имеет вид

$$r(j) = \mathbf{E}X_i X_{i+j} / \sigma^2 = \frac{1}{2} (|j+1|^{2H} + |j-1|^{2H} - 2|j|^{2H}).$$

В частности, коэффициент корреляции между соседними случайными величинами равен  $r(1) = 2^{2H-1} - 1$ . Поэтому вероятность того, что последовательные случайные величины имеют разные знаки, равна

$$\mathbf{P}\{X_i X_{i+1} < 0\} = \frac{1}{\pi} \arccos(2^{2H-1} - 1).$$

Но и последовательные суммы  $k$  случайных величин обладают тем же свойством. Обозначим через  $S_{k,i}$  сумму  $k$  случайных величин, начиная с номера  $i$ :

$$S_{k,i} = \sum_{j=i}^{i+k-1} X_j.$$

Тогда  $\mathbf{D} \sum_{j=1}^n S_{k,k(j-1)+1} = \sigma^2 k^{2H} n^{2H}$ , и соответственно

$$\mathbf{E}S_{k,1} S_{k,kj+1} / \sigma^2 = \frac{k^{2H}}{2} (|j+1|^{2H} + |j-1|^{2H} - 2|j|^{2H}).$$

Поэтому коэффициент корреляции и вероятность иметь противоположные знаки для  $S_{k,1}$  и  $S_{k,k+1}$  такие же, как и для  $X_i$  и  $X_{i+1}$ . В силу стационарности то же верно для  $S_{k,i}$  и  $S_{k,k+i}$  при произвольном  $i > 0$ .

Таким образом, появляется возможность улучшить оценку параметра  $H$ , используя агрегирование случайной последовательности, то есть суммируя с весами индикаторы перемены знака блоками равной длины, полученными суммированием соседних элементов последовательности.

В докладе предлагается алгоритм отыскания агрегирования, которое обеспечивает асимптотически минимальную дисперсию для случая, когда  $H = 1/2$ , то есть когда случайная последовательность образует выборку из нормального распределения с нулевым математическим ожиданием.

Доказано, что предлагаемые статистики обладают свойством асимптотической нормальности при  $H < 3/4$ . Построено семейство статистических критериев заданного уровня значимости. Методами компьютерного моделирования проведено их сравнение между собой и с критерием, основанным на оценке максимального правдоподобия параметра  $H$ .

### Литература

1. Mandelbrot B. B., Wallis J. R. Some long-run properties of geophysical records // Water Resources Research. 1969. Vol. 5. P. 321–340.
2. Henry M., Zaffaroni P. The long-range dependence paradigm for macroeconomics and finance // In: Theory and Applications of Long-Range Dependence (P. Doukhan, G. Oppenheim, and M. S. Taqqu, eds.). Birkhauser, Boston, 2002. P. 417–438.
3. Leland W. E., Taqqu M. S., Willinger W., Wilson D. v. On the self-similar nature of Ethernet traffic (extended version) // IEEE/ACM Trans. Networking. 1994. Vol. 2. P. 1–15.
4. Dahlhaus R. Efficient parameter estimation for self-similar processes // The Annals of Statistics. 1989. Vol. 17, No. 4. P. 1749–1766.
5. Яглом А. М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л., 1981.
6. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. М., 2000.

# ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ ПРИ НЕВЫПОЛНЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССИЧЕСКИХ ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ\*

Ю. Ю. Линке<sup>1</sup>, А. И. Саханенко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; linke@math.nsc.ru*

<sup>2</sup> *Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск; aisakh@mail.ru*

Пусть начиная с некоторого достаточно большого  $n > m \geq 1$  нам даны наблюдения  $Y_{n1}, Y_{n2}, \dots, Y_{nm}$ , которые представимы в следующем виде:

$$Y_{ni} = \beta_{n1}X_{ni1} + \dots + \beta_{nm}X_{nim} + \epsilon_{ni}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $X_{nij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  — известные числа,  $\beta_{n1}, \dots, \beta_{nm}$  — подлежащие оцениванию неизвестные параметры, а случайные величины  $\epsilon_{n1}, \epsilon_{n2}, \dots, \epsilon_{nn}$  — ненаблюдаемые погрешности измерений. При некоторых дополнительных предположениях эта задача линейной регрессии (задача оценивания  $m$ -мерного параметра  $\beta_n = (\beta_{n1}, \dots, \beta_{nm})$ ) хорошо известна и входит во многие руководства по математической статистике (см., например, [1]). Напомним, что при ее решении обычно используются *линейные* оценки  $\beta_n^* = (\beta_{n1}^*, \dots, \beta_{nm}^*)$  для параметра  $\beta_n$ , которые определяются как решения системы линейных уравнений вида

$$\sum_{i=1}^n c_{nji}Y_{ni} = \beta_{n1}^* \sum_{i=1}^n c_{nji}X_{ni1} + \dots + \beta_{nm}^* \sum_{i=1}^n c_{nji}X_{nim}, \quad j = 1, \dots, m, \quad (1)$$

при некоторых постоянных  $c_{nji}$  таких, что система (1) имеет единственное решение.

В частности, если погрешности измерений являются независимыми случайными величинами с нулевыми средними и равными дисперсиями, то существует наилучшая линейная несмещенная оценка  $\beta_n^*$  параметра  $\beta_n$ , совпадающая с оценкой по методу наименьших квадратов, которую можно также определить как решение системы (1) при  $c_{nji} = X_{nij}$ . Явная формула для наилучшей линейной несмещенной оценки хорошо известна и в случае, когда при некотором  $\sigma_n$  случайные величины  $\epsilon_{n1}/\sigma_n, \dots, \epsilon_{nn}/\sigma_n$  имеют нулевые средние и невырожденную матрицу ковариаций. Подчеркнем, что в важном случае, когда погрешности измерений  $\{\epsilon_{ni}\}$  имеют совместное нормальное распределение, все упомянутые выше наилучшие линейные несмещенные оценки будут также и эффективными оценками.

Однако зачастую дисперсии или ковариационная матрица ошибок  $\{\epsilon_{ni}\}$  могут зависеть от неизвестного параметра  $\beta$  и в этом случае наилучшие линейные несмещенные оценки могут просто не существовать (за исключением специально подобранных случаев). В расчете на такого рода ситуации в данной работе мы, по аналогии с нашими работами [2–5], вместо линейных оценок  $\beta_n^*$  предлагаем использовать чуть более сложно устроенные оценки  $\beta_n^{**}$ , которые естественно назвать *асимптотически линейными* и которые определяются в два шага следующим образом. На первом шаге мы выбираем линейную оценку  $\beta_n^* = (\beta_{n1}^*, \dots, \beta_{nm}^*)$ , как решение системы (1), при некоторых специально подобранных константах  $c_{nji}$ . А “улучшенную” оценку второго шага  $\beta_n^{**} = (\beta_{n1}^{**}, \dots, \beta_{nm}^{**})$  мы предлагаем находить как решение следующей системы уравнений

$$\sum_{i=1}^n \gamma_{nji}(\beta^*)Y_{ni} = \beta_{n1}^{**} \sum_{i=1}^n \gamma_{nji}(\beta^*)X_{ni1} + \dots + \beta_{nm}^{**} \sum_{i=1}^n \gamma_{nji}(\beta^*)X_{nim}, \quad j = 1, \dots, m,$$

при некоторых специально подобранных функциях  $\gamma_{nji}(\cdot)$ .

---

\*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект РНП.2.1.1.1379), Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05–01–00810), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–8980.2006.1), Совета по грантам президента РФ для поддержки молодых российских ученых (код проекта МК–5870.2006.1) и Фонда содействия отечественной науке.

Найдены общие достаточные условия для асимптотической нормальности введенных оценок  $\beta_n^{**}$ . В частности, доказано, что при естественных ограничениях эта оценка будет наилучшей линейной несмещенной оценкой, т.е.  $\beta_n^{**}$  асимптотически нормальна с той же самой асимптотической ковариационной матрицей, какая была бы в этом случае у наилучшей линейной несмещенной оценки, если бы нам, дополнительно, была бы известна ковариационная матрица погрешностей.

Доказано утверждение, в котором разность  $\beta^{**} - \beta$  нормируется некоторой матрицей, являющейся статистикой, что может быть полезно при построении доверительных интервалов или проверке гипотез.

### Литература

1. Боровков А. А. Математическая статистика. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1997.
2. Линке Ю. Ю., Саханенко А. И. Асимптотически нормальное оценивание параметра в задаче дробно-линейной регрессии // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 150–163.
3. Линке Ю. Ю., Саханенко А. И. Асимптотически нормальное оценивание многомерного параметра в задаче дробно-линейной регрессии // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 372–388.
4. Линке Ю. Ю., Саханенко А. И. Явное асимптотически нормальное оценивание параметров уравнения Михаэлиса–Ментен // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 610–633.
5. Линке Ю. Ю., Саханенко А. И. Асимптотически оптимальное оценивание в задаче дробно-линейной регрессии со случайными ошибками в коэффициентах // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 6. С. 1372–1400.

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ\*

В. И. Лотов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; lotov@math.nsc.ru*

Рассматривается задача последовательной проверки гипотез  $H_1$  и  $H_2$ , возникающая, к примеру, в клинических испытаниях.  $H_2$  соответствует тому, что применение данного лекарства может привести к нежелательным последствиям для здоровья больного, поэтому количество наблюдений, необходимых для принятия этой гипотезы, должно быть сведено к минимуму. Как обычно, последовательные независимые наблюдения позволяют построить траекторию некоторого вспомогательного случайного блуждания, имеющего неположительный снос при справедливости  $H_1$  и положительный снос при  $H_2$ . Гипотеза  $H_2$  принимается, когда траектория впервые достигнет некоторого фиксированного уровня  $b > 0$ , значение которого определяется требованиями на вероятности принятия ошибочных решений.

Если лекарственный препарат принимают одновременно  $k \geq 1$  пациентов, то выстраиваются соответственно  $k$  независимых траекторий и решение в пользу  $H_2$  принимается в тот момент, когда хотя бы одна из них впервые достигает установленного уровня  $b$ .

В докладе приводятся асимптотические (при  $b \rightarrow \infty$ ) формулы для среднего числа наблюдений, необходимых для принятия  $H_2$ , которые показывают, насколько быстрее может быть принято решение при использовании  $k$  траекторий вместо одной.

---

\*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект РНП.2.1.1.1379).

# ИНТЕГРО-ЛОКАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ВСЕЙ ПОЛУОСИ, ДЛЯ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ\*

А. А. Могульский

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; mogul@math.nsc.ru*

Исследуется асимптотика вероятности попадания суммы

$$S(n) = \xi(1) + \dots + \xi(n)$$

независимых одинаково распределенных случайных величин в полуинтервал  $[x, x + \Delta)$  в следующих случаях:

1. Правый хвост общего распределения слагаемого  $\xi$  правильно меняется, т. е. имеет вид

$$\mathbf{P}(\xi \geq t) = t^{-\beta} L(t), \quad \beta > 2,$$

$L(t)$  — медленно меняющаяся функция. В [1], [2] получены теоремы, описывающие асимптотическое поведение для фиксированного  $\Delta > 0$  и при  $x \rightarrow \infty$  вероятностей

$$\mathbf{P}(S(n) \in [x, x + \Delta))$$

на всей правой полуоси, т. е. в зоне, где действует нормальное приближение, и в зоне, где распределение  $S(n)$  аппроксимируется распределением максимального слагаемого, а также «на стыке» этих двух зон.

2. Распределение общего слагаемого  $\xi$  является семиэкспоненциальным, т. е. правый хвост распределения имеет вид

$$\mathbf{P}(\xi \geq t) = e^{-t^\beta L(t)}, \quad \beta \in (0, 1),$$

$L(t)$  — медленно меняющаяся функция, обладающая некоторыми свойствами гладкости. В [3] получены теоремы, описывающие асимптотическое поведение для фиксированного  $\Delta > 0$  и при  $x \rightarrow \infty$  вероятностей

$$\mathbf{P}(S(n) \in [x, x + \Delta))$$

на всей правой полуоси, т. е. в зоне нормальных и всех зонах больших уклонений  $x$ : в крамеровской, промежуточной и «крайней» зонах (в последней распределение  $S(n)$  аппроксимируется распределением максимального слагаемого), а также «на стыке» между любыми двумя смежными зонами.

3. Выполнено условие Крамера

$$\mathbf{E}e^{\delta\xi} < \infty \quad \text{для некоторого } \delta > 0,$$

и

а) относительные (нормированные) уклонения  $\frac{x}{n}$  находятся в области аналитичности функции уклонений  $\Lambda(\alpha)$  одного слагаемого (в [5]–[7] получены интегро-локальные теоремы в области сверхбольших уклонений, когда  $\frac{x}{n} \rightarrow \infty$ );

б) имеет место альтернативная возможность, когда уклонения  $\frac{x}{n}$  располагаются вне области аналитичности функции  $\Lambda(\alpha)$ .

При решении всех поставленных задач используются интегро-локальные теоремы для сумм случайных величин в области нормальных уклонений для схемы серий, полученные в [8].

\*Работа выполнена при поддержке грантами РФФИ (№ 05–01–00810, 07–01–00595), НШ (№ 2139.2003.1) и INTAS (№ 02–51–5019).

### Литература

1. *Боровков А. А., Боровков К. А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. ч. I. Медленно убывающие распределения скачков. М: Наука (в печати).
2. *Могульский А. А.* Интегро-локальная теорема, действующая на всей полуоси, для сумм случайных величин с правильно меняющимися распределениями // Сиб. мат. журн. (в печати)
3. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Предельные теоремы для сумм случайных величин с семизэкспоненциальными распределениями, действующие на всей оси // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 5. С. 1218–1257.
5. *Боровков А. А., Могульский А. А.* О больших и сверхбольших отклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. I // Теория вероятностей и ее применения. 2006. Т. 51, № 2. С. 260–294.
6. *Боровков А. А., Могульский А. А.* О больших и сверхбольших отклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. II // Теория вероятностей и ее применения. 2006. Т. 51, № 4. С. 641–673.
7. *Могульский А. А., Пагма Ч.* Сверхбольшие отклонения сумм случайных величин с общим арифметическим суперэкспоненциальным распределением // Труды института математики (в печати)
8. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Интегро-локальные теоремы для сумм независимых случайных векторов в схеме серий // Матем. заметки. 2006. Т. 79, № 4. С. 468–482.



## ОБОБЩЕННЫЕ ИТОВСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И ГАУССОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Ф. С. Насыров

УГАТУ, Уфа

Пусть  $\tau(\cdot)$  – произвольная борелевская мера на  $[0, 1]$  такая, что случайный процесс с непрерывными реализациями  $X(s)$  обладает локальным временем  $\alpha_\tau(s, u)$ , совместно непрерывным с  $P = 1$  по переменным  $(s, u)$ , положим  $\gamma_\tau(x, u) = \inf\{s : \alpha_\tau(s, u) \geq x\}$ . Тогда обобщенный стохастический  $\tau$ -интеграл Ито по процессу  $X(s)$  может быть определен ([1]) согласно формуле

$$(E) \int_0^t g(s) * d_\tau X(s) = \int_0^t g(s) d_\tau X(s) + \frac{1}{2} P - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t \frac{1}{2\varepsilon} [g_\tau(s, X(s) + \varepsilon) - g_\tau(s, X(s) - \varepsilon)] ds,$$

где интеграл в левой части есть расширенный симметричный  $\tau$ -интеграл,  $g(s)$  – непрерывная слева ограниченная случайная функция,  $g_\tau(s, u) = g(\gamma_\tau(\alpha_\tau(s, u), u))$ , если конечны расширенный симметричный  $\tau$ -интеграл и предел по вероятности  $P - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dots$ .

Известно, что при определенных условиях, налагаемых на интегранд, классический интеграл Ито есть мартингал и, в частности, его математическое ожидание равно нулю. Выделим условия, при которых последнее свойство частично сохраняется для обобщенных  $\tau$ -интегралов Ито.

Пусть выполнены условия:

1. С вероятностью 1 мера  $\tau(\cdot)$  абсолютно непрерывна:  $\tau(ds) = f(s, X(s))ds$ , где  $f(s, u)$  неслучайная функция.
2. Функция  $f(s, u)$ , связанная с плотностью  $f(s, X(s))$ , имеет непрерывные частные производные  $\frac{\partial}{\partial u} f(s, u)$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial u^2} f(s, u)$ ,  $(s, u) \in (0, 1] \times R$ .
3. Одномерные плотности распределения  $p(s, u) = \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{P}(X(s) \leq u)$  процесса  $X(s)$  имеют непрерывные частные производные  $\frac{\partial}{\partial u} p(s, u)$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial u^2} p(s, u)$ ,  $\frac{\partial}{\partial s} p(s, u)$ ,  $(s, u) \in (0, 1] \times R$ .
4. При любом  $s \in (0, 1]$  справедливы равенства:  $\lim_{u \rightarrow \infty} f(s, u)p(s, u) = 0$ ,  $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial u} [f(s, u)p(s, u)] = 0$ .

Тогда следующие условия равносильны:

- (a) для любого  $t \in (0, 1]$  и произвольной финитной функции  $h(u) \in C^1(R)$

$$\mathbf{E} \int_0^t h(X(s)) dX_\tau(s) = 0 \quad \text{для любого } t.$$

- (b) плотности  $p(s, u)$  удовлетворяют уравнению  $\frac{\partial}{\partial s} p(s, u) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} [f(s, u)p(s, u)]$ ,  $(s, u) \in (0, 1] \times R$ . Пусть функция  $f(s, x)$  имеет вид  $f(s, x) \equiv f(s)$ , тогда последнему уравнению удовлетворяют одномерные плотности распределений центрированных гауссовских процессов с  $f(s) = \sigma(s)'$ , где  $\sigma^2(s) = \mathbf{D}(X(s))$ . В первом случае построенный стохастический интеграл совпадает с соответствующим интегралом, предложенным в работе [2].

### Литература

1. Насыров Ф. С. Обобщенная формула Ито и итовские интегралы // Теория вероятностей и ее применения. В печати.
2. Alos T., Mazet O., Nualart D. Stochastic calculus with respect to Gaussian processes // Ann. Probab. 2001. V. 27, № 2. P. 766–801.

# УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СХЕМ\*

Н. В. Савищенко

Военная академия связи, Санкт-Петербург; *snikaspb@mail.ru*

Одним из относительно простых и надежных методов генерации случайных процессов является использование стохастических дифференциальных уравнений (СДУ), с последующим переходом от СДУ к разностным схемам. Возможность перехода от непрерывной модели к дискретному виду без значительных вычислительных затрат, по сравнению с другими известными методами описания случайных процессов, является, по-видимому, одним из наибольших преимуществ этого описания. Использование разностных стохастических уравнений дает возможность получать в реальном масштабе времени реализации случайных процессов, в общем случае, с негауссовскими законами распределений. При цифровом моделировании необходимо, чтобы полученные вероятностные характеристики случайного процесса соответствовали заданным. Данный вопрос тесно связан с устойчивостью разностных схем к погрешностям вычислений.

Вопрос устойчивости разностных схем является центральным разделом теории численного решения дифференциальных уравнений [1, 2]. Однако устойчивость разностных схем для СДУ практически не рассматривалась. Известно, что для разностных схем обыкновенных дифференциальных уравнений изучение устойчивости схемы сводится к получению априорных оценок решения разностной задачи через входные данные. Очевидно, что устойчивость есть внутреннее свойство схемы, не зависящее от аппроксимации и связи схемы с каким-либо дифференциальным уравнением; поэтому условие устойчивости должно формулироваться, в частном случае, в виде некоторой связи между коэффициентами (операторами) схемы.

Пусть стохастическая система описывается СДУ Ито [3]

$$dX = a(X(t), t) dt + b(X(t), t) d\omega(t), \quad (1)$$

где  $\omega(t)$  — стандартный винеровский процесс,  $a(X, t)$ ,  $b(X, t)$  — детерминированные функции, удовлетворяющие условию Лившица.

Перейдем от непрерывного времени в СДУ (1) к дискретному. Для этого в области решения  $\Omega = \{t_0 \leq t \leq t_0 + T\}$  построим равномерную сетку для времени

$$\Omega_h = \{t_k = t_0 + kh, \quad k = \overline{0, n}, \quad h = T/n\},$$

где  $h$  — шаг по времени. С помощью методов численного интегрирования уравнения (1) при заданном начальном условии  $X_0 = X(t_0)$  по значениям приращений винеровского процесса  $\Delta\omega_k = \omega(t_{k+1}) - \omega(t_k)$  можно получить численное решение  $X_k$ . В общем случае явную разностную схему можно представить в виде

$$X_{k+1} = X_k + hQ_k(X_k, h, \Delta\omega_k), \quad (2)$$

где функция  $Q_k(X_k, h, \Delta\omega_k)$  определяется конкретным видом разностной схемы решения (1). Из определения интеграла Ито вытекает разностная схема Эйлера для решения уравнения (1)

$$X_{k+1} = X_k + a(X_k, t_k)h + b(X_k, t_k)\Delta\omega_k. \quad (3)$$

Аналогично могут быть построены схемы Эйлера – Коши, Рунге – Кутта и Кранка – Николсона [2, 3].

Пусть  $X^{(h)} = (X_0, X_1, \dots, X_n)$  — решение (2), определенное на сетке  $\Omega_h$ . Рассмотрим линейное гильбертово пространство случайных величин  $U_h$ , определенных на сетке  $\Omega_h$ . Зададим норму сеточной функции  $X^{(h)} \in U_h$ , положив

$$\|X^{(h)}\|_{U_h} = \left( \sum_{k=1}^n h M[X_k^2] \right)^{1/2}; \quad \|X^{(h)}\|_{U_h} = \max_k (M[X_k^2])^{1/2}.$$

\* Автор, выпускник ММФ НГУ 1986 г., выражает благодарность академику С. К. Годунову, лекции и работы которого легли в основу данной работы.

Для того чтобы дать определение устойчивости стохастической разностной схемы, удобнее записать схему (1) в виде:

$$L_h X^{(h)} = V^{(h)}, \quad (4)$$

где, например, для явных схем

$$L_h X^{(h)} = \begin{cases} \frac{X_{k+1} - X_k}{h} - Q_k(X_k, h, \Delta\omega_k), & k = \overline{0, n-1} \\ X_0 & \end{cases}; \quad V^{(h)} = \begin{cases} 0, & k = \overline{0, n-1} \\ \theta. & \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $L_h$  — стохастический оператор,  $V^{(h)}$  определяется из (5) и зависит только от начальных условий. Удобно считать, что  $V^{(h)}$ , заданная формулой (5) принадлежит  $(n+1)$ -мерному гильбертову пространству случайных величин  $F_h$ , которое состоит из элементов вида  $\varepsilon^{(h)} = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ . Норма в  $F_h$  может быть как  $\|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h} = \max \left( (M\varepsilon^2)^{1/2}, \left( h \sum_{k=1}^n M\varepsilon_k^2 \right)^{1/2} \right)$  или как максимальное отклонение величин  $\|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h} = \max \left( (M\varepsilon^2)^{1/2}, \max_k (M\varepsilon_k^2)^{1/2} \right)$ .

**Определение 1, [3].** Разностная схема (4) устойчива, если существуют числа  $h_0 > 0$  и  $\delta > 0$  такие, что при любом  $h < h_0$  и любом случайном векторе  $\varepsilon^{(h)} \in F_h$ ,  $\|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h} < \delta$  разностная задача

$$L_h Z^{(h)} = V^{(h)} + \varepsilon^{(h)}, \quad (6)$$

полученная из задачи (4) добавлением к правой части случайного возмущения  $\varepsilon^{(h)}$ , имеет одно (с точностью до стохастической эквивалентности) решение  $Z^{(h)}$ , причем отклонение этого решения от решения невозмущенной задачи (4) удовлетворяет оценке

$$\|Z^{(h)} - X^{(h)}\|_{U_h} \leq C \|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h}, \quad (7)$$

где  $C$  — некоторая постоянная, не зависящая от  $h$ .

В частности, неравенство (7) означает, что малое возмущение  $\varepsilon^{(h)}$  вызывает малое возмущение решения  $Z^{(h)}$ . Для линейного оператора  $L_h$  приведенное выше определение равносильно следующему определению устойчивости.

**Определение 2, [3].** Разностная схема (4) с линейным оператором  $L_h$  называется устойчивой, если

$$\|X^{(h)}\|_{U_h} \leq C \|X_0\|_{F_h}, \quad (8)$$

где  $C$  — некоторая постоянная, не зависящая от  $h$ .

Таким образом, для линейного оператора устойчивость схемы означает устойчивость по начальным данным. Если для функции  $Q_k(X_k, h, \Delta\omega_k)$  справедливо

$$M(Q_k(Z_k, h, \Delta\omega_k) - Q_k(X_k, h, \Delta\omega_k))^2 \leq R^2 M(Z_k - X_k)^2, \quad k = \overline{1, n-1},$$

где  $R > 0$  некоторая константа, то доказано, что разностная схема (4) устойчива. В ходе доказательства показано, что схемы вида (4), (5), к которым относятся, в частности, схемы Эйлера, Эйлера – Коши и Рунге – Кутта, устойчивы. Однако они не дают количественной оценки для шага  $h$ . Рассмотрим схему вида (2) с линейной функцией  $a(X, t) = aX$ :

$$X_{k+1} = R(h) X_k + V_k(X_k, h) \Delta\omega_k, \quad (9)$$

где функция  $V_k(X_k, h)$  является линейной комбинацией функции  $b(X, t)$ . Например, для схемы Эйлера

$$R(h) = (1 + ah), \quad V_k(X_k, h) = b(X_k, t_k).$$

Отсюда несложно видеть, что  $X_{k+1} = [R(h)]^{k+1} X_0 + \sum_{p=0}^k [R(h)]^{k-p} V_p(X_p, h) \Delta\omega_p$ . Используя свойства приращений винеровского процесса  $M\Delta\omega_p = 0$ ,  $M\Delta\omega_p\Delta\omega_k = h\delta_{pk}$  и независимость приращений винеровского процесса от функции  $b(X, t)$  и, следовательно, от  $V_k(X_k, h)$ , получим

$$MX_{k+1}^2 \leq \max_p [R(h)]^{2(p+1)} \left[ MX_0^2 + \sum_{p=0}^n MV_p^2(X_p, h) h \right].$$

Таким образом, если  $MV_p^2(X_p, h) \leq C_1$ , то это неравенство можно переписать в виде:

$$MX_{k+1}^2 \leq \max_p [R(h)]^{2(p+1)} [MX_0^2 + C_1nh].$$

Так как  $MX_0^2 < \infty$ , то существует такая константа  $C_2$ , что выполнено неравенство:  $C_1T \leq C_2MX_0^2$ . Следовательно, можно записать  $MX_{k+1}^2 \leq (1+C_2) \max_p [R(h)]^{2(p+1)} MX_0^2$ . Умножив это выражение на  $h$  и просуммировав по всем  $k$ , получим оценку

$$\|X^{(h)}\|_{U_h}^2 \leq (1+C_2) \max_p [R(h)]^{2(p+1)} \|X_0\|_{F_h}^2.$$

В соответствии с определением устойчивости необходимо потребовать, чтобы  $\max_p [R(h)]^{2p} \leq C_3$ . Предположим, что  $|R(h)| \leq 1 + C'h$ , где  $C'$  — константа, не зависящая от  $h$ . Тогда очевидны следующие неравенства:

$$[R(h)]^{2p} \leq (1 + C'h)^{2n} \leq \exp(2C'T).$$

Так как неравенства должны выполняться при  $h \rightarrow 0$ , потребуем выполнения более жесткого требования:  $|R(h)| \leq 1$ .

### Литература

1. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 440 с.
2. Никитин Н. Н., Разевиг В. Д. Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешностей // Журн. выч. мат. и мат. физ. 1978. Т. 18, № 1. С. 106–117.
3. Савищенко Н. В. Многомерные сигнальные конструкции: их частотная эффективность и помехоустойчивость приема. Монография / под ред. Д. Л. Бураченко. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2005. 420 с.

# ВРЕМЯ ВЫРОЖДЕНИЯ СРЕЗАЕМЫХ НА УРОВНЕ $k$ НАДКРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ\*

В. А. Топчий

*Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск;  
topchij@ofim.oscsbras.ru*

Пусть  $X_n(m)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , стандартный надкритический ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, начинающийся с  $m \in \mathbb{N}$  частиц. Это означает, что  $X_0(m) = m$ ,  $X_n(m) = \sum_{j=1}^{X_{n-1}(m)} \xi_{j,n}$  при  $n \in \mathbb{N}$ , где  $\xi_{j,n}$  независимые в совокупности, одинаково распределенные по обоим натуральным индексам случайные величины, интерпретируемые как численности потомства частиц с производящей функцией  $f(z) = \mathbb{E}z^{\xi_{1,1}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j$ , математическим ожиданием  $\mathbb{E}\xi_{j,n} = f'(1) \stackrel{\text{def}}{=} A > 1$ .

Предположим, что  $f(0) > 0$ , а  $q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = 0) \in (0, 1)$  – вероятность вырождения надкритического процесса Гальтона–Ватсона  $X_n(1)$ , начинающегося с одной частицы с той же, что и ранее производящей функцией  $f(z) = \mathbb{E}z^{\xi_{1,1}}$ . Из [1] (гл. I, §3) известно, что в данном случае  $q$  является единственным на интервале  $(0, 1)$  решением уравнения  $f(q) = q$ , кроме этого, верно представление

$$X_n \stackrel{\text{def}}{=} X_n(k) = \sum_{j=1}^k X_n^{(j)}(1),$$

где ветвящиеся процессы  $X_n^{(j)}(1)$  являются независимыми стохастическими копиями  $X_n(1)$ , а, следовательно, обозначая  $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0) \stackrel{\text{def}}{=} q_1$ , получаем

$$q_1 = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^k \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n^{(j)}(1) = 0 \right\}\right) = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n^{(j)}(1) = 0\right) = q^k.$$

Обозначим через  $Z_n^{\{l\}}(m)$  срезанный на уровне  $l$  надкритический процесс Гальтона–Ватсона, начинающийся с  $m$  частиц, с тем же распределением численности потомства от одной частицы, что и ранее. Формально,  $Z_0 = m$  и

$$Z_n^{\{l\}}(m) = \min \left\{ l, \sum_{j=1}^{Z_{n-1}^{\{l\}}(m)} \xi_{j,n} \right\}.$$

Иследуем процесс  $Z_n^{\{k\}}(k) \stackrel{\text{def}}{=} Z_n$ . Узловым моментом является серия конструкций задания процессов  $Z_n$  и  $X_n$  на общем вероятностном пространстве. Точнее, на множествах  $D_n = \{X_n = Z_n > 0\}$  при  $m \geq n$  определяется условный процесс

$$\widetilde{X}_m^n \stackrel{\text{def}}{=} X_m \Big|_{D_n}$$

с  $\xi_{j,m}$ ,  $m > n$ ,  $j \geq 0$ , тождественно совпадающими для  $X_m$  и  $Z_m$  при  $j \leq Z_{n-1}$ . Другими словами, процесс  $\widetilde{X}_m^n$  состоит из всех частиц  $Z_m$  плюс частицы, срезанные для  $Z_m$  на уровне  $k$ , но эволюционирующие стандартным образом в ветвящемся процессе  $\widetilde{X}_m^n$ .

Определим случайные события и ряд условных случайных величин:

---

\*Работа выполнена при поддержке грантов: Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06–01–00127), РФФИ–NWO 047.016.013 и научной школы – 8980.2006.1.

- $A_{k,n} \stackrel{\text{def}}{=} \{X_n = k, \lim_{m \rightarrow \infty} \widetilde{X}_m^n = \infty\};$
- $\tau_{A_{k,n}}^Z \stackrel{\text{def}}{=} \min\{s : Z_{n+j} < k, \text{ для } 1 < j < s, Z_{n+s} = k \mid A_{k,n}\};$
- $B_{k,n} \stackrel{\text{def}}{=} \{X_n = k, \lim_{m \rightarrow \infty} \widetilde{X}_m^n = 0\};$
- $\tau_{B_{k,n}}^Z \stackrel{\text{def}}{=} \min\{j : Z_{n+j} = 0, j > 0 \mid B_{k,n}\};$
- $\tau_{B_{k,n}}^X \stackrel{\text{def}}{=} \min\{j : X_{n+j} = 0, j > 0 \mid B_{k,n}\}.$

Очевидно, что  $A_{k,n}B_{k,n} = \emptyset$  и  $\mathbb{P}(A_{k,n}) + \mathbb{P}(B_{k,n}) = 1$ , а, как отмечено ранее,  $\mathbb{P}(B_{k,n}) = q_1 = q^k$ . Обозначим  $\tau_k(n) = \min\{j : Z_{n+j} = 0 \mid Z_n = k\}$ . Распределение  $\tau(n)$  как и у определенных выше величин и событий не зависит от  $n$ . Пусть  $\mathbb{E}\tau(0) \equiv \mathbb{E}\tau_k(n) \stackrel{\text{def}}{=} E_k$ ,  $\mathbb{E}\tau_{A_{k,0}}^Z \equiv \mathbb{E}\tau_{A_{k,n}}^Z \stackrel{\text{def}}{=} a$ ,  $\mathbb{E}\tau_{B_{k,0}}^Z \equiv \mathbb{E}\tau_{B_{k,n}}^Z \stackrel{\text{def}}{=} b$ .

Все три введенных параметра зависят от уровня срезки  $k$  и в силу конечности цепи Маркова конечны. Как будет в [1], одним из необходимых и достаточных условий регулярности поведения  $\mathbb{E}\tau_{B_{k,n}}^X$  является

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n f_n \ln n < \infty. \tag{1}$$

Траекторию процесса  $Z_n$  можно рассматривать как последовательность независимых реализаций событий  $A_{k,*}$  с вероятностью  $1 - q_1 = 1 - q^k$  до первого появления события  $B_{k,*}$ . Каждому из событий  $A_{k,*}$  соответствует случайный интервал  $\tau_{A_{k,*}}^X$ , где траектория процесса  $Z_n$  изменяется ниже уровня  $k$  до первого возвращения на него. Обозначим через  $\nu$  случайное число событий  $A_{k,*}$  до первого появления события  $B_{k,*}$ . Очевидно что

$$\mathbb{P}(\nu = m) = (1 - q^k)^m q^k, \quad m = 0, 1, \dots,$$

а время до появления события  $B_{k,*}$  будет равно  $T = \sum_{j=1}^{\nu} \eta_j$ , где  $\eta_j$  независимы и одинаково распределены с  $\tau_{A_{k,0}}^X$ . Легко вычислить  $\mathbb{E}\nu = (1 - q^k)q^{-k}$  и  $\mathbb{D}\nu = (1 - q^k)q^{-2k}$ .

Основным утверждением работы является:

**Теорема 1.** *Если выполнено условие (1), то при  $k \rightarrow \infty$*

$$E_k = \frac{1 - q_1}{q_1} a + b = aq^{-k} + (b - a),$$

где

$$b = \mathbb{E}\tau_{B_{k,n}}^Z = -\frac{\ln k}{\ln f'(q)}(1 + o(1)),$$

а

$$a = \mathbb{E}\tau_{A_{k,n}}^Z \leq \frac{A - 1 + q}{(1 - q)(A - 1)} + o(1).$$

Кроме этого

$$\mathbb{D}\tau_{B_{k,n}}^Z = -\frac{\ln k}{\ln f'(q)}(1 + o(1)).$$

### Литература

1. Athreya K. B., Ney P. E. Branching Processes. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1972.

**OPERATOR INEQUALITIES AND THEIR APPLICATIONS****S. Utev***University of Nottingham, UK; sergey.utev@nottingham.ac.uk*

How to find a good approximation on the stop-loss premiums of the first and second orders in the individual risk model with independent claims occurrences?

How to measure the impact of dependence between claims occurrences?

How to derive extremal properties of Rademacher functions or find the best constants in the Rosenthal inequality?

The Stein–Chen method, stochastic orderings and operator inequalities are employed to answer these and similar questions.

---

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА  
И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
COMPUTATIONAL MATHEMATICS  
AND MATHEMATICAL MODELING**

---

**ФЕНОМЕН НЕНАСЫЩАЕМОСТИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА  
В СВЕТЕ ОЧЕВИДНОСТЕЙ ТЕОРИИ КОНСТРУКТИВНОГО  
ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ\***

**В. Н. Белых**

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; belykh@math.nsc.ru*

На юбилейной научной сессии, посвященной 50-летию Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, отмечалось, что открытие К.И. Бабенко ненасыщаемых численных методов не только явилось одним из наиболее ярких теоретических достижений Института, но и стало чрезвычайно важным событием во всей прикладной вычислительной науке в целом. Краткое изложение основ теории этих методов содержится в книге К.И. Бабенко [1], второе издание которой появилось в 2002 году. В предисловии ко второму изданию, написанному проф. А.Д. Брюно, в частности, отмечается: «... Многие методы, изложенные в книге (особенно алгоритмы без насыщения) до сих пор неизвестны на западе и остаются актуальными, ибо всегда имеются задачи требующие максимального использования всех возможностей компьютера».

Генетически ненасыщаемые численные методы восходят к методам переменных порядков (сходимости), отличаясь от них, однако, повышенной ролью фактора ассоциативности с классом корректности задач: с ростом «запаса» гладкости решений эти методы самосовершенствуются, т.е. автоматически непосредственно в дифференциальной природе отыскиваемых решений задач черпают приращение своей практической эффективности (*феномен ненасыщаемости*). Причем пика своей эффективности — *экспоненциальной сходимости* — ненасыщаемые методы достигают на классах (компактах) бесконечно дифференцируемых решений задач (скорость сходимости сравнивается с числом  $n$  свободных параметров у функций, из которых конструируются приближения) в полном соответствии с асимптотикой экспоненциального с ростом параметра  $n$  убывания к нулю их александровских  $n$ -поперечников [1].

Любопытно отметить, что численные методы, имеющие главный член погрешности, свойством «гибкости», присущим ненасыщаемым методам, не обладают и потому отречение от «ценностей», ассоциированных со статус-кво конечно-разностной парадигмы — главным членом погрешности, свидетельствует о выходе ненасыщаемых численных методов за клише, господствующей в вычислительной практике парадигмы.

В докладе приведены простые, несколько не ограничительные и вместе с тем содержательные конструктивные термины, в которых удалось разъяснить и смысл феномена ненасыщаемости, и смысл экспоненциальной сходимости ненасыщаемого численного метода на отрезке [2-4]. При этом феномен ненасыщаемости оказался следствием, хотя и необычайно тонким, всего лишь основательно разработанной теории полиномиального чебышёвского приближения непрерывных функций на отрезке и с полным правом может считаться достижением самой этой теории.

Можно предвидеть, что недостаточная развитость теории конструктивного приближения функций в многомерном случае, будет являться камнем преткновения при внедрении идеи ненасыщаемости в вычислительную практику и в скором времени потребует, видимо, концентрации

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00250) и Совета по грантам Президента Российской Федерации и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-9019.2006.1)



серьезных математических усилий в этом направлении. Причина, по которой многомерный случай принципиально отличается от отрезка, указана в [1].

Что касается конечного отрезка, то ответы на все возникающие здесь вопросы чебышёвской аппроксимации непрерывных функций весьма содержательны, известны с достаточной степенью полноты и в виду тщательной теоретической проработки давно уже перешли в разряд очевидных конструктивных истин.

### Литература

1. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.; Ижевск: РХД, 2002.
2. *Белых В. Н.* О свойствах наилучших приближений  $C^\infty$ -гладких функций на отрезке вещественной оси (к феномену ненасыщаемости численных методов) // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 483-499.
3. *Белых В. Н.* К проблеме обтекания осесимметричных тел большого удлинения потоком идеальной несжимаемой жидкости // Прикл. мех. и техн. физики. 2006. Т. 47, № 5. С. 56-67.
4. *Белых В. Н.* Внешняя осесимметричная задача Неймана для уравнения Лапласа: ненасыщаемые методы численного решения // ДАН. 2007. Т. 417, № 4.

# ВЫЧИСЛЕНИЯ С ГАРАНТИРОВАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ В СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЕ\*

Э. А. Бибердорф<sup>1</sup>, Н. И. Попова<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; biberdorf@ngs.ru*

<sup>2</sup> *Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера, Новосибирск; n.i.popova@inp.nsk.su*

Процесс численного математического моделирования как правило включает в себя несколько важных этапов:

- 1) физический или численный эксперимент, из которого определяются исходные данные задачи;
- 2) интерполяция этих данных на всю интересующую область изменения параметров;
- 3) численное интегрирование;
- 4) дискретизация, т. е. построение конечномерной математической модели;
- 5) решение стандартной задачи вычислительной линейной алгебры

$$Ax = f \quad \text{или} \quad Av = \lambda v. \quad (1)$$

Каждый этап неизбежно сопровождается характерными именно для него погрешностями, совокупность которых и определяет погрешность конечного результата.

Отметим, что длительная история становления и развития культуры физического эксперимента (этап 1) привела к тому, что любые данные измерений считаются достоверными только в том случае, если они сопровождаются указанием интервала возможной ошибки.

Способы оценок ошибок интерполяции и дискретизации (этапы 2,3,4) также хорошо разработаны и являются традиционной частью курсов вычислительной математики в вузах.

Удивительно, что до недавнего времени вычислительным погрешностям последнего этапа не придавалось никакого значения. Результат решения задачи (1) принимался за абсолютно точный, если, конечно, свойства искомой характеристики не противоречили физическому смыслу и ошибка не была очевидной.

Вероятная причина тому - относительно короткий исторический промежуток существования компьютеров и стремительное увеличение их мощностей. С исторической точки зрения вычислительная математика мгновенно перешла от матриц малых порядков к матрицам больших размеров, не осознав, что хотя некоторые задачи (вычисление собственных значений несимметричных матриц, вычисление корней полиномов) являются корректными с традиционной точки зрения, становятся некорректными в дискретной компьютерной арифметике. При выполнении миллионов арифметических операций их маленькие погрешности накапливаются и поглощают значительную часть точности вычисленного результата. И в большинстве случаев пользователю приходится принимать такой результат на веру.

Но существует и другой подход. Это методика учета и суммирования машинных погрешностей основана на известном методе обратного анализа (см. [1]). Именно эта методика была использована при разработке программного пакета **GALA-2.0** (Guaranteed Accuracy in Linear Algebra) для решения следующих стандартных задач линейной алгебры (см. [2]):

- 1) решение систем линейных уравнений,
- 2) решение симметричных спектральных задач.

Ориентируясь при создании пакета GALA на пользователя, не являющегося специалистом в вычислительной линейной алгебре, авторы преследовали следующие цели

- 1) максимальный уровень автоматизации анализа свойств задачи, откуда следует
- 2) сопровождение результата вычислений гарантированной оценкой его точности,
- 3) содержательная диагностика причин аварийных остановок.

Результат вычислений при помощи программ пакета GALA-2.0 имеет характер не «гипотезы» (предположительного значения), а «теоремы» (указываются гарантированные границы

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 06–08–00384), НШ–9010.2006.1, СО РАН — Интеграционный проект № 46.

интервала, в котором находится точное значение). Таким образом, пользователь этих программ может делать обоснованные выводы из результатов вычислений, которые нередко радикально влияют на ход его исследований и которые невозможны при использовании других распространенных программных продуктов.

#### Основные процедуры

- 1) Решение систем линейных уравнений с  $(N \times M)$ -матрицей;
- 2) Обращение  $(M \times M)$ -матрицы и уточнение ее элементов;
- 3) Вычисление числа обусловленности матрицы;
- 4) Вычисление собственных значений и векторов симметричной матрицы.

**Пример 1: аппроксимация функции.** Задача об аппроксимации на конечном отрезке непрерывной функции  $f(t)$  полиномом от  $t$  порядка  $M - 1$  сводится к решению линейной системы с матрицей Гильберта. Матрица Гильберта представляет собой известный пример плохо обусловленной матрицы, поэтому погрешность решения такой системы достаточно велика. В результате модельных расчетов с функцией  $f(t) = t^M$  получили, что

- 1) при  $M = 8$  первые три коэффициента полинома  $x(t)$  не имеют ни одного гарантированно верного знака;
- 2) при  $M = 9$  гарантированная оценка уже невозможна; при  $M = 10$  система не разрешима.

**Пример 2: интерполяция данных.** Задача об интерполяции эмпирических данных при помощи полинома сводится к решению линейной переопределенной системы. Обусловленность такой системы также быстро растет с увеличением степени полинома (а значит с увеличением теоретической точности интерполяции). Точность же вычисления коэффициентов при этом падает. В действительности же эмпирические данные задаются с некоторой относительной погрешностью  $\delta$ . Следовательно решение имеет смысл искать с относительной точностью не более  $\mu(A)\delta$ . Исходя из этих соображений находится оптимальная степень интерполяционного многочлена.

**Пример 3: прием регуляризации.** Задача о распределении быстрых частиц в пучке с помощью зондирующего пучка нейтральных атомов сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода. После дискретизации эта задача превращается в линейную алгебраическую систему, которая как правило плохо обусловлена. Метод регуляризации (см. [3]) позволяет улучшить обусловленность и найти решение. Наличие гарантированных оценок позволяет найти оптимальное соотношение параметров дискретизации и параметра регуляризации  $\tau$ .

**Пример 4: вычисление собственных значений (уравнение Шредингера).** Приближенные собственные значения и собственные функции уравнения Шредингера вычисляются после дискретизации уравнения. Очевидно, что с уменьшением шага дискретизации уменьшается разность между точным дискретным и точным аналитическим решениями. При этом растет погрешность вычисления дискретного решения. Оптимальным является вариант, когда погрешность дискретизации и вычислительная погрешность имеют равные порядки. Наличие гарантированных оценок позволяют найти этот оптимум.

#### Литература

1. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.
2. Бибердорф Э.А., Попова Н.И. Гарантированная точность современных алгоритмов линейной алгебры. Новосибирск: Изд. СО РАН, 2006.
3. Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилук О.П., Костин В.И. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука, 1992.

# О КОВЫПУКЛОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ\*

В. В. Богданов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; bogdanov@math.nsc.ru*

Рассматривается задача интерполяции нелокальными обобщенными сплайнами класса  $C^2$ , сохраняющими качественные характеристики данных. Алгоритмы построения наиболее популярных сплайнов невысокой степени опираются на свойства трёхдиагональных систем относительно параметров сплайна. В качестве таких параметров обычно выступают неизвестные значения первых или вторых производных сплайна в узлах, характеризующие форму графиков. С целью обеспечения сохранения кусочной монотонности и кусочной выпуклости данных с минимальными затратами и в том же классе гладкости в обобщения классической конструкции вводятся дополнительные параметры управления формой. Оптимальному выбору таких параметров для данных, меняющих направление выпуклости, посвящено данное сообщение.

Полученные в [1] результаты относительно выпуклой интерполяции, основанные на приведении матриц сплайновых систем к монотонному виду, переносятся на случай ковыпуклой интерполяции, в которой возникают системы якобиева вида. В качестве примеров, наряду со ставшей классической конструкцией рационального сплайна Шпэта, рассматриваются и другие сплайны, в частности, обладающие вариационными свойствами.

## Литература

1. Богданов В. В., Волков Ю. С. Выбор параметров обобщённых кубических сплайнов при выпуклой интерполяции // Сибирский журнал вычислительной математики. 2006. Т. 9, № 1. С. 5–22.

---

\*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Отделения математических наук РАН (проект 2006–1.3.1) и Интеграционных проектов СО РАН (проект 2006–66).

# КОНСТАНТЫ ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ОЦЕНКАХ ПОГРЕШНОСТЕЙ\*

В. Л. Васкевич

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; vask@math.nsc.ru  
Новосибирский государственный университет, Новосибирск*

Пусть ограниченная область  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  с кусочно гладкой границей и единичным объемом служит областью задания функций из некоторого банахова пространства  $X = X(\Omega)$ . Предположим, что  $X$  вложено ограниченным образом в пространство  $C(\overline{\Omega})$  непрерывных в замыкании  $\Omega$  функций. Иными словами, существует конечная константа вложения, т.е. такое положительное число  $A$ , что имеет место неравенство

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |\varphi(x)| \leq A \|\varphi\|_X, \quad \forall \varphi \in X. \quad (1)$$

Константа вложения  $A$  — минимальное число со свойством (1). Пусть тождественно единичная функция принадлежит  $X$ , имея при этом единичную же норму. Тогда  $A \geq 1$ .

Выберем в качестве области задания  $\Omega$  единичный куб

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad 0 \leq x_j < 1, \quad j = 1, 2, \dots, n\},$$

а в качестве функционального пространства  $X$  — пространство Соболева  $\widetilde{W}_2^m(Q)$ , образованное периодическими с единичной матрицей периодов функциями из  $L_2(Q)$ , обобщенные производные которых вплоть до порядка  $m$  также принадлежат  $L_2(Q)$ . Условие периодичности функции  $\varphi(x)$  означает, что  $\varphi(x + \gamma) = \varphi(x)$  для  $\forall \gamma \in \mathbb{Z}^n$ . Норму в  $\widetilde{W}_2^m(Q)$  зададим равенством

$$\|\varphi\|_{\widetilde{W}_2^m(Q)} = \left[ \left| \int_Q \varphi(x) dx \right|^2 + \int_Q \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} |D^\alpha \varphi|^2 dx \right]^{1/2} < \infty.$$

Хорошо известно [1], что при  $m > n/2$  пространство  $\widetilde{W}_2^m(Q)$  вложено в  $C(\overline{Q})$ . Соответствующая константа вложения  $A = \widetilde{A}_n^m$  задается равенством

$$\widetilde{A}_n^m = \left\{ 1 + \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^n, \beta \neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2m}} \right\}^{1/2}. \quad (2)$$

Равенство в оценке (1) при  $A = \widetilde{A}_n^m$  достигается на функции

$$u_0(x) = 1 + \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2m}} e^{-i2\pi\beta x}.$$

Простейшая оценка  $\widetilde{A}_n^m$  снизу имеет вид

$$\left( \widetilde{A}_n^m \right)^2 = 1 + \sum_{\beta \neq 0} \frac{1}{|2\pi\beta|^{2m}} \geq 1 + \frac{2n}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = 1 + \frac{n|B_{2m}|}{(2m)!} > 1 + \frac{2n}{(2\pi)^{2m}}.$$

Константы вложения естественным образом возникают в некоторых вычислительных задачах при оценке погрешностей. Приведем пример такого рода.

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 05–01–00250 и № 07–01–00585).

Пусть  $\varphi(x) \in \widetilde{W}_2^m(Q)$ , а для приближенного вычисления значений  $\varphi(x)$  внутри  $Q$  используется линейная комбинация из  $N$  базисных экспонент:

$$\varphi(x) \approx \Sigma_N(\varphi) \equiv \sum_{k=1}^N c_k e^{-i2\pi\beta^{(k)}x}, \quad \text{где } \beta^{(k)} = (\beta_1^{(k)}, \beta_2^{(k)}, \dots, \beta_n^{(k)}) \in \mathbb{Z}^n \quad \text{и} \quad \beta^{(k)}x = \sum_{j=1}^n \beta_j^{(k)}x_j.$$

Множество  $\{c_k = c_k(\varphi) \mid k = 1, 2, \dots, N\}$  коэффициентов рассматриваемой формулы предполагается состоящим из коэффициентов Фурье  $c_\varphi[\beta^{(k)}]$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , функции  $\varphi$ . *Функционал погрешности*  $(l_N, \varphi) = \varphi(x) - \Sigma_N(\varphi)$  рассматриваемой формулы линеен и ограничен на  $\widetilde{W}_2^m(Q)$ , а погрешность при этом оценивается так

$$|(l_N, \varphi)| \leq \|l_N \mid \widetilde{W}_2^{m*}(Q)\| \cdot \|\varphi \mid \widetilde{W}_2^m(Q)\|.$$

Если сумма  $\Sigma_N(\varphi)$ , представляющая собой скалярное произведение вектора  $\vec{c}$  коэффициентов формулы на вектор  $\vec{e}$  значений в точке  $x$  соответствующих базисных экспонент, вычисляется на компьютере, то приведенная оценка погрешности возмущается. Условимся обозначать реальную погрешность через  $([l_N]_{\mathbf{F}}, \varphi)$ , где  $\varphi \in \widetilde{W}_2^m(Q)$ , а  $\mathbf{F}$  — множество используемых при вычислении *машинных чисел*.

В отличие от  $\mathbb{R}$  множество  $\mathbf{F}$  конечно, в нем существуют *порог машинного нуля*  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mathbf{F})$ , *порог переполнения*  $\varepsilon_\infty = \varepsilon_\infty(\mathbf{F})$  и такое положительное число  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\mathbf{F})$ , что  $1 + \varepsilon_1 \in \mathbf{F}$ , а  $(1, 1 + \varepsilon_1) \cap \mathbf{F} = \emptyset$  (см. [2], [3, стр. 19]). Параметры  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_\infty$  относятся к фундаментальным компьютерным стандартам и заданы заранее. В IEEE стандарте двоичной арифметики  $\varepsilon_0 = 2^{-126} \approx 10^{-38}$ ,  $\varepsilon_\infty = 2^{+128}$  и  $\varepsilon_1 = 2^{-23} \approx 12 \times 10^{-8}$ . Если  $\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_\infty$  именно таковы, то существует константа  $R_{\mathbf{F}}$ , для которой справедливы неравенства

$$|([l_N]_{\mathbf{F}}, \varphi)| \leq R_{\mathbf{F}} \|\varphi \mid \widetilde{W}_2^m(Q)\| \quad \text{при} \quad \forall \varphi: \quad \sqrt{2}\varepsilon_1^{9/2} \leq \widetilde{A}_n^m \|\varphi \mid \widetilde{W}_2^m(Q)\| \leq \varepsilon_\infty^{1/3}.$$

Параметр  $R_{\mathbf{F}}$  является также функцией алгоритма, посредством которого в компьютере вычислялось скалярное произведение. В качестве такового был рассмотрен алгоритм из [2, стр. 246, формула (5.6)], в котором результат каждой выполненной арифметической операции сразу же округляется с той же точностью, с которой были введены начальные данные. Оценка уклонения  $R_{\mathbf{F}}$  от  $\|l_N \mid \widetilde{W}_2^{m*}(Q)\|$  приведена в следующей теореме.

**Теорема 1.** Пусть  $\varepsilon_0(\mathbf{F})$ ,  $\varepsilon_1(\mathbf{F})$  и  $\varepsilon_\infty(\mathbf{F})$  — константы 32-битового представления чисел с плавающей точкой в IEEE стандарте двоичной арифметики и  $\widetilde{A}_n^m < \sqrt{\varepsilon_\infty(\mathbf{F})}/2$ . Тогда справедливо неравенство

$$\left| R_{\mathbf{F}} - \|l_N \mid \widetilde{W}_2^{m*}(Q)\| \right| \leq 8N\widetilde{A}_n^m \varepsilon_1(\mathbf{F}) \quad \text{при} \quad \forall N \leq 1/\varepsilon_1(\mathbf{F}).$$

Параметр  $8N\widetilde{A}_n^m$ , участвующий в приведенной оценке, естественно рассматривать как *число обусловленности* формулы  $\varphi(x) \approx \Sigma_N(\varphi)$  на классе  $\widetilde{W}_2^m(Q)$ . В этом смысле задача вычисления константы вложения по существу эквивалентна задаче отыскания этого числа обусловленности.

### Литература

1. Sobolev S.L. Some applications of functional analysis in mathematical physics. Translations of Mathematical Monographs, V. 90. AMS, Providence, RI. 1991.
2. Годунов С. К., Антонов А. Г., Кириллюк О. П., Костин В. И. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1988.
3. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999.
4. Васкевич В.Л. Критерий гарантированной точности вычисления многомерных интегралов // Вычислительные технологии. Т. 9. 2004. Специальный выпуск: Избранные доклады VII Международного семинара-совещания «Кубатурные формулы и их приложения». Красноярск, август 2003. Новосибирск: ИВТ СО РАН. С. 44–49.

# СПЛАЙНЫ ЧЁТНОЙ СТЕПЕНИ ПО СУББОТИНУ И ПО МАРСДЕНУ

Ю. С. Волков

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; volkov@math.nsc.ru*

Известно, что при интерполяции сплайнами чётной степени точки интерполяции не должны совпадать с узлами сплайна. Наиболее распространены две конструкции интерполяционных сплайнов чётной степени. Впервые такие конструкции сплайнов второй степени рассмотрели М.Марсден и Ю.Н.Субботин. Принципиальное различие между ними заключается в том, что в первом случае точки интерполяции выбираются между узлами сплайна (как правило, посредине), а во втором, наоборот — узлы сплайна располагаются между точками интерполяции.

В докладе рассматриваются обе эти конструкции для сплайнов произвольной чётной степени — по Марсдену и по Субботину. Изучается предложенный ранее автором подход к построению интерполяционных сплайнов через коэффициенты разложения одной из производных искомого сплайна по  $B$ -сплайнам соответствующей степени. Устанавливается, что совершенно разные конструкции по Марсдену и по Субботину тесно связаны между собой. Оказывается, что при рассматриваемом подходе матрицы определяющих систем уравнений для интерполяционных сплайнов по Марсдену являются транспонированными к матрицам некоторых систем для сплайнов по Субботину. Данное обстоятельство позволяет получать одинаковые условия сходимости процессов интерполяции для  $k$ -й производной интерполяционных сплайнов чётной степени  $2n$  по Марсдену, если  $f \in C^k[a, b]$ , и для  $(2n - k)$ -й производной сплайнов той же степени  $2n$  по Субботину, если  $f \in C^{2n-k}[a, b]$ .

Кроме того установлено, что для сплайнов четвёртой степени по Субботину  $s'''$  равномерно сходится к  $f'''$  для любой интерполируемой функции  $f \in C^3[a, b]$  и любой последовательности сеток. Соответственно для сплайнов четвёртой степени по Марсдену есть сходимость  $s'$  к  $f'$  для любой  $f \in C^1[a, b]$  и также любой последовательности сеток.

## Литература

1. Волков Ю. С. Две конструкции интерполяционных сплайнов чётной степени. Новосибирск, 2006. 32 с. (Препринт № 169 / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики им. С. Л. Соболева).

## ОБ ОДНОМ РАЗНОСТНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С. В. Гайдомак

*Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск; gaidomak@iiss.ru*

В работе рассматриваются вырожденные системы уравнений в частных производных вида

$$A\partial_t u + B\partial_x u + Cu = f, \quad \partial_t \equiv \partial/\partial t, \quad \partial_x \equiv \partial/\partial x, \quad (1)$$

где  $A \equiv A(x, t)$ ,  $B \equiv B(x, t)$ ,  $C \equiv C(x, t)$  – заданные матрицы размера  $(n \times n)$  с элементами, зависящими от переменных  $x \in \mathbf{R}^1$  и  $t \in \mathbf{R}^1$ ,  $(x, t) \in \mathbf{U} = [x_0; X] \times [t_0; T]$ ;  $f \equiv f(x, t)$  и  $u \equiv u(x, t)$  – соответственно известная и искомая  $n$ -мерные вектор-функции. В системе (1) матрица  $A$ , либо матрица  $B$ , либо пучок матриц  $\lambda A + \mu B$  предполагаются тождественно вырожденными в области  $\mathbf{U} \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}^1$ . Такие системы имеют большое прикладное значение и возникают, в частности, при изучении процессов гидродинамики, газовой динамики, теории малых колебаний жидкости. В литературе системы вида (1) также называют тождественно вырожденными, неразрешенными относительно старшей производной, системами Соболева, алгебро-дифференциальными уравнениями в частных производных, а также системами не относящимися к типу систем Коши-Ковалевской.

Зададим для системы (1) начальные и краевые условия:

$$u(x, t_0) = \phi(x), \quad u(x_0, t) = \psi(t). \quad (2)$$

Ранее были получены достаточные условия разрешимости начально-краевой задачи (1),(2). Приведем их в следующей теореме.

**Теорема 1.** Пусть в начально-краевой задаче (1),(2):

- 1) пучок матриц  $\lambda A + \mu B + C$  удовлетворяет двойному критерию «ранг-степень»;
- 2) корни многочлена  $\det(\lambda A + D)$ ,  $D = B + (E - SS^-)C$  отрицательные, простые и возможно кратные нулевые для всех  $(x, t) \in \mathbf{U}$ ,  $S = (A B)$ ,  $S^-$  – любая полуобратная матрица к матрице  $S$ ;
- 3) входные данные достаточно гладкие в области  $\mathbf{U}$ ;
- 4) начальные и граничные данные удовлетворяют условиям:  $A(x_0, t)u(x_0, t) = \psi(t)$ ,  $B(x, t_0)u(x, t_0) = \phi(x)$  и предполагаются согласованными в точке  $(x_0, t_0)$  со своими производными.

Тогда она имеет решение в области  $\mathbf{U}$ .

Теорема 1 была доказана автором в работе [1]. Аналогичное утверждение справедливо для систем (1) с пучком матриц  $\lambda A + B$ , удовлетворяющим критерию «ранг-степень». В этом случае в теореме 1 вместо многочлена  $\det(\lambda A + D)$  необходимо указать многочлен  $\det(\lambda A + B)$ .

Предполагая, что задача (1),(2) удовлетворяет всем условиям теоремы 1, то есть имеет решение, решим её численно. Для этой цели построим трехслойную разностную схему.

Произведем в области  $\mathbf{U}$  разбиение  $\Delta$  прямыми:  $x = x_0 + ih = x_i$ ,  $t = t_0 + j\tau = t_j$ ,  $i = \overline{0, \mathcal{N}_1}$ ,  $j = \overline{0, \mathcal{N}_2}$ ,  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in \mathbf{N}$ , где  $h, \tau$  – шаги полученной сетки  $U_\Delta$ ,  $h, \tau \in (0; 1)$ . Точки с координатами  $(x_i, t_j)$  будем называть узлами сетки  $U_\Delta$ . В каждой области  $\mathbf{U}' = [x_i; x_i + m_1 h] \times [t_j; t_j + m_2 \tau] \in \mathbf{U}$  решение задачи (1),(2) будем искать в виде полинома  $\mathcal{H}_{m_1, m_2}(x, t)$  со старшими степенями по  $x$  и по  $t$  равными соответственно  $m_1, m_2$ , с неопределенными коэффициентами, значения которого совпадают со значениями искомого решения в узлах введенной сетки:  $\mathcal{H}_{m_1, m_2}(x_i, t_j) = u(x_i, t_j)$ . Например, для случая, когда  $m_1 = m_2 = 2$  такой полином можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{2,2}(x, t) = & u(x_i, t_j) \prod_i(x) \prod_j(t) + u(x_{i+1}, t_j) \prod_{i+1}(x) \prod_j(t) + u(x_{i+2}, t_j) \prod_{i+2}(x) \prod_j(t) + \\ & + u(x_i, t_{j+1}) \prod_i(x) \prod_{j+1}(t) + u(x_{i+1}, t_{j+1}) \prod_{i+1}(x) \prod_{j+1}(t) + u(x_{i+2}, t_{j+1}) \prod_{i+2}(x) \prod_{j+1}(t) + \end{aligned} \quad (3)$$



$$+u(x_i, t_{j+2}) \prod_i(x) \prod_{j+2}(t) + u(x_{i+1}, t_{j+2}) \prod_{i+1}(x) \prod_{j+2}(t) + u(x_{i+2}, t_{j+2}) \prod_{i+2}(x) \prod_{j+2}(t),$$

где

$$\prod_i(x) = \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})}, \quad \prod_{i+1}(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})},$$

$$\prod_{i+2}(x) = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})}.$$

Из равенства (3) видно, что в узлах сетки значения полинома действительно совпадают со значениями искомого решения. Продифференцируем полином по переменным  $x, t$  и вычислим значения производных в узлах  $(x_{i+2}, t_{j+2})$  области  $U$ . Получаем

$$\partial_x \mathcal{H}_{2,2}|_{(x_{i+2}, t_{j+2})} = 1/(2h)u_{i,j+2} - 2/hu_{i+1,j+2} + 3/(2h)u_{i+2,j+2},$$

$$\partial_t \mathcal{H}_{2,2}|_{(x_{i+2}, t_{j+2})} = 1/(2\tau)u_{i+2,j} - 2/\tau u_{i+2,j+1} + 3/(2\tau)u_{i+2,j+2},$$

где  $u(x_i, t_j) = u_{i,j}$ . Поскольку значения полинома в узлах  $(x_{i+2}, t_{j+2})$  совпадают со значениями искомого решения, то в этих узлах полином должен удовлетворять системе (1). Подставим значения полинома, вычисленные в узлах  $(x_{i+1}, t_{j+2})$  и значения его производных в систему (1):

$$A_{i+2,j+2} \partial_t u|_{(x_{i+2}, t_{j+2})} + B_{i+2,j+2} \partial_x u|_{(x_{i+2}, t_{j+2})} + C_{i+2,j+2} u_{i+2,j+2} = f_{i+2,j+2}, \quad (4)$$

где  $A_{i,j} \equiv A(x_i, t_j)$ ,  $B_{i,j} \equiv B(x_i, t_j)$ ,  $C_{i,j} \equiv C(x_i, t_j)$ . Причем

$$\partial_t u|_{(x_{i+2}, t_{j+2})} = \partial_t \mathcal{H}_{2,2}|_{(x_{i+2}, t_{j+2})} + O(\tau^2), \quad \partial_x u|_{(x_{i+2}, t_{j+2})} = \partial_x \mathcal{H}_{2,2}|_{(x_{i+2}, t_{j+2})} + O(h^2).$$

В равенстве (4) заменим  $\partial_t u$  на  $\partial_t \mathcal{H}_{2,2}$  и  $\partial_x u$  на  $\partial_x \mathcal{H}_{2,2}$ . Получим некоторую неявную разностную схему

$$\left( \frac{3}{2\tau} A_{i+2,j+2} + \frac{3}{2h} B_{i+2,j+2} + C_{i+2,j+2} \right) u_{i+2,j+2} = \frac{2}{\tau} A_{i+2,j+2} u_{i+2,j+1} -$$

$$- \frac{1}{2\tau} A_{i+2,j+2} u_{i+2,j} - \frac{1}{2h} B_{i+2,j+2} u_{i,j+2} + \frac{2}{h} B_{i+2,j+2} u_{i+1,j+2} + f_{i+2,j+2}, \quad (5)$$

решение которой будем обозначать  $\tilde{u}_{i,j}$ . Система (5) представляет собой замкнутую систему  $n$ -линейных алгебраических уравнений и называется трехслойной разностной схемой. Численный процесс, в основе которого лежит решение системы (5), называется трёхслойным разностным методом. Для реализации трёхслойного разностного метода необходимо знать значения искомого решения или приближения к нему с точностью, по крайней мере,  $O(h^2) + O(\tau^2)$  на двух начальных и краевых слоях области  $U$ :  $u_{i+2,0}$ ,  $u_{i+2,1}$ ,  $u_{0,j+2}$ ,  $u_{1,j+2}$ ,  $i = \overline{1, \mathcal{N}_1}$ ,  $j = \overline{1, \mathcal{N}_2}$ . На первый взгляд кажется, что это требование усложняет задачу и оно должно учитываться в её исходной постановке. На самом деле, при решении практических задач, в которых неизвестная функция  $u(x, t)$  обозначает некоторые физические величины, например, давление, энтальпию, нахождение значений этих величин на соседних, например, начальных (временных) слоях не представляется затруднительным, поскольку в реальном физическом процессе их изменение за десятые, сотые доли секунды незначительно и поэтому значения искомого функции на двух начальных слоях можно задавать практически равными.

Сходимость трёхслойного разностного процесса к решению задачи (1),(2) доказана в следующей теореме.

**Теорема 2.** Пусть для начально-краевой задачи (1),(2) выполнены все условия теоремы 1. Тогда найдутся такие  $\tau^*$ ,  $h^* \in (0; 1)$ , что для всех  $\tau < \tau^*$ ,  $h < h^*$ , удовлетворяющих условию  $\frac{|\lambda^*| \tau}{h} < \frac{3}{5}$ , где  $\lambda^*$  – наибольшее из всех собственных чисел матрицы  $B(x, t)$  в области  $U$ , трёхслойный разностный метод сходится и справедлива оценка  $|u(x_i, t_j) - \tilde{u}_{i,j}| = O(h^2) + O(\tau^2) \forall i, j$ .

### Литература

1. Гайдомак С. В., Чистяков В. Ф. О системах не типа Коши-Ковалевской индекса (1,k) // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10, № 2. С. 45–59.

# ОТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПОРИСТЫХ СРЕД\*

Б. М. Жапбасбай<sup>1</sup>, Х. Х. Имомназаров<sup>2</sup>

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск;*

<sup>1</sup> *beket.zhapbasbay@gmail.com, <sup>2</sup> imom@omzg.sccc.ru*

Рассматривается алгоритм численного решения двумерной обратной задачи фильтрации в стационарном случае. Прямая двумерная задача фильтрации для неоднородных пористых сред решается разностным методом с использованием метода неполной факторизации Булеева. Для численного решения обратной задачи применяется квазиньютоновский метод.

**Постановка задачи.** При моделировании стационарных процессов в пористых средах используется уравнение Дарси. При этом считаются известными: проницаемость, вязкость фильтрующей жидкости, физические плотности упругого пористого тела и жидкости, а также пористость. На практике часто бывает, что помимо решений неизвестными считаются некоторые характеристики среды. Предположим, что выполнены законы сохранения массы и Дарси для пористых сред [1,2]:

$$\operatorname{div}(\rho_l \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\rho_l \mathbf{v} = -\frac{1}{\chi \rho} \nabla p. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$ ,  $p = p(\mathbf{x})$  – скорость фильтрации жидкости и давление,  $\rho(\mathbf{x}) = \rho_l(\mathbf{x}) + \rho_s(\mathbf{x})$  – плотность пористой среды,  $\rho_l(\mathbf{x}) = \rho_l^f(\mathbf{x})d_0(\mathbf{x})$  – парциальная плотность жидкости,  $\rho_l^f(\mathbf{x})$  – физическая плотность жидкости,  $\rho_s(\mathbf{x}) = \rho_s^f(\mathbf{x})(1 - d_0(\mathbf{x}))$  – парциальная плотность упруго-пористого тела,  $\rho_s^f(\mathbf{x})$  – физическая плотность упруго-пористого тела,  $d_0(\mathbf{x})$  – пористость,  $\chi(\mathbf{x})$  – коэффициент межкомпонентного трения,  $\mathbf{x} = (x, y)$  – точка из  $R^2$ .

Определение давления  $p(\mathbf{x})$  из системы уравнений (1),(2) при заданных функциях  $\rho(\mathbf{x})$ ,  $\chi(\mathbf{x})$  и краевых условиях Дирихле, является прямой задачей фильтрации, а определение  $\chi(\mathbf{x})$  (при заданной  $p(\mathbf{x})$ ) по дополнительной информации  $W_l$ :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\partial \Omega_l} = W_l, \quad l = 0, \dots, L. \quad (3)$$

– обратной задачей фильтрации. В формуле (3)  $\partial \Omega_l$  – граница, на которой задана (измерена) дополнительная информация  $W_l$ . Соответствующие краевые условия Дирихле  $p_{0_l}$  предполагаются заданными на  $\partial \Omega$  ( $\partial \Omega_l \subset \partial \Omega$ ).

Ищем решение обратной задачи как точку минимума целевого функционала:

$$\Phi[\chi] = \sum_{l=0}^L \int_{\partial \Omega_l} [B(\chi, p_{0_l}) - W_l]^2 d\Omega. \quad (4)$$

В функционале (4) оператор  $B(\chi, p_{0_l})$  переводит функцию  $\chi(\mathbf{x})$  в  $\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\partial \Omega_l}$  из прямой задачи (1),(2) при заданных краевых условиях Дирихле  $p_{0_l}$ :

$$B(\chi, p_{0_l}) = \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\partial \Omega_l}.$$

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-05-98001, 05-05-64245), а также гранта Фонда содействия отечественной науке ("Доктора наук РАН").

**Численное моделирование прямой задачи фильтрации.** При построения разностной схемы для численного решения уравнений (1),(2) в двумерном случае, использовался интегро-интерполяционный метод [4] на равномерной сетке по каждому направлению сеточной области  $\bar{\Omega}$ . Полученная система линейных уравнений решалась методом неполной факторизации [3].

Для безусловной минимизации функционала (4) использовался квазиньютоновский метод [5, 6], который обладает численной устойчивостью и глобальной сходимостью, обусловленных симметричностью и положительной определенностью гессиана модели. Используются положительно определенные и симметричные аппроксимации гессиана по секущим (BFGS).

Приведем результаты численного моделирования двумерной обратной задачи (1)–(4). Размер разностной области по пространству —  $12 \times 12$  узлов,  $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$ , параметр  $L = \{4, 16, 64\}$ . На рис. 1 представлен график восстанавливаемого параметра  $\chi(\mathbf{x})$ .

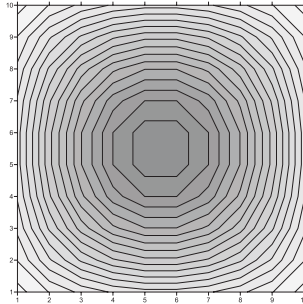


Рис. 1. Восстанавливаемый параметр  $\chi(\mathbf{x})$ .

На втором рисунке изображены восстановленные  $\chi(\mathbf{x})$ . Из представленных результатов численного моделирования (слева  $L = 4$ , середина  $L = 16$ , справа  $L = 64$ ) видно, что с ростом числа измерений улучшаются результаты восстановления коэффициента трения.

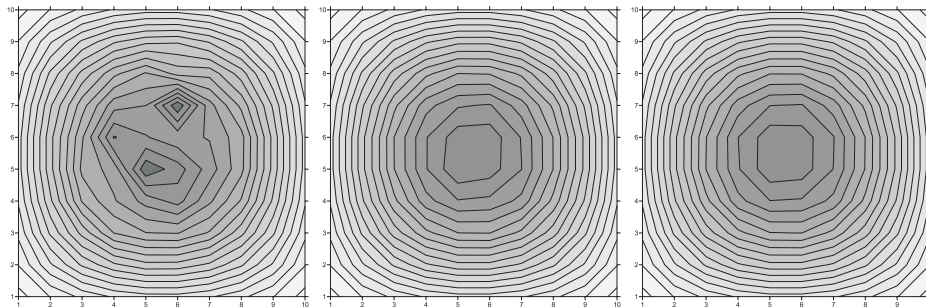


Рис. 2. Восстановленные  $\chi(\mathbf{x})$  при  $L = \{4, 16, 64\}$

## Литература

1. Доровский В. Н. Континуальная теория фильтрации // Геология и геофизика. 1989. № 7. С. 39–45.
2. Blokhin A. M., Dorovsky V. N. Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. New York: Nova Science, 1995
3. Ильин В. П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М.: Физматлит, 1995. 288 с.
4. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы математической физики. 2-е изд. М.: Научный мир, 2003. 316 с.
5. Деннис Дж, Шнабель Р. Численные методы безусловной минимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988.
6. Забияко Г. И. О численно устойчивом способе пересчета матриц преобразования в г-алгоритмах минимизации // Сб. трудов. Системное моделирование-16. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1990. С. 11–15.

# МЕТОД ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ\*

А. И. Задорин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омский филиал; *zadorin@oscsbras.ru*

Исследуется метод интерполяции для функции, соответствующей решению эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных [1] в прямоугольной области  $D$ :

$$u(x, y) = \gamma(y) \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} x) + P(x, y), \quad (1)$$

где  $|\gamma^{(j)}(y)| \leq C$ ,  $0 \leq j \leq 3$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $a_0 > 0$ ; под  $C$  подразумеваем положительные постоянные, не зависящие от параметра  $\varepsilon$  и шагов сетки,

$$\left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} P(x, y) \right| \leq C \left[ \frac{1}{\varepsilon^{i-1}} \exp(-\alpha \varepsilon^{-1} x) + 1 \right], \quad 0 \leq i, j \leq 2, \quad a_0 \geq \alpha > 0.$$

Предполагаем, что известны значения функции  $u(x, y)$  в узлах сетки,  $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$  для каждого узла прямоугольной сетки  $\Omega$ . Показано, что полиномиальная интерполяция может привести к существенным погрешностям при определенных соотношениях между шагом сетки и параметром  $\varepsilon$ .

Используем представление функции  $u(x, y)$  в виде (1) и получим интерполирующую функцию, линейную по  $y$  и экспоненциальную по  $x$ . Пусть  $\tilde{u}(x, y)$  - построенная интерполирующая функция. Доказана равномерная по малому параметру точность построенной интерполяционной формулы.

**Лемма 1.** Для всех  $(x, y) \in D$ :

$$|\tilde{u}(x, y) - u(x, y)| \leq C \max_{i,j} (h_i + \tau_j^2),$$

где  $h_i$  и  $\tau_j$  - шаги сетки по  $x$  и  $y$ .

Актуальным является и вопрос приближенного вычисления производных функции  $u(x, y)$  в произвольной точке области через значения этой функции в узлах сетки.

Используя построенную интерполяционную формулу, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{u}'_x(x, y) = & -\frac{a_0}{\varepsilon} \left[ \frac{y_{j+1} - y}{\tau_{j+1}} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \frac{y - y_j}{\tau_{j+1}} (u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}) \right] \times \\ & \times \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} x) / \left[ \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} x_{i+1}) - \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} x_i) \right], \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad y_j \leq y \leq y_{j+1}. \end{aligned}$$

**Лемма 2.** Для всех  $(x, y) \in D$ :

$$\varepsilon |\tilde{u}'_x(x, y) - u'_x(x, y)| \leq C \max_{i,j} (h_i + \tau_j^2).$$

Проведено исследование точности полиномиальной интерполяции на сетке, сгущающейся в пограничном слое. Рассмотрены случаи сетки Шишкина и ее модификаций. Доказано, что в случае таких сеток формула полиномиальной интерполяции равномерно точна. Обсуждаются результаты численных экспериментов.

## Литература

1. Miller J. J. H., O’Riordan E., Shishkin G. I. Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems. Singapore: World Scientific, 1996.

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-01-00729).

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНЫХ И ДЕТОНАЦИОННЫХ ВОЛН В ГАЗАХ\*

М. С. Иванов<sup>1</sup>, А. Н. Кудрявцев<sup>2</sup>, А. В. Троцюк<sup>3</sup>, Д. В. Хотяновский<sup>4</sup>

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск;*

*<sup>1</sup> ivanov@ivanov.ru, <sup>2</sup> alex@itam.nsc.ru, <sup>3</sup> trotsyuk@itam.nsc.ru, <sup>4</sup> dima@itam.nsc.ru*

В работе представлены результаты численных исследований ударно-волновых конфигураций, возникающих при взаимодействии ударных и детонационных волн в сверхзвуковых течениях газа. Основное внимание уделено изучению гистерезиса при переходе между регулярным и нерегулярным (маховским) отражениями ударных волн. Показано, что неединственность стационарного решения и гистерезис при смене ударно-волновых конфигураций являются достаточно типичными явлениями при взаимодействии разрывов в решениях гиперболических систем уравнений, описывающих различные физические системы.

Несмотря на то, что изучение взаимодействия ударных волн в газах было начато еще в позапрошлом веке в классических работах Э. Маха и привлекало внимание таких исследователей как Дж. фон Нейман, явление гистерезиса при переходе между различными стационарными ударно-волновыми конфигурациями было открыто лишь недавно. В 1979 в работе Х.Хорнунга и соавторов [1] впервые было выдвинуто предположение, что при отражении косой ударной волны от плоской поверхности или линии симметрии переход от регулярной (двухволновой) конфигурации к маховской (трехволновой) и обратный переход могут происходить при различных углах падения волны. Это предположение не получило подтверждения в проведенных затем самим Х. Хорнунгом экспериментах. Однако в 1995 г. предсказанный в [1] гистерезис был действительно обнаружен при численном моделировании отражения ударных волн [2], выполненном с помощью метода Монте-Карло [2]. Проведенные далее в ИТПМ СО РАН обширные численные исследования позволили детально изучить различные аспекты данного феномена. При проведении расчетов в основном использовались современные схемы сквозного счета, представляющие развитие знаменитой "распадной" схемы С. К. Годунова и позволяющие с высокой точностью и без каких-либо численных осцилляций находить слабые, т. е. содержащие разрывы, решения уравнений Эйлера и других гиперболических систем уравнений.

Было установлено, что неединственность решения и гистерезис наблюдаются также при несимметричном взаимодействии ударных волн, при отражении трехмерных ударных волн, возникающих вокруг тел, помещенных в сверхзвуковой поток, при переходах, вызванных изменением числа Маха набегающего потока и расстояния до плоскости отражения. Эти явления были обнаружены также при рассмотрении конфигураций из ударных и детонационных волн в смеси химически реагирующих газов и при исследовании взаимодействия косых гидравлических прыжков на мелкой воде.

Было выдвинуто предположение, что отрицательный результат первоначальных экспериментов Х. Хорнунга объясняется влиянием возмущений, присутствующих в сверхзвуковых аэродинамических трубах. Как нам удалось продемонстрировать, возмущения набегающего потока действительно способны вызвать переход от одной ударно-волновой конфигурации к другой и могут быть ответственны за ранний переход к маховскому отражению и отсутствие гистерезиса в экспериментальных установках с высоким уровнем шума. Основываясь на этих результатах, в ИТПМ СО РАН была предпринята экспериментальная проверка данных, полученных путем численного моделирования. Использование аэродинамической трубы с низким уровнем возмущений (применявшейся ранее для исследований ламинарно-турбулентного перехода в сверхзвуковом пограничном слое) позволило получить убедительное экспериментальное доказательство существования гистерезиса [3]. Многочисленные эксперименты на трех аэродинамических установках ИТПМ СО РАН свидетельствуют о полном согласии экспериментальных измерений с численными предсказаниями [4].

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-03-32131) и СО РАН (заказной интеграционный проект под руководством акад. С. К. Годунова).

Таким образом, численные исследования привели к обнаружению важного свойства, характерного как для отражения ударных волн с сверхзвуковых потоках газа, так и для взаимодействия разрывов в других физических системах, описываемых уравнениями гиперболического типа. Установление критериев, управляющих переходом между регулярной и маховской конфигурацией ударных волн может найти многочисленные практические применения, в частности при развитии авиационной техники (например, при конструировании воздухозаборников для перспективных гиперзвуковых летательных аппаратов).

### Литература

1. *Hornung H., Oertel H., Sandeman R.* Transition to Mach reflection of shock waves in steady and pseudosteady flow with and without relaxation // *J. Fluid Mech.* 1979. Vol. 90. P. 541–560.
2. *Ivanov M. S., Gimelshein S. F., Beylich A. E.* Hysteresis effect in stationary reflection of shock waves // *Phys. Fluids.* 1995. Vol. 7, No. 4. P. 685–687.
3. *Ivanov M. S., Kudryavtsev A. N., Nikiforov S. B., Khotyanovsky D. V., Pavlov A. A.* Experiments on shock wave reflection transition and hysteresis in low-noise wind tunnel // *Phys. Fluids.* 2003. Vol. 15, No. 6. P. 1807–1810.
4. *Иванов М. С., Кудрявцев А. Н., Никифоров С. Б., Хотяновский Д. В.* Переход между регулярным и маховским отражением ударных волн: новые численные и экспериментальные результаты // *Аэромеханика и газовая динамика.* 2002. № 3. С. 3–12.

## ПОСТРОЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ СВОБОДНОЙ ФОРМЫ МЕТОДОМ СЕТОК\*

**Б. И. Квасов**

*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск; [kvasov@ict.nsc.ru](mailto:kvasov@ict.nsc.ru)*

Описывается подход к построению поверхностей свободной формы. Метод основан на формулировке задачи многомерной сплайн-интерполяции как дифференциальной многоточечной краевой задачи для обобщенного бигармонического уравнения. Для численного построения формосохраняющих сплайнов используется метод сеток. После некоторой предварительной обработки результирующая система сеточных уравнений эффективно решается методом последовательной верхней релаксации или с помощью схем в дробных шагах. Рассматриваются основные вычислительные аспекты этого подхода, особенности и преимущества которого иллюстрируются на трехмерных примерах.

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06-01-00030).

## ОДНОМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПАТТЕРНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АУКСИНА В КОРНЕ РАСТЕНИЙ

В. А. Лихошвай<sup>1</sup>, Н. А. Омелянчук<sup>1</sup>, В. В. Миронова<sup>1</sup>, С. И. Фадеев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт Цитологии и генетики СО РАН, Новосибирск; likho@bionet.nsc.ru*

<sup>2</sup> *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; fadееv@math.nsc.ru*

Природный ауксин является уникальным веществом, участвующим в регуляции развития растений через контролируемое формирование паттернов распределения ауксина и дозо-зависимых механизмов его действия.

В работе предлагается математическая модель, описывающая в одномерной постановке распределение ауксина в  $N$  клетках, лежащих вдоль центральной оси корня арабидопсиса. При этом учитываются следующие процессы.

1. Ауксин может пассивно диффундировать от клетки к клетке.
2. Ауксин может перемещаться активно. Скорость активного транспорта зависит от концентрации ауксина - она высокая при низких концентрациях и низкая при высоких.
3. Для первой клетки модели используется специальное граничное условие: ауксин может выходить из первой клетки только во вторую и только за счет пассивной диффузии.
4. Рассматривается так же диссипация ауксина, которая объединяет процессы, приводящие к уменьшению концентрации ауксина в клетке, например, конъюгация, прямое окисление или пассивный транспорт в горизонтальном направлении (в клетки, которые не рассматриваются в модели).

Формально модель представлебна автономной системой уравнений относительно концентрации ауксина в клетках. Для изучения свойств решений задачи Коши в зависимости от параметров модели использовался метод Гира. Исследование множественности стационарных решений проводилось методом продолжения по параметру. Численно было установлено, что при определенных наборах параметров модель имеет значительное количество различных устойчивых стационарных распределений концентрации ауксина, что имеет физическую интерпретацию.

Предлагаемая модель воспроизводит качественное распределение ауксина в клетках центральной оси корня в норме и при уменьшении скорости активного транспорта, вызванное обработкой ингибитором НРА; восстановление качественного распределения ауксина и связанное с этим восстановление меристемы корня при регенерации корня после обрезания его кончика.

В работе выявляются различные типы распределения концентрации ауксина вдоль корня и предлагаются возможные сценарии роста корня, формирования латеральных корней, а также даются биологические интерпретации различным режимам поведения модели.

Полученные теоретические результаты допускают экспериментальную проверку.



# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

А. Ю. Лошманов

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре; *loshmanov@kmscom.ru*

Целью работы является определение полей деформаций в окрестности точек резкого изменения формы тела, а также в точках разрыва поля скоростей перемещений. Данные объекты, по существу, являются концентраторами деформаций. Описание процесса накопления деформаций представляет особый интерес. Это связано с тем, что пластические деформации в каждой частице детали и элемента конструкции несут информацию об истории ее работы, начиная с начала ее изготовления.

В работе исследование полей в окрестности их особенностей проводится аналитическими методами. Это отличается от традиционных конечно-разностных и конечно-элементных методов, требующих непрерывности функций и их производных и ограниченных сходимостью и аппроксимацией процесса расчета. Рассмотрение задач проводится в рамках модели идеального жесткопластического тела [1].

В качестве меры деформаций используется тензор конечных деформаций Альманси  $E_{ij}$ , который связан с компонентами дисторсии  $A_{ij} = x_{j,i}^0 = \partial x_j^0 / \partial x_i$  соотношением

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - x_{k,i}^0 x_{k,j}^0), \quad (1)$$

где  $x_i^0$ ,  $x_i$  – лагранжевы и эйлеровы координаты, соответственно.

Распределение деформаций в окрестности особенностей поля скоростей перемещений - линий разрыва, определяется удельной диссипацией энергии  $W$  [2-4]:

$$W = \frac{[V_\tau]}{G + V_\nu}, \quad E_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -W \\ -W & -W^2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $[V_\tau]$  – разрыв касательной составляющей скорости перемещений,  $V_\nu$  – нормальная компонента скорости движения частиц на линии разрыва,  $G$  – нормальная скорость распространения линии разрыва.

В [2-4] также показано, что в окрестности другой особенности в виде центра веера линий скольжения, изменение компонент дисторсии описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{da_{11}}{d\alpha} f - a_{11} \sin \alpha \cos \alpha + a_{21} \cos^2 \alpha &= 0, & \frac{da_{12}}{d\alpha} f - a_{12} \sin \alpha \cos \alpha + a_{22} \cos^2 \alpha &= 0, \\ \frac{da_{21}}{d\alpha} f - a_{11} \sin^2 \alpha + a_{21} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, & \frac{da_{22}}{d\alpha} f - a_{12} \sin^2 \alpha + a_{22} \sin \alpha \cos \alpha &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $f = \frac{u - a' \cos \alpha - b' \sin \alpha}{u + \partial v / \partial \alpha}$ ;  $u, v$  – проекции вектора скорости перемещения на криволинейные оси  $\alpha$  и  $\beta$ , соответственно;  $\mathbf{m} = a'(t)\mathbf{i} + b'(t)\mathbf{j}$  – скорость движения центра веера.

На основании изложенного исследуется процесс прессования полосы через матрицу с прямолинейными стенками (рис. 1). Рассматривается установившийся (стационарный) процесс, когда удаленные границы пресс-штемпеля не влияют на область пластического течения около матрицы. В этой задаче пластическая область ограничена наклонной границей матрицы и жесткими областями на входе в область неоднородного пластического течения и на выходе из нее. Граница матрицы предполагается идеально гладкой – контактные касательные напряжения на этой границе равны нулю.

Полоса (начальная толщина  $H$ ) под давлением снизу проходит со скоростью  $V_0$  сквозь жесткую гладкую суживающуюся щель (матрицу); при этом полоса испытывает пластические деформации в области, примыкающей к матрице, и толщина полосы уменьшается до значения  $h$

(рис. 2). Угол между плоскостями щели равен  $2\gamma$ . В некотором отдалении от щели части полосы движутся подобно твердому телу, со скоростями  $V_0$  и  $V_1$ . Скорости  $V_0$  и  $V_1$  связаны условием несжимаемости – равенством потоков скоростей на входе и на выходе из пластической области. Пластическая область и поле линий скольжения представлены на рис. 2. Угол раскрытия центрированных вееров равен  $\gamma$ .

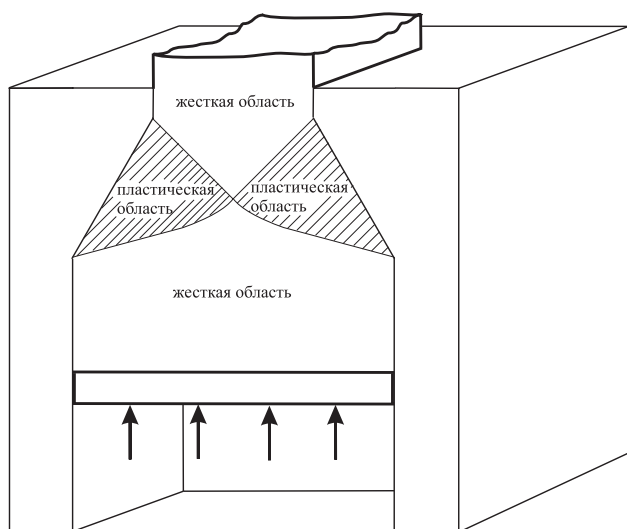


Рис. 1. Прессование полосы.

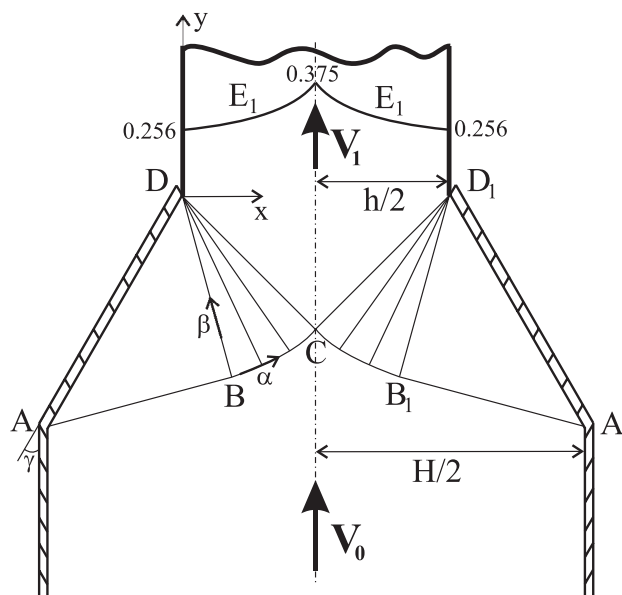


Рис. 2. Поле линий скольжения и распределение деформаций.

Особенностями поля в данном случае являются:  $ABCB_1A_1$ ,  $DC$  и  $D_1C$  – линии разрыва поля скоростей перемещений,  $D$  и  $D_1$  – центры вееров линий скольжения. Используя соотношения (1), (2) и решая систему дифференциальных уравнений (3), было получено распределение поля деформаций в полосе на выходе из матрицы с учетом их накопления (рис. 2).

Аналогичным образом были получены распределения полей деформаций в процессах прямого прессования полосы через матрицу с прямоугольными стенками ( $\gamma = 90^\circ$ ), обратного прессования и прошивки полосы [5].

Предложенный подход позволяет численно описывать поля больших деформаций с учетом их накопления при технологических процессах обработки металлов давлением: при прямом прессовании полосы через матрицу с различным углом наклона стенок, при обратном прессовании и прошивке полосы.

### Литература

1. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 529 с.
2. Хромов А. И. Локализация пластических деформаций и разрушение идеальных жесткопластических тел // Докл. АН. 1998. Т. 362, № 2. С. 202–205.
3. Хромов А. И., Буханько А. А., Степанов С. Л. Концентраторы деформаций // Докл. АН. 2006. Т. 407, № 6. С. 777–781.
4. Буханько А. А., Лошманов А. Ю. Поля деформаций в окрестности особенностей пластической области // Проблемы механики сплошных сред и смежные вопросы технологии машиностроения: Сборник докладов третьей конференции. Владивосток — Комсомольск-на-Амуре, сентябрь 2004 г. Комсомольск-на-Амуре: ИМиМ ДВО РАН, 2005. С. 233–241.
5. Лошманов А. Ю. Расчет полей деформаций в задачах обработки материалов давлением // Вестник ДВО РАН. 2006. № 4. С. 127–133.

## О ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА ЧЕРЕЗ ПОРИСТЫЕ ОБЪЕКТЫ С ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА \*

Н. А. Луценко

*Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток; nickl@inbox.ru*

В результате природных или техногенных катастроф могут возникать очаги тепловыделения в пористых средах. Единственно возможным эффективным средством предотвращения их критического разогрева и, соответственно, повторных катастроф может оказаться газовое охлаждение таких источников тепла. Типичным примером такого пористого тепловыделяющего элемента, охлаждающегося естественной конвекцией воздуха, является аварийный энергоблок Чернобыльской АЭС [1]. Так как эмпирическое моделирование охлаждения очагов энерговыделения крайне затруднительно с точки зрения практической реализации и очень дорогостояще, то оптимальным для прогнозирования последствий катастроф, связанных с тепловыделением в пористых средах, является математическое моделирование с использованием методов механики гетерогенных (многокомпонентных) сред.

В настоящей работе исследуется течение газа через твердый однородный неподвижный пористый элемент, в котором происходит тепловыделение. Пористый элемент ограничен непроницаемыми нетеплопроводными боковыми стенками, сверху и снизу открыт. В результате протекания «химической» реакции в твердой фазе происходит выделение тепла. В нижнюю часть элемента под давлением подается холодный газ, который движется снизу вверх через пористую среду, нагреваясь в результате теплообмена, и вытекает в свободное пространство с заданным давлением. Модель охлаждения строится в предположении двух взаимодействующих взаимопроникающих континуумов [2] и включает в себя уравнения неразрывности, движения, энергии и состояния для каждой фазы. Так как данная модель включает в себя сложную нелинейную смешанную гиперболически-параболическую систему уравнений, то её анализ и изучение необходимо проводить посредством численных методов.

Отличительной особенностью модели является открытость саморазогревающейся пористой среды в атмосферу снизу и сверху, ввиду этого расход и скорость фильтрации газа на входе в элемент неизвестны и должны определяться при решении задачи. Таким образом, граничные условия существенно отличаются от условий в классических задачах механики многокомпонентных сред, что затрудняет применение широко известных конечно-разностных схем. Поэтому для моделирования нестационарных одномерных течений газа через пористые элементы с выделением тепла предложен эффективный оригинальный численный метод [3, 4], основанный на комбинации явных и неявных конечно-разностных схем. Уравнения энергии и сохранения импульса преобразовываются в явные конечно-разностные уравнения, из которых определяются температура газа, температура твердой среды и скорость фильтрации газа. Уравнение неразрывности преобразовывается в неявное конечно-разностное уравнение, из которого с учетом уравнения состояния совершенного газа методом прогонки определяется давление газа. Плотность газа тривиально определяется из уравнения состояния совершенного газа. Метод имеет второй порядок точности по пространству. Для уменьшения дисперсионной ошибки, которая типична для схем четного порядка точности, в конечно-разностные уравнения вводятся демпфирующие члены четвертого порядка [5].

Предложенный метод применен при исследовании различных нестационарных одномерных режимов охлаждения пористых тепловыделяющих элементов [3, 4, 6]. Показано, что в зависимости от начально-краевых условий и параметров задачи возможен как переход к устойчивому стационарному режиму охлаждения, так и неограниченный разогрев тепловыделяющего элемента, ведущий к плавлению твердой фазы. Обнаружено чрезвычайно опасное явление неограниченного разогрева пористого тепловыделяющего элемента при докритических краевых условиях

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации № МК-6493.2006.1, гранта РФФИ-ДВО РАН № 06-01-96020-р\_восток\_а, проекта ДВО РАН № 06-III-B-03-079.

[4], приводящее к разрушению пористого объекта при условиях, удовлетворяющих критерию стационарности.

На основе рассмотренного выше метода для одномерных задач разработан численный метод для исследования плоских (двумерных) нестационарных течений газа через пористые тепловыделяющие элементы [7]. Также уравнение неразрывности преобразовывается в неявное конечно-разностное уравнение, которое решается методом прогонки, а остальные - преобразовываются в явные конечно-разностные уравнения. С помощью этого метода проведено исследование охлаждения пористых элементов плавно сужающейся и ступенчато сужающейся формы: изучено влияние формы тепловыделяющего элемента на процесс его охлаждения, определены наиболее разогреваемые зоны у рассмотренных пористых элементов.

Достоинством предложенного численного метода является отсутствие необходимости решения сложных систем алгебраических уравнений, благодаря чему возможно легкое и эффективное распараллеливание алгоритма.

### Литература

1. *Маслов В. П., Мясников В. П., Данилов В. Г.* Математическое моделирование аварийного блока Чернобыльской АЭС. М.: Наука, 1987. 144 с.
2. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
3. *Луценко Н. А.* Нестационарные режимы охлаждения пористого тепловыделяющего элемента // Математическое моделирование. 2005. Т. 17. № 3. С. 120–128.
4. *Левин В. А., Луценко Н. А.* Возникновение неустойчивых режимов охлаждения пористого тепловыделяющего элемента при докритических краевых условиях // Горение и плазмохимия. 2005. Т. 3, № 2. С. 81-92.
5. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х т. Т. 1. Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 384 с.
6. *Левин В. А., Луценко Н. А.* Течение газа через пористую тепловыделяющую среду при учете температурной зависимости вязкости газа // Инженерно-физический журнал. 2006. Т. 79, № 1. С. 35-40.
7. *Левин В. А., Луценко Н. А.* Численное моделирование двумерных нестационарных течений газа через пористые тепловыделяющие элементы // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, № 6. С. 44-58.

# О ТОЧНЫХ ОЦЕНКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

**В. Л. Мирошниченко**

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; miroshn@math.nsc.ru  
Новосибирский государственный университет, Новосибирск*

Пусть кубический сплайн  $S(x) \in C^2[a, b]$  интерполирует значения функции  $f_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$  на сетке  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  и удовлетворяет (для определённости) краевым условиям  $S'(x_k) = f'(x_k)$ ,  $k = 0, N$ . Если  $f \in W_\infty^4$ , то известна [1] оценка

$$\|S - f\|_C \leq K_0 H^4 \|f^{(4)}\|_\infty, \quad K_0 = 5/384, \quad (1)$$

где  $H = \max_i h_i$ ,  $h_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 0, \dots, N - 1$ . Нормы в (1) берутся на отрезке  $[a, b]$ ; константа  $K_0$  не может быть улучшена одновременно для всех  $N$  (оценка (1) достигается на равномерной сетке при  $N \rightarrow \infty$ ). Более того, оценка (1) не улучшаема также при более высокой гладкости интерполируемой функции. Вместе с тем для некоторых практически интересных классов функций можно получить более точные оценки.

Пусть  $W_\infty^{r+} = \{f \in W_\infty^r \mid f^{(r)}(x) \geq 0, x \in [a, b]\}$ . Имеет место оценка

$$\|S - f\|_C \leq \tilde{K}_0 H^4 \|f^{(4)}\|_\infty, \quad f \in W_\infty^{4+}, \quad \tilde{K}_0 = 3/384. \quad (2)$$

Подобная ситуация (уменьшение констант) наблюдается при сравнении оценок в классах  $W_\infty^{r+}$  и  $W_\infty^r$  также при  $r < 4$ , в том числе, для оценок погрешности приближения производных.

Главный недостаток оценок (1),(2) заключается в том, что в них входят только глобальная характеристика сетки и нормы на всём отрезке интерполяции, т.е. оценки не характеризуют локальное поведение сплайна. Такие оценки бесполезны, например, при построении неравномерных сеток, на которых наиболее сильно проявляются прекрасные аппроксимационные свойства сплайнов, в силу присущих им локальным свойствам [1]. Поэтому, наряду с глобальными оценками типа (1),(2), большой интерес представляет получение локализованных оценок. Следующий результат является примером такого сорта оценок.

$$\|S - f\|_{i,C} \leq K_0 h_i^4 \|f^{(4)}\|_{i,\infty} + \frac{1}{48} h_i^2 H^2 \|f^{(4)}\|_\infty, \quad f \in W_\infty^4, \quad i = 0, \dots, N - 1.$$

Индексом  $i$  здесь обозначены нормы на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ .

В докладе приводятся разнообразные локализованные оценки приближения кубическими сплайнами и оценки в классах  $W_\infty^{r+}$ ,  $r = 1, 2, 3, 4$ . Обсуждаются алгоритмы интерполяции кубическими сплайнами с заданной точностью.

## Литература

1. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
2. Miroshnichenko V. L. Exact error bounds for the periodic cubic and parabolic spline interpolation on the uniform mesh // *Mathematica Balkanica*. 1988. V. 3, № 2-3. P. 210–221.

## РАСЧЁТ СКОРОСТНОГО ПОЛЯ В ОЧАГОВОЙ ОБЛАСТИ КРОНОЦКОГО ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ В 1997 Г.

Н. Б. Пивоварова<sup>1</sup>, Л. Б. Славина<sup>2</sup>

*Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН, Москва;*

<sup>1</sup> *pivnb@yandex.ru*, <sup>2</sup> *slavina@ifz.ru*

Рассматривается возможность построения трехмерной скоростной модели (поля скорости распространения продольной или поперечной волны в земной коре и мантии) на основе сейсмологических данных. Излагается методика исследования, отличная от общепринятой методики томографии. Рассматриваются вопросы точности восстановления поля скорости. Разработанные алгоритмы и программное обеспечение использованы для расчёта скоростного поля в очаговой зоне Кроноцкого землетрясения (Камчатка), происшедшего в 1997 г. Анализ полученных результатов позволяет проследить динамику изменения скоростного поля в пространстве и времени, отражающую развитие сейсмического и вулканического процессов.

В основу разработанной авторами методики восстановления полей скоростей сейсмических волн положен принцип обратимости волновых полей. Использование этого принципа позволяет рассматривать множество времен пробега сейсмической волны от слабых землетрясений до некоторой сейсмической станции, как времена пробега обратимой волны от этой сейсмической станции до различных очагов в исследуемой области. Проблема вычисления скорости распространения сейсмических волн в окрестности некоторой точки  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  (очаг землетрясения) сводится к задаче восстановления фронта обратимой волны и скорости его распространения в некоторой области  $G$  около этой точки.

В случае аппроксимации фронта волны в области  $G$  плоским фронтом задача сводится к минимизации функционала:

$$M^\beta[A_j, B_j, C_j] = \sum_{i=1}^n [A_j(x_i - x_0) + B_j(y_i - y_0) + C_j(z_i - z_0) + (t_{0j} - t_{ij})]^2 + n\beta(V - V_{cp})^2. \quad (1)$$

где  $t_{ij}$  — времена пробега сейсмической волны от точек  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  до станции наблюдения  $S_j$ ;  $n$  — число очагов в области  $G$ , участвующих в построении фронта;  $V_{cp}$  — среднее значение скорости в районе;  $\beta$  — параметр регуляризации.

Средняя скорость перемещения фронта обратимой волны  $V_j$  от станции  $S_j$  в области  $G$  связана с коэффициентами  $A_j, B_j, C_j$  соотношением

$$V_j^2 = \frac{1}{A_j^2 + B_j^2 + C_j^2}.$$

Решение задачи о построения скоростной модели в некотором районе разбивается на два этапа, на первом, предварительном, этапе оценивается среднее значение скорости  $V_{cp}$  во всём рассматриваемом районе. С этой целью функционал (1) минимизируется с параметром регуляризации  $\beta = 0$ . В качестве  $V_{cp}$  берётся результат усреднения полученных значений скоростей по всем точкам района. На втором этапе решения задачи минимизации функционала ведётся с параметром регуляризации  $\beta > 0$  и найденной на первом этапе величиной  $V_{cp}$ .

Итогом решения задачи минимизации функционала (1) является величина  $V_j$  — средняя скорость перемещения фронта обратимой волны от станции  $S_j$  в области  $G$ . После решения серии аналогичных задач по данным для других станций, вычисляются скорости перемещения фронта от всех станций в области  $G$ . Среднее значение полученных скоростей принимается за значение скорости в рассматриваемой области и относится к центру области — точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ .

Изложенная методика является дифференциальной; в алгоритме используются только разности экспериментальных времен от двух очагов из области  $G$ . Размеры области  $G$  выбираются достаточно малыми по сравнению с расстоянием до станции, чтобы можно было считать, что

волны из точек  $M_0$  и  $M_i$  вне области  $G$  проходят приблизительно одинаковый путь. Тем самым исключается влияние особенностей строения коры под станцией, наличие систематической ошибки во временах и координатах очагов.

Следует подчеркнуть, что полученное значение скорости является усреднением истинного распределения по объему области  $G$  и отражает его закономерности в случае мало-градиентной скоростной среды. При наличии в среде резких градиентных границ скорости алгоритм сглаживает резкий градиент на расстояниях равных линейному размеру области  $G$ .

Подробное описание алгоритма для решения задачи восстановления скоростного поля в области очагов землетрясений имеется в работах [1],[2]. Этот алгоритм использовался для оценки скоростного поля продольных волн в различных сейсмоактивных районах. В [3] он применяется для изучения скоростного строения активной вулканической зоны (Карымский вулканический центр на Камчатке).

### Литература

1. Пивоварова Н. Б., Славина Л. Б. Методика расчета и исследование устойчивости трехмерных полей скоростей продольных волн (на примере Камчатки) // Физика Земли. 1981, № 12. С. 19–27.
2. Пивоварова Н. Б., Пивоваров В. Г. Методические аспекты алгоритма восстановления трехмерной скоростной среды // Электронный журнал «Вестник отделения наук о Земле». 2003. № 1(21).
3. Славина Л. Б., Пивоварова Н. Б., Левина В. И. Использование сейсмологических данных для изучения скоростного строения активной вулканической зоны // Вулканология и сейсмология. 2005. № 2. С. 45–56.

# ПОСТРОЕНИЕ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ АРГУМЕНТАМИ

В. В. Поддубный<sup>1</sup>, Е. А. Червонная<sup>2</sup>

*Томский государственный университет, Томск;*

<sup>1</sup> *pvv@inet.tsu.ru*, <sup>2</sup> *sea82@sidmail.com*

Рассмотрим стационарную систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений  $n$ -ого порядка с  $n$  запаздываниями, правая часть которой явно не зависит от времени  $t$ :

$$\dot{y}(t) = f(y(t), y(t - \tau)), \quad (1)$$

где  $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T$  —  $n$ -вектор-функция состояния системы в момент времени  $t$ ,  $y(t - \tau) = (y_1(t - \tau_1), y_2(t - \tau_2), \dots, y_n(t - \tau_n))^T$  —  $n$ -вектор-функция состояния системы в момент времени  $t - \tau_i$ ,  $\tau_i \geq 0$ , — запаздывание во времени, свое для каждой компоненты  $y_i(t - \tau_i)$  вектора  $y(t - \tau)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Начальные условия для векторного уравнения (1) с запаздываниями зададим следующим образом:

$$y(t) = \varphi(t), \quad -\max\{\tau_i\} \leq t < t_0; \quad y(t_0) = y_0, \quad (2)$$

где не обязательно  $\varphi(t_0 - 0) = y_0$ . Как известно [1], векторное уравнение (1) с начальными условиями (2) имеет решение, если  $n$ -вектор-функции  $f(y(t), z(t))$  и  $\varphi(t)$  — непрерывны по своим аргументам, и это решение единственно, если функция  $f(y(t), z(t))$  удовлетворяет условию Липшица по  $y(t)$  (для этого достаточно ограниченности матриц  $|\frac{\partial f}{\partial y}|$ ,  $|\frac{\partial f(y, z)}{\partial z}|$  и вектора  $|\frac{d\varphi(t)}{dt}|$  в окрестности начальных значений).

Точка покоя (состояние равновесия)  $y^*$  системы (1) определяется условием  $f(y^*, y^*) = 0$ .

Поставим задачу определить границы области устойчивости точки покоя системы (1) в пространстве запаздываний.

Устойчивость точки покоя исследуют [1] по линейному приближению системы (1), получаемому в результате линеаризации ее правой части в окрестности этой точки:

$$\dot{y}(t) = A \cdot (y(t) - y^*) + B \cdot (y(t - \tau) - y^*), \quad (3)$$

где матрицы коэффициентов  $A$  и  $B$  — матрицы частных производных вида  $A = \frac{\partial f(y, z)}{\partial y}|_{y=y^*, z=y^*}$ ,  $B = \frac{\partial f(y, z)}{\partial z}|_{y=y^*, z=y^*}$ . Поскольку показано (см., например, [1]), что исследование на устойчивость точки покоя нелинейной стационарной системы (1) с запаздыванием эквивалентно исследованию на устойчивость точки покоя линеаризованной системы (3), то, найдя область устойчивости системы (3), мы найдем и область устойчивости нелинейной системы (1).

Для системы уравнений (1), от которой можно перейти к линейной системе первого приближения (3), доказаны теоремы об устойчивости, аналогичные теоремам Ляпунова [1]. Из них следует, что необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости точки покоя системы (1) является отрицательность действительных частей всех корней характеристического квазиполинома для системы первого приближения (3):

$$\det(A + B \cdot \text{diag}(e^{-k\tau_1}, e^{-k\tau_2}, \dots, e^{-k\tau_n}) - kI) = 0, \quad (4)$$

где  $I$  — единичная диагональная матрица размерности  $n \times n$ ,  $\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  — диагональная матрица той же размерности с диагональю  $(a_1, \dots, a_n)$ . Очевидно, на границе области устойчивости все корни уравнения (4) должны быть чисто мнимыми:  $k = i\omega$ .

К сожалению, найти аналитически все мнимые корни уравнения (3), а их бесчисленное множество, не представляется возможным. Однако можно построить алгоритм численного отыскания наборов  $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \omega)$ , приближенно удовлетворяющих уравнению (4) при  $k = i\omega$ .



Зададим область возможных значений запаздываний  $\tau$  и параметра  $\omega$  в виде прямоугольного гиперпараллелепипеда в  $n + 1$ -мерном пространстве  $R^{n+1}$ , выбрав некоторые максимальные значения всех запаздываний  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  и параметра  $\omega$ :  $0 \leq \tau_1 \leq \tau_{1\max}, 0 \leq \tau_2 \leq \tau_{2\max}, \dots, 0 \leq \tau_n \leq \tau_{n\max}$  и  $0 \leq \omega \leq 1$ . Перебирая в этой области значения  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \omega$  с некоторым малым шагом  $\Delta\tau, \Delta\omega$  (например, 0.005), найдем те наборы  $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \omega)$ , при которых с заданной абсолютной точностью  $\varepsilon$  (не хуже, скажем, 0.001) выполняется равенство (4). Таким образом можно получить множество гиперповерхностей бифуркации в пространстве переменных  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ , на которых характеристический квазиполином практически равен нулю. Например, в случае  $n = 2$  оси координат пространства  $(\tau_1, \tau_2)$ , а также те из полученных линий бифуркации, которые лежат ближе всего к началу координат, образуют замкнутую область, представляющую собой область устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием (3), а значит, и системы (1). В качестве примера возьмем  $A = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.12 \\ 0.18 & -0.25 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -0.5016 & 0.3846 \\ 0.301 & -0.8013 \end{pmatrix}$ ,  $y^* = (1 \ 1)^T$ ,  $\varphi(t) = y^*$ ,  $t_0 = 0$ ,  $y_0 = (2 \ 1.5)^T$ . Полученные с помощью описанного алгоритма точки, лежащие на линиях бифуркации решения, представлены на рис. 1. Область устойчивости — заштрихованная область левее и ниже всех линий бифуркации.

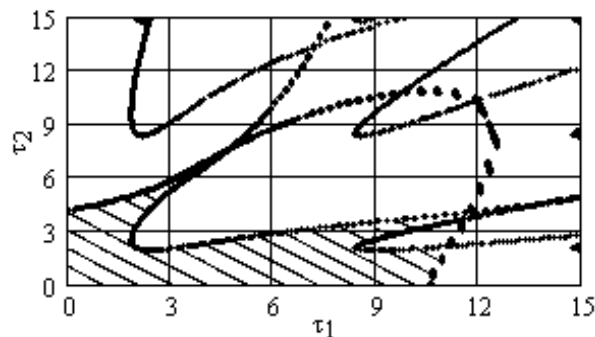


Рис. 1. Область устойчивости (заштрихована) точки покоя систем (1) и (3).

Как видно из рис.1, область устойчивости имеет очень интересные границы. Рассмотрим, допустим,  $\tau_1 = 3$ . Согласно рис. 1, при  $\tau_2 = 1.5$  получим устойчивое решение системы (3), при  $\tau_2 = 3$  — неустойчивое. На рис. 2 представлены интегральные кривые решения системы (1) при  $n = 2$  соответственно для  $\tau_2 = 1.5$  и  $\tau_2 = 3$  при  $\tau_1 = 3$ . Решения найдены методом шагов [1] по схеме Рунге-Кутты 4-го порядка точности.

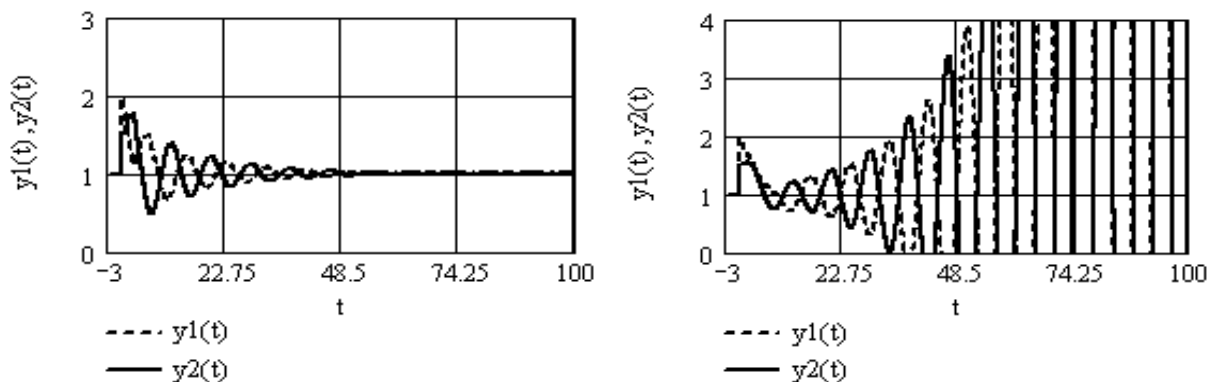


Рис. 2. Интегральные кривые решения системы (3) при  $\tau_1 = 3$  для  $\tau_2 = 1.5$  (слева) и  $\tau_2 = 3$  (справа).

### Литература

1. Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГАРАНТИРОВАННЫХ ГРАНИЦ РЕШЕНИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА СВОЙСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Н. Рогалев

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск; rogalov@icm.krasn.ru*

Работы многих исследователей в области дифференциальных уравнений продемонстрировали сложность топологии фазового пространства, возможность заполнения траекториями всего энергетически доступного пространства. Примерами этого являются динамическая стохастичность в гамильтоновых системах; появление области параметров, для которых существуют движения (решения системы) ограниченные по времени и обладающие притягивающими свойствами всех соседних решений; свойство практической устойчивости движений на конечном интервале времени при постоянно действующих возмущениях и другие явления.

При этом представляет интерес не только факт устойчивости или неустойчивости, но и количественные оценки поведения этих систем, а также приемлемость этих оценок в реальных условиях. Особое внимание стало уделяться достоверности полученных результатов, поскольку реализация на компьютере сама вносит различные возмущения за счет перехода к дискретным аппроксимациям, за счет появления ошибок округления при выполнении машинных арифметических операций. Влияние шума (возмущений) на движение динамических систем также может быть причиной многих сложных эффектов. Новые математические результаты появляются в последние годы на основе численного моделирования динамических систем.

Класс методов [1]–[8] строит гарантированные границы множеств решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями, для которых известны их оценки. Он основывается на преобразовании символьных формул приближенных решений. Термин гарантированный метод, а также гарантированная граница решения, означает, что в полученные границы включаются все точные решения ОДУ, независимо от выбора значений параметров дифференциального уравнения и вне зависимости от ошибок выполнения арифметических операций. Символьная формула (аналитическое выражение) — запись имен констант, переменных и действий, которые нужно проделать в определенном порядке над значениями этих переменных. При записи символьных формул, аппроксимирующих оператор сдвига вдоль траектории, допускается включение в них числовых констант, с отложенным выполнением действий с ними. Далее определяются области всех возможных значений, которые могут принимать эти формулы, вычисляются границы всех глобальных ошибок для этих приближенных решений и конструируются на их основе гарантированные границы областей всех точных решений.

В общем виде рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), описывающая состояние реального объекта (системы) и его эволюцию во времени

$$\frac{dz}{dt} = g(t, z(t), u(t)),$$

где  $z = (z_i(t))$  — вектор состояния объекта (системы),  $u(t) = (u_j)$  — воздействия, определяемые нашим выбором, а также факторы, на выбор которых мы повлиять не можем — возмущения системы. Подобная постановка задачи охватывает как математические модели различных систем, находящиеся под влиянием возмущающих факторов, так и системы управления по определенным критериям в условиях неопределенности.

В качестве символьной формулы  $\mathcal{F}$  метода сдвига вдоль траектории можно выбрать формулы, числовые оригиналы которых соответствуют приближенным методам решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (например, линейным одношаговым и многошаговым методам, коллокационным методам). Принципиальное отличие заключается в способе реализации этих методов, то есть получении числовых оригиналов символьных формул  $\mathcal{F}$ . В процессе конструирования символьной формулы целесообразно использовать экономичные символьные формулы, то есть последовательности имен переменных и действий, позволяющие хранить формулы в памяти машины и обрабатывать их за минимальное время и с разумными

затратами памяти. Кроме того, методы должны обеспечивать близость множества значений, полученных по символьной формуле и множества значений точных решений. Указанные свойства означают, что само построение формул и их исполнение существенно изменяются относительно численных алгоритмов, изучаемых в разделе численного решения систем ОДУ.

Многие свойства численных методов решения ОДУ, такие как устойчивость, асимптотическая устойчивость, либо переформулируются, либо включаются в другие характеристики гарантированных методов.

Для оценки границ глобальной ошибки применяются два подхода. В первом из них, глобальная ошибка переносится с одного временного шага на другой шаг, подчиняясь системе возмущений исходной системы дифференциальных уравнений. Второй способ состоит в параллельном подсчете оценки локальной ошибки и независимом от нахождения символьной решения суммировании от шага к шагу этой оценки локальной ошибки.

При этом применяются построенные символьные формулы приближенных решений, позволяющие вычислить значения решений (а также областей решений) в любой точке  $[t^0; t]$ .

Приводятся различные примеры применения гарантированных символьных методов [1]–[8]. Так как мы не знаем какие из значений параметров могут привести к появлению стохастичности в движении, потери его устойчивости, то следует оценивать все множество решений. Для оценки движений динамических систем имеет особое значение получение достоверной информации об этих движениях, а также возможность квалифицировать насколько надежны данные, найденные при реализации методов расчета на компьютере.

### Литература

1. Новиков В. А., Рогалев А. Н. Построение сходящихся верхних и нижних оценок решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1993. Т. 33, № 2. С. 219–231.
2. Рогалев А. Н. Задачи практической (интервальной) устойчивости с заданной областью предельных отклонений // Труды пятой международной конференции памяти академика А. П. Ершова. Новосибирск: ИСИ СО РАН, 2003. С. 90–100.
3. Рогалев А. Н. Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8, № 5. С. 102–116.
4. Рогалев А. Н. Методы определения верхних и нижних оценок решений дифференциальных уравнений и их применение // Труды Международной конференции по вычислительной Математике МКВМ-2004. / Под редакцией Михайлова Г. А., Ильина В. П., Лаевского Ю. Е. Новосибирск: ИВМ и МГ СО РАН. 2004. Ч. 2. С. 614–620.
5. Рогалев А. Н. Гарантированные границы решений дифференциальных уравнений // Тихонов и современная математика: Вычислительная математика и информатика: Международная конференция, Москва МГУ им. М. В. Ломоносова, Российская Академия Наук. / Факультет ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова. Москва: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова. 2006. С. 100–103.
6. Рогалев А. Н. Символьные вычисления в гарантированных методах, выполненные на нескольких процессорах // Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2006. Т. 4, вып. 1. С. 56–62.
7. Рогалев А. Н. Некоторые задачи оценки параметров хаотических движений // Труды Международной конференции "Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании", ИВТ СО РАН Новосибирск, НГУ, НГТУ, ПГУ (Казахстан), КазНУ им. аль-Фараби (Казахстан). Павлодар: ТОО НПФ "Эко", 2006. Т. 2. С. 159–165.
8. Рогалев А. Н. Вычисление безопасных и гарантированных границ решений дифференциальных уравнений // Труды Всероссийской конференции по Вычислительной и математике (КВМ-2007), ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, Новосибирск. 2007. (электронная публикация)

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПОДДЕРЖКА ПРОЕКТИРОВАНИЯ РАБОЧИХ КОЛЕС ГИДРОТУРБИН\*

**В. А. Скорospelов, П. А. Турук**

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; vskrsp@math.nsc.ru*

Сотрудничество Института математики им. С.Л.Соболева и Ленинградского металлического завода по проблеме автоматизации проектирования проточной части гидротурбин продолжается более тридцати пяти лет. Рабочее колесо - основной ее элемент, определяющий энергетические характеристики гидротурбины. В основе современных методов проектирования рабочих колес лежит численное моделирование течений в проточном тракте гидротурбины. Большой практический интерес представляют методы поиска в некотором смысле оптимальных решений. В рамках этой проблемы на средства геометрической поддержки возлагаются следующие основные задачи:

- геометрическое моделирование элементов проточной части;
- генерация многопараметрического семейства поверхностей лопасти рабочего колеса;
- расчет сеток в области проточного тракта для численного моделирования течений.

В докладе представлены методики решения указанных задач. Геометрическое моделирование элементов проточного тракта осуществляется в виде параметрических сплайнов. Предлагается способ определения многопараметрического семейства поверхностей лопасти, основанный на вариации поверхности исходной лопасти, принятой в качестве прототипа. Для расчета сеток в области течения использован метод Кунса.

---

\*Работа выполнена при поддержке комплексного интеграционного проекта СО РАН (№ 2006–2.12).

## ПАКЕТ ПРОГРАММ STEP+ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ И СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. И. Фадеев<sup>1</sup>, И. А. Гайнова<sup>2</sup>, В. К. Королев<sup>3</sup>, А. Е. Медведев<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; [fadееv@math.nsc.ru](mailto:fadееv@math.nsc.ru)

<sup>2</sup> Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; [gajnova@math.nsc.ru](mailto:gajnova@math.nsc.ru)

<sup>3</sup> Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; [koroлев@math.nsc.ru](mailto:koroлев@math.nsc.ru)

<sup>4</sup> Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск;  
[medvedev@itam.nsc.ru](mailto:medvedev@itam.nsc.ru)

Доклад посвящен презентации пакета программ *STEP+*, предназначенного для численного исследования автономных систем и систем нелинейных уравнений в зависимости от параметров изучаемых моделей. Предлагаемая разработка является версией под *WINDOWS* пакета программ *STEP* [1]. Ядро пакета *STEP+* универсально и дает пользователю возможность проводить численное исследование для систем из произвольного числа уравнений. В пакете *STEP+*, как и в пакете *STEP*, используются оригинальные вычислительные алгоритмы, разработанные в Институте математики СО РАН: вариант метода продолжения решения по параметру, метод Годунова – Булгакова определения устойчивости матрицы ( $\kappa$ -критерий). Для решения задачи Коши применяется многошаговый метод Гира переменного порядка точности [2]. Указанные алгоритмы позволяют изучать в рамках модели такие нелинейные эффекты как гистерезис, сильная параметрическая чувствительность, возникновение автоколебаний и т.д. Подробное описание методов содержится в учебном пособии [1]. Пакет программ *STEP+* позволяет проводить комплексное изучение автономных систем, которое включает в себя следующие возможности.

1) Интегрирование автономной системы, как способ задания стартового решения в методе продолжения по параметру при изучении стационарных решений автономных систем. В случае выхода на предельные циклы имеется возможность графического представления их проекций на плоскость или трехмерное фазовое пространство.

2) Построение диаграммы стационарных решений методом продолжения по параметру с определением областей изменения параметра с разным числом решений. Построение диаграммы сопровождается определением устойчивости стационарных решений в зависимости от параметра.

3) Анализ диаграмм стационарных решений, позволяющий выявить бифуркационные значения параметра системы, при неустойчивое стационарное решение переходит в автоколебания, а также области изменения параметра, характеризующиеся самовозбуждением автоколебаний.

Пакет состоит из четырех основных разделов: Создание модели, Задача Коши, Стационарные решения и Нелинейные системы. Для осуществления запуска расчетных программ и задания расчетных параметров задачи с помощью пользовательского интерфейса была создана программа для генерации *DLL*-библиотеки. Благодаря специальной записи правых частей системы дифференциальных уравнений, генератор также находит аналитически матрицу Якоби системы аналитическую матрицу частных производных по параметрам.

Пакет *STEP+* реализован в среде визуального программирования *VisualBasic.NET* и предназначен для использования в операционной системе *WINDOWS 2000 – XP*. В представленную версию включен банк моделей, куда входят математические модели, разработанные в Институте цитологии и генетики СО РАН, а также модели из других приложений, взятые из литературы.

### Литература

1. Фадеев С. И., Покровская С. А., Березин А. Ю., Гайнова И. А. Пакет программ *STEP* для численного исследования систем нелинейных уравнений и автономных систем общего вида. Описание работы пакета *STEP* на примерах задач из учебного курса "Инженерная химия каталитических процессов". Новосибирск: Изд-во НГУ, 1998.
2. Gear G. W. The automatic integration of ordinary differential equations // Comm. ACM. 1971. Vol. 14, № 3. P. 176–179.

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ РЕЦЕПЦИИ ГРАДИЕНТА КОНЦЕНТРАЦИИ МОРФОГЕНА HEDGEHOG

С. И. Фадеев<sup>1</sup>, В. В. Когай<sup>1</sup>, К. В. Гунбин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; [fadееv@math.nsc.ru](mailto:fadееv@math.nsc.ru)

<sup>2</sup> Институт цитологии и генетики, Новосибирск

В данной работе на основании анализа молекулярного механизма развития антерио-постериорной границы компартментов крылового имагинального диска *Drosophila melanogaster* построена модель рецепции градиента концентрации морфогена Hedgehog. Модель содержит химико-кинетическое описание экспрессии гена *patched* и процессов опосредующих ее регуляцию. Формально проблема сводится к совместному решению краевой задачи вида

$$0 \leq r \leq R, \quad D_H \frac{d^2 u}{dr^2} - k_4 y_2 u = 0, \quad u(0) = 1, \quad u(R) = 0, \quad (1)$$

и системы нелинейных уравнений

$$f(r, y, u; p) = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что в области изменения параметров модели, представляющей интерес, функция  $u(r)$ , как и компоненты вектор-функции  $y(r)$ , положительны. С помощью предложенного численного метода найдены стационарные решения, близкие к экспериментально наблюдаемым.

Приведем краткое описание метода, позволяющего эффективно находить решение задачи (1), (2).

**Первый шаг** метода состоит в следующем. Пусть автономная система

$$\frac{dy}{dt} = f(y; u, p) \quad (3)$$

представляет уравнения химической кинетики, где  $u, 0 \leq u \leq 1$ , играет роль одного из параметров системы. Интегрирование (5) при  $u = 0$  на достаточно большом интервале по  $t$  позволяет найти приближенно стационарное решение, которое затем используется в качестве начального приближения в методе Ньютона для уточнения решения системы (2) при  $u = 0$  для определения других стационарных решений (3) в зависимости от  $u$  методом продолжения по параметру.

**На втором шаге** методом продолжения по параметру  $u$  на отрезке  $[0, 1]$  определяется вектор-функция  $y(u; p)$ , являющаяся решением системы (2). В частности, становится известной зависимость компоненты  $y_2$  от  $u$ .

**На третьем шаге** вводится сетка по  $u$  и решается задача интерполяции функции  $y_2(u; p)$  интерполяционным кубическим сплайном  $g(u)$  класса  $C^2$ . Это позволяет сформулировать краевую задачу для определения функции  $u(r)$ :

$$0 \leq r \leq R, \quad D_H \frac{d^2 u}{dr^2} - k_4 g(u) u = 0, \quad u(0) = 1, \quad u(R) = 0. \quad (4)$$

**На четвертом шаге** ищется решение системы нелинейных уравнений, представляющей дискретный аналог краевой задачи (4),

$$D_H \frac{u^{j-1} - 2u^j + u^{j+1}}{h^2} - k_4 g(u^j) u^j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad u^0 = 1, \quad u^n = 0, \quad (5)$$

который следует из (3). Отметим, что очередное приближение сеточных значений  $u(r)$  находится из системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов. В силу положительности всех параметров модели матрица системы обладает диагональным преобладанием, и, следовательно, для решения системы может быть использован эффективный метод прогонки.

Завершающий **пятый шаг** состоит в определении сеточных значений других компонент вектора  $y^j = y(u^j)$ ,  $u^j = u(r_j)$ , с использованием для вычисления каждой из них интерполяционного кубического сплайна класса  $C^2$ .

Предложенный метод обобщается на случай исследования совместной системы краевых задач и систем нелинейных уравнений типа (1), (2).

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СОПРЯЖЁННОГО ПО ТЕПЛУ КАТАЛИТИЧЕСКОГО РЕАКТОРА ПАРОВОЙ КОНВЕРСИИ И ОКИСЛЕНИЯ МЕТАНОЛА

С. И. Фадеев<sup>1</sup>, А. Б. Шигаров<sup>2</sup>, В. А. Кириллов<sup>2</sup>, Н. А. Кузин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; fadееv@math.nsc.ru*

<sup>2</sup> *Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, Новосибирск*

В последние годы в связи с развитием водородной энергетики весьма актуальной становится задача разработки компактного каталитического реактора для получения синтез-газа из синтетических кислородсодержащих видов углеводородных топлив (метанола, биоэтанола, диметилового эфира) для последующего использования в энергоустановках на основе топливных элементов. Из всех существующих способов паровая конверсия обеспечивает максимальный выход водорода, но для ее проведения требуется подвод тепла к зоне эндотермической реакции. Одним из перспективных решений является совмещение по теплу в одном реакторе эндотермической паровой конверсии метанола с каталитическим дожиганием неизрасходованного в батарее топливных элементов водородсодержащего анодного газа и остатков метанола. В таком варианте реактор представляют комбинацию плоских каналов заполненных катализатором. В части из этих каналов, называемых далее эндотермическими, протекает реакция паровой конверсии метанола, в других соседних с ними каналах (экзотермических) происходит окисление анодного газа и остатков метанола с выделением тепла. Это тепло за счет теплопроводности передается в соседние эндотермические каналы. Интерес к подобного типа устройствам в последнее время возрос в связи с разработкой высокотемпературных протон-проводящих полимерных мембран, мало чувствительных к содержанию СО в синтез-газе. В настоящей работе приводится математическая модель для описания процессов в таком реакторе, результаты экспериментов при проведении паровой конверсии метанола и сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными.

В работе представлены результаты численного исследования математической модели в виде нелинейной краевой задачи, описывающей стационарные режимы в каталитическом топливном процессоре. При этом для эндоблока рассматривается двумерная модель с продольным переносом тепла и вещества газом и поперечной теплопроводностью по катализатору в 2-х температурном приближении. Для экзоканала рассматривается модель с продольным переносом тепла и вещества газом. Оба блока связаны между собой равенством температуры и теплового потока на границе.

Проведен численный анализ двух вариантов осуществления процессов в экзотермических каналах и их влияния на производительность реактора и параметрическую чувствительность стационарных режимов. Первый вариант соответствовал окислению метанола в экзотермических каналах, второй вариант был связан с использованием внешнего каталитического дожигателя анодных газов с остатками метанола и подачей разогретых продуктов реакции в экзотермические каналы. Результаты расчетов по первому варианту показали, что при любой сколь угодно большой активности катализатора окисления “горячее пятно” на входе в реактор (характерное для случая каталитического сжигания водорода в экзоканале) в данном случае не образуется, что, несомненно, является большим преимуществом. Однако существует другая опасность – погасание реактора при недостаточной активности катализатора окисления метанола (и ограничениях по температуре катализатора риформинга – не выше 350<sup>0</sup>С). В этом случае естественно использовать второй вариант, который и был реализован экспериментально. Сравнение результатов численных и натуральных экспериментов показало хорошее согласование.

## ГИДРОДИНАМИКА НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРЕ\*

А. П. Чупахин

*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск; [chupakhin@hydro.nsc.ru](mailto:chupakhin@hydro.nsc.ru)*

Исследуется математическая модель мелкой воды на вращающейся, притягивающей сфере, описывающая движения газа в атмосферах планет и жидкости в Мировом океане. Главной, отличительной чертой исследования является изучение свойств решения глобально, на сфере в целом.

Аналитически исследованы классы точных решений, порождаемые группами симметрий данной модели, дана их физическая интерпретация.

1) Простые стационарные волны, в которых все искомые функции зависят лишь от широты. Решения описывают течения газа по сфере из источника, расположенного вдоль параллели в сток, также являющийся параллелью сферы. Доказано существование решений двух типов, отвечающих до- и сверхкритическим движениям и различающихся формой профиля глубины и скоростью течения. Такие решения, определённые в сферических поясах, расположенных в разных полушариях сферы (северном и южном) моделируют движения газа по торам, опоясывающим сферу. В физике атмосферы такие торы называются ячейками (полярными, Гадлея, Феррела).

2) Учёт в модели центробежного ускорения приводит к тому, что состоянию равновесия, отвечающему относительному покою (твёрдотельному вращению газа во внешней, инерциальной системе отсчёта) отвечает отличный от сферического, яблоковидный профиль глубины. Он определяет изобарическую поверхность, являющуюся поверхностью вращения.

Доказано, что такому равновесному профилю отвечает, кроме покоя, нетривиальное течение газа по сфере. Оно характеризуется тем, что его линии тока в каждой точке ортогональны геодезическим изобарической поверхности. Исследованы возможные картины течения в зависимости от поведения геодезических. Доказано, что существует нетривиальное течение газа, определённое на всей сфере, в котором полюса служат источником и стоком.

Таким образом, внешний наблюдатель, фиксирующий лишь форму профиля глубины — яблоковидную поверхность — не может определить, каково движение газа в атмосфере планеты: твёрдотельное или отличное от него, нетривиальное.

Представляемые результаты впервые описывают нетривиальные гидродинамические течения на сфере в целом.

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05–01–00080), Интеграционного проекта СО РАН (№ 2.15), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ–5245.2006.1).



# ЭРМИТОВЫ СПЛАЙН-ВЕЙВЛЕТЫ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЫНКА НЕДВИЖИМОСТИ\*

Б. М. Шумилов<sup>1</sup>, Э. А. Эшаров<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Томский государственный архитектурно-строительный университет, Томск; *sbm@tsuab.ru*

<sup>2</sup> Томский государственный университет, Томск; *elzare78@rambler.ru*

Обычно при построении вейвлетов добиваются выполнения свойств ортогональности, нормированности, полуортогональности и некоторых других. Для ряда случаев этот набор можно несколько сократить, не утрачивая при этом главных свойств: существования, единственности и обратимости. Далее рассматривается построение вейвлетов на основе полиномиальных сплайнов степени 1 и 3.

1) Пусть степень сплайна равна 1. Двухмасштабное соотношение для базисных  $B$ -сплайнов первой степени известно:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}\varphi_1(2t) + \varphi_1(2t-1) + \frac{1}{2}\varphi_1(2t-2).$$

Соответствующий класс полуортогональных базисных вейвлетов с минимальным носителем  $[0, 3]$  иногда называют *вейвлетами Стремберга* [1]. Даже в этом простейшем случае вычисление и обращение вейвлет-разложений сопряжено с использованием асимптотических формул либо физически нереализуемых фильтров [2]. Нами построены вейвлеты с меньшим носителем  $[0, 2] \subset [0, 3]$  вида

$$w_2(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} (2\varphi_1(2t-1) - \varphi_1(2t) - \varphi_1(2t-2)),$$

для которых получены конечные формулы разложения и восстановления сигнала. Практически, отсутствие полуортогональности приводит к тому, что вейвлет-разложение имеет большее количество значимых коэффициентов.

2) Пусть степень сплайна равна 3. На основе сплайнов дефекта 1 базисные вейвлеты, обладающие свойством полуортогональности, могут быть построены при минимальном носителе  $[0, 7]$  – довольно большой длины. Поэтому мы рассматриваем применение для построения вейвлетов эрмитовых сплайнов (дефекта 2). Двухмасштабные соотношения получены в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_3(t) &= \frac{1}{2}\varphi_3(2t) + \varphi_3(2t-1) + \frac{1}{2}\varphi_3(2t-2) + \frac{3}{4}(\psi(2t) - \psi(2t-2)), \\ \psi(t) &= \frac{1}{8}(4\psi(2t-1) - \psi(2t) - \psi(2t-2) - \varphi_3(2t) + \varphi_3(2t-2)). \end{aligned}$$

Для примера «ленивых» вейвлетов (в терминологии [1]) имеем трехдиагональные системы уравнений относительно значений эрмитового сплайна и его производных в нечетных узлах:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}s_{2j-1} + 5s_{2j+1} - \frac{1}{2}s_{2j+3} &= 2(v_{j+1} + v_j) + \frac{2}{q}(w_{j+1} + w_j) + 12\left(v'_j - v'_{j+1} + \frac{1}{g}(w'_j - w'_{j+1})\right), \\ -\frac{1}{2}s'_{2j-1} + 5s'_{2j+1} - \frac{1}{2}s'_{2j+3} &= 2(v_{j+1} - v_j) + \frac{2}{q}(w_{j+1} - w_j) - 8\left(v'_j + v'_{j+1} + \frac{1}{g}(w'_j + w'_{j+1})\right), \end{aligned}$$

где  $q = \sqrt{35/13}$ ,  $g = \sqrt{105}$ , а

$$v_j = \frac{1}{2}(s_{2j} + s_{2j+1} + s_{2j+2}) + \frac{3}{4}(s'_{2j} - s'_{2j+2}), \quad v'_j = -\frac{1}{8}(s'_{2j} - 4s'_{2j+1} + s'_{2j+2} + s_{2j} - s_{2j+2})$$

\* Работа выполнена при поддержке Российского гуманитарного научного фонда (№ 06-02-64202а/Г).

– коэффициенты вейвлет-разложения, найденные из соответствующих значений исходного эрмитового сплайна и его производных. При этом в качестве недостающих краевых условий принимаются нулевые значения восстановленного эрмитового сплайна и его производных в выпадающих за пределы исходного интервала нечетных узлах. Поскольку матрица системы уравнений имеет строгое диагональное преобладание, решение существует и является единственным.

Для всех четных узлов, включая крайние, выполнены соотношения

$$w_j = -qs_{2j}, \quad 2w'_j = -gs'_{2j}.$$

В докладе для решения задачи прогнозирования цен на рынке недвижимости рассмотрено применение построенных эрмитовых сплайн-вейвлетов для заполнения пропусков во временных рядах.

### Литература

1. *Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д.* Вейвлеты в компьютерной графике: Пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
2. *Чуи Ч.* Введение в вейвлеты: Пер. с англ. М.: Мир, 2001.

---

## ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH

---

### ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ И НИЖНИЕ ПРЕДЕЛЫ НЕАППРОКСИМИРУЕМОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ С ЗАДЕРЖКАМИ\*

А. А. Агеев

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; ageev@math.nsc.ru*

Представлен обзор последних результатов по приближенной разрешимости задач теории расписаний с жесткими и минимальными задержками. Рассматриваемые задачи являются естественными вариантами классических двухстадийных задач теории расписаний на одной и двух машинах, в которых учитывается часто встречающаяся в практических приложениях ситуация, когда следующая операция одной и той же работы должна начинаться либо не ранее (для вариантов с минимальными задержками), либо в точности (для вариантов с жесткими задержками) по истечении промежутка времени заданной величины после окончания первой операции. Приложения обсуждаемых задач многообразны и включают разработку технологических цепочек, в которых задержка может представлять собой время транспортировки обрабатываемого изделия из одного цеха (предприятия) в другой (другое); оптимизацию работы многопроцессорных вычислительных систем, где невозможна мгновенная передача результата вычислений, полученных на выходе одного процессора, на вход другого. Модели с жесткими задержками находят также применение в химическом производстве, где точные временные промежутки между операциями являются частью технологического процесса.

Во всех рассматриваемых задачах задано множество  $J = \{1, \dots, n\}$  независимых работ. Каждая работа  $j \in J$  состоит из первой и второй операций, на выполнение которых требуется  $a_j$  и  $b_j$  единиц времени соответственно. Для каждой работы  $j \in J$  задана величина  $l_j \in \mathbb{Z}_+$ , называемая задержкой. Выполнение второй операции работы  $j \in J$  должно начинаться либо точно, либо не ранее, чем по истечении  $l_j$  единиц времени после окончания выполнения первой операции. В первом случае задержка  $l_j$  называется жесткой, а во втором минимальной. Все работы выполняются либо на одной, либо на двух машинах, причем в случае двух машин либо первая операция каждой работы выполняется на первой машине, а вторая на второй (поточковая конвейерная схема или FLOW SHOP), либо одна из операций выполняется на первой, а вторая на второй машине (свободная конвейерная схема или OPEN SHOP). Предполагается, что ни одна из машин не может выполнять более одной операции в любой момент времени и ни одна из операций не может быть прервана. Во всех задачах требуется минимизировать длину расписания, т. е. время окончания последней операции. В общепринятой трехместной системе обозначений задач теории расписаний рассматриваемые задачи записываются следующим образом:

- $1 \mid \text{exact } l_j \mid C_{\max}$ ,
- $F2 \mid \text{exact } l_j \mid C_{\max}$
- $O2 \mid \text{exact } l_j \mid C_{\max}$
- $F2 \mid l_j \mid C_{\max}$
- $O2 \mid l_j \mid C_{\max}$

В задачах  $1 \mid \text{exact } l_j \mid C_{\max}$ ,  $F2 \mid \text{exact } l_j \mid C_{\max}$ ,  $O2 \mid \text{exact } l_j \mid C_{\max}$  все задержки жесткие, причем в первой все работы выполняются на одной машине, а вторая и третья - задачи типа

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00960, 06-01-00255).

FLOW SHOP и OPEN SHOP на двух машинах соответственно. В задачах  $F2 | l_j | C_{\max}$  (типа FLOW SHOP) и  $O2 | l_j | C_{\max}$  (типа OPEN SHOP) работы выполняются на двух машинах и все задержки минимальные.

Ввиду ограничений на объем тезисов мы приводим только сводную таблицу результатов, обсуждаемых в данный обзор (см. табл. 1). Первая колонка таблицы содержит обозначения задач, вторая указывает наилучшие оценки точности, достигаемые приближенными алгоритмами, третья — доказанные нижние пределы неаппроксимируемости для соответствующих задач. Рядом с оценками приведены ссылки на источники. Знак вопроса в третьей колонке означает, что для соответствующей задачи не доказано, что она APX-трудна (а также, неизвестно, существует ли полиномиальная приближенная схема для ее решения).

Задача	Оценка точности	Нижний предел неаппр.
1   exact $l_j,   C_{\max}$	3.5 [3]	$2 - \varepsilon$ [3]
1   exact $l_j, a_j \leq b_j   C_{\max}$	3 [3]	$2 - \varepsilon$ [3]
1   exact $l_j, a_j \geq b_j   C_{\max}$	3 [3]	$2 - \varepsilon$ [3]
1   exact $l_j, a_j = b_j   C_{\max}$	2.5 [3]	$2 - \varepsilon$ [3]
1   exact $l_j, a_j = b_j = 1   C_{\max}$	1.75 [2]	?
1   exact $l_j = L   C_{\max}$	2.5 [5]	$1.25 - \varepsilon$ [5]
1   exact $l_j = L, a_j \leq b_j   C_{\max}$	2 [5]	$1.25 - \varepsilon$ [5]
1   exact $l_j = L, a_j \geq b_j   C_{\max}$	2 [5]	$1.25 - \varepsilon$ [5]
1   exact $l_j = L, a_j = b_j   C_{\max}$	1.5 [5]	$1.25 - \varepsilon$ [5]
$F2   \text{exact } l_j   C_{\max}$	3 [3]	$1.5 - \varepsilon$ [3]
$F2   \text{exact } l_j, a_j \leq b_j   C_{\max}$	2 [3]	$1.5 - \varepsilon$ [3]
$F2   \text{exact } l_j, a_j \geq b_j   C_{\max}$	2 [3]	$1.5 - \varepsilon$ [3]
$F2   \text{exact } l_j, a_j = b_j = 1   C_{\max}$	1.5 [3]	?
$F2   \text{exact } l_j \in \{0, L\}   C_{\max}$	2 [5]	$1.25 - \varepsilon$ [5]
$O2   \text{exact } l_j   C_{\max}$	3 [3]	$1.5 - \varepsilon$ [5]
$O2   \text{exact } l_j, a_j \leq b_j   C_{\max}$	2 [3]	$1.5 - \varepsilon$ [5]
$O2   \text{exact } l_j, a_j \geq b_j   C_{\max}$	2 [3]	$1.5 - \varepsilon$ [5]
$F2   l_j   C_{\max}$	2 [6, 4]	?
$F2   l_j, a_j = a, b_j = b   C_{\max}$	1.628 [4]	?
$F2   l_j, a_j = b_j   C_{\max}$	1.5 [1]	?
$O2   l_j   C_{\max}$	1.5 [10]	?

Табл. 1.

### Литература

1. Ageev A. A. A 3/2-Approximation for the two-machine flow shop scheduling with minimum delays and identical machines // Представлено к публикации.
2. Ageev A. A., Baburin A. E. Approximation algorithms for UET scheduling problems with Exact Delays // To appear in Operations Research Letters.
3. Ageev A. A., Kononov A. V. Approximation algorithms for scheduling problems with exact delays // Lecture Notes in Computer Science 4368 (Proceedings of WAOA 2006). P. 1–14.
4. Ageev A. A., Baburin A. E. Approximating the Two-Machine Flow Shop Problem with Minimum Delays // Представлено к публикации.
5. Ageev A. A., Иванов М. А. Аппроксимируемость некоторых NP-трудных вариантов задач теории расписаний с жесткими задержками // Подготовлено к публикации.
6. Dell'Amico M. Shop problems with two machines and time lags // Operations Research. 1996. V. 44. P. 777–787.
7. Dell'Amico M., Vaessens R. J. M. Flow and open shop scheduling on two machines with transportation times and machine-independent processing times is NP-hard // Materiali di discussione 141, Dipartimento di Economia Politica, Università di Modena, 1996.
8. Graham R. L., Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey // Annals of Discrete Mathematics. 1979. V. 5. P. 287–326.

9. *Orman A. J., Potts C. N.* On the complexity of coupled-task scheduling // *Discrete Appl. Math.* 1997. V. 72. P. 141–154.
10. *Strusevich V. A.* A heuristic for the two-machine open-shop scheduling with transportation times // *Discrete Applied Mathematics.* 1999. V. 93. P. 287–304.
11. *Yu W.* The two-machine shop problem with delays and the one-machine total tardiness problem. Ph. D. thesis. Technische Universiteit Eindhoven, 1996.
12. *Yu W., Hoogeveen H., Lenstra J. K.* Minimizing makespan in a two-machine flow shop with delays and unit-time operations is NP-hard // *J. Sched.* 2004. V. 7, no. 5. P. 333–348.

# ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ О $P$ -МЕДИАНЕ С ПРЕДПОЧТЕНИЯМИ КЛИЕНТОВ\*

Е. В. Алексеева

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; ekatерина2@math.nsc.ru*

В работе рассматривается задача о  $p$ -медиане с предпочтениями клиентов в следующей постановке: найти

$$\min_{y_i \in \{0,1\}} \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij}^*(y) \mid \sum_{i \in I} y_i = p \right\},$$

где  $x_{ij}^*(y)$  – оптимальное решение задачи:

$$\min_{x_{ij} \in \{0,1\}} \left\{ \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} g_{ij} x_{ij} \mid \sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J, \quad x_{ij} \leq y_i, \quad i \in I, j \in J \right\}.$$

Как обобщение классической задачи о  $p$ -медиане рассмотренная задача является не только NP-трудной в сильном смысле, но и оказывается в классе PLS-полных задач с рядом полиномиально проверяемых окрестностей. Впервые задачи размещения с предпочтениями клиентов рассматривались зарубежом П. Ханжоулем и Д. Петерсом [1], позже в России В.Т. Дементьевым, Ю.В. Шамардиным и Л.Е. Горбачевской. В работе предлагается генетический алгоритм локального поиска, элементами популяции которого являются локальные оптимумы по окрестности Лина-Кернигана. Исследуется влияние различных параметров алгоритма (операторы скрещивания, мутации и селекции) на качество получаемых решений. Чтобы оценить качество приближенного решения можно воспользоваться нижними оценками. Для получения нижних оценок используется сведение исходной задачи к задаче целочисленного программирования. В работе проводится сравнение уже известных нижних оценок и предлагается новая, которая доминирует остальные по значению целевой функции линейной релаксации. Сведение к задаче с парой матриц с дополнительным ограничением на число выбираемых строк позволяет записать рассматриваемую задачу в терминах ЦЛП. В работе исследуются два таких представления. Одно из них позволяет находить новую нижнюю оценку, которая не хуже предшествующих и может оказаться в произвольное число раз лучше их.

## Литература

1. *Hanjoul P., Peeters D.* A facility location problem with clients' preference orderings // *Regional Science and Urban Economics*. 1987. V. 17, Issue 3. P. 451–473.

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06–01–00075).

# О СХЕМАХ, ДОПУСКАЮЩИХ ЕДИНИЧНЫЕ ТЕСТЫ ДЛИНЫ 1 ПРИ КОНСТАНТНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ НА ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ\*

Ю. В. Бородина

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва; jborodina@inbox.ru

Для обеспечения надежного функционирования управляющих систем необходимо решать задачи контроля исправности и диагностики неисправностей этих систем. Для решения этих задач С.В. Яблонским предложены логические методы контроля [1], суть которых состоит в том, что входы схемы подвергаются некоторому специальным образом подобранному "проверяющему" воздействию, т.е. на входы системы подается некоторая тестовая информация и на основе наблюдения реакции системы на это воздействие делается заключение об ее исправности и характере неисправностей (при их наличии).

Будем рассматривать схемы из функциональных элементов [2] в базисе  $\{\&, \oplus, 1, 0\}$ . В качестве неисправностей будем предполагать единичные константные неисправности типа "1" на выходах конъюнкторов  $\&$  и сумматоров  $\oplus$  (ровно один из этих элементов может быть неисправным и выдавать значение 1 независимо от входных данных).

Пусть  $S$  — некоторая схема из функциональных элементов, реализующая булеву функцию  $f(\tilde{x})$ ,  $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Функция, реализуемая на выходе схемы при наличии в схеме неисправного элемента, называется *функцией неисправности*. Всякое множество  $T$  входных наборов схемы  $S$  называется *единичным проверяющим тестом* для этой схемы, если для любой функции неисправности  $g(\tilde{x})$ , не равной тождественно  $f(\tilde{x})$ , в  $T$  найдется хотя бы один такой набор  $\tilde{\sigma}$ , что  $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$  [3]. Число наборов, составляющих этот тест, называется *длиной* теста. В качестве тривиального теста всегда можно взять тест, содержащий все  $2^n$  наборов значений переменных булевой функции от  $n$  переменных.

**Теорема.** *Любую булеву функцию можно реализовать схемой из функциональных элементов в базисе  $\{\&, \oplus, 1, 0\}$ , допускающей единичный проверяющий тест длины 1.*

При доказательстве теоремы для каждой булевой функции явно указывается способ построения реализующей ее схемы и проверяющего теста.

Ранее С. Редди [4] было доказано, что любую булеву функцию можно реализовать схемой из функциональных элементов в базисе  $\{\&, \oplus, 1, 0\}$ , допускающей единичный проверяющий тест длины  $n + 3$  (отметим, что в [4] предполагались единичные константные неисправности произвольного типа на выходах элементов).

Автор благодарен профессору Н. П. Редькину за внимание к работе.

## Литература

1. Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Труды МИАН. 1958. Т. 51. С. 5–142.
2. Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем // М., 1984.
3. Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. М.: изд-во МГУ. 1992.
4. Reddy S. M. Easily testable realization for logic functions // IEEE Trans. Comput. 1972. № 1. P. 124–141.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05–01–00994), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–5400.2006.1) и Программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики» (проект «Синтез и сложность управляющих систем»).

# СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СОВЕРШЕННЫХ РАСКРАСОК И ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ КОДОВ\*

А. Ю. Васильева

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;  
Новосибирский государственный университет, Новосибирск;  
vasilan@math.nsc.ru*

Ограничимся рассмотрением только двоичных кодов, т. е. подмножеств множества всех двоичных наборов произвольной данной длины  $n$  ( $n$ -куба). *Весовым спектром* кода  $C$  относительно двоичного вектора  $\mathbf{a}$  называется набор  $v(\mathbf{a}) = (v_0(\mathbf{a}), v_1(\mathbf{a}), \dots, v_n(\mathbf{a}))$ ,  $i$ -я компонента которого равна числу кодовых вершин на расстоянии  $i$  от вершины  $\mathbf{a}$ . Понятие весового спектра кода является одним из важнейших в теории кодирования. Предполагая, что радиус покрытия кода равен  $R = R(C)$ , определим следующие множества:  $C_i = \{\mathbf{x} \in E^n : \rho(\mathbf{x}, C) = i\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, R$ . Двоичный код  $C$  называется *вполне регулярным*, если для всех  $i$ ,  $i = 0, 1, \dots, R$ , произвольная вершина  $\mathbf{x} \in C_i$  имеет фиксированное число  $d_i$  соседей в множестве  $C_{i-1}$  и фиксированное число  $u_i$  соседей в множестве  $C_{i+1}$ . Известно, что некоторые хорошие классы кодов являются вполне регулярными, например, все совершенные коды и коды Препараты являются таковыми. Напомним, что *совершенным кодом*  $C$  с расстоянием  $2e+1$  называется такой код, что каждая вершина  $n$ -куба находится на расстоянии не более  $e$  в точности от одной кодовой вершины. *Кодом Препараты*  $C$  называется код длины  $n = 2^{2m} - 1$ ,  $m = 2, 3, \dots$ , с расстоянием 5 максимальной возможной мощности  $|C| = 2^{n+1}/(n+1)^2$ .

Определим *раскраску*  $P = (P_1, P_2, \dots, P_r)$  как произвольное разбиение  $n$ -куба. Если вершина  $\mathbf{a}$  принадлежит множеству  $P_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , будем говорить, что она имеет  $i$ -й *цвет*. По аналогии со спектром кода можно рассматривать и весовой спектр раскраски. В этом случае  $i$ -я компонента набора  $v(\mathbf{a})$  будет  $r$ -мерным вектором, дающим количества вершин различных цветов на расстоянии  $i$  от исходного вектора. *Совершенной* назовем такую раскраску  $P = (P_1, P_2, \dots, P_r)$ , у которой для любых  $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$  и для каждой вершины  $\mathbf{x} \in P_i$  число соседей, принадлежащих множеству  $P_j$ , зависит только от чисел  $i, j$ . Очевидно, что разбиение по расстояниям  $(C_0, C_1, \dots, C_R)$  от произвольного вполне регулярного кода  $C$  дает совершенную раскраску.

Главное свойство весового спектра вполне регулярного кода состоит в его инвариантности относительно выбора кодовой вершины в качестве начальной, т.е. *дистанционная инвариантность* произвольного такого кода. Оказывается, и совершенные раскраски обладают аналогичным свойством, которое также можно назвать дистанционной инвариантностью — его инвариантность относительно выбора вершины произвольного фиксированного цвета в качестве начальной.

Как аналог и расширения понятия весового спектра, вводятся понятия локального и межвесового спектра произвольного кода и произвольной раскраски  $n$ -куба. Так, *локальный спектр в грани* куба определяется так же, как весовой, только в подсчете вершин на данном расстоянии от исходной вершины участвуют только вершины, принадлежащие рассматриваемой грани куба. Напомним, что множество всех вершин из  $n$ -куба, совпадающих в фиксированных  $n - k$  координатах, называется  *$k$ -мерной гранью*  $n$ -куба. Грани  $\gamma$  и  $\gamma^\perp$  называются *ортогональными*, если множество координат, в которых совпадают все вершины из  $\gamma^\perp$ , является дополнением множества координат, в которых совпадают все вершины из  $\gamma$ . Ясно, что пересечение граней  $\gamma$  и  $\gamma^\perp$  состоит из одной вершины, а сумма их размерностей равна  $n$ . Если рассмотреть локальные спектры совершенной раскраски в паре ортогональных граней, то оказывается, что они однозначно определяют друг друга. Это полезное свойство не может быть дословно распространено на все вполне регулярные коды, что объясняется "неоднородностью" строения дополнения к коду, т.е. наличием вершин, находящихся на различном расстоянии от кода.

Другое обобщение весового спектра касается подсчета пар вершин. Зафиксируем некоторую вершину  $\mathbf{a}$  из  $n$ -куба. Для всех троек чисел  $i, j, d \in \{0, 1, \dots, n\}$  подсчитаем число пар вершин  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  кода  $C$ , образующих вместе с вершиной  $\mathbf{a}$  треугольник со сторонами  $(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ ,  $(\mathbf{a}, \mathbf{y})$  и

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-01-00248-а).



$(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  длин  $i, j$  и  $d$  соответственно. Упорядоченный набор таких чисел и является *межвесовым спектром* кода  $C$ . Аналогично определяется межвесовой спектр раскраски, однако он является не трехпараметрическим набором чисел, как в случае кода, а шестипараметрическим: тремя новыми параметрами являются цвета вершин треугольника.

Важное свойство межвесового спектра произвольной совершенной раскраски состоит в его инвариантности относительно выбора вершины произвольного фиксированного цвета. Как следствие этого факта, имеем аналогичное свойство для вполне регулярного кода: инвариантность его межвесового спектра относительно выбора произвольной кодовой вершины.

Это метрическое свойство, *сильная дистанционная инвариантность*, рассматриваемых кодов и раскрасок указывает на большую "регулярность" их строения, чем просто дистанционная инвариантность. И это важно, поскольку следующее усиление "регулярности" для них уже не выполняется — они не являются *дистанционно регулярными*. Последнее свойство кодов связано с подсчетом некоторых треугольников кодовых вершин  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ , в которых зафиксированы две вершины  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  и длины всех сторон. Если каждый раз число таких треугольников не зависит от выбора пары  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , то код называется дистанционно регулярным. Для определения дистанционной регулярности раскраски потребуется еще каждый раз фиксировать цвета всех вершин треугольника.

### Литература

1. *Brouwer A. E.* A note on completely regular codes // *Discrete Mathematics*. 1990. V. 82. P. 115–117.
2. *Васильева А. Ю.* Локальные спектры совершенных двоичных кодов // *Дискрет. анализ и исслед. операций*. Сер. 1. 1999. Т. 6, N 1. С. 3–11.
3. *Васильева А. Ю.* Сильная дистанционная инвариантность совершенных двоичных кодов // *Дискрет. анализ и исслед. операций*. Сер. 1. 2002. Т. 9, N 4. С. 33–40.
4. *Vasil'eva A. Yu.* Local and Interweight Spectra of Completely Regular Codes and Perfect Colourings // *Proc. Tenth International Workshop «Algebraic and combinatorial coding theory»*, Zvenigorod, Russia, September 3–9, 2006. P. 385–389.

# О ВРЕМЕННОЙ СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМОВ ЛОКАЛЬНОГО СПУСКА ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МАШИНАХ\*

Ю. Ю. Великанова

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; velikanova@gorodok.net*

Рассматривается NP–трудная задача теории расписания  $Pm||C_{max}$ . Задано  $n$  работ и  $m$  идентичных параллельных машин. Для каждой работы определена длительность ее выполнения. Требуется распределить работы по машинам так, чтобы минимизировать время завершения всех работ.

Окрестностью *Swap* заданного решения называют множество решений, полученных из данного перестановкой двух работ, расположенных на разных машинах. Окрестностью  $Swap \cup Flip$  называют множество решений, получаемых переносом одной работы на другую машину или перестановкой двух работ.

Доказано, что с каждой из перечисленных окрестностей стандартный алгоритм локального спуска достигает локальный минимум с любой стартовой точки за полиномиальное число шагов, а именно:

- для задачи  $P2||C_{max}$  с обеими окрестностями *Swap* и  $Swap \cup Flip$  алгоритму локального спуска требуется  $O(n^3)$  шагов;
- для задачи  $Pm||C_{max}$  с обеими окрестностями *Swap* и  $Swap \cup Flip$  алгоритму локального спуска требуется  $O(m^2n^4)$  шагов.

Построены примеры для задачи  $P2||C_{max}$  для которых алгоритм локального спуска с окрестностями *Swap* и  $Swap \cup Flip$  достигает локального минимума за  $O(n^2)$ .

## Литература

1. Brucker P., Hurink J., Werner F. Improving local search heuristics for some scheduling problems-I // Discrete Applied Mathematics. 1996. V. 65. P. 97–122.
2. Brucker P., Hurink J., Werner F. Improving local search heuristics for some scheduling problems-II // Discrete Applied Mathematics. 1997. V. 72. P. 47–69.

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06–01–00075).

## ЗАДАЧИ РАСКРАСКИ ГРАФОВ, СВЯЗАННЫЕ С СОСТАВЛЕНИЕМ РАСПИСАНИЙ ДЛЯ КОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЕЙ\*

В. Г. Визинг

*Одесса, Украина; vizing@paco.net*

Ориентированный или неориентированный мультиграф без петель можно рассматривать как коммуникационную сеть, узлами которой являются вершины, а ребра являются сообщениями единичной длительности, которыми должны обмениваться вершины. Время считается дискретным; каждый момент времени называется цветом. Составить расписание для такой сети - это значит окрасить каждое ребро (с соблюдением определенных условий). В случае компьютерной сети предполагается, что все сообщения передаются через сервер, находящийся вне сети. В этом случае нужно рассматривать два инцидентора каждого ребра. Начальный инцидентор соответствует передаче сообщения в сервер, он примыкает к адресанту; конечный инцидентор, соответствующий передаче сообщения адресату от сервера, примыкает к адресату. Составление расписания состоит в раскраске инциденторов с помощью упорядоченного множества цветов. Раскраска считается оптимальной, если она использует минимальное число цветов.

Различные условия, налагаемые на допустимость расписания, приводят к разным задачам. Эти условия могут быть такими.

1. Каждая вершина имеет определенное число каналов доступа, равное максимально допустимому числу одинаково окрашенных ребер или инциденторов, примыкающих к этой вершине.

2. В случае компьютерной сети разность между цветами конечного инцидентора и начального инцидентора для каждого ребра должна быть не меньше определенного числа - минимального времени, необходимого для доставки сообщения адресату.

3. Запозывание в доставке сообщений ограничено сверху некоторым числом.

4. Некоторые идентичные сообщения могут передаваться одним узлом компьютерной сети нескольким адресатам. В этом случае приходится иметь дело с раскраской инциденторов гиперграфа.

Существенно новая задача возникает, если ребра соответствуют сообщениям произвольной длительности. Появляются мультиграфы с взвешенными ребрами и вместо раскраски нужно рассматривать мультираскраску. При мультираскраске каждому взвешенному объекту сопоставляется интервал цветов, длина которого равна весу объекта. Задача мультираскраски имеет естественную интерпретацию и в случае мультираскраски вершин графа.

В докладе излагаются опубликованные и новые результаты по указанной проблематике.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект 04-77-7173).

# АЛГОРИТМЫ С ОЦЕНКАМИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ КОММИВОЯЖЁРА И ИХ МОДИФИКАЦИЙ\*

Э. Х. Гимади

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; gimadi@math.nsc.ru*

Задача коммивояжёра (ЗК) является классическим примером труднорешаемой задачи [14].

1. Еще в 1969 г. были установлены условия асимптотической точности жадного алгоритма квадратичной временной сложности, действующего по принципу "Иди в ближайший непройденный город" (ИБГ), на широком классе случайно задаваемых матриц расстояний с элементами, определенными в ограниченном интервале  $[a_n, b_n]$ ,  $a_n > 0$  [7]. В работах [11,15] по вероятностному анализу приближённых алгоритмов решения ЗК также рассматриваются ограниченные входные данные. Лишь недавно удалось распространить результаты вероятностного анализа приближённого решения ЗК на случай неограниченных сверху входных данных.

**Теорема 1** [6]. Пусть элементы матрицы расстояний являются независимыми одинаково распределёнными случайными величинами, принимающими значения из неограниченной сверху области  $[a_n, \infty)$ ,  $a_n > 0$ , согласно нормальному либо показательному распределению. Обозначим через  $\beta_n$  параметры  $\sigma_n$  и  $\alpha_n$  нормального и показательного распределений соответственно. Тогда модифицированный алгоритм ИБГ даёт решение ЗК на минимум

- (а) с оценкой относительной погрешности порядка  $O\left(\frac{\beta_n/\alpha_n}{n/\ln n}\right)$ ;
- (б) с вероятностью несрабатывания алгоритма порядка  $O\left(\frac{1}{n}\right)$ ;
- (в) с условием асимптотической точности алгоритма  $\frac{\beta_n}{\alpha_n} = o\left(\frac{n}{\ln n}\right)$ .

Теорема 1 справедлива как для ориентированных, так и неориентированных графов.

2. Для обобщения ЗК на максимум — задачи отыскания связного остовного подграфа максимального веса с заданными степенями вершин — построен приближённый алгоритм трудоёмкости  $O(Mn^2)$  с гарантированной относительной погрешностью порядка  $O\left(\frac{1}{d(d-1)}\right)$ , где  $M$  — число рёбер искомого подграфа,  $d$  — минимальная степень его вершин.

Для поиска  $d$ -регулярного подграфа экстремального веса на случайных входах построен приближённый алгоритм с временной сложностью  $O(n^2 + dn \log n)$  и обоснованы условия его асимптотической точности в случае произвольного распределения минорируемого типа [4].

3. В работе [12] впервые была сформулирована задача  $m$ -PSP (Peripatetic salesman problem), которая заключается в отыскании в полном взвешенном графе  $m$  рёберно-непересекающихся маршрутов коммивояжёра экстремального суммарного веса рёбер.

3.1. Для задачи 2-PSP на максимум (2-PSP<sub>max</sub>) с произвольными весами рёбер графа построен алгоритм трудоёмкости  $O(n^3)$  с оценкой точности 3/4 [1].

3.2. Для метрической задачи 2-PSP<sub>min</sub> построены полиномиальные алгоритмы с оценками точности 9/4 в случае общей функции расстояния и 12/5 в случае разных функций [3].

3.3. Ранее для ЗК на максимум в многомерном евклидовом пространстве был построен асимптотически точный алгоритм с временной сложностью  $O(n^3)$  [8]. Позже были получены условия асимптотической точности решения ЗК в евклидовом пространстве в терминах диаметра графа [2]. Для задачи 2-PSP<sub>max</sub> в многомерном евклидовом пространстве также удаётся построить асимптотически точный алгоритм [9]. В данном докладе предлагается распространение этого результата на случай нескольких коммивояжёров.

**Теорема 2.** Пусть  $t$  — число рёберно-непересекающихся гамильтоновых циклов,  $t \leq n/8$ . Тогда задача  $t$ -PSP<sub>max</sub> на графе в многомерном евклидовом пространстве решается асимптотически точно за время  $O(n^3)$ .

3.4. В заключении доклада представлены последние результаты по приближённому решению задачи 2-PSP<sub>min</sub>(1,2), в которой веса рёбер графа принимают значения 1 и 2.

Сначала для задачи 2-PSP<sub>min</sub>(1,2) была получена оценка точности 4/3 с использованием 7/6-приближённого алгоритма в [13] для решения ЗК на минимум в графе с весами 1 и 2 [9].

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00395) и INTAS (№ 04-77-7173).

Для задачи  $2\text{-PSP}_{\min}(1,2)$ , посредством сведения её к задаче  $2\text{-PSP}_{\max}$  на графе с произвольными весами рёбер [1], построен алгоритм трудоёмкости  $O(n^3)$  с оценкой точности  $5/4$  [9].

Приведем формулировку результата, дающего лучшую на сегодня оценку точности для более общей задачи  $2\text{-PSP}_{\min}$ , в которой веса рёбер принимают произвольные значения в интервале  $[1, q]$ ,  $q \geq 1$  [5].

**Теорема 3.** *Задача  $2\text{-PSP}_{\min}$  с весами рёбер в промежутке  $[1, q]$  решается за время  $O(n^3)$  с оценкой точности, не превосходящей  $\frac{4+q}{5}$ .*

**Следствие.** *Для графа с весами рёбер 1 и 2 оценка точности не превосходит  $6/5$ .*

Центральным моментом в обосновании теоремы 3 является следующее утверждение

**Теорема 4.** *В  $n$ -вершинном 4-регулярном графе пара непересекающихся частичных туров с общим количеством рёбер не менее  $8n/5$  может быть найдена за время  $O(n^2)$ .*

**Благодарность.** Хочется выразить особую признательность моим молодым коллегам по гранту РФФИ Бабурину А. Е., Глазкову Ю. В. и Глебову А. Н., вносящим существенный вклад в рассматриваемую проблематику.

## Литература

1. Агеев А. А., Бабурин А. Е., Гимади Э. Х. Полиномиальный алгоритм с оценкой точности  $3/4$  для отыскания двух непересекающихся гамильтоновых циклов максимального веса // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2006. Т. 12, № 2. С. 11–20.
2. Бабурин А. Е., Гимади Э. Х. Об асимптотической точности одного алгоритма решения задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. Новосибирск. 2002. Т. 9, № 4. С. 23–32.
3. Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Коркишко Н. М. Приближенные алгоритмы для нахождения двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального веса // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 2004. Т. 11, № 1. С. 11–25.
4. Бабурин А. Е., Гимади Э. Х. Об одном обобщении задачи коммивояжера на максимум // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 3. С. 3–12.
5. Гимади Э. Х., Глазков Ю. В., Глебов А. Н. Приближенные алгоритмы решения задачи двух непересекающихся маршрутов коммивояжера на графе с весами рёбер 1 и 2 // В печати.
6. Гимади Э. Х., Ле Галлу А., Шахинеидер А. В. Вероятностный анализ приближенного алгоритма для задачи коммивояжера на неограниченных сверху входных данных // В печати.
7. Перепелица В. А., Гимади Э. Х. К задаче нахождения минимального гамильтонова контура на графе со взвешенными дугами // В кн.: Дискретный анализ. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1969. № 15. С. 57–65.
8. Сердюков А. И. Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // В кн.: Управляемые системы. Сб. науч. тр. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. 1987. № 27. С. 79–87.
9. A. E. Baburin, E. Kh. Gimadi. Polynomial algorithms for some hard problems of finding connected spanning subgraphs of extreme total edge weight // Operations Research Proceedings. 2006. International Conference OR 2006, Karlsruhe, Springer, Berlin, 2007. С. 215–220.
10. A. E. Baburin, F. Croce, E. Kh. Gimadi., Y. V. Glazkov, V. Paschos. Approximation algorithms for 2-Peripatetic Salesman Problem with edge weights 1 and 2 // Submitted in Discrete Applied Mathematics after International Conference ODSA 2006, Rostock, Germany, 4–6 Sept. 2006).
11. Frieze A. M. On random symmetric travelling salesman problems // Mathematics of Operations Research. 2004. V. 29, № 4. P. 878–890.
12. Krarup J. The peripatetic salesman and some related unsolved problems // Combinatorial programming: methods and applications (Proc. NATO Advanced Study Inst., Versailles, 1974). 1975. P. 173–178.
13. Papadimitriou C.H., Yannakakis M. The traveling salesman problem with distance One and Two // Math. Oper. Res. 1993. V. 18, № 1. P. 1–11.
14. *The Traveling Salesman Problem and its variations.* (ed. by A. Punnen and G. Gutin). Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2003.
15. Vohra R. V. Probabilistic analysis of the longest Hamiltonian tour problem // Networks. 1988. V. 18, № 1. P. 13–18.

# ПРИБЛИЖЁННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ТРЕХИНДЕКСНЫХ ПЛАНАРНЫХ ЗАДАЧ О НАЗНАЧЕНИИ\*

Э. Х. Гимади<sup>1</sup>, Ю. В. Глазков<sup>2</sup>

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;*

<sup>1</sup> *gimadi@math.nsc.ru*, <sup>2</sup> *yg@ngs.ru*

$m$ -слойная трёхиндексная планарная задача о назначении на одноциклических подстановках может быть сформулирована следующим образом.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij\pi_i(j)} \longrightarrow \min,$$

$$\pi_i \in P_n, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\pi_i(j) \neq \pi_{i'}(j), \quad \pi_i(j) \neq \pi_{i'}^{-1}(j), \quad 1 \leq i, i' \leq m, \quad i \neq i'; \quad j = 1, \dots, n,$$

где  $c_{ijk}$  — элементы трёхиндексной матрицы  $(c_{ijk}), 1 \leq i \leq m; 1 \leq j, k \leq n$ ;  $P_n$  — множество одноциклических подстановок.

В [2] представлен полиномиальный алгоритм для приближённого решения этой задачи в случае  $m = 2$  и доказана его асимптотическая точность для определённого класса распределений входных данных (элементов матрицы  $(c_{ijk})$ ). В настоящей работе представлен приближённый алгоритм, который применим в расширенном диапазоне  $m < n/4$ , и доказана его асимптотическая точность для более широкого класса входных данных. Он также имеет лучшие оценки качества по сравнению с ранее известным алгоритмом из [2].

В данном сообщении приводятся также результаты исследования частного случая двухслойной задачи, когда элементы матрицы принимают значения 1 или 2. Эта задача известна под названием "2-Peripatetic salesman problem with distances 1 and 2", или сокращенно, 2-PSP<sub>min</sub>(1, 2) [3]. Для приближенного решения этой задачи представлено четыре полиномиальных алгоритма с гарантированными оценками точности 197/144, 5/4, 26/21 и 6/5. Первый алгоритм был предложен в [3]. Здесь приводится его полное обоснование. Второй является сведением к задаче 2-PSP<sub>max</sub> и использует результаты [1]. Третий и четвёртый основаны на двух специальных процедурах нахождения в  $n$ -вершинном неориентированном графе частичных туров. Первая процедура находит в графе со степенями вершин 2, 3 и 4 частичный тур из  $2n/3$  или более рёбер. Вторая процедура, недавно представленная А.Н. Глебовым на семинарах ИМ СО РАН ("Теория графов" и "Дискретные экстремальные задачи"), находит в 4-регулярном графе два рёберно непересекающихся частичных тура с количеством рёбер не менее  $4n/5$  каждый.

## Литература

1. Агеев А. А., Бабурин А. Е., Гимади Э. Х. Полиномиальный алгоритм с оценкой 3/4 для нахождения двух рёберно непересекающихся гамильтоновых циклов максимального суммарного веса // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. Т. 12, № 2.
2. Коркишко Н. М. Приближённые алгоритмы решения некоторых многоиндексных задач о назначении // Кандидатская диссертация. Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2003.
3. Della Croce F., Paschos V. Th., Wolfer Calvo R. Approximating the 2-Peripatetic salesman problem // 7th Workshop on modeling and algorithms for planning and scheduling problems MAPSP 2005 (Siena, Italy, June 6–10, 2005). 2005. P. 114–116. Private communications.

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05–01–00395–а, 07–07–00022–а).

# ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО ПРИБЛИЖЕННОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА НА НЕОГРАНИЧЕННЫХ СВЕРХУ ВХОДНЫХ ДАННЫХ\*

Э. Х. Гимади<sup>1</sup>, А. Ле Галлу<sup>2</sup>, А. В. Шахшнейдер<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; gimadi@math.nsc.ru*

<sup>2</sup> *Ecole Polytechnique, Paris, France; arnaud.le-gallou@polytechnique.edu*

<sup>3</sup> *Новосибирский государственный университет, Новосибирск; smille@ngs.ru*

Для многих  $NP$ -трудных задач дискретной оптимизации на случайных входах актуальным является вероятностный анализ быстрых приближенных алгоритмов. Среди характеристик алгоритмов выделяют относительную погрешность  $\varepsilon_n$  и вероятность несрабатывания  $\delta_n$ , где  $n$  — размерность задачи. Оценки этих характеристик получены согласно предположению, что входные данные всех индивидуальных задач имеют одинаковое распределение. Соответственно относительная погрешность и вероятность несрабатывания алгоритма зависят от вида распределения входных данных.

В данном сообщении предлагается рассмотреть асимптотически точный подход к решению задачи коммивояжера [4], когда  $\varepsilon_n$  и  $\delta_n$  стремятся к 0 с ростом  $n$ .

Рассмотрим следующую модификация алгоритма «Иди в ближайший непройденный город» [1].

Пусть  $G$  —  $n$ -вершинный граф без петель, где расстояния между разными вершинами  $i$  и  $j$  равны соответствующим элементам матрицы расстояний  $(c_{ij})$ .

**Этап 1.** Пометим две произвольные вершины графа  $G$ . Для определенности пусть они имеют номера 1 и  $n$ :  $\pi_1 = 1$ ,  $\pi_n = n$ .

**Этап 2.** Положим  $i = 1$ . Пока  $1 \leq i \leq n - 2$  выполняем основной шаг.

**Основной шаг.** Помечаем раннее непомеченную вершину  $\pi_{i+1} < n$ , ближайшую к вершине  $\pi_i$ . Увеличиваем  $i$  на единицу.

Таким образом, в конце второго этапа, когда  $i = n - 1$ , будет построена цепь  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1}$ .

**Этап 3.** Соединяем изолированную вершину  $\pi_n = n$  с цепью  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1}$  так, чтобы образовался гамильтонов цикл  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1}, \pi_n, \pi_1$ .

Из описания модификации алгоритма следует, что его временная сложность  $O(n^2)$ .

Предположим, что недиагональные элементы матрицы расстояний  $(c_{ij})$  — независимые одинаково распределенные случайные величины.

В [2] представлен вероятностный анализ алгоритма «Иди в ближайший непройденный город» для приближенного решения задачи коммивояжера в случае, когда расстояния имеют дискретное распределение  $p_k = \mathbf{P}\{c_{ij} = k\}$ ,  $k = 1, \dots, r_n$ . Получено условие асимптотической точности алгоритма:

$$\sum_{k=1}^{r_n} \left( \sum_{i=1}^k p_i \right)^{-1} = o(n).$$

В [1] и [3] рассмотрена задача коммивояжера на непрерывных случайных данных в ограниченном интервале  $[a_n, b_n]$ ,  $a_n > 0$ . В случае равномерного распределения расстояний  $c_{ij} \in [a_n, b_n]$  получены оценки относительной погрешности  $\varepsilon_n = O\left(\frac{b_n/a_n}{n/\ln n}\right)$  и вероятности нестрабатывания

$\delta_n = n^{-\frac{3}{2}}$ . Доказано, что алгоритм является асимптотически точным при  $b_n/a_n = o(n/\ln n)$ . В случае  $\beta$ -распределения с параметрами  $\gamma = 0$ ,  $\alpha > 0$  асимптотическая точность имеет место при  $b_n/a_n = o(n^{\alpha+1} \min(1, \alpha))$ .

В [5] для задачи коммивояжера в полном  $n$ -вершинном неориентированном графе с весами ребер  $c_{ij}$  — независимыми случайными величинами, равномерно распределенными на отрезке  $[0, 1]$ , показано, что  $|f^* - f_2| = o(1)$ , при  $n \rightarrow \infty$ , где  $f^*$  — точное решение задачи коммивояжера,  $f_2$  — приближенное решение, основанное на точном решении задачи о цикловом покрытии.

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00395, 07-07-00022).

Данное сообщение посвящено вероятностному анализу модификации алгоритма «Иди в ближайший непройденный город» для решения задачи коммивояжера на случайных входных данных из неограниченной сверху области значений  $[a_n, \infty)$ ,  $a_n > 0$ , распределенных по нормальному

$$p(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{(x-a_n)^2}{2\sigma_n^2}\right), & \text{если } a_n \leq x \leq \infty, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

и показательному

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_n} \exp\left(-\frac{(x-a_n)}{\alpha_n}\right), & \text{если } a_n \leq x \leq \infty, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

законам.

Обозначим через  $\beta_n$  параметры  $\alpha_n$  и  $\sigma_n$  показательного и нормального распределения соответственно.

Основным результатом является следующая теорема:

**Теорема 1.**

*Модификация алгоритма «Иди в ближайший непройденный город» для решения задачи коммивояжера на случайных входных данных из неограниченной сверху области  $[a_n, \infty)$ ,  $a_n > 0$ , распределенных по нормальному и показательному законам, имеет оценки относительной погрешности и вероятности несрабатывания*

$$\varepsilon_n = O\left(\frac{\beta_n/a_n}{n/\ln n}\right); \quad \delta_n = O(n^{-1}),$$

*а также алгоритм является асимптотически точным при*

$$\frac{\beta_n}{a_n} = o\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

Заметим, что полученный результат справедлив для задач коммивояжера, рассматриваемых как на ориентированных, так и на неориентированных графах.

### Литература

1. Э. Х. Гимади, В. А. Перепелица Асимптотический подход к решению задачи коммивояжера // Управляемые системы. ИМ, ИК СО АН СССР, 1974. № 12. С. 35–45.
2. Э. Х. Гимади, В. А. Перепелица Задача нахождения минимального гамильтонова цикла в взвешанном графе // Дискретный анализ. Новосибирск, 1969. № 15. С. 57–65.
3. Gimadi Edward Kh. On some probability inequalities for some discrete optimization problems // Operations Research Proceedings 2005. Selected papers. International Conference OR 2005, Bremen, Springer, Berlin, 2006. P. 283–289.
4. Flood M. The travelling — salesman problem // Operations Research Proceedings. 1956. № 4, NI. P. 61–75.
5. Frieze A.M. On random symmetric travelling salesman problems // Mathematics of Operations Research. 2004. № 29(4). P. 878–890.



## ГРАФЫ ГРЕЦША — ЗАКСА\*

А. А. Добрынин<sup>1</sup>, Л. С. Мельников<sup>1,2</sup><sup>1</sup> Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; *dobr@math.nsc.ru*<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет, Новосибирск; *omeln@math.nsc.ru*

Плоский связный граф называется  $k$ -хроматическим, если его вершинное хроматическое число  $\chi(G)$  равно  $k$ . Назовем граф *реберно 4-критическим*, если он является 4-хроматическим и удаление любого ребра делает его 3-хроматическим. Пусть плоский граф  $G = G(S)$  образован суперпозицией множества  $S$  простых замкнутых кривых на плоскости в общем положении, т.е. кривые не имеют самопересечений, не касаются друг друга, и никакие три кривые не имеют общей точки. Вершины графа  $G$  соответствуют точкам пересечения кривых из  $S$ , а ребра соответствуют дугам кривых, соединяющим соседние точки пересечения. Число вершин в графе  $G(S)$  всегда четно, т.к. любые две кривые пересекаются в четном числе точек. Такие 4-регулярные плоские графы называются *графами Грецша–Закса*. Множество замкнутых кривых из  $S$  разобьем на *параллельные классы*, в каждом из которых кривые попарно не пересекаются. Минимальное число параллельных классов обозначим через  $s$ .

Вероятно, Г. Грецш в 50-х годах прошлого столетия был первым, кто исследовал задачу раскраски графов, образованных пересечениями кривых на плоскости. На ряде конференций по теории графов в 70–80-х годах Х. Закс обсуждал следующую гипотезу, приписываемую им Грецшу: хроматическое число графов Грецша–Закса не превосходит 3 (*гипотеза Грецша–Закса*) [1, 2]. Последующие исследования показали, что хроматическое число таких графов зависит от количества параллельных классов  $s$ . В 1976 г. Ф. Жеже доказал, что при  $s \leq 3$  все графы Грецша–Закса  $G$  являются 3-раскрашиваемыми, т.е.  $\chi(G) \leq 3$  [3, 4]. Другое доказательство этого факта предложил Г. Кестер в [5]. В 1984 г. Кестер опроверг гипотезу Грецша–Закса, построив два 4-регулярных 4-хроматических графа [5–7], порождаемых пересечением семейств окружностей на плоскости. Графы Кестера долгое время являлись единственными примерами 4-хроматических графов Грецша–Закса для  $s > 4$ . Безуспешные попытки построить такие графы для  $s = 4$  привели к гипотезе *гипотеза Грецша–Закса–Кестера*: если семейство кривых, порождающих граф  $G$ , имеет четыре параллельных класса, то  $\chi(G) \leq 3$  [8–11]. Эта гипотеза опровергнута Добрыниным и Мельниковым в работе [12], бесконечные серии таких графов построены в [13]. Там же ставился более трудный вопрос о существовании реберно 4-критических графов Грецша–Закса с  $s = 4$ .

Перспективным методом для исследований раскрасок плоских графов является вклейка в них растущих графов с регулярной структурой, позволяющей хорошо контролировать раскраску вершин. Для построения критических графов нами были использованы *лестницы бабочек*, подробно рассмотренные в [14] (одна бабочка образуется отождествлением одной вершины в двух треугольниках). Для таких графов 3-раскраска их вершин полностью определяется цветами двух выделенных начальных вершин и четностью числа бабочек в лестнице. Кроме того, лестницы с числом бабочек  $4k$ ,  $k \geq 1$ , не нарушают свойство графа быть графом Грецша–Закса и сохраняют 4-связность. Вклейкой лестницы бабочек в граф можно добиться того, чтобы некоторое некритическое ребро стало критическим. Однако, критическое ребро после вклейки лестницы может перестать быть таковым. Поэтому существенным является нахождение подходящего места для вклейки. С помощью этого метода удалось ответить на вопрос о существовании реберно 4-критических графов Грецша–Закса с  $s = 4$  [15, 16].

**Теорема 1.** *Существуют бесконечные семейства реберно 4-критических графов Грецша–Закса порядка  $48 + 12k$ ,  $k \geq 0$ , с числом параллельных классов  $s = 4$ .*

Начальные графы этих двух семейств имеют число вершин 48 (см. рис. 1) и были получены вклейкой двух лестниц длины 4 в некоторый некритический 4-хроматический граф Грецша–Закса с 24 вершинами. Графы с большим числом вершин получаются увеличением длины лестниц бабочек.

В докладе дан обзор других результатов в этой области и сформулированы открытые проблемы.

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номера проектов 05-01-00395 и 05-01-00816).

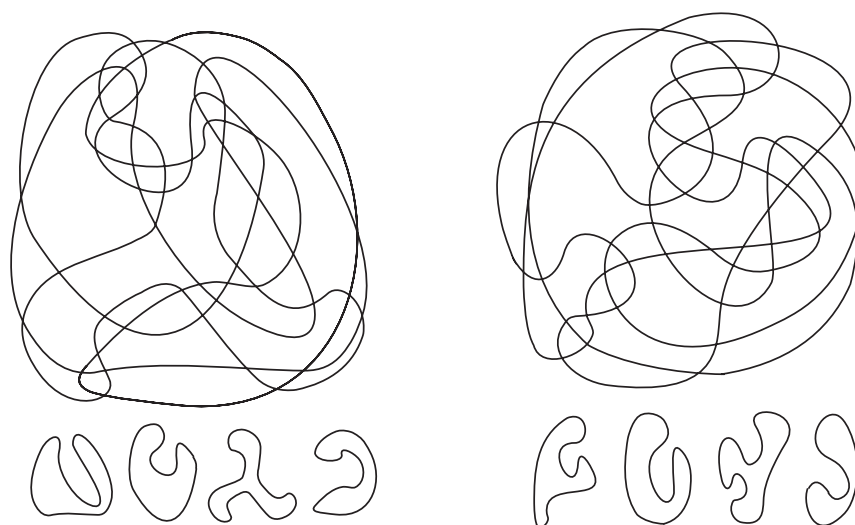


Рис. 1. 4-критические графы Грещша–Закса с  $s = 4$ .

### Литература

1. *Sachs H.* Problem // *Math. Balkanica*. 1974. V. 4. P. 536.
2. *Sachs H.* A Three-Colour-Conjecture of Grötzsch // J.-C. Bermond, J.-C. Fournier, M. Las Vergnas, D. Sotteau (eds.) *Problèmes Combinatoires et Theorie des Graphes*. Paris: Editions du Centre National de la Recherche Scientifique. 1978. P. 441.
3. *Jaeger F.* Proceedings of the Fifth British Combinatorial Conference 1975, *Congressus Numerantium XV Winnipeg*; Utilitas Mathematica, Publishing Inc. 1976. P. 682–683.
4. *Jaeger F.* Sur les graphes couverts par leurs bicycles et la conjecture des quatre couleurs // J.-C. Bermond, J.-C. Fournier, M. Las Vergnas, D. Sotteau (eds.) *Problèmes Combinatoires et Theorie des Graphes*. Paris: Editions du Centre National de la Recherche Sci. 1978. P. 243–247.
5. *Koester G.* Coloring problems on a class of 4-regular planar graphs // H. Sachs (ed.) *Graphs, Hypergraphs and Applications*. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1985. P. 102–105.
6. *Koester G.* Bemerkung zu einem Problem von H.Grötzsch // *Wiss. Z. Univ. Halle*. 1984. V. 33. P. 129.
7. *Koester G.* Note to a problem of T. Gallai and G.A. Dirac // *Combinatorica*. 1985. V. 5, № 3. P. 227–228.
8. *Jensen T., Toft B.* Graph Coloring Problems. New York: John Wiley & Sons, 1995. P. 44–45.
9. Graph Theory in Memory of G. A. Dirac. I. D. Andersen, I. T. Jakobsen, C. Tomassen, B. Toft, P. D. Vestergaard (eds.) *Annals Discrete Math*. 1989. V. 41. P. 515–517.
10. *Graphs, Hypergraphs and Applications*. H. Sachs (ed.) B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1985. P. 211–218.
11. *Steinberg R.* The state of the three color problem // J. Gimbel, J.W. Kennedy, L.V. Quintas (eds.) *Que Vadis, Graph Theory? Annals Discrete Math*. 1993. V. 55. P. 211–248.
12. *Dobrynin A.A., Mel'nikov L.S.* Counterexamples to Grötzsch–Sachs–Koester's conjecture // *Discrete Math*. 2006. V. 306, №6. P. 591–594.
13. *Dobrynin A.A., Mel'nikov L.S.* Infinite families of 4-chromatic Grötzsch–Sachs graphs // *J. Graph Theory*, submitted.
14. *Мельников Л.С.* Семейства плоских 4-регулярных 4-критических графов // *Дискретный анализ и исследование операций*. Серия 2. 2004. Т. 11, №1. С. 79–115.
15. *Mel'nikov L.S., Dobrynin A.A., Koester G.* 4-chromatic Grötzsch–Sachs graphs and edge 4-critical 4-valent planar graphs, some remarks on older and latest results // *Report on Conf. Graph Theory on the Occasion of the 80th Birthday of Prof. Horst Sachs, Technical University Ilmenau, Germany, Ilmenau, March 27–30, 2007*.
16. *Dobrynin A.A., Mel'nikov L.S.* Edge 4-critical Grötzsch–Sachs graphs // *Discrete Math.*, submitted.

# ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ СХЕМА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНЫХ ТИПОВ СОЕДИНЕНИЙ В АЦИКЛИЧЕСКОЙ СЕТИ С УЧЕТОМ ЭЛЬМОРОВСКОЙ ЗАДЕРЖКИ\*

А. И. Ерзин

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; adil@math.nsc.ru*

Рассматривается задача выбора оптимальных типов соединений на ребрах ациклической сети, включающей источник сигнала и подмножество вершин-терминалов (получателей сигнала). Сигнал из источника должен быть получен каждым терминалом  $k$  в течение заданного интервала времени  $[d_k, D_k]$ . Для вычисления времени прохождения сигнала в сверхбольших интегральных схемах (СБИС) используется, как правило, модель Эльмора [1]. При этом время прохождения сигнала зависит от емкости  $c_{ij}(x)$  и сопротивления  $r_{ij}(x)$  каждого ребра  $(i, j)$  и задается функциями от типа соединения  $x$ . В англоязычной литературе выбор типов соединений, как правило, ограничивается определением их толщины, и этой тематике посвящен целый ряд работ, достаточно подробный обзор которых можно найти в [2].

Для постановки проблемы нам понадобятся формулы Эльмора [1] позволяющие вычислить время получения сигнала вершинами дерева. Пусть задано дерево  $T = (V, E)$ , с множеством вершин  $V = \{0, 1, \dots, n\}$ , содержащим источник сигнала (корень дерева) – вершину 0, подмножеством терминалов  $V' \subseteq V$  и множеством ориентированных от корня дуг  $E$ . Обозначим  $P_k$  – путь из вершины 0 в вершину  $k$  в дереве  $T$ ;  $T_i$  – поддереву дерева  $T$  с корнем в вершине  $i \in V$ ;  $r_0$  – сопротивление в источнике 0;  $c_i$  – емкость вершины  $i \in V \setminus \{0\}$ ;  $C_j = \sum_{(u,v) \in T_j} c_{uv} + \sum_{u \in T_j} c_u$  – суммарную емкость поддерева  $T_j$ .

Тогда время прохождения сигнала по дуге  $(i, j)$  (*задержка*) в модели Эльмора полагается равным

$$d_{ij}(x_{ij}) = r_{ij}(x_{ij}) \left( \frac{c_{ij}(x_{ij})}{2} + C_j \right), \quad (1)$$

а время прихода сигнала из источника 0 в вершину  $k$  вычисляется по формуле

$$t_k = C_0 r_0 + \sum_{(i,j) \in P_k} d_{ij}(x_{ij}), \quad (2)$$

где  $x_{ij}$  – тип соединения, используемого на дуге  $(i, j) \in E$ .

В данной работе рассматривается задача, которая обобщает многие известные ранее постановки [2].

**Задача.** Для каждой дуги  $(i, j)$  дерева  $T$  из заданного конечного множества  $X_{ij}$  выбрать такой допустимый тип соединения  $x_{ij}$ , что время прихода сигнала  $t_k$  в каждый терминал  $k \in V'$  принадлежит отрезку  $[d_k, D_k]$  и суммарная емкость дерева минимальна.

Математическая постановка задачи:

$$\sum_{(i,j) \in T} c_{ij}(x_{ij}) \longrightarrow \min_{\{x_{ij} \in X_{ij}\}}, \quad (3)$$

$$t_k \in [d_k, D_k], \quad k \in V'. \quad (4)$$

Время  $t_k$  в (4) вычисляется по формулам Эльмора (1)–(2).

Для решения задачи (3)–(4) предлагается использовать однопараметрическую схему динамического программирования (ДП), которая частично описана в [3]. На прямом ходе алгоритма

\* Работа выполнена при поддержке гранта Интел «Модели и методы трассировки при проектировании СБИС».

для каждой дуги  $(i, j)$  ищутся значения функционала  $S_{ij}(t)$ , которые равны минимальной емкости поддерева  $T_j$ , если сигнал в вершину  $i$  – родитель вершины  $j$  пришел из источника за время  $t$ , и все терминалы поддерева  $T_j$  получают сигнал своевременно. Затем вычисляются значения функций  $S_i(t)$  – минимум суммарной емкости допустимого поддерева  $T_i$ , если время прихода сигнала в вершину  $i$  равно  $t$ . Параметр  $t$  пробегает все возможные значения от  $d = \min_{k \in V'} d_k$  до  $D = \max_{k \in V'} D_k$ .

Как отмечено в [3], вычисление значения  $S_{ij}(t)$  и нахождение условно-оптимального решения  $x_{ij}(t)$  для произвольной дуги  $(i, j) \in E$  при фиксированном значении параметра  $t$  требует решения рекурсии, что увеличивает трудоемкость прямого хода. В данной работе рассмотрены частные случаи, когда решение рекурсии осуществляется с меньшей трудоемкостью.

Во время выполнения обратного хода алгоритма ДП по условно-оптимальному решению восстанавливается оптимальное решение задачи.

С деталями алгоритма можно ознакомиться в работе [3].

Для выбора оптимальной *толщины* соединений динамическое программирование использовалось и ранее. Например, в работе [4] *двухпараметрический* алгоритм ДП строит решение с трудоемкостью  $O(n^X)$ , где  $X = \max_{(i,j) \in E} |X_{ij}|$ . Алгоритм *двухпараметрического* ДП, определяющий оптимальные типы соединений (толщину и возможность использования буферов) для частного случая функций сопротивления и емкости предложен в [5]. Этот алгоритм находит оптимальную *толщину* соединений (без использования буферов) с трудоемкостью  $O(n^2 X^2)$ .

В данной работе предложен алгоритм *однопараметрического* ДП, который применим для произвольных функций  $c_{ij}(x)$  и  $r_{ij}(x)$  и в общем случае имеет трудоемкость –  $O(nXQ^2)$ , где  $Q = D - d$ . Рассмотрены также частные случаи задачи выбора *толщины* соединений, когда трудоемкость удается сократить до  $O(nXQ \log_2 Q)$  или  $O(nX^2Q)$ .

В СБИС ребра сети принадлежат либо какому-нибудь определенному слою, либо межслойному соединению. Соединения одного слоя, как правило, имеют одинаковые характеристики. В связи с этим в дальнейших исследованиях планируется рассмотреть задачу выбора оптимального слоя для каждой дуги дерева. Последняя задача не является частным случаем задачи (3)–(4), т. к. межслойные соединения не позволяют использовать ту же однопараметрическую схему ДП, что и для задачи (3)–(4). Поэтому для ее решения планируется разработать псевдополиномиальную двухпараметрическую схему ДП.

## Литература

1. *Elmore W. C.* The Transient Response of Damped Linear Networks with Particular Regards to Wide-Band Amplifiers // J. Appl. Phys. 1948. V. 19. P. 55–63.
2. *Cong J. J., Pan Z.* Wire Width Planning for Interconnect Performance Optimization // IEEE Trans. on CAD of Integrated Systems. 2002. V. 21. No. 3. P. 319–329.
3. *Ерзин А. И.* Выбор оптимальных соединений в дереве с учетом задержек Эльмора // В кн.: Сб. научн. трудов 2-й Всерос. научно-тех. конф. “Проблемы разработки перспективных микрорелектронных систем - 2006”. М.: ИППМ РАН, 2006. С. 109–114.
4. *Cong J. J., Leung K. S.* Optimal Wiresizing Under Elmore Delay Model // IEEE Trans. on CAD of Integrated Systems. 1995. V. 14. No. 3. P. 321–336.
5. *Lillis J., Cheng C. K., Lin T. T.* Optimal Wire Sizing and Buffer Insertion for Low Power and a Generalized Delay Model // IEEE J. of Solid-State Circuits. 1996. V. 31. No. 3. P. 437–447.

# ПРОБЛЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА И РАСПОЗНАВАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ\*

А. В. Кельманов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; kelm@math.nsc.ru*

Рассматривается нетрадиционный подход к помехоустойчивому компьютерному анализу и распознаванию числовых последовательностей, сущность которого состоит в апостериорном (off-line) способе обработки последовательности в сочетании с формализацией содержательной задачи как задачи принятия решения (проверки гипотез). Изложены результаты по исследованию сложности, решению и систематизации дискретных экстремальных задач, к которым сводится реализация этого подхода в случае, когда последовательности включают квазипериодически чередующиеся информационные фрагменты (подпоследовательности), имеющие одну и ту же размерность (число членов).

Задачи, входящие в анализируемую совокупность, возникают в приложениях, связанных с обработкой массивов зашумленных структурированных данных — результатов измерения характеристик изучаемых объектов различной природы. Эти задачи типичны, в частности, для электронной разведки, дистанционного зондирования, телекоммуникации, геофизики, обработки сигналов, биометрики, медицинской и технической диагностики, радиолокации, гидроакустики, криминалистики, поиска по мультимедийным базам данных и др.

В основе трех хорошо изученных традиционных подходов лежат последовательный (on-line) и апостериорный способы обработки последовательности в сочетании с формализацией содержательной задачи как задачи оценивания (оптимальной фильтрации), а также последовательный способ обработки в комбинации с формализацией задачи как задачи проверки гипотез. Эти подходы имеют глубокую историю и связаны с фундаментальными работами Колмогорова, Котельникова, Пугачева, Ширяева, Харкевича, Андерсона, Вальда, Винера, Калмана, Пэйджа, Хинкли и множества других отечественных и зарубежных исследователей. При реализации традиционных подходов проблемы комбинаторной оптимизации как правило не возникают. В противоположность этому, реализация рассматриваемого в работе подхода сопряжена с решением специфических задач комбинаторной оптимизации с целью выбора наилучшего из множества допустимых решений, мощность которого растет экспоненциально при увеличении длины последовательности.

Числовая последовательность, включающая квазипериодически чередующиеся ненулевые информационные фрагменты размерности  $q$ , определяется следующей формулой общего члена:

$$x_n = \sum_{m \in \mathbb{M}} u_{n-n_m}(m), \quad n = 0, \dots, N-1,$$

где  $u_{n-n_m}(m) = 0$ , если  $n-n_m \neq 0, \dots, q-1$ ;  $(u_0(m), \dots, u_{q-1}(m)) \in \mathbb{R}^q$ ,  $0 < \|(u_0(m), \dots, u_{q-1}(m))\| < \infty$  при каждом  $m \in \mathbb{M} = \{1, \dots, M\}$ , а  $(n_1, \dots, n_M) \in \Omega$ , причем

$$\Omega = \bigcup_{M=M_{\min}}^{M_{\max}} \Omega_M,$$

где

$$\Omega_M = \{(n_1, \dots, n_M) : 0 \leq n_1 \leq N^+ \leq N - q; 0 \leq N^- \leq n_M \leq N - q; \\ 0 < q \leq T_{\min} \leq n_m - n_{m-1} \leq T_{\max} \leq N - q, m = 2, \dots, M\},$$

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06-01-00058, № 07-07-00022).

а  $M_{\min}$  и  $M_{\max}$  находятся из решения системы неравенств, входящих в определение множества  $\Omega_M$ , в которой  $N^-, N^+, T_{\min}$  и  $T_{\max}$  — целые числа. Термин «квазипериодическая последовательность» (т.е. последовательность, квазипериодически изменяющая свои свойства) обусловлен спецификой ограничений, входящих в определение множества  $\Omega_M$ .

Положим  $U_m = (u_0(m), \dots, u_{q-1}(m))$  и назовем  $U_m, m \in \mathbb{M}$ , — информационным вектором, последовательность его компонент — информационной последовательностью. Фрагмент  $(x_{nm}, \dots, x_{n_{m+q-1}}), m \in \mathbb{M}$ , последовательности  $x_n, n = 0, \dots, N-1$ , совпадающий с вектором  $U_m$ , будем называть информационным фрагментом.

Предполагается, что вектор  $X = (x_0, \dots, x_{N-1})$ , последовательность компонент которого содержит чередующиеся информационные фрагменты, недоступен для непосредственной обработки из-за вектора помехи  $E = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{N-1}) \in \Phi_{0, \sigma^2 I}$ , где  $\Phi_{0, \sigma^2 I}$  — нормальное распределение. Доступным для обработки считается вектор  $Y = X + E$ . При этом вектор  $X$  рассматривается как функция  $X(n_1, \dots, n_M, U_1, \dots, U_M)$ , совокупность аргументов которой уточняется при формулировке различных вариантов задач анализа и распознавания.

Все рассмотренные в докладе дискретные экстремальные задачи выявлены (возникают) в результате формализации содержательных задач обработки данных как задач принятия решения (о среднем  $X(\cdot)$  случайного гауссовского вектора  $Y \in \Phi_{X(\cdot), \sigma^2 I}$ ), доставляющего максимум функционалу правдоподобия. К идентичным формулировкам экстремальных задач приводит минимизация функционала  $\|Y - X(\cdot)\|^2$  суммы квадратов отклонений.

Совокупность выявленных экстремальных задач включает следующие классы, объединяющие содержательно похожие задачи:

- 1) обнаружение в числовой последовательности повторяющегося фрагмента;
- 2) распознавание последовательности, включающей повторяющийся фрагмент;
- 3) обнаружение и идентификация фрагментов;
- 4) распознавание последовательности, включающей фрагменты из алфавита;
- 5) обнаружение фрагментов в последовательности и разбиение этой последовательности на серии идентичных фрагментов;
- 6) распознавание последовательности, включающей серии идентичных фрагментов;
- 7) обнаружение в числовой последовательности повторяющегося набора фрагментов;
- 8) распознавание последовательности, включающей повторяющийся набор фрагментов;
- 9) обнаружение и идентификация наборов фрагментов;
- 10) кластеризация последовательностей.

Для части экстремальных задач из анализируемой совокупности установлена полиномиальная разрешимость либо NP-трудность, обоснованы точные и приближенные алгоритмы их решения (см. [1-3] и цитированные там работы). Однако статус вычислительной сложности многих задач из этой совокупности пока не выяснен. Установление статуса комбинаторной сложности этой части задач представляется важным делом ближайшей перспективы, поскольку они являются специальными случаями задач обработки последовательностей с более сложной структурой.

## Литература

1. Кельманов А. В. Апостериорный подход к решению типовых задач анализа и распознавания числовых квазипериодических последовательностей: обзор результатов // Доклады XII Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов» (ММРО-12). Москва: ВЦ РАН, 2005. С. 125–128.
2. Кельманов А. В. Проблемы оптимизации в типовых задачах помехоустойчивой апостериорной обработки числовых последовательностей с квазипериодической структурой // Материалы 3-й Всероссийской конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Омск: ОмГТУ, 2006. С. 37–41.
3. Кельманов А. В. Полиномиально разрешимые и NP-трудные варианты задачи оптимального обнаружения в числовой последовательности повторяющегося фрагмента // Материалы конференции «Дискретная оптимизация и исследование операций» (DOOR'07). Владивосток-Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2007 (в печати).

# ПОЛНЫЙ 4-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СЛОЖНОСТИ КЛАССИЧЕСКИХ ЦЕХОВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ\*

А. В. Кононов<sup>1</sup>, М. И. Свириденко<sup>2</sup>, С. В. Севастьянов<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; alvenko@math.nsc.ru*

<sup>2</sup> *IBM T. J. Watson Research Center, Yorktown Heights, USA; sviri@us.ibm.com*

<sup>3</sup> *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; seva@math.nsc.ru*

Одним из главных вопросов, возникающих при решении задач дискретной оптимизации, является вопрос о сложности задачи: существует ли нетрудоёмкий алгоритм её решения? Стандартными вариантами ответа на этот вопрос являются либо предъявление конкретного алгоритма полиномиальной трудоёмкости, либо доказательство NP-трудности задачи (что практически равносильно противоположному ответу, утверждающему несуществование полиномиального алгоритма). Получение одного из этих ответов является начальным шагом в анализе сложности задачи — оценивается как бы сложность задачи "в целом". Однако реально этого недостаточно для получения полной картины сложности, поскольку большинство задач являются сложными объектами, в которых как множество допустимых решений, так и целевая функция могут регулироваться несколькими параметрами. Задание конкретных значений этих параметров ограничивает множество допустимых входов и множество возможных выходов задачи, в результате чего мы получаем **подзадачу** исходной задачи (при условии, что мы пользуемся той же схемой кодирования входных данных, что и в общей задаче). А для всевозможных комбинаций значений этих параметров получаем полный набор подзадач исходной задачи (по выбранному набору параметров).

Этих подзадач может быть очень много (как правило, их счётное число), однако нам хотелось бы получить **полную картину сложности** всех этих подзадач, причём — обозримую за конечное время. Такой обозримой картиной сложности может являться так называемая *базисная система подзадач* (БСП), состоящая из двух семейств подзадач:  $\mathcal{P}_P = \{P'_1, P'_2, \dots\}$  и  $\mathcal{P}_{NP} = \{P''_1, P''_2, \dots\}$ , где для задач из  $\mathcal{P}_P$  доказана полиномиальная разрешимость, а для задач из  $\mathcal{P}_{NP}$  — NP-трудность (или NP-полнота, если речь идёт о задачах распознавания). Характерными свойствами БСП являются свойства независимости и полноты. *Независимость* означает, что никакая задача из  $\mathcal{P}_P$  не является подзадачей другой задачи из  $\mathcal{P}_P$ , и то же верно для множества  $\mathcal{P}_{NP}$ . *Полнота* означает, что любая подзадача из рассматриваемого класса (определяемого данным набором параметров) является либо подзадачей какой-либо задачи из  $\mathcal{P}_P$ , либо надзадачей какой-либо базисной задачи из  $\mathcal{P}_{NP}$ .

Как правило, при достаточно общих условиях на множества допустимых значений выбранных для анализа параметров удаётся доказать существование БСП, её единственность и конечность [2]. Свойство конечности БСП и даёт ту самую "обозримость" картины сложности.

В качестве иллюстрации этого, достаточно нового для дискретной оптимизации подхода был проделан 4-параметрический анализ сложности ряда задач. В частности, в [5] был представлен полный 4-параметрический анализ сложности задачи о связной предписанной раскраски вершин графа, а в [4] — почти полный (за исключением одного открытого вопроса) анализ сложности задачи open shop — классической цеховой задачи теории расписаний, впервые сформулированной и исследованной Гонзалезом и Сани в 1976 г. [1].

В настоящей работе представлена очередная успешная иллюстрация этого подхода — полный 4-параметрический анализ сложности классических цеховых задач job shop, open shop и mixed shop (обозначаемых в краткой записи буквами  $J, O$  и  $X$ ), где mixed shop является обобщением как job shop, так и open shop. Выбранными для анализа параметрами являются:

- 1) модель (с множеством допустимых значений  $\{J, O, X\}$ );
- 2) множество допустимых значений длительностей операций  $\{p_{ij}\}$ ;
- 3) ограничение сверху на число операций каждой работы ( $op$ );
- 4) ограничение сверху на длину расписания ( $C_{\max}$ ).

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05–01–00960).

Показано, что БСП для такой задачи состоит из 11 подзадач, 6 из которых полиномиально разрешимы, а остальные 5 — NP-полны:

$$\mathcal{P}_P = \{ \langle X | p_{ij} = 1, op \leq 2 | C_{\max} \leq K \rangle^*; \\ \langle X | op \leq 1 | C_{\max} \leq K \rangle; \\ \langle X | C_{\max} \leq 2 \rangle^*; \\ \langle J | C_{\max} \leq 3 \rangle; \\ \langle O | C_{\max} \leq 3 \rangle; \\ \langle O | p_{ij} = 1 | C_{\max} \leq K \rangle \}$$

(где  $K$  — произвольная величина, являющаяся частью входа)

$$\mathcal{P}_{NP} = \{ \langle X | p_{ij} \in \{1, 2\}, op \leq 2 | C_{\max} \leq 3 \rangle^*; \\ \langle X | p_{ij} = 1, op \leq 3 | C_{\max} \leq 3 \rangle^*; \\ \langle J | p_{ij} \in \{1, 2\}, op \leq 2 | C_{\max} \leq 4 \rangle^*; \\ \langle J | p_{ij} = 1, op \leq 3 | C_{\max} \leq 4 \rangle; \\ \langle O | p_{ij} \in \{1, 2\}, op \leq 2 | C_{\max} \leq 4 \rangle^* \}$$

Таким образом, данная работа существенно обобщает однопараметрический анализ сложности задач job shop и open shop (продоланный по значению ограничения на длину расписания), представленный в работе [3]. При этом в формировании базисной системы подзадач участвуют как ранее полученные результаты (из работ [1] и [3]), так и новые результаты, отмеченные в приведённых выше списках звёздочками.

### Литература

1. *Gonzalez T., Sahni S.* Open Shop Scheduling to Minimize Finish Time // J. ACM. 1976. V. 23, No. 4. P. 665–679.
2. *Sevastianov S.* An introduction to multi-parameter complexity analysis of discrete problems // European Journal of Operational Research. 2005. V. 165, No. 2. P. 387–397.
3. *Williamson D. P., Hall L. A., Hoogeveen J. A., Hurkens C. A. J., Lenstra J. K., Sevastianov S. V., Shmoys D. B.* Short shop schedules // Operations Research. 1997. V. 45, No. 2. P. 288–294.
4. *Каширских К.Н., Севастьянов С.В., Черных И.Д.* Четырёхпараметрический анализ сложности задачи open shop // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 59–77.
5. *Кононов А.В., Севастьянов С.В.* О сложности нахождения связной предписанной раскраски вершин графа // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 2. С. 21–46.



## О СВИТЧИНГОВЫХ МЕТОДАХ ПОСТРОЕНИЯ $q$ -ЗНАЧНЫХ КОДОВ

А. В. Лось

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; sozercatel@gmail.com*

Данный доклад представляет собой обзор работ, посвященных исследованию свойств и построению новых  $q$ -значных совершенных кодов с помощью свитчинговых методов построения кодов. Первые свитчинговые конструкции  $q$ -значных совершенных кодов предложили Шонхейм в 1968 году и Моллар в 1983 году. В 1996 году Августинович С. В. и Соловьева Ф. И. предложили свитчинговый метод, называемый методом  $\tilde{\alpha}$ -компонент, для построения двоичных кодов.

В настоящей работе рассматриваются три свитчинговых метода построения и исследования  $q$ -значных совершенных кодов, каждый из которых дает возможность оценить число различных  $q$ -значных совершенных кодов снизу. Кроме того, приводятся некоторые результаты о структурных свойствах  $q$ -значных совершенных кодов, полученные с помощью этих методов.

Пусть  $V_q^N$  — векторное пространство размерности  $N$  с метрикой Хэмминга над полем Галуа  $GF(q)$ , где  $q$  — степень простого числа. Подмножество  $C$  пространства  $V_q^N$  называется *совершенным  $q$ -значным кодом длины  $N$  с расстоянием  $3$*  (кратко *совершенным кодом*), если  $|C| = q^{N - \log_q(q^N - N + 1)}$  и расстояние между любыми двумя *кодowymi словами* не менее  $3$ . Известно, что такой код существует только для  $N = (q^m - 1)/(q - 1)$ , где  $m$  любое натуральное число не меньшее двух. Код  $C$  называется *линейным*, если он является подпространством  $V_q^N$ . Совершенный линейный в пространстве  $V_q^N$  код  $\mathcal{H}_q^N$  называется *кодом Хэмминга*. Всюду далее  $N = qn + 1$ ,  $n = (q^{m-1} - 1)/(q - 1)$  и  $m \geq 2$ . Пусть  $R$  — некоторое подмножество совершенного кода  $C$  и  $R'$  — множество векторов, полученное действием некоторой нетождественной перестановки на элементах от  $0$  до  $q - 1$  в  $i$ -й позиции кодовых слов множества  $R$ . Множество  $R$  называется  *$i$ -компонентой* совершенного кода  $C$ , если множество  $C' = (C \setminus R) \cup (R')$  является совершенным кодом. Будем говорить, что код  $C'$  получен из кода  $C$  *свитчингом  $i$ -компоненты  $R$* .

Пусть  $\mathcal{H}_q^N$  —  $q$ -значный код Хэмминга длины  $N$ . Подпространство, порожденное совокупностью кодовых слов веса  $3$  кода  $\mathcal{H}_q^N$  с единичной  $i$ -й координатой, обозначим через  $R_i$ . Известно, что множество  $R_i$  является  $i$ -компонентой кода  $\mathcal{H}_q^N$ . Обсудим основные идеи конструкций и получаемые с их помощью нижние оценки числа различных  $q$ -значных совершенных кодов.

**Конструкция А.** В [1] была приведена конструкция для  $q$ -значного случая, которая является обобщением метода построения двоичных совершенных кодов последовательными сдвигами  $\tilde{\alpha}$ -компонент, предложенного в [2]. Конструкция позволила получить следующую нижнюю оценку числа  $F_q(N)$  различных совершенных  $q$ -значных кодов длины  $N = qn + 1$ , где  $n = (q^{m-1} - 1)/(q - 1)$  и  $m \geq 2$ :

$$F_q(n) > q^{q^{n-(m-1)}} \cdot (3q)^{q^{\frac{n-1}{q}-(m-2)}}.$$

Идея конструкции заключается в следующем: исходный код Хэмминга  $\mathcal{H}_q^N$  расслаивается на непересекающиеся крупные  $(i, j, k)$ -компоненты, каждая из которых в свою очередь — на меньшие  $i$ -компоненты  $R_i$  по одному из трех направлений  $i$ ,  $j$  или  $k$ . После этого осуществляется свитчинг каждой  $i$ -компоненты на один из  $q$  элементов поля  $GF(q)$ . Эти преобразования дают основной вклад в нижнюю оценку в виде первого мультипликативного члена. Далее осуществляется свитчинг уже  $(i, j, k)$ -компонент, который также дает свой вклад в оценку числа различных совершенных кодов.

Учитывая связь проверочной матрицы  $q$ -значного кода Хэмминга  $\mathcal{H}_q^N$  с проективной геометрией  $PG(m - 1, q)$ , Романов (см. [3]) улучшил эту оценку, заменив тройку во втором мультипликативном члене на  $(q + 1)$ .

**Конструкция В.** Дальнейшая модификация конструкции А позволила получить очередное улучшение оценки за счет так называемых свитчингов по перестановке, то есть  $i$ -я позиция кодовых слов компоненты  $R_i$  меняется не на один выбранный элемент поля  $GF(q)$ , а под действием перестановки, действующей на элементах поля, см. [4]. Оценка имеет следующий вид:

$$F_q(N) > (q!)^{q^{n-(m-1)}} \cdot 3q^{\frac{n-1}{q}-(m-2)}. \quad (1)$$

**Конструкция С.** В работе [5] продолжено развитие свитчингового подхода. В  $i$ -компонентах кода Хэмминга выделяются так называемые простые компоненты, возникающие в случае простого поля  $GF(p^r)$ ,  $r > 1$  (в  $i$ -ой позиции кодовых слов такой компоненты содержатся элементы простого подполя  $GF(p)$ ). Впервые такие компоненты были рассмотрены в [6]. Данная конструкция позволила получить нижнюю оценку числа  $F_q(N)$  различных совершенных  $q$ -значных кодов, являющуюся на сегодняшний день лучшей.

**Теорема 1.** Число  $F_q(N)$  различных совершенных  $q$ -значных кодов длины  $N = qn + 1$ , где  $n = (q^{m-1} - 1)/(q - 1)$ ,  $q = p^r$  и  $m \geq 2$  не меньше, чем

$$(p!)^{q^{n \cdot (\frac{2r-1}{r})-(m-1)}} \cdot (q + 1)^{q^{\frac{n-1}{q}-(m-2)}}. \quad (2)$$

Сравним две последние оценки. При  $r = 1$ , то есть  $q = p$ , первые мультипликативные члены этих оценок совпадают, но, учитывая, что  $q > 2$ , второй множитель оценки (2) больше второго множителя оценки (1). В случае  $r > 1$  первый множитель в (2) значительно превосходит первый множитель в (1). Простая компонента специального вида является минимальной, т. е. она неразложима на компоненты меньшей мощности. Это свойство означает, что приведенная выше оценка не может быть существенно улучшена свитчингами такого типа компонент.

Рассмотрим применение конструкции С для исследования свойств  $q$ -значных совершенных кодов. В работе [7], используя вышеописанные свитчинги компонент были исследованы пересечения  $q$ -значных совершенных кодов, получены следующие результаты.

**Теорема 2.** Для любого  $k \in \{0, \dots, p \cdot K - 2, p \cdot K\}$  существуют два  $q$ -значных совершенных кода  $\mathcal{H}_q^N$  и  $\mathcal{C}$  длины  $N = pq + 1$  такие, что  $|\mathcal{H}_q^N \cap \mathcal{C}| = k \cdot |P_i|/p$ , где  $|P_i| = p^{nr(q-2)+n}$ ,  $q = p^r$ .

**Теорема 3.** Существуют два  $q$ -значных совершенных кода длины  $N = qn + 1$ , пересекающиеся по  $p^{nr(q-3)+n}$  кодовым словам, где  $q = p^r$ ,  $r > 1$ .

Кроме того, конструкция С позволила получить следующую нижнюю оценку числа различных разбиений пространства  $V_q^N$  на  $q$ -значные совершенные коды.

**Теорема 4.** Число различных разбиений пространства  $V_q^N$  на  $q$ -значные совершенные коды длины  $N = qn + 1$  не меньше, чем  $p^{np^{n(2r-1)-r(m-1)+\log(p+r)}}$ , где  $q = p^r$ ,  $r > 1$ .

Теоремы 2, 3 и 4 получены совместно с Соловьевой Ф. И.

## Литература

1. Лось А. В. Построение совершенных  $q$ -значных кодов последовательными сдвигами  $\tilde{\alpha}$ -компонент // Пробл. передач. инф. 2004. Т. 40, № 1. С. 33–39.
2. Августинович С. В., Соловьева Ф. И. Построение совершенных двоичных кодов последовательными сдвигами  $\tilde{\alpha}$ -компонент // Пробл. передач. инф. 1997. Т. 33, № 3 С. 15–21.
3. Романов А. М. О разбиениях  $q$ -ичных кодов Хэмминга на непересекающиеся компоненты // Дискр. ан. и исслед. опер. 2004. Т. 11, № 3. С. 80–87.
4. Лось А. В. Construction of perfect  $q$ -ary codes // Proc. Ninth Int. Workshop «Algebraic and Combinatorial Coding Theory», Bulgaria (Kranevo), June 2004. P. 272–276.
5. Лось А. В. Построение совершенных  $q$ -ичных кодов свитчингами простых компонент // Пробл. передач. инф. 2006. Т. 42, № 1. С. 34–42.
6. Phelps K. T., Rifa J., Villanueva M. Kernels of  $q$ -ary 1 perfect codes // Proc. Int. Workshop on Coding and Cryptography, WCC 2003, France. P. 375–381.
7. Соловьева Ф. И., Лось А. В. О пересечениях  $q$ -значных совершенных кодов // Сдана в печать в Сиб. мат. журн.

## ЗАДАЧА OPEN SHOP С МАРШРУТИЗАЦИЕЙ И РАЗРЕШЕНИЕМ ПРЕРЫВАНИЙ\*

В. А. Лутков<sup>1</sup>, И. Д. Черных<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Новосибирский государственный университет, Новосибирск; *vlut@ngs.ru*

<sup>2</sup> Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; *idchern@gorodok.net*

В классической задаче open shop имеется набор из  $m$  машин и  $n$  работ, каждая машина должна выполнить свою операцию каждой работы, интервалы выполнения операций одной работы или одной машины не могут иметь общих внутренних точек. При этом считается, что машина, выполнив операцию одной работы, в этот же момент готова начать выполнение следующей операции. В моделях с маршрутизацией предполагается, что работы размещены в узлах некоторой транспортной сети, и машине, прежде чем выполнить операцию данной работы, требуется “доехать” до соответствующего узла, затратив соответствующее время. Изначально все машины находятся в некотором выделенном узле (называемом *базой*) и должны вернуться туда после выполнения всех операций. Заданы расстояния между узлами (скорости машин считаются одинаковыми, а пропускная способность связей — неограниченной) и длительности выполнения всех операций. Требуется построить расписание наименьшей возможной длины.

В [1] доказана NP-трудность задачи open shop с маршрутизацией даже для простейшего случая с двумя машинами и транспортной сети, состоящей всего из двух узлов. Там же приведены алгоритмы приближенного решения этой задачи с гарантированными оценками точности. В работе [2] построены алгоритмы решения этой задачи с улучшенными оценками точности.

Случай с двумя машинами и двумя узлами подробно исследован в работе [3]: описан алгоритм приближенного решения этой задачи, строящий расписание с длиной из интервала  $[\bar{C}, \frac{6}{5}\bar{C}]$ , где  $\bar{C}$  — нижняя оценка оптимума задачи:

$$\bar{C} = \max\{l_{\max} + T, d_1, d_2 + T\},$$

где  $l_{\max}$  — наибольшая нагрузка машины,  $T$  — длина кратчайшего циклического обхода всех узлов сети,  $d_1$  и  $d_2$  — наибольшие суммарные длительности операций работы, находящейся в первом узле (базе) и втором, соответственно. Тем самым описанный алгоритм является  $\frac{6}{5}$ -приближенным. Более того, доказано, что оптимум любого примера этой задачи лежит в указанном интервале и границы интервала точны.

В данной работе рассматривается задача open shop с маршрутизацией с разрешением прерываний выполнения операций. Разрешение прерываний в классической задаче open shop (без маршрутизации) делает ее алгоритмически более легкой: если классическая задача open shop является NP-трудной уже для случая трех машин ([4]), то задача с разрешением прерываний полиномиально разрешима для произвольного  $m$ , причем длина оптимального расписания совпадает с нижней оценкой  $\bar{C} = \max\{l_{\max}, d_{\max}\}$ , где  $d_{\max}$  — наибольшая суммарная длительность операций работы. В задаче с маршрутизацией прерывания также облегчают построение оптимального расписания. Результаты исследования описаны в следующей теореме.

**Теорема 1.** *Для задачи open shop с маршрутизацией двух машин на сети из двух узлов и разрешением прерываний оптимальное расписание имеет длину  $\bar{C}$ , такое расписание с не более чем одним прерыванием может быть построено за  $O(n)$ .*

Доказательство теоремы конструктивно: описан алгоритм с требуемыми свойствами. Дальнейший интерес представляет исследование задачи с большим числом машин и/или более сложной структуры транспортной сети.

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00960).

**Литература**

1. *Averbakh I., Berman O., Chernykh I.* The routing open shop problem on a network: Complexity and approximation // European Journal of Operational Research. 2006. V. 173, No. 2. P. 531–539.
2. *Дрюк Н. С., Кононов А. В., Севастьянов С. В., Черных И. Д.* Эффективные алгоритмы построения расписаний в задаче open shop с маршрутизацией (тезисы) // III Всероссийская конференция “Проблемы оптимизации и экономические приложения”, Омск, 11–15 июля 2006. С. 89.
3. *Averbakh I., Berman O., Chernykh I.* A  $\frac{6}{5}$ -approximation algorithm for the two-machine routing open-shop problem on a two-node network // European Journal of Operational Research. 2005, V. 166, No. 1. P. 3–24.
4. *Gonzalez T., Sahni S.* Open shop scheduling to minimize finish time // J. Assoc. Comput. Mach. 1976. V. 27, No. 2. P. 287–312.

## О НЕСИСТЕМАТИЧЕСКИХ СОВЕРШЕННЫХ КОДАХ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ\*

С. А. Малюгин

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; mal@math.nsc.ru*

Несистематические совершенные двоичные коды длины  $n \geq 255$  ( $n = 2^m - 1$ ) были впервые построены в [1]. Далее такие коды изучались в работах [2-4]. Мы рассматриваем конструкцию несистематических совершенных кодов над конечным полем Галуа  $F_q$ ,  $q \geq 3$ . Пусть  $F_q^m$  – векторное пространство размерности  $m$  над  $F_q$ . Рассмотрим в  $F_q^m$  подмножество  $N$ , состоящее из  $n = \frac{q^m - 1}{q - 1}$  ненулевых попарно неколлинеарных векторов. Далее будем рассматривать  $N$  как множество индексов для векторов  $x = (x_i)_{i \in N} \in F_q^N$ . Совершенный  $q$ -ичный код Хемминга  $H_q^n$  можно определить как множество всех таких векторов  $x = (x_i)_{i \in N}$ , что  $\sum_{i \in N} x_i i = 0$ .

Множество  $C \subset F_q^N$ , в котором любые два вектора различаются не менее чем в трех координатах, мощность которого равна мощности  $H_q^n$ , называется совершенным  $q$ -ичным кодом длины  $n$ . Следуя [5], для любого  $i \in N$  рассмотрим в  $H_q^n$  подпространство  $R_i$ , порожденное всеми векторами веса 3 (т. е. имеющими ровно 3 ненулевые координаты) с ненулевой  $i$ -й координатой. Для  $u \in H_q^n$  смежные классы  $R_i^u = R_i + u$  называются компонентами кода  $H_q^n$ . Рассмотрим семейство  $\mathcal{B} = \{R_{i_1}^{u_1}, \dots, R_{i_k}^{u_k}\}$ , состоящее из  $k$  попарно непересекающихся компонент кода  $H_q^n$ . Базисный вектор в  $F_q^N$ , у которого  $i$ -я координата равна единице, а все остальные координаты нулевые, обозначаем через  $e_i$ . Тогда для любого  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in F_q^k$  множество  $H_q^n(\mathcal{B}, \alpha) = \left( H_q^n \setminus \bigcup_{s=1}^k R_{i_s}^{u_s} \right) \cup \left( \bigcup_{s=1}^k (R_{i_s}^{u_s} + \alpha_s e_{i_s}) \right)$  является совершенным  $q$ -ичным кодом [5],[6]. Основываясь на этой конструкции кодов можно строить несистематические коды.

**Определение.** Совершенный  $q$ -ичный код  $C \subset F_q^N$  называется систематическим, если существует такое  $(n-m)$ -элементное множество индексов  $I = \{i_1, \dots, i_{n-m}\} \subset N$  и такое отображение  $f: F_q^I \rightarrow F_q^{N \setminus I}$ , что  $x = (x_i)_{i \in N} \in C \iff x_i = f_i(x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}})$  для всех  $i \in N \setminus I$ , т. е. код  $C$  является графиком функции  $f$ . В противном случае код  $C$  называем несистематическим.

Пусть  $K = \{j_1, \dots, j_m\} \subset N$  – некоторый базис в пространстве  $F_q^m$ . Обозначим  $L(K) = \{j \in N : \exists \alpha, \beta \in F_q, \exists j_r, j_s \in K, \text{ такие, что } j = \alpha i_r + \beta j_s\}$ . Для семейства непересекающихся компонент  $\mathcal{B} = \{R_{i_1}^{u_1}, \dots, R_{i_k}^{u_k}\}$  определим  $I_{\mathcal{B}} = \{i \in N : \exists s, \text{ при котором } i = i_s\}$  (множество индексов  $i$ , для которых существуют  $i$ -компоненты из семейства  $\mathcal{B}$ ).

**Теорема 1.** Если существует такой базисный набор индексов  $K = \{j_1, \dots, j_m\} \subset N$ , что  $I_{\mathcal{B}} \subset L(K)$ , то совершенный код  $H_q^n(\mathcal{B}, \alpha)$  ( $\alpha \in F_q^k$ ) является систематическим.

В связи с этим фактом множество индексов  $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset N$  будем называть несистематическим, если  $I \not\subset L(K)$  для любого базисного набора  $K \subset N$ . Говорим, что семейство непересекающихся компонент  $\mathcal{B} = \{R_{i_1}^{u_1}, \dots, R_{i_k}^{u_k}\}$  не содержит кратных компонент, если  $i_r \neq i_s$  при  $r \neq s$ .

**Теорема 2.** Пусть  $m \geq 4$ . Если в семействе непересекающихся компонент  $\mathcal{B}$  нет кратных компонент и множество индексов  $I_{\mathcal{B}}$  является несистематическим, то совершенный код  $H_q^n(\mathcal{B}, \alpha)$  несистематический для любых  $\alpha \in F_q^k, \alpha_i \neq 0$  ( $i = 1, \dots, k$ ).

**Следствие.** Если семейство  $\mathcal{B}$  состоит из не более шести непересекающихся компонент, то код  $H_q^n(\mathcal{B}, \alpha)$  всегда систематический. При любом  $m \geq 4$  в коде Хемминга  $H_q^n$  существует такое семейство  $\mathcal{B}$  из семи непересекающихся компонент, что совершенный  $q$ -ичный код  $H_q^n(\mathcal{B}, \alpha)$  является несистематическим.

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00364).

**Литература**

1. *Августиневич С. В., Соловьева Ф. И.* О несистематических совершенных двоичных кодах // Проблемы передачи информации. 1996. Т. 32, вып. 3. С. 47–50.
2. *Phelps K. T., LeVan M. J.* Non-sistematic perfect codes // SIAM J. Discrete Math. 1999. V. 12, N 1. P. 27–34.
3. *Романов А. М.* О несистематических совершенных кодах длины 15 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1997. Т. 4, № 4. С. 75–78.
4. *Малюгин С. А.* Несистематические совершенные двоичные коды // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 1. С. 55–76.
5. *Phelps K. T., Villanueva M.* Ranks of  $q$ -ary 1-perfect codes // Designs, Codes and Cryptography. 2002. V. 27, N 1–2. P. 139–144.
6. *Лось А. В.* Построение совершенных  $q$ -значных кодов последовательными сдвигами  $\tilde{\alpha}$ -компонент // Проблемы передачи информации. 2004. Т. 40, вып. 1. С. 40–47.

## ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ПРОСТЫХ ЦИКЛОВ В ГИПЕРКУБЕ\*

А. Л. Пережогин

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; pereal@math.nsc.ru*

Автоморфизмом простого цикла  $C$  в двоичном  $n$ -мерном кубе  $Q_n$  назовем автоморфизм  $Q_n$ , переводящий  $C$  в себя. Таким образом,  $Aut(C)$  является подгруппой группы  $Aut(Q_n)$ .

Пусть  $\varphi$  – нетривиальный автоморфизм простого цикла  $C = v_0, v_1, \dots, v_{t-1}, v_t = v_0$  в  $Q_n$ . Тогда  $\varphi(v_0) = v_i$  для некоторого  $i$ ,  $\varphi(v_1)$  совпадает либо с  $v_{i+1}$ , либо с  $v_{i-1}$ . В первом случае  $\varphi$  назовем прямым автоморфизмом (он сохраняет ориентацию цикла), во втором – обратным. Подгруппу прямых автоморфизмов цикла  $C$  обозначим  $Aut_+(C)$ .

Произвольный прямой автоморфизм  $\varphi$  простого цикла  $C = v_0, v_1, \dots, v_{t-1}, v_t = v_0$  в  $Q_n$  обозначим  $\varphi_i^\pi$ , если  $\varphi(C) = v_0 \oplus v_i \oplus \pi(C)$ , где  $\pi \in S_n(Q_n)$ . Введем параметр  $i(C)$  следующим образом. Если  $Aut_+C \neq \{e\}$ , то  $i(C) = \min\{i \mid \varphi_i^\pi \in Aut_+(C), i > 0\}$ . В противном случае положим  $i(C) = |C|$ . Обозначим  $n(C) = |C|/i(C)$ .

**Утверждение 1.** *Для любого простого цикла  $C$  в  $Q_n$  группа автоморфизмов  $Aut(C)$  изоморфна либо циклической группе порядка  $n(C)$ , либо группе  $Z_2 \times Z_{n(C)}$  порядка  $2n(C)$ .*

**Утверждение 2.** *Если  $C$  – простой цикл в  $Q_n$ ,  $n(C) = 2^k$ , то  $n \geq 2^{k-1} + 1$ .*

**Пример 1.** Пусть  $B_k$  подграф графа  $Q_{2k+1}$ , порожденный множеством вершин веса  $k$  и  $k+1$ . Хорошо известна проблема: является ли граф  $B_k$  гамильтоновым при любом  $k \geq 1$ ? В [1] показано, что если  $C$  является гамильтоновым циклом в графе  $B_k$ , то в цикле ребра всех направлений встречаются одинаковое число раз. Это ограничение выполняется, если строить циклы  $C$  с условием  $n(C) = 2k+1$ . Заметим, что единственные с точностью до изоморфизма гамильтоновы циклы в  $B_1$  и  $B_2$  удовлетворяют этому условию. В [3] с помощью компьютера были найдены гамильтоновы циклы с условием  $n(C) = 2k+1$  в  $B_k$  при всех  $k$ ,  $1 \leq k \leq 15$ .

**Пример 2.** Простой цикл  $C$  длины  $l$  в  $Q_n$  назовем  $\langle m, n \rangle$ -циклом, если любые последовательные по циклу  $m$  рёбер имеют различные направления. В работе приводится конструкция гамильтонова  $\langle 6, 8 \rangle$ -цикла. Также получены новые нижние оценки максимальной длины  $l = l(m, n) < m, n \rangle$ -цикла при фиксированных малых значениях  $m$  и  $n$  [2]. Лучшие на сегодня результаты приведены в следующей таблице.

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10
$l(n)$	8*	12*	32*	40*	100*	200	288	576

Для гамильтоновых циклов в  $Q_n$  имеем

**Утверждение 3.** *Порядок группы автоморфизмов любого гамильтонова цикла в  $Q_n$ ,  $n > 2$ , не превосходит  $2^{\lfloor \log_2(n-1) \rfloor + 2}$ .*

**Утверждение 4.** *При любом  $n$ ,  $3 \leq n \leq 16$  существует гамильтонов цикл в  $Q_n$ , порядок группы автоморфизмов которого равен  $2^{\lfloor \log_2(n-1) \rfloor + 2}$ .*

### Литература

1. Евдокимов А. А., Пережогин А. Л. Минимальные нумерации подмножеств конечного множества и проблема гамильтоновости графа средних слоев гиперкуба // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1997. Т. 4, № 4. С. 6–12.
2. Пережогин А. Л. О циклических  $\langle m, n \rangle$ -нумерациях // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1998. Т. 5, № 4. С. 61–70.
3. Savage C. D., Shields I. A Hamilton path heuristic with applications to the middle two levels problem // Congressus Numerantium. 1999. V. 140. P. 161–178.

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00364).

# ОБЗОР ПО СОВЕРШЕННЫМ РАСКРАСКАМ И ДРУГИМ ОБОБЩЕНИЯМ СОВЕРШЕННЫХ КОДОВ НА БЕСКОНЕЧНЫХ РЕШЕТКАХ\*

С. А. Пузынина

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; [puzyrina@math.nsc.ru](mailto:puzyrina@math.nsc.ru)*

Пусть  $G = (V, E)$  — граф,  $A = (a_{ij})$  — квадратная матрица порядка  $n$ ,  $r \geq 1$ . Рассмотрим раскраску графа  $G$  в  $n$  цветов и произвольную вершину  $x$  цвета  $i$ . Если количество вершин цвета  $j$  (отличных от  $x$ ) на расстоянии не более  $r$  от вершины  $x$  не зависит от выбора вершины  $x$  и равно  $a_{ij}$ , то раскраска называется *совершенной радиуса  $r$*  с матрицей  $A$ . Ранее совершенные раскраски радиуса 1 изучались в различных контекстах и имели различные названия, в частности, их называли equitable partitions (равномерными разбиениями) [2]. Также рассматривались совершенные раскраски в два цвета некоторых графов и семейств графов:  $n$ -мерного двоичного куба, плоских триангуляций минимальной степени пять.

Понятие совершенной раскраски — это обобщение понятия совершенного кода. Действительно, совершенная раскраска  $n$ -регулярного графа с матрицей  $\begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$  является совершенным кодом с расстоянием 3 (кодовые вершины — это вершины цвета 1).

Основным способом построения совершенных раскрасок является так называемый орбитный метод, суть которого выражается в следующем очевидном факте. Пусть  $G$  — произвольный обыкновенный граф с группой автоморфизмов  $H$  и  $H'$  — некоторая подгруппа группы  $H$ . Относительно  $H'$  множество вершин графа  $G$  разбивается на орбиты. Раскрашивая каждую из орбит своим цветом, получаем совершенную раскраску графа  $G$ .

Другим обобщением совершенных кодов являются центрированные функции. Рассмотрим произвольный граф  $G$ . Действительнозначная функция на вершинах графа называется *центрированной радиуса  $r$* , если сумма ее значений в любом шаре радиуса  $r$  равна 0. Если  $f : V \rightarrow \{0, 1\}$  — центрированная функция с суммой 1 радиуса  $r$ , то вершины, в которых функция принимает значение 1, образуют совершенный код с расстоянием  $2r+1$ . Для регулярного графа вычитанием константы можно сделать сумму равной 0 в каждом шаре.

Мы рассматриваем совершенные раскраски и центрированные функции на графе  $G(\mathbb{Z}^2)$  бесконечной прямоугольной решетки. Этот граф 4-регулярный, его вершинами являются всевозможные упорядоченные пары целых чисел-координат. Две вершины  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  и  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$  смежны, если  $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 1$ . Назовем матрицу  $A$  *допустимой*, если существует совершенная раскраска графа  $G(\mathbb{Z}^2)$  с матрицей  $A$  для соответствующего  $r$ .

Центрированные функции на бесконечной прямоугольной решетке также связаны с дискретным аналогом известной в интегральной геометрии проблемы Помпейю, который может быть сформулирован следующим образом. Пусть  $\Omega$  — конечное множество конечных подмножеств  $\mathbb{Z}^n$ ,  $G$  — группа трансляций  $\mathbb{Z}^n$ . Задача состоит в том, чтобы определить когда единственной функцией  $\varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ , такой что  $\sum_{\mathbf{x} \in g(S)} \varphi(\mathbf{x}) = 0$  для всякого  $g \in G, S \in \Omega$  является нулевая функция [5]). В нашем случае множество  $\Omega$  состоит из одного шара радиуса  $r$ .

В [1] Аксенович перечислила все допустимые матрицы совершенных раскрасок радиуса 1 в 2 цвета бесконечной прямоугольной решетки и нашла некоторые необходимые условия для того, чтобы матрица была допустимой радиуса  $r \geq 2$ . В [7] перечислены все допустимые матрицы совершенных раскрасок радиуса 1 в 3 цвета.

В [4] была доказана следующая теорема:

**Теорема 1.** *Любая ограниченная центрированная функция на  $G(\mathbb{Z}^2)$  является периодической.*

Центрированные функции и совершенные раскраски бесконечной прямоугольной решетки могут рассматриваться как двумерные слова над конечным алфавитом значений и цветов, соответственно. Для доказательства периодичности используется метод  $R$ -продолжаемых слов,

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 07-01-00248) и Фонда содействия отечественной науке.



который был представлен в [4]. Тот же метод оказался полезным при доказательстве следующего результата:

**Теорема 2.** *Совершенная раскраска радиуса  $r > 1$  является периодической.*

Также получена верхняя граница на период. Заметим, что в качестве следствия из этой теоремы мы получаем общий способ получения всех совершенных раскрасок бесконечной прямоугольной решетки. Пусть  $H'$  — группа трансляций, порожденная двумя неколлинеарными векторами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$ . Используя орбитный метод, мы получаем трансляционную раскраску  $\psi$ , которая является совершенной для любого радиуса. Если  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$  — векторы периодичности некоторой совершенной раскраски  $\varphi$ , то  $\varphi$  может быть получена объединением некоторых цветов из трансляционной раскраски  $\psi$ .

В случае  $r = 1$  существуют непериодические совершенные раскраски.

**Теорема 3.** [6] *Для любой допустимой матрицы радиуса 1 существует периодическая совершенная раскраска, причем она может быть получена из непериодической методом свитчинга бинарных диагоналей.*

Бинарная диагональ — это диагональ, состоящая из двух чередующихся цветов, под свитчингом бинарной диагонали подразумевается перестановка цветов внутри диагонали. Довольно часто при изучении на графе бесконечной прямоугольной решетки различных комбинаторных конструкций, в частности, упаковок, покрытий и замощений, возникают вопросы следующего типа: если некоторая конструкция на графе  $G$  существует, то следует ли отсюда существование конструкции с теми же параметрами, обладающей свойством периодичности? Ответ на этот вопрос не всегда оказывается положительным. Например, в работе [3] рассматривались замощения плоскости плитками. Оказалось, что для некоторого набора плиток замощение существует, но все такие замощения оказываются аперриодическими.

Введем еще одно понятие, обобщающее понятия совершенной раскраски и центрированной функции. Обозначим шар радиуса  $r$  с центром в вершине  $\mathbf{x}$  за  $B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in V \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r\}$ . Пусть  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  — целочисленная матрица. Функция  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{Z}^n$  называется *обобщенной  $A$ -центрированной функцией радиуса  $r$* , если 
$$\sum_{\mathbf{y} \in B_r(\mathbf{x}), \mathbf{y} \neq \mathbf{x}} \varphi(\mathbf{y}) = A\varphi(\mathbf{x})$$
 для всякого  $\mathbf{x} \in V$ .

Совершенная раскраска в  $n$  цветов с матрицей  $A$  может рассматриваться как  $A$ -центрированная функция с множеством значений  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , где  $e_i$  — единичный вектор с 1 в  $i$ -ой координате.  $A$ -центрированная функция с  $n = 1$ ,  $A = -1$  является обычной центрированной функцией.

**Теорема 4.** 1. *Пусть  $\varphi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^n$  — ограниченная  $A$ -центрированная функция радиуса  $r > 1$ . Тогда  $\varphi$  периодическая.*

2. *Если  $\varphi$  является  $A$ -центрированной функцией радиуса 1 и  $\det A \neq 0$ , то  $\varphi$  периодическая. Если  $\det A = 0$ , то существуют периодические и непериодические  $A$ -центрированные функции.*

Более того, непериодические функции могут быть получены из периодических прибавлением функций специального вида. Эта теорема является обобщением части упомянутых результатов.

Аналогичные результаты получены для бесконечной треугольной и гексагональной решеток.

## Литература

1. *Axenovich M.* On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Mathematics. 2003. V. 268. P. 31–49.
2. *Godsil C. D., Martin W. J.* Quotients of association schemes // J. Combin. Theory. Ser. A. 1995. V. 69, no. 2. P. 185–199.
3. *Penrose R.* The role of aesthetics in pure and applied mathematical research // Bull. Inst. Math. Appl. 1974. V. 10. P. 266–271.
4. *Puzynina S. A., Avgustinovich S. V.* On periodicity of two-dimensional words // сдано в печать в спец. выпуск Theoretical Computer Science
5. *Zeilberger D.* The Pompeiu problem for discrete space // Proc. Natl. Acad. Sci. 1978. V. 75. P. 3555–3556.
6. *Пузынина С. А.* Периодичность совершенных раскрасок бесконечной прямоугольной решетки // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004. Т. 11, N 1. С. 79–9.
7. *Пузынина С. А.* Совершенные раскраски вершин графа  $G(\mathbb{Z}^2)$  в три цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2005. Т. 12, № 1. С. 37–54.

## О ЗАДАЧАХ РАСКРАСКИ ИНЦИДЕНТОРОВ\*

А. В. Пяткин

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; artem@math.nsc.ru*

Пусть  $G = (V, E)$  — ориентированный мультиграф без петель с множеством вершин  $V$  и множеством дуг  $E$ . Если дуга  $e \in E$  инцидентна вершине  $v \in V$ , то упорядоченная пара  $(v, e)$  называется *инцидентором*. Инцидентор  $(v, e)$  удобно трактовать как половину дуги  $e$ , инцидентную вершине  $v$ . Каждая дуга  $e = uv$  имеет два инцидентора: *начальный* инцидентор  $(u, e)$  и *конечный* инцидентор  $(v, e)$ . Эти два инцидентора называются *сопряженными* по отношению друг к другу. Два инцидентора называются *смежными*, если они примыкают к одной вершине. Множество всех инциденторов мультиграфа  $G$  обозначим через  $I$ . *Раскраской инциденторов* называется произвольное отображение  $f : I \rightarrow Z_+$ , где  $Z_+$  — множество целых положительных чисел (*цветов*). Для дуги  $e = uv$  будем писать  $f(e) = (a, b)$ , если  $f(u, e) = a$  и  $f(v, e) = b$ .

**Задача раскраски инциденторов** в самом общем виде формулируется так: раскрасить инциденторы данного мультиграфа в минимальное число цветов так, чтобы выполнялись заданные условия на цвета смежных и сопряжённых инциденторов.

Эта задача обобщает как вершинную, так и рёберную раскраски мультиграфа. Первая задача раскраски инциденторов была рассмотрена в [1].

В работе делается обзор истории возникновения задач раскраски инциденторов, полученных результатов, а также связи задач инциденторной раскраски с задачами из других разделов дискретной математики.

### Литература

1. Пяткин А. В. Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 74–79.

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05–01–00395) и INTAS (№ 04–77–7173).

# ОБЗОР МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СОВЕРШЕННЫХ ДВОИЧНЫХ КОДОВ\*

Д. С. Романов

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; rom@math.nsc.ru*

Теория совершенных кодов — область, которая находится на стыке теории кодирования и теории дизайнов или  $t$ -схем и является трудной для исследования. Линейные совершенные коды были построены М. Голеем и Р. Хеммингом в конце 40-х годов прошлого века. Нелинейные совершенные коды были открыты Ю. Л. Васильевым в 1961 году. В настоящее время известно достаточно много различных методов построения совершенных кодов. В работе представлен обзор методов построения нелинейных совершенных двоичных кодов.

Пусть  $\mathbb{F}_2^n$  — векторное пространство размерности  $n$  над полем Галуа  $GF(2)$ . Произвольное подмножество  $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$  называется *двоичным кодом* длины  $n$ . Векторы, принадлежащие коду, называются *кодowymi словами*. *Расстоянием Хемминга*  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  между векторами  $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n$  и  $\mathbf{y} \in \mathbb{F}_2^n$  называется число координат, в которых векторы  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  различаются. Минимально возможное расстояние  $d$  между двумя различными кодowymi словами называется *минимальным расстоянием* кода. *Радиусом упаковки*  $\rho$  кода  $C$  называется величина  $\rho(C) = \frac{d-1}{2}$ . *Радиус покрытия* кода  $C$  равен  $r(C) = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n} \min_{\mathbf{c} \in C} d(\mathbf{x}, \mathbf{c})$ . Код  $C$  называется *совершенным*, если  $r(C) = \rho(C)$ .

Коды  $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{F}_2^n$  называются *изоморфными*, если существует перестановка координат  $\pi$  такая, что  $C_2 = \{\pi(\mathbf{c}) \mid \mathbf{c} \in C_1\}$ . Коды  $C_1$  и  $C_2$  называются *эквивалентными*, если существует вектор  $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n$  и перестановка  $\pi$  такие, что  $C_2 = \{\pi(\mathbf{c}) + \mathbf{x} \mid \mathbf{c} \in C_1\}$ . Код называется *линейным*, если его слова образуют линейное подпространство в  $\mathbb{F}_2^n$ . Линейные совершенные коды с минимальным расстоянием  $d = 3$  называются *кодами Хемминга*. С точностью до эквивалентности существует единственный двоичный код Хемминга длины  $n$ .

Числа  $n, M, d$  называются *параметрами кода*, если его длина равна  $n$ , мощность —  $M$ , минимальное расстояние —  $d$ . Известно, что совершенные двоичные коды с параметрами кодов Хемминга существуют только при  $n = 2^s - 1$ ,  $s = 2, 3, \dots$ . В данной статье будут рассматриваться именно такие коды. Все нелинейные совершенные двоичные коды имеют параметры кодов Хемминга и существуют при  $n \geq 15$ .

У. Хеден [6] обнаружил, что среди совершенных кодов, построенных методом конкатенации (которая определяется перестановкой и тривиальными разбиениями  $\mathbb{F}_2^n$  на совершенные коды длины  $n$ ), существует совершенный код длины  $n = 15$ , неэквивалентный ни одному из кодов Васильева. Ф. И. Соловьёва [5] привела примеры нетривиальных разбиений  $\mathbb{F}_2^n$  на совершенные коды длины  $n$  и показала, что из этих нетривиальных разбиений методом конкатенации можно построить совершенные коды, неэквивалентные кодам Васильева и кодам Хедена [6]. К. Фелпс [10] также привёл примеры нетривиальных разбиений  $\mathbb{F}_2^n$  на совершенные коды. В [11] он описал конструкцию совершенных двоичных кодов, в которой конкатенация определяется  $m$ -арной квазигруппой (перестановку можно рассматривать как некоторую унарную квазигруппу). М. Моллар [9] обобщил конструкцию Васильева. В. А. Зиновьев и А. Лобстейн [8] предложили каскадные конструкции совершенных кодов.

Т. Этцион и А. Варди [7] предложили некоторые упорядоченные семейства подмножеств из  $\mathbb{F}_2^n$  и назвали их совершенными сегментациями. Используя эти сегментации, они методом конкатенации построили совершенные двоичные коды и показали, что среди этих кодов содержатся новые коды длины  $n = 15$ . В этой же работе методом сдвига компонент кода Хемминга или свитчингами они также построили совершенные двоичные коды полного ранга с тривиальным ядром и показали, что совершенные двоичные коды полного ранга не могут быть построены конкатенацией.

Свитчинги в совершенных двоичных кодах были открыты Ю. Л. Васильевым [2]. Свитчинговые методы широко известны в комбинаторике. Что касается числа свитчинговых классов, на которые разбивается множество совершенных двоичных кодов длины  $n$ , в настоящее время

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00364).

наиболее изученным является свитчинговый класс кода Хемминга. Кроме того, в [13] приведён пример двух совершенных кодов длины  $n = 15$ , которые не принадлежат свитчинговому классу кода Хемминга и образуют собственный свитчинговый класс, состоящий из двух кодов.

К. Фелпс и М. Ле Ван [12] заметили, что подмножества кода Хемминга, которые сдвигали Т. Этцион и А. Варди [7] и которые мы называем компонентами, являются смежными классами некоторых подпространств. Используя групповые свойства компонент кода Хемминга, они неконструктивными методами доказали существование в коде Хемминга непересекающихся компонент, отвечающих различным координатам, и тем самым доказали существование совершенных двоичных кодов со всеми допустимыми размерностями ядер. С. В. Августинович и Ф. И. Соловьёва [1] обратили внимание на то, что если в коде Хемминга сдвинуть  $n$  непересекающихся компонент по  $n$  различным направлениям, то код Хемминга превратится в несистематический код. С. А. Малюгин [3] показал, что для превращения кода Хемминга в несистематический код в нём достаточно сдвинуть 7 компонент. В [4] получены достаточные условия непересекаемости компонент кода Хемминга и построены регулярные разбиения кода Хемминга на компоненты. С использованием этих условий построены несистематические коды длины  $n = 15$  и семейство непересекающихся компонент, которое даёт коды полного ранга с тривиальным ядром.

Пусть  $N(n)$  — число попарно неэквивалентных совершенных двоичных кодов длины  $n$ . Тогда  $2^{2^{(0,5+o(1))n}} \leq N(n) \leq 2^{2^{(1+o(1))n}}$ . Нижняя оценка получена Ю. Л. Васильевым [2] и неоднократно передоказана многими авторами. Верхняя оценка является тривиальной.

### Литература

1. *Августинович С. В., Соловьёва Ф. И.* О несистематических совершенных двоичных кодах // Проблемы передачи информации. 1996. Т. 32, вып. 3. С. 47–50.
2. *Васильев Ю. Л.* О негрупповых плотно упакованных кодах // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М.: Физматгиз, 1962. С. 337–339.
3. *Малюгин С. А.* Несистематические совершенные двоичные коды // Дискрет. анализ. и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 1. С. 55–76.
4. *Романов А. М.* О построении совершенных нелинейных двоичных кодов инверсией символов // Дискрет. анализ. и исслед. операций. Сер. 1. 1997. Т. 4, № 1. С. 46–52.
5. *Соловьёва Ф. И.* О двоичных негрупповых кодах // Методы дискретного анализа в изучении булевых функций и графов. Сб. науч. тр. Вып. 37. Новосибирск: Ин-т математики, 1981. С. 65–76.
6. *Heden O.* A new construction of group and nongroup perfect codes // Inform. and Control. 1977. V. 34, N 4. P. 314–323.
7. *Etzion T., Vardy A.* Perfect binary codes: constructions, properties, and enumeration // IEEE Trans. on Inform. Theory. 1994. V. 40, N 3. P. 754–763.
8. *Lobstein A. S., Zinoviev V. A.* On new perfect binary nonlinear codes // Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing. 1997. V. 8, N 5. P. 415–420.
9. *Mollard M.* A generalized parity function and its use in construction of perfect codes // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1986. V. 7, N 1. P. 113–115.
10. *Phelps K. T.* A combinatorial construction of perfect codes // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1983. V. 4, N 3. P. 398–403.
11. *Phelps K. T.* A general product construction for error correcting codes // SIAM J. Algebraic Discrete Methods 1984. V. 5, N 2. P. 224–228.
12. *Phelps K. T., Le Van M.* Kernels of nonlinear Hamming codes // Designs Codes and Cryptogr. 1995. V. 6, N 3. P. 247–257.
13. *Phelps K. T., Le Van M.* Switching equivalence classes of perfect codes // Designs Codes and Cryptogr. 1999. V. 16, N 2. P. 179–184.

# АЛГОРИТМ ИМИТАЦИИ ОТЖИГА ДЛЯ УПАКОВКИ КРУГОВ И ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ НА ПЛОСКОСТИ\*

А. С. Руднев

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; anton.rudnev@gmail.com*

В работе рассматривается задача упаковки конечного множества предметов на плоскости. Каждый предмет является либо кругом и задается радиусом, либо прямоугольником и задается длиной и шириной. Требуется разместить все предметы на плоскость так, чтобы площадь окаймляющего их прямоугольника была минимальна. При размещении прямоугольников их стороны параллельны координатным осям. Допускаются повороты прямоугольников на 90 градусов.

Для решения сформулированной задачи разработан алгоритм имитации отжига [1]. Поиск решений ведется в пространстве так называемых двухконтактных упаковок [2], когда очередной предмет кладется на пару уже размещенных предметов, включая координатные оси. Решения кодируются в виде перестановки предметов. При вероятностном локальном поиске используются окрестности квадратичной мощности.

Разработанный алгоритм тестировался на случайно сгенерированных примерах. Обсуждаются предварительные результаты численных экспериментов.

## Литература

1. Johnson D. S., Aragon C. R., McGeoch L. A., Schevon C. Optimization by simulated annealing: An experimental evaluation, part I (graph partitioning) // Oper. Res. 1989. V. 37. P. 865–891.
2. George J. A., George J. M., Lamar B. W. Packing of different-sized circles into a rectangular container // European J. Oper. Res. 1995. V. 84. P. 693–712.

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06–01–00075).

# О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГРАФА С ЗАДАННЫМ РАЗНООБРАЗИЕМ ШАРОВ\*

К. Л. Рычков

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; rychkov@math.nsc.ru*

Рассматриваются обыкновенные связные графы  $G(V, E)$  с множеством вершин  $V$ , множеством рёбер  $E$ , конечного диаметра  $d(G)$  и с обычным расстоянием

$$\rho_G(x, y) = \min |P(x, y)|,$$

где минимум берется по всевозможным простым цепям  $P(x, y)$  между вершинами  $x$  и  $y$  в графе  $G$ , а  $|P|$  — длина цепи  $P$ . Графу  $G$  диаметра  $d$  поставим в соответствие набор  $\bar{\tau}(G) = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_d)$ , где  $\tau_i$  — число несовпадающих шаров радиуса  $i$  в  $G$ . Набор  $\bar{\tau}(G)$  называется *вектором разнообразия шаров* в графе  $G$  [4]. Ясно, что компоненты вектора  $\bar{\tau}(G)$  связаны соотношениями

$$|V(G)| = \tau_0 \geq \tau_1 \geq \dots \geq \tau_d = 1.$$

Будем говорить, что вектор  $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d)$  графически реализуем, если существует такой граф  $G$ , что  $\bar{\lambda} = \bar{\tau}(G)$ . Через  $M_d$  обозначим множество таких целочисленных векторов  $\bar{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_d)$ , что  $\tau_0 \geq \tau_1 \geq \dots \geq \tau_d = 1$ . Через  $m(d)$  обозначим минимальное натуральное число  $k$ , которое удовлетворяет следующему условию: любой вектор  $\bar{\tau} \in M_d$  такой, что  $\tau_{d-1} \geq k$ , графически реализуем. Если для некоторого  $d$  такого  $k$  не существует, то считаем, что  $m_d = \infty$ . Через  $M_d(n)$  обозначим множество векторов из  $M_d$ , у которых  $\tau_0 \leq n$ . Через  $R_d(n)$  обозначим множество тех векторов из  $M_d(n)$ , которые графически реализуемы. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|R_d(n)|}{|M_d(n)|} = 1$ , то будем говорить, что почти все векторы из множества  $M_d$  графически реализуемы.

В [1,2] рассматривался подход к исследованию метрической структуры графов на основе изучения разнообразия и пересеканости шаров в графе. Характеризация векторов разнообразия шаров в графах — одна из задач, возникающих при таком подходе. В [4] дано необходимое и достаточное условие графической реализуемости вектора  $\bar{\tau}$  некоторым деревом. Автором получены следующие результаты [3].

**Теорема 1.** *Справедливы следующие утверждения:*

1.  $m(1) = 2$ ;
2.  $m(2) = 3$ ;
3. Если  $d \geq 3$ , то  $2d \leq m(d) \leq 2(d-1)(\lfloor (d-1)/2 \rfloor + 1) + 1$ .

**Теорема 2.** *Для любого натурального  $d$  почти все векторы из множества  $M_d$  графически реализуемы.*

## Литература

1. Евдокимов А. А. Локально изометрические вложения графов и свойство продолжения метрики // Сибирский журнал исследования операций. 1994. Т. 1, № 1. С. 5–12.
2. Евдокимов А. А. Кодирование структурированной информации и вложения дискретных пространств // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 48–58.
3. Рычков К. Л. О достаточных условиях существования графа с заданным разнообразием шаров // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 1. С. 99–108.
4. Федоряева Т. И. Разнообразие шаров в метрических пространствах деревьев // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2005. Т. 12, № 3. С. 74–84.

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05-01-00364).

# ПОСТРОЕНИЕ ЗАМОЩЕНИЙ НЕОРИЕНТИРУЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ СИСТЕМАМИ ТРОЕК ШТЕЙНЕРА

Ф. И. Соловьева

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН;  
Новосибирский государственный университет, Новосибирск;  
sol@math.nsc.ru*

Работа посвящена исследованию двухцветных замощений неориентируемых замкнутых поверхностей парами систем троек Штейнера специального вида. Двухцветные замощения интерпретируются также как двухцветные триангулированные вложения полного графа в замкнутые поверхности, см., например, [1-4]. Системой троек Штейнера порядка  $n$  (кратко  $STS(n)$ ) называется система сочетаний из  $n$  элементов по блокам длины три (тройкам) такая, что любая неупорядоченная пара элементов встречается в точности в одной тройке. Сопоставим каждой тройке  $(i, j, k) \in STS(n)$  топологический треугольник с вершинами  $i, j$  и  $k$ . Склеивание по одноименным сторонам треугольников, отвечающих специального вида паре непересекающихся  $STS(n)$  позволяет получить черно-белое замощение некоторой замкнутой поверхности. Основные определения см., например, в [1] и [5]. Работы [1-4] и [6-10] посвящены построению замощений, как ориентируемых (сфер с ручками), так и неориентируемых (сфер с пленками Мебиуса). Вопрос о построении неэквивалентных неориентируемых замощений порядка  $n \equiv 3 \pmod{6}$  оставался открытым.

Хорошо известно (см. [1]), что полный граф  $K_n$  триангулирует некоторое ориентируемое многообразие тогда и только тогда, когда  $n \equiv 0, 3, 4$  или  $7 \pmod{12}$ , а неориентируемое многообразие – если и только если  $n \equiv 0$  или  $1 \pmod{3}$ ,  $n > 7$ . Триангуляция называется *двухцветной* (или *правильно 2-раскрашиваемой*), если все треугольники, отвечающие вложению графа  $K_n$ , могут быть раскрашены в черный и белый цвета так, что никакие два треугольника одного цвета не являются соседними. Для таких вложений необходимо, чтобы  $n$  было нечетным (поскольку степень каждой вершины должна быть четной). Случай раскраски в два цвета представляет особый интерес с точки зрения теории блок-схем, поскольку в этой ситуации, как нетрудно видеть, монохроматические треугольники индуцируют систему троек Штейнера (при этом каждому топологическому треугольнику с вершинами  $i, j$  и  $k$  отвечает тройка  $(i, j, k)$ ). В результате получаем замощение поверхности двумя системами троек Штейнера, одна из которых дает треугольники белого цвета, другая – черного. Будем называть такую пару систем троек Штейнера порядка  $n$  *замощением порядка  $n$* . Известно, что системы троек Штейнера порядка  $n$  существуют тогда и только тогда, когда  $n \equiv 1$  или  $3 \pmod{6}$ . Из [1,5] следует, что если замощение порядка  $n$  ориентируемой поверхности существует, то эта поверхность является сферой с  $(n-4)(n-3)/12$  ручками, для неориентируемого случая поверхность должна быть сферой с  $(n-4)(n-3)/6$  пленками Мебиуса. Следовательно, с учетом результатов [1] (см. выше первое предложение настоящего абзаца), для ориентируемого случая должно быть  $n \equiv 3$  или  $7 \pmod{12}$ , для неориентируемого случая имеем  $n \equiv 1$  или  $3 \pmod{6}$ ,  $n > 7$ .

Таким образом получаем следующую эквивалентную комбинаторную задачу. Пара систем троек Штейнера порядка  $n$ , дающая двухцветное замощение порядка  $n$ , должна удовлетворять следующим условиям:

1. эта пара  $STS$ 's порядка  $n$  определена на одном и том же множестве  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ ;
2. каждая точка  $i \in N$  удовлетворяет *свойству цикличности*, то есть все треугольники, принадлежащие этим  $STS$ 's и содержащие элемент  $i$ , могут быть расположены около точки  $i$  следующим циклическим образом:

$$i|i_1, i_2|i_3, i_4| \dots |i_{n-2}, i_{n-1}|,$$

где вертикальные линии разделяют тройки этих двух  $STS$ 's в том смысле, что тройки

$$(i, i_1, i_2), (i, i_3, i_4), \dots, (i, i_{n-2}, i_{n-1})$$

принадлежат первой  $STS(n)$ , а тройки

$$(i, i_2, i_3), (i, i_4, i_5), \dots, (i, i_{n-1}, i_1) -$$

второй системе.

В работах [9] и [10] показано существование замощения порядка  $n$  неориентируемой замкнутой поверхности, а именно сферы с  $(n-3)(n-4)/6$  пленками Мебиуса посредством специальным образом построенной пары систем троек Штейнера порядка  $n$  для каждого  $n \equiv 3 \pmod{6}$ ,  $n \geq 15$ . В настоящей работе продолжено исследование, начатое в [9] и [10].

**Теорема 1.** *Для любого  $n \equiv 3 \pmod{6}$ ,  $n \geq 15$ , существуют неизоморфные неориентируемые замощения порядка  $n$  (сферы с  $(n-3)(n-4)/6$  пленками Мебиуса) парами систем троек Штейнера порядка  $n$ .*

В статье [3] доказана теорема о том, что если существует неориентируемое замощение порядка  $n$  для произвольного  $n \equiv 3 \pmod{6}$ , то существуют неэквивалентные неориентируемые замощения порядка  $3n-2$  и, следовательно, существуют такие замощения для половины классов вычетов  $n \equiv 1 \pmod{6}$ . Там же показано, что для любого  $n \equiv 3 \pmod{6}$ ,  $n \geq 19$  существует не менее  $2^{(n-1)(n-3)/6}$  неизоморфных неориентируемых замощений порядка  $3n-2$ . Из этих результатов и теоремы 1 получаем следующие утверждения

**Теорема 2.** *Для любого  $n \equiv 3 \pmod{6}$ ,  $n \geq 19$  существует не менее  $2^{(n-1)(n-3)/6}$  неизоморфных неориентируемых замощений порядка  $3n-2$ .*

**Следствие.** *Существуют неэквивалентные замощения неориентируемой замкнутой поверхности (сферы с  $(n-3)(n-4)/6$  пленками Мебиуса) посредством пар систем троек Штейнера порядка  $n$  для половины классов вычетов  $n \equiv 1 \pmod{6}$ .*

Остается невыясненным существование замощений неориентируемой замкнутой поверхности для каждого значения  $n$ , удовлетворяющего  $n \equiv 1 \pmod{6}$ .

## Литература

1. Ringel G. Map Color Theorem. New York–Berlin: Springer-Verlag, 1974.
2. Grannell M. J., Griggs T. S., Širáň J. Face 2-Colourable Triangular Embeddings of Complete Graphs // J. Combin. Theory. Ser. B. 1998. V. 74. № 1. P. 8–19.
3. Grannell M. J., Griggs T. S., Širáň J. Surface Embeddings of Steiner Triple Systems // J. Combin. Des. 1998. V. 6. № 5. P. 325–336.
4. Bonnicton C. P., Grannell M. J., Griggs T. S., Širáň J. Exponential Families of Non-Isomorphic Triangulations of Complete Graphs // J. Combin. Theory. Ser. B. 2000. V. 78. № 2. P. 169–184.
5. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. М.–Л.: ГОНТИ, 1938.
6. Youngs J. W. T. The Mystery of the Heawood Conjecture // Graph Theory and its Applications. New York: Academic Press. 1970. P. 17–50.
7. Ducrocq P. M., Sterboul F. On G-Triple Systems // Publications du Laboratoire de Calcul de l'Université des Sciences at Techniques de Lille. 1978. № 103.
8. Bennett G. K., Grannell M. J., Griggs T. S. Bi-Embeddings of Steiner triple systems of order 15 // Graphs and Combinatorics. 2001. V. 17. № 2. P. 193–197.
9. Соловьева Ф. И. Системы троек Штейнера и проблема нитей // Второй Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-96). Новосибирск, 25–30 июня, 1996. С. 125–126.
10. Solov'eva F. I. Tilings of Closed Surfaces by Steiner Triple Systems // Proc. Int. Workshop on Coding and Cryptography (WCC'2003). Versailles, France. March 24–28, 2003. P. 425–431.



## БЕНТ-ФУНКЦИИ КРАТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ: K-БЕНТ-ФУНКЦИИ\*

Н. Н. Токарева

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; tokareva@math.nsc.ru*

Пусть  $\mathfrak{F}_m$  — множество всех булевых функций от чётного числа переменных  $m$ . Под расстоянием между двумя булевыми функциями понимается расстояние Хэмминга между их векторами значений. Напомним, что булева функция от переменных  $v_1, \dots, v_m$  называется *аффинной*, если она имеет вид  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \oplus a$  для некоторого вектора  $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}_2^m$  и элемента  $a \in \mathbb{Z}_2$ , где  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$  и через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначено обычное скалярное произведение векторов.

Булева функция  $f : \mathbb{Z}_2^m \rightarrow \mathbb{Z}_2$  называется *бент-функцией*, если она удалена от множества всех аффинных булевых функций на максимально возможное расстояние (другими словами, одинаково плохо аппроксимируется всеми аффинными функциями). Впервые бент-функции были рассмотрены О. Ротхаусом в 60-х годах XX века; в настоящее время они играют важную роль в различных областях дискретной математики. Бент-функции тесно связаны с матрицами Адамара в комбинаторике и разностными множествами в теории групп. В теории кодирования бент-функции исследуются в связи с некоторыми классами циклических кодов, кодами БЧХ, Кердока, Препараты и другими. В криптографии использование бент-функций, например, в блочных шифрах, способствует предельному повышению стойкости этих шифров к основным методам криптоанализа — линейному и дифференциальному.

В литературе рассматриваются и другие классы аппроксимирующих функций, отличные от класса аффинных функций. Так А. М. Йоссеф и Г. Гонг [1] стали приближать булевы функции *собственными мономияльными функциями* (термин был введен позднее в работе А. С. Кузьмина и др. [2]) и доказали существование булевых функций (названных *гипер-бент-функциями*), одинаково плохо приближающихся всеми такими функциями.

Основная идея настоящей работы заключается в том, что принадлежность функции  $f$  классу бент-функций не исключает того, что  $f$  может оказаться достаточно хорошо аппроксимируемой функциями, являющимися нелинейными, но обладающими свойством "скрытой линейности" — линейности в некотором другом смысле. Тогда при использовании таких бент-функций, например, в блочном шифре может обнаружиться его слабость к соответствующим модификациям вышеупомянутых методов криптоанализа. С целью избежать подобные ситуации мы рассмотрим бент-функции с более сильными свойствами нелинейности, а именно бент-функции от  $m$  переменных максимально нелинейные при  $k$  различных смыслах линейности одновременно, где  $k$  меняется от 1 до  $m/2$ . Такие бент-функции будем называть *кратно нелинейными*. Далее поясним, что мы подразумеваем под "скрытой линейностью". С 90-х годов в теории кодирования активно стали исследоваться нелинейные коды, образы которых под действием подходящих (как правило, взаимно-однозначных и изометричных) отображений в другие метрические пространства линейны, см., например, работы [3] и [4]. Такие "скрыто линейные" коды среди всех кодов с некоторыми фиксированными параметрами по своим свойствам зачастую близки к линейным.

Рассмотрим  $\mathbb{Z}_2$ - и  $\mathbb{Z}_4$ -линейные коды с параметрами кодов Адамара (далее кратко — *коды типа Адамара*). Известно, что  $\mathbb{Z}_2$ -линейный (т. е. линейный в обычном смысле) двоичный код Адамара длины  $2^m$  единствен с точностью до эквивалентности. Д. С. Кротовым [5] было показано, что существует в точности  $m/2$  попарно неэквивалентных  $\mathbb{Z}_4$ -линейных кодов типа Адамара длины  $2^{m+1}$  при  $m > 2$ . Опираясь на данную Д. С. Кротовым [5] классификацию всех таких кодов, рассмотрим серию некоторых "скрыто линейных" двоичных кодов типа Адамара  $A_m^k$ ,  $1 \leq k \leq m/2$ , длины  $2^m$ . В этой серии каждый код  $A_m^k$  получается из линейного четверичного кода  $\mathcal{A}_m^k$  заменой элементов 0, 1 на 0 и элементов 2, 3 на 1 в каждой координате, где  $\mathcal{A}_m^k$  — подкод соответствующего линейного четверичного кода Адамара типа  $4^k 2^{m-2k}$  (см. [5]), состоящий из всех кодовых векторов, имеющих в первой координате только 0 или 2. При этом код  $A_m^1$  линейен и все коды  $A_m^1, \dots, A_m^{m/2}$  попарно неэквивалентны. Каждый код  $A_m^k$  образует абелеву

\*Работа выполнена при поддержке интеграционного проекта СО РАН № 35 «Древовидный каталог математических Интернет-ресурсов» и Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-01-00248).

группу относительно операции  $\bullet$ , индуцированной операцией  $+$  покоординатного сложения над  $\mathbb{Z}_4$ , определённой на множестве векторов кода  $A_m^k$ . В этом смысле код  $A_m^k$  является “скрыто линейным”.

Множество  $\mathfrak{A}_m^k$  булевых функций, векторами значений которых являются кодовые векторы кода  $A_m^k$ , представляет собой аналог множества аффинных функций — это функции вида  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_k \oplus a$ , где  $a \in \mathbb{Z}_2$  и операция  $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$  играет роль скалярного произведения. Коды  $A_m^k$  выбраны таким образом, чтобы возникающие новые скалярные произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$  обладали многими свойствами обычного скалярного произведения и на их основе оказались возможными конструктивные построения. Здесь отметим лишь, что каждый класс функций  $\mathfrak{A}_m^k$  состоит из  $2^{m-k+1}(k+1)$  аффинных функций и  $2^{m-k+1}(2^k - k - 1)$  квадратичных функций.

Булеву функцию  $f$  от чётного числа переменных  $m$  назовём *k-бент-функцией*,  $1 \leq k \leq m/2$ , если вектор значений этой функции удалён на максимальное возможное расстояние  $2^{m-1} - 2^{(m/2)-1}$  от каждого кода типа Адамара  $A_m^j$ ,  $j = 1, \dots, k$  (или, что эквивалентно, функция  $f$  одинаково плохо аппроксимируется булевыми функциями из каждого класса  $\mathfrak{A}_m^j$ ,  $j = 1, \dots, k$ ). Обычные бент-функции представляют собой класс 1-бент-функций  $\mathfrak{B}_m^1$ . Для  $k > \ell \geq 1$  класс *k-бент-функций*  $\mathfrak{B}_m^k$  является собственным подклассом класса *ℓ-бент-функций*  $\mathfrak{B}_m^\ell$ .

Пусть  $\mathfrak{F}_2^1$  — множество всех симметрических функций от двух переменных. Приведем индуктивный способ построения *k-бент-функций*.

**Теорема.** Пусть числа  $m, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  чётны,  $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  — любое,  $k \in \mathbb{N}$  такое, что  $1 \leq k \leq m/2$ , и пусть функция  $f \in \mathfrak{F}_{2j+m+r}$  представима в виде

$$f(a_1, a'_1, \dots, a_j, a'_j, \mathbf{u}', \mathbf{u}'') = \left( \bigoplus_{i=1}^j s_i(a_i, a'_i) \right) \oplus p(\mathbf{u}') \oplus q(\mathbf{u}''),$$

где  $s_1, \dots, s_j \in \mathfrak{F}_2^1, p \in \mathfrak{F}_r$  и  $q \in \mathfrak{F}_r$  — функции с непересекающимися множествами переменных. Тогда  $f$  принадлежит классу  $\mathfrak{B}_{2j+m+r}^{j+k}$ , если и только если  $s_1, \dots, s_j \in \mathfrak{B}_2^1, p \in \mathfrak{B}_m^k$  и  $q \in \mathfrak{B}_r^1$ .

Напомним, что *степенью нелинейности* булевой функции называется число переменных в самом длинном слагаемом её алгебраической нормальной формы (или многочлена Жегалкина). Наибольшее число  $k$ ,  $1 \leq k \leq m/2$ , для которого бент-функция является *k-бент-функцией*, назовём *кратностью нелинейности* этой функции. Конструктивно нами доказано

**Утверждение.** Для любого целого  $k$ ,  $1 \leq k \leq m/2$ , существуют

- (i) *k-бент-функции* с любой степенью нелинейности  $d$ , где  $2 \leq d \leq \max\{2, \frac{m}{2} - k + 1\}$ ;
- (ii) *k-бент-функции* с любой допустимой кратностью нелинейности  $\ell$ ,  $k \leq \ell \leq m/2$ .

Для каждого  $k$  определено подмножество  $\mathfrak{F}_m^k$  (мощности  $2^{2^{m-k} \log_2 \frac{4}{3}}$ ) множества булевых функций  $\mathfrak{F}_m$ , на котором понятия *k-бент-функции* и *1-бент-функции* совпадают.

Доказательства всех приведённых результатов можно найти в [6].

## Литература

1. Youssef A., Gong G. Hyper-bent functions // Advances in Cryptology — EUROCRYPT'2001. Proc. Berlin: Springer, 2001. P. 406–419 (Lecture Notes in Computer Science 2045).
2. Кузьмин А. С., Марков В. Т., Нечаев А. А., Шлишков А. В. Приближение булевых функций мономиальными // Дискретная математика. 2006. Т. 18, № 1. С. 9–29.
3. Нечаев А. А. Код Кердока в циклической форме // Дискретная математика. 1989. Т. 1, № 4. С. 123–139.
4. Hammons A. R., Kumar P. V., Calderbank A. R., Sloane N. J. A., Solé P. The  $\mathbb{Z}_4$ -linearity of Kerdock, Preparata, Goethals, and related codes // IEEE Trans. Inform. Theory. 1994. V. 40, N 2. P. 301–319.
5. Krotov D. S.  $\mathbb{Z}_4$ -linear Hadamard and extended perfect codes // Proc. of the Int. Workshop on Coding and Cryptography WCC 2001, Jan. 8–12, 2001. Paris, France. P. 329–334.
6. Токарева Н. Н. Бент-функции кратной нелинейности: *k-бент-функции* // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1, сдано в печать, 2007.

## ОЦЕНКИ ЧИСЛА РАЗЛИЧНЫХ ШАРОВ ЗАДАННОГО РАДИУСА В ГРАФАХ

Т. И. Федоряева

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; ft\_i@math.nsc.ru*

Пусть  $\tau_i(G)$  — число различных шаров радиуса  $i$  в метрическом пространстве обыкновенного связного графа  $G$  диаметра  $d$  с обычной метрикой пути,  $i \geq 0$ .

**Определение.** Вектор  $\tau(G) = (\tau_0(G), \tau_1(G), \dots, \tau_i(G), \dots, \tau_d(G))$  называется *вектором разнообразия шаров* графа  $G$ .

Для целочисленных векторов будем писать  $(\alpha_0, \dots, \alpha_m) \leq (\beta_0, \dots, \beta_k)$ , если  $m \leq k$  и  $\alpha_i \leq \beta_i$  при всех  $i \leq m$ .

Пусть  $\Omega$  — один из следующих классов графов:  $\Gamma_n$  ( $T_n$ ) — все  $n$ -вершинные обыкновенные связные графы (деревья) и  $\Gamma_{n,d}$  ( $T_{n,d}$ ) — все  $n$ -вершинные обыкновенные связные графы (деревья) диаметра  $d$ . Всюду далее считаем, что  $\Gamma_{n,d} \neq \emptyset$  и  $T_{n,d} \neq \emptyset$ . Положим

$$\bar{\tau}_i(\Omega) = \max_{G \in \Omega} \tau_i(G), \quad \underline{\tau}_i(\Omega) = \min_{G \in \Omega} \tau_i(G).$$

Естественно возникает задача нахождения наибольшего и наименьшего числа шаров заданного радиуса  $i$  в графах из класса  $\Omega$ , т. е. величин  $\bar{\tau}_i(\Omega)$  и  $\underline{\tau}_i(\Omega)$  соответственно.

В классе  $T_{n,d}$  строятся некоторые деревья  $\underline{D}_{n,d}, \bar{D}_{n,d} \in T_{n,d}$  для произвольных  $n, d$  и доказывается следующая

**Теорема 1.** *Вектор разнообразия шаров произвольного дерева  $D \in T_{n,d}$  удовлетворяет следующим соотношениям:  $\tau(\underline{D}_{n,d}) \leq \tau(D) \leq \tau(\bar{D}_{n,d})$ . Подсчитано число неизоморфных деревьев из  $T_{n,d}$ , вектор разнообразия шаров которых совпадает с  $\tau(\bar{D}_{n,d})$  ( $\tau(\underline{D}_{n,d})$ ), и указан их общий вид.*

Как следствие из теоремы 1, устанавливаются точные значения наибольшего и наименьшего числа различных шаров заданного радиуса  $i$  в  $n$ -вершинном дереве диаметра  $d$ , т. е.  $\bar{\tau}_i(T_{n,d})$  и  $\underline{\tau}_i(T_{n,d})$  соответственно.

**Теорема 2.** *Вектор разнообразия шаров произвольного графа  $G \in \Gamma_n$  удовлетворяет следующим соотношениям:  $\tau(K_n) \leq \tau(G) \leq \tau(P_n)$ . Существует единственный с точностью до изоморфизма граф  $\bar{G}$  (граф  $\underline{G}$ ) из  $\Gamma_n$  такой, что  $\tau(G) \leq \tau(\bar{G})$  ( $\tau(\underline{G}) \leq \tau(G)$ ) для любого графа  $G \in \Gamma_n$ .*

Для деревьев класса  $T_n$  верхнюю оценку компонент вектора разнообразия шаров также дает теорема 2, а нижняя оценка выглядит иначе и приводится в следующем замечании.

**Замечание.**  $\tau(K_{1,n-1}) \leq \tau(D)$  для любого дерева  $D \in T_n$  при  $n \geq 2$ . Существует единственное с точностью до изоморфизма дерево  $\underline{D} \in T_n$  такое, что  $\tau(\underline{D}) \leq \tau(D)$  для любого дерева  $D \in T_n$ .

Как следствие, устанавливаются точные значения  $\underline{\tau}_i(\Gamma_n)$ ,  $\bar{\tau}_i(\Gamma_n)$ ,  $\underline{\tau}_i(T_n)$  и  $\bar{\tau}_i(T_n)$ .

Далее, для произвольных  $n, d$  строится граф  $\underline{G}_{n,d} \in \Gamma_{n,d}$ , в явном виде определяется вектор  $\tau^*(n, d) = (\tau_0^*(n, d), \dots, \tau_d^*(n, d))$  и доказывается

**Теорема 3.** *Вектор разнообразия шаров произвольного графа  $G \in \Gamma_{n,d}$  удовлетворяет следующим соотношениям:  $\tau(\underline{G}_{n,d}) \leq \tau(G) \leq \tau^*(n, d)$ .*

Используя теорему 3, устанавливаются точные значения  $\underline{\tau}_i(\Gamma_{n,d})$ . Для  $\bar{\tau}_i(\Gamma_{n,d})$  величина  $\tau_i^*(n, d)$  является верхней оценкой, причем она совпадает с  $\bar{\tau}_i(\Gamma_{n,d})$  при  $i \in [0, m]$  для некоторого  $m \leq d$ , зависящего от  $n$  и  $d$  (в частности,  $m = d$  при  $n \geq 2d$ ), а при  $i \in [m, d]$  выполняется неравенство  $\tau_i^*(n, d) < n$ , и функция  $\tau_i^*(n, d)$  строго убывает по  $i$ . Таким образом,  $\tau_i^*(n, d)$  суть точные значения  $\bar{\tau}_i(\Gamma_{n,d})$  на интервале  $[0, m]$ , причём эти значения достижимы в одном графе независимо от  $i \in [0, m]$ .

# МЕТОДЫ ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ\*

О. В. Хамисов

*Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск; khamisov@isem.sei.irk.ru*

Пусть даны множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  и скалярная функция  $f(x)$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Определение.** Будем говорить, что функция  $f(x)$  имеет вогнутую функцию-миноранту на множестве  $X$  если существует функция  $\varphi(x, y)$ ,  $\varphi : \mathbb{R}^n \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывная по  $x$  для каждого фиксированного  $y$ , такая, что

1.  $\varphi(x, y)$  вогнута по  $x$ ;
2.  $f(x) \geq \varphi(x, y) \quad \forall (x, y) \in X \times X$ ;
3.  $f(y) = \varphi(y, y) \quad \forall y \in X$ .

Функция  $\varphi(x, y)$  называется вогнутой минорантой функции  $f(x)$ , построенной в точке  $y \in X$ . Множество всех функций  $f(x)$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  имеющих вогнутую миноранту на  $X$  обозначим через  $CM(X)$  и каждую функцию  $f \in CM(X)$  будем называть с.м. функцией на множестве  $X$  ("с.м." есть первые буквы выражения "concave minorant"). Функцию  $f \in CM(\mathbb{R}^n)$  будем называть просто с.м. функцией. В дальнейшем будем предполагать, что множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  компактно.

Рассмотрим следующую задачу математического программирования

$$\min f(x), \tag{1}$$

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{2}$$

$$x \in X, \tag{3}$$

где  $X \subset \mathbb{R}^n$  - компактное множество,  $f, g_i \in CM(X)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Мы будем называть задачу (1)-(3) задачей с.м. программирования. Предположим, что множество  $X$  есть выпуклый многогранник с известными вершинами,  $X = co\{z^1, \dots, z^N\}$ ,  $z^i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $N \geq n + 1$ .

В докладе описана схема аппроксимации задачи (1)-(3) задачей вида

$$\min p(x),$$

$$q_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad k > 1,$$

$$x \in X = co\{z^1, \dots, z^N\}, \quad N \geq n + 1,$$

где  $p(x), q_i(x)$  - вогнутые функции. Используя вогнутость всех функций  $p(x), q_i(x), i = 1, \dots, k$  можно вычислить двойственную оценку  $\theta^*$ ,

$$\theta^* = \sup_{\mu \geq 0} \theta(\mu),$$

$$\theta(\mu) = \min_{x \in R} L(x, \mu),$$

$$L(x, \mu) = p(x) + \sum_{i=1}^k \mu_i q_i(x).$$

Поскольку  $L(x, \mu)$  вогнута по  $x$  и  $X = co\{z^1, \dots, z^N\}$ , то

$$\theta(\mu) = \min_{x \in X} \left\{ p(x) + \sum_{i=1}^k \mu_i q_i(x) \right\} = \min_{1 \leq j \leq N} \left\{ p(z^j) + \sum_{i=1}^k \mu_i q_i(z^j) \right\}.$$

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06-01-00465-а).

Соответствующая двойственная задача

$$\theta^* = \sup_{\mu \geq 0} \min_{1 \leq j \leq N} \left\{ p(z^j) + \sum_{i=1}^k \mu_i q_i(z^j) \right\}.$$

эквивалентна задаче линейного программирования

$$\max \mu_0, \tag{4}$$

$$p(z^j) + \sum_{i=1}^k \mu_i q_i(z^j) \geq \mu_0, j = 1, \dots, N, \tag{5}$$

$$\mu_i \geq 0, i = 1, \dots, k. \tag{6}$$

Целью доклада является описание вычислительной процедуры решения исходной задачи (1)-(3), основанной на сочетании схемы ветвей и границ с нахождением двойственных оценок при помощи решения задач (4)-(6). Приводятся результаты численного эксперимента.

## ЛОГИКА ВЕТВЯЩЕГОСЯ ВРЕМЕНИ И ИГРОВЫЕ ПРОГРАММЫ. ПРИЛОЖЕНИЯ И ПЕРСПЕКТИВЫ\*

Р. В. Хелемендик

*Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва; romash@spp.keldysh.ru*

Если задача записывается в виде формулы, то выполнимость формулы означает существование решения задачи, а модель, в которой эта формула истинна, даёт решение задачи. Рассматриваемая в настоящей работе логика ветвящегося времени (Computational tree logic - Ctl), является одной из модальных логик, ориентированных на изучение процессов, происходящих во времени. В этой логике к пропозициональным связкам добавляются следующие временные: “ $\circ$ ” – “в следующий момент”, “ $\square$ ” – “во всякий момент”, “ $\diamond$ ” – “в некоторый момент”, “ $\mathcal{U}$ ” – “до тех пор, пока”, а также кванторы “ $\forall$ ” и “ $\exists$ ”, стоящие перед каждой временной связкой (и только перед ней). Истинность формулы определяется в модели: в вершинах связного ориентированного графа, в котором каждой вершине приписаны истинностные значения пропозициональных переменных. Формула называется выполнимой, если существует модель, в начальной вершине которой эта формула истинна. Формула называется общезначимой, если она истинна во всякой модели.

В работе [5] доказана разрешимость проблемы распознавания выполнимости для Ctl, а также предложен табличный метод распознавания выполнимости, основанный на методе семантических таблиц Бета, который был затем усовершенствован в работе [6]. Отметим, что в указанных работах на графы в модели были наложены ограничения, кроме того некоторые возможные случаи в построении и анализе так называемого табличного графа не были рассмотрены, а доказательства корректности и полноты были даны в виде наброска.

В связи с этим в работах [1,2] автором был построен новый табличный алгоритм, основанный на понятии так называемой схемы модели. Приведено детальное доказательство корректности и полноты данного алгоритма, а также доказано, что размер схемы модели не превышает размера табличного графа Эмерсона и приведены примеры классов формул, для которых схемы моделей существенно меньше табличных графов Эмерсона. С использованием схемы модели показана возможность перевода разбора исходной формулы, записывающей конкретную задачу на язык этой задачи, а также возможности участия человека при компьютерной реализации алгоритма.

Основные приложения Ctl, рассматриваемые в [5,6] и других работах связаны с применением этой логики к анализу поведения компьютерных программ. С моментом времени связывается состояние памяти компьютера, а с моделью - функционирование программы. При этом наряду с синтезом программы (нахождением модели для формулы в случае её выполнимости) рассматривается и более простая задача, состоящая в проверке утверждения-спецификации на вычислении программы (проверка истинности формулы на модели). Автором в работе [1] рассматривалось применение алгоритма распознавания выполнимости формул к решению шахматных задач, состоящее в записи задачи в виде формулы и построения (в случае выполнимости) по модели полного решения позиции.

Наряду с разрешимостью логики ветвящегося времени отметим еще одно важное ее свойство. Для найденной в работе [5] системы аксиом для Ctl в [1] был впервые сформулирован эффективный алгоритм построения вывода общезначимых формул из аксиом. Таким образом, в случае записи теоремы из некоторой формальной теории на языке Ctl с помощью указанного алгоритма может быть получено и формальное доказательство этой теоремы.

При решении задач с помощью Ctl автором записывались начальные условия (“позиция”), “ходы” – правила изменения ситуаций (позиций) и цель. Итоговая формула есть конъюнкция этих трёх компонент. При этом запись первых двух компонент происходит единым, но весьма громоздким для Ctl способом. Для упрощения записи задач автором был введён язык игровых программ (ИП) - см. [4]. С помощью этого языка в работе [3] удалось полностью записать все

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики» (проект «Оптимальный синтез управляющих систем»).

допустимые ходы в любой шахматной позиции. Такое разделение “механической” и смысловой составляющей формулы представляется эффективным при рассмотрении достаточно сложных задач, в которых для достижения “выигрыша” глобальная цель заменяется на последовательность локальных, анализ которых может быть проведён за приемлемое время.

ИП представляет собой специальный граф, который описывает выигрышную стратегию при взаимодействии двух сторон. Рассматривается задача синтеза ИП для заданных условий: начальных значений переменных, набора функций (“ходов”), типа игрового взаимодействия и цели, записываемой формулой логики ветвящегося времени. При этом стратегия, описываемая ИП (в случае её существования), считается выигрышной, если для этой ИП выполнены все компоненты зафиксированного условия. Число переменных, их значений и функций для языка ИП конечно. Истинность цели, в которой в роли элементарного высказывания стоит равенство переменной некоторому значению, определяется в вершинах ИП аналогично определению истинности формулы в модели. Вершинам ИП приписаны наборы значений переменных и виды действия (либо отсутствие действия – такие вершины называются финальными), соответствующие типам игрового взаимодействия. Эти вершины называются “преобразователями”, “ветвителями”, “выбирателями” и соответствуют игровому взаимодействию “доверия” (кооперации), “просчитывания” (противоборства) и “максимального выбора”. Каждая такая вершина имеет конечное число исходящих дуг, помеченных символами функций-ходов, которые однозначно определяют наборы значений переменных для вершин, в которые они входят. Для преобразователя рассматривается один из возможных в данной позиции ходов, для ветвителя – все возможные; для выбирателя – любое непустое подмножество, каждый ход из которого может быть продублирован конечное число раз.

Возникает естественный вопрос о сравнении выразительных возможностей языков ИП и Ctl. Ответом на этот вопрос являются следующие теоремы. Пусть  $\mathcal{U}$  – условие для ИП,  $\Theta$  – формула Ctl,  $\Theta^*$  – цель в условии  $\mathcal{U}$ , полученная из формулы  $\Theta$  заменой пропозициональных переменных указанными выше равенствами.

**Теорема 1.** *Если формула  $\Theta$  выполнима, то возможно такое доопределение условия  $\mathcal{U}$  с целью  $\Theta^*$ , что существует ИП, удовлетворяющая этому условию.*

**Теорема 2.** *Если существует ИП, удовлетворяющая условию  $\mathcal{U}$  с целью  $\Theta^*$ , то формула  $\Theta$  выполнима.*

Таким образом, любая проблема, решаемая путём распознавания выполнимости формулы логики ветвящегося времени с построением модели в случае выполнимости, может быть записана и решена в языке игровых программ.

### Литература

1. Хелемендик Р. В. Алгоритм распознавания выполнимости формул логики ветвящегося времени и его применение. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М.: 2005.
2. Хелемендик Р. В. Алгоритм распознавания формул логики ветвящегося времени и эффективный алгоритм построения выводов общезначимых формул из аксиом. // Математические вопросы кибернетики. Вып. 15: Сборник статей / Под ред. О.Б.Лупанова. - М.: Физматлит, 2006. С. 217-266.
3. Хелемендик Р. В. О единой формальной записи всех допустимых ходов в любой шахматной позиции // Материалы XVI Международной школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем" (Санкт-Петербург, 26-30 июня 2006 г.) / Под редакцией О.Б.Лупанова. – М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2006, с. 108-112.
4. Хелемендик Р. В. О расширении типов игрового взаимодействия в языке игровых программ // Материалы VI молодежной научной школы по дискретной математике и её приложениям (Москва, 16-21 апреля 2007 г.) Часть III. Под редакцией А.В.Чашкина. 2007. С. 30-35.
5. Emerson E. A., and Halpern J. Y. Decision Procedure and Expressiveness in the Temporal Logic of Branching Time, Journal of Computer and System Sciences, vol.30, no.1, pp. 1-24, Feb.85.
6. Emerson E.A. Automated temporal reasoning about reactive systems // Logics for concurrency. Lecture Notes in Computer Science, V. 1043. Berlin: Springer, 1996. P. 41-101.

# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОПТИМАЛЬНЫХ РАСПИСАНИЙ В ЗАДАЧЕ FLOW SHOP С ПРЕРЫВАНИЯМИ И ПРОИЗВОЛЬНЫМ РЕГУЛЯРНЫМ КРИТЕРИЕМ\*

Д. А. Чемисова

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; jad99@mail.ru*

Исследуются свойства оптимальных расписаний в задаче Flow Shop с разрешением прерываний операций и произвольным регулярным критерием. Под регулярным критерием понимается требование минимизации произвольной регулярной функции от моментов окончания операций.

Как показано в [1], уже со стандартным критерием минимизации длины расписания задача NP-трудна. Свойства оптимальных расписаний этого частного случая задачи рассматривались в [2]. Результаты данной работы, с произвольным регулярным критерием от моментов окончания операций, являются более общими.

Доказано, что оптимальное расписание любого примера задачи Flow Shop с допущением прерываний операций и произвольным регулярным критерием может быть построено жадным алгоритмом (при подходящем задании приоритетов операций). Дана оценка на число прерываний в любом жадном (а следовательно, и в оптимальном) расписании. Доказано, что длина оптимального расписания (по заданному регулярному критерию) всегда совпадает с суммарной длиной некоторого подмножества операций.

## Литература

1. *Gonzalez T., Sahni S.* Flowshop and jobshop schedules: complexity and approximation // *Operations Research*. 1978. V. 26, No. 1. P. 36–52.
2. *Севастьянов С. В., Чемисова Д. А., Черных И. Д.* О некоторых свойствах оптимальных расписаний в задаче Джонсона с прерываниями // *Дискретный анализ и исследование операций*. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 3. С. 83–102.

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 05–01–00960).



## STRUCTURAL PROPERTIES OF SOME CAYLEY GRAPHS\*

E. V. Konstantinova

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk; e\_konsta@math.nsc.ru*

Let  $G$  be a finite group and  $S \subset G$  be a generating set of  $G$  such that  $e \notin S$  and if  $s \in S$  then  $s^{-1} \in S$ . By the definition, in a Cayley graph  $\Gamma(V, E)$  vertices correspond to the elements of a group, i.e.  $V = G$ , and edges correspond to multiplication on the right by generators, i.e.  $E = \{\{g, gs\} : g \in G, s \in S\}$ . So, there are no loops in  $\Gamma$  and if there is an edge from  $g$  to  $gs$  in  $\Gamma$  then there is also an edge from  $gs$  to  $(gs)s^{-1} = g$ .

In this paper we overview structural properties of Cayley graphs on the symmetric group  $Sym_n$  and on the hyperoctahedral group  $B_n$  generated by transpositions and reversals.

The symmetric group  $Sym_n$  is the group of all permutations  $\pi$  written in one-line notation as  $\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n]$  where  $\pi_i = \pi(i)$  are the images of the elements for every  $i \in \{1, \dots, n\}$ . The cardinality of the symmetric group is defined by the number of all its elements, that is  $|Sym_n| = n!$ .

We consider Cayley graphs on  $Sym_n$  generated by transpositions consisting of swapping: 1) any two elements of  $\{1, \dots, n\}$ ; 2) any two neighboring elements of  $\{1, \dots, n\}$ ; and 3) the symbol 1 and  $i$  for any  $1 < i \leq n$ . The corresponding graphs are the *transposition graph*  $Sym_n(T)$ , the *bubble-sort graph*  $Sym_n(t)$  and the *star graph*  $Sym_n(st)$ . We also consider Cayley graphs on  $Sym_n$  generated by reversals consisting of reversing: 1) any interval  $[i, j]$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , of a permutation; and 2) any interval  $[1, i]$ ,  $1 < i \leq n$ , of a permutation. The corresponding graphs are the *reversal graph*  $Sym_n(R)$  and the *pancake graph*  $Sym_n(PR)$ . For all these graphs we present their main structural properties.

The generating set  $T = \{t_{i,j} \in Sym_n, 1 \leq i < j \leq n\}$ ,  $|T| = \binom{n}{2}$ , of the transposition graph  $Sym_n(T)$  consists of all transpositions  $t_{i,j}$  interchanging positions  $i$  and  $j$  when multiplied on the right, i.e.  $[\dots, \pi_i, \dots, \pi_j, \dots]t_{i,j} = [\dots, \pi_j, \dots, \pi_i, \dots]$ . The distance in this graph is defined as the least number of transpositions from the set  $T$  needed to transform one permutation into another. As any  $k$ -cycle can be written as a product of  $k - 1$  transpositions but no fewer, the diameter of  $Sym_n(T)$  is  $(n - 1)$ . The graph is bipartite since any edge joins an even permutation to an odd permutation. All these facts and other structural properties of the graph are collected in the following statement.

**Theorem 1.** The transposition graph  $Sym_n(T)$ ,  $n \geq 3$ ,

- is a connected bipartite  $\binom{n}{2}$ -regular graph of order  $n!$  and diameter  $(n - 1)$ ;
- is edge-transitive but not distance-regular and hence not distance-transitive;
- is hamiltonian, i.e. contains a hamiltonian (spanning) cycle;
- does not contain subgraphs isomorphic to  $K_{2,4}$  and
- each of its vertices belongs to  $\binom{n}{3}$  subgraphs isomorphic to  $K_{3,3}$ .

Here  $K_{p,q}$  is the complete bipartite graph with  $p$  and  $q$  vertices in the two parts, respectively.

The similar results are given for the bubble-sort graph  $Sym_n(t)$  and the star graph  $Sym_n(st)$ . The set of generators for  $Sym_n(t)$  is presented by 2-cycles and it is also known as the set of the  $(n - 1)$  Coxeter generator of the symmetric group. The structural properties of this graph are fundamental to physics and Lie theory. The star graph is one of the most investigated graphs in the theory of interconnection networks since many parallel algorithms are efficiently mapped on this graph.

Now we consider structural properties of Cayley graphs on the symmetric group  $Sym_n$  generated by reversals. For the reversal graph  $Sym_n(R)$  we have the following results.

**Theorem 2.** The reversal graph  $Sym_n(R)$ ,  $n \geq 3$ ,

- is a connected  $\binom{n}{2}$ -regular graph of order  $n!$  and diameter  $(n - 1)$ ;
- is not edge-transitive, not distance-regular and hence not distance-transitive;
- does not contain triangles nor subgraphs isomorphic to  $K_{2,4}$  and
- each of its vertex belongs to  $(n - 2)$  subgraphs isomorphic to  $K_{3,3}$
- and to  $\frac{1}{12}(n - 3)(n - 1)(n^2 + 2n + 4)$ ,  $n \geq 4$ , subgraphs isomorphic to  $K_{2,2}$  that are not subgraphs of  $K_{3,3}$ .

\*The research was supported by the RFBR grant 06-01-00694.

The pancake graph  $Sym_n(PR)$  is well-known because of the open combinatorial pancake problem concerning its diameter. This graph is also considered in molecular biology and computer science. It is a connected  $(n - 1)$ -regular graph of order  $n!$  without cycles of lengths 3,4,5. It is hamiltonian but not edge-transitive, not distance-regular and hence not distance-transitive for  $n \geq 4$ .

The hyperoctahedral group  $B_n$  is defined as the group of all permutations  $\pi^\sigma$  acting on the set  $\{\pm 1, \dots, \pm n\}$  such that  $\pi^\sigma(-i) = -\pi^\sigma(i)$  for all  $i \in \{1, \dots, n\}$ . An element of  $B_n$  is a signed permutation, i.e. a permutation with a sign attached to every entry and determined by two data:  $|\pi(|i|)|$ , which permutes  $\{1, \dots, n\}$ , and the sign of  $\pi^\sigma(i)$  for  $1 \leq i \leq n$ . This gives a bijection between  $B_n$  and the wreath product  $\mathbb{Z}_2 \wr Sym_n$  of the "sign-change" cyclic group  $\mathbb{Z}_2$  with the symmetric group  $Sym_n$ ; thus  $|B_n| = 2^n n!$ . We also use the compact one-line notation for a signed permutation  $\pi^\sigma$  as  $[\pi_1, \bar{\pi}_2, \dots, \bar{\pi}_i, \dots, \pi_n]$ , where a bar is written over an element with a negative sign.

The Cayley graph on  $B_n$  generated by the transpositions  $t_{ij}^\sigma$  on elements  $i$  and  $j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , that also switch the signs of these elements, i.e.  $[\dots, \pi_i, \dots, \bar{\pi}_j, \dots] t_{ij}^\sigma = [\dots, \pi_j, \dots, \bar{\pi}_i, \dots]$ , and the "transpositions"  $t_{ii}^\sigma$ ,  $1 \leq i \leq n$ , changing the sign of the  $i$ -th element, i.e.  $[\dots, \pi_i, \dots] t_{ii}^\sigma = [\dots, \bar{\pi}_i, \dots]$ , is called the *transposition graph*  $B_n(T^\sigma)$ . By analogy with the symmetric group, we consider the *bubble-sort graph*  $B_n(t^\sigma)$  generated by the transpositions  $t_{ii+1}^\sigma$ ,  $1 \leq i < n - 1$ , and  $t_{ii}^\sigma$ ,  $1 \leq i \leq n$ , as well as the *star graph*  $B_n(st^\sigma)$  generated by the transpositions  $t_{1i}^\sigma$ ,  $1 < i \leq n$ , and  $t_{ii}^\sigma$ ,  $1 \leq i \leq n$ . The group  $B_n$  with the set of generators presented by the transpositions  $t_{ii+1}^\sigma$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ , and  $t_{ii}^\sigma$ ,  $1 \leq i \leq n$ , is the classical Coxeter group of type  $B$ . We also consider the *reversal graph*  $B_n(R^\sigma)$  generated by the reversals  $r_{i,j}^\sigma$  flipping the signs of the elements on the segments  $[i, j]$ , i.e.  $[\dots, \pi_i, \bar{\pi}_{i+1}, \dots, \pi_{j-1}, \pi_j, \dots] r_{i,j}^\sigma = [\dots, \bar{\pi}_j, \bar{\pi}_{j-1}, \dots, \pi_{i+1}, \bar{\pi}_i, \dots]$ , where  $1 \leq i \leq j \leq n$ , and the *burnt pancake graph*  $B_n(PR^\sigma)$  generated by the prefix-reversals  $r_{1,i}^\sigma$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Structural properties are presented for all these graphs.

The set  $T^\sigma = \{t_{ii}^\sigma \in B_n, 1 \leq i \leq n\} \cup \{t_{ij}^\sigma \in B_n, 1 \leq i < j \leq n\}$ ,  $|T^\sigma| = n + \binom{n}{2}$ , is the generating set for  $B_n(T^\sigma)$ . The distance in this graph is defined as the least number of transpositions from the set  $T^\sigma$  needed to transform one signed permutation into another. The order of this graph corresponds to the order of  $B_n$ . The basic properties of this graph are collected in the following statement.

**Theorem 3.** The transposition graph  $B_n(T^\sigma)$ ,  $n \geq 2$ ,

- is a connected bipartite  $n + \binom{n}{2}$ -regular graph of order  $2^n n!$ ;
- is edge-transitive but not distance-regular and hence not distance-transitive;
- does not contain subgraphs isomorphic to  $K_{2,3}$  and
- each of its vertex belongs to  $\frac{1}{2}(n^3 + 9n^2 - 58n + 90)$ ,  $n \geq 3$ , subgraphs isomorphic to  $K_{2,2}$ .

The similar results are obtained for the bubble-sort graph  $B_n(t^\sigma)$  and the star graph  $B_n(st^\sigma)$ .

We also consider the situation when Cayley graphs are generated by the transpositions  $t_{i,j}^\sigma$  with  $i \neq j$ . The connected components arise for such graphs and their number depends on a set of generators. For example, if the transpositions  $t_{i,j}^\sigma$ , where  $1 \leq i < j \leq n$ , are considered as the generators then the corresponding Cayley graph has 2 connected isomorphic components. Each of these components represents a subgroup of  $B_n$  and by symmetry these subgroups are isomorphic. The even-signed permutation group  $D_n$  which is the normal subgroup of  $B_n$  of index 2 whose elements are signed permutations with even numbers of negative elements is one of these subgroups.

The reversal graph  $B_n(R^\sigma)$  is defined on the group  $B_n$  and generated by the reversals from the set  $R^\sigma = \{r_{i,j}^\sigma \in B_n, 1 \leq i \leq j \leq n\}$ ,  $|R^\sigma| = n + \binom{n}{2}$ . The distance in this graph is defined as the least number of sign-change reversals transforming one signed permutation into another. Structural properties of this graph are presented by the following statements.

**Theorem 4.** The reversal graph  $B_n(R^\sigma)$ ,  $n \geq 2$ ,

- is a connected  $n + \binom{n}{2}$ -regular graph of order  $2^n n!$  and diameter  $(n + 1)$ ;
- is not edge-transitive, not distance-regular and hence not distance-transitive;
- does not contain triangles nor subgraphs isomorphic to  $K_{2,3}$  and
- each of its vertex belongs to  $\frac{1}{12}(n - 1)n(n + 1)(n + 4)$  subgraphs isomorphic to  $K_{2,2}$ .

The similar results are shown for the burnt pancake graph  $B_n(PR^\sigma)$ . It is a connected  $(2n - 1)$ -regular graph of order  $2^n n!$  which does not contain triangles nor subgraphs isomorphic to  $K_{2,3}$  and each of its vertex belongs to  $\frac{3}{2}n(n - 1)$  subgraphs isomorphic to  $K_{2,2}$ . The diameter of this graph is unknown and this problem is known as the burnt pancake flipping problem.

---

## ТЕОРИЯ ИГР И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА GAME THEORY AND MATHEMATICAL ECONOMICS

---

### ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЯХ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ИЕРАРХИЧЕСКИ ОРГАНИЗОВАННЫХ СИСТЕМ\*

С. М. Анцыз

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; antzys@math.nsc.ru*

В семидесятые годы прошлого столетия появились многочисленные публикации, посвященные изучению экономических систем с иерархией в управлении. Одними из первых отечественных работ были [1] и [2]. Аппаратом для исследования явились двухуровневые задачи математического программирования. Для общего случая до сих пор не удалось построить эффективных алгоритмов для решения этих задач. Было показано, что даже в линейном случае (задачи верхнего и нижнего уровней являются задачами линейного программирования) двухуровневая задача *NP*-трудна [3].

Тем не менее в [4] для задачи поиска оптимальной стратегии функционирования системы главк - предприятия был построен алгоритм, трудоемкость которого линейно зависела от длины входа. В этой работе рассматривался важный частный случай двухуровневой задачи линейного программирования. В дальнейшем в [5] были рассмотрены некоторые варианты модели возмещения ущерба, нанесенного окружающей среде, представляющие собой двухуровневые задачи дробно-линейного программирования. Учет структуры ограничений позволил редуцировать некоторые варианты задач к последовательности задач линейного программирования. Были выявлены причины, не позволяющие осуществить подобную редукцию для прочих вариантов задач.

В докладе будут приведены ряд условий, позволяющих редуцировать двухуровневые задачи к последовательности задач линейного программирования, число решаемых задач в которой линейно зависит от длины входа исходной задачи.

#### Литература

1. Гермейер Ю. Б., Моисеев Н. Н. О некоторых задачах теории иерархических систем управления // В кн.: Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука, 1971. С. 30–43.
2. Гермейер Ю. Б. Игры с противоположными интересами. М.: Наука, 1976.
3. Ben-Ayed, O. and Blayer, C. Computational difficulties of bilevel linear programming // Operation Research 1990. Vol. 38. P. 556–560.
4. Анцыз С. М., Донсков И. В., Маршак В. Д. и др. Оптимизация системных решений в распределенных базах данных. Новосибирск: Наука, 1991.
5. Анцыз С. М., Высоцкая Т. В. Двухуровневые модели оптимизации экологического налогообложения // Препринт № 166. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2006. 34 с.

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 07-06-00363а и № 07-06-13500офи\_ц) и гранта Президента РФ № НШ 4999.2006.6.

## РЕНТА КАК ОБЪЕКТ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ\*

В. А. Булавский<sup>1</sup>, М. И. Вирченко<sup>2</sup>, Н. В. Шестакова<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Центральный экономико-математический институт РАН, Москва*

<sup>2</sup> *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск*

<sup>3</sup> *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; nadine@math.nsc.ru*

Использование экономико-математических методов позволяет разрабатывать новые подходы к изучению теоретических и прикладных проблем ренты.

Исторически теория ренты развивалась как теория земельной ренты. Результаты исследования ее сущности, условий формирования, подходы к исчислению неизбежно связаны со спецификой используемых (явно или неявно) моделей. Экономисты-классики определяли ренту как излишек, получаемый сверх нормативной прибыли на лучших землях в сельскохозяйственном производстве при установлении цен на продукцию по условиям производства на худших (безрентных) землях. При этом они исходили из необходимости удовлетворения определенной потребности в продукции сельского хозяйства, предполагая, что спрос на нее неэластичный, то есть не зависит от продажной цены. В то же время предложение земли тоже неэластично. В неоклассической теории акцент делается именно на это обстоятельство, и рента определяется уже в зависимости от спроса на продукцию сельского хозяйства и производного от него спроса на землю.

В рамках линейно-программного подхода к моделированию экономических ситуаций рассматривалось использование двойственных переменных, оценивающих жесткость ограничений, в качестве оценок продукции и ресурсов. Это имеет скорее теоретическое значение. Как и в вопросах ценообразования, использование дифференциальных (маргинальных) показателей для оценки земли может приводить к противоречию с общими финансовыми балансами. В связи с этим были предложены чисто балансовые модели определения рентных оценок земли при фиксированных размещении и структуре сельскохозяйственного производства, предполагая, что они рациональны [1].

Исходной является базовая модель, которая рассматривает ситуацию, когда земля является единственным производственным ресурсом некоторой экономической системы. В этой системе, состоящей из  $n$  самостоятельных объектов ( $n \geq 2$ ), производится  $m$  видов продукции в заданных объемах, известна также общая площадь земли в каждом объекте,  $P_i$ , и ее распределение по продуктам.

Пусть каким-то образом (вне рамок модели) назначена общая сумма  $R$ , оценивающая весь объем земельных ресурсов в экономической системе. Целью модели является разнести эту общую сумму по отдельным объектам, учитывая исключительно продуктивность земли и структуру производства.

Обозначим через  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  неизвестную часть общей суммы  $R$ , отнесенную к объекту  $i$ , так что

$$\sum_{i=1}^n R_i = R. \quad (1)$$

Преобразуя имеющуюся экономическую информацию, удастся получить такие коэффициенты  $a_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n$ , что система балансовых уравнений

$$R_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} R_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

---

\* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-06-00363а) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (№ НШ-4999.2006.6).

при условии (1) позволяет находить искомые показатели. При некоторых естественных предположениях, из которых, в частности, следует, что матрица  $A$  является неприводимой, доказана следующая теорема.

**Теорема.** Система (2) при дополнительном условии (1) однозначно определяет строго положительные оценки  $R_1, R_2, \dots, R_n$ .

Если речь идет о рентных оценках земли, то обычно используются величины, отнесенные к единице площади, то есть  $r_i = R_i/P_i$ .

Оценки  $r_i$  обладают некоторыми свойствами, отличающими их от рентных оценок, получаемых другими методами или по другим моделям. Они пропорциональны параметру  $R$ , и отношения между ними, естественно, не зависят от его величины. Таким образом, при переходе от  $R_1$  к  $R_2$  новый набор оценок может быть получен умножением уже имеющегося на  $\alpha = R_2/R_1$ . По своей сути оценки  $r_i$  являются качественными оценками земли, выраженными в денежных единицах. На их основе может быть построена шкала качественной оценки земли по объектам.

Реальное производство продукции сопряжено с использованием не только главного производственного фактора — земли, оценку которой мы производим, но и с затратами других факторов. Их эффективность зависит от качества и местоположения земель и в общем случае различается по объектам, что должно быть учтено при определении рентных оценок.\* Вводя в базовую модель дополнительную информацию о затратах других производственных факторов (включая нормальную прибыль), можно рассчитать поправки  $\Delta_i$ , корректирующие оценки  $R_i$ .

Приняв вместо  $R_i$  в качестве оценки земли  $R_i - \Delta_i$  и обозначив через  $\Gamma_i$  разницу между суммарной оценкой продукции, производящейся в объекте  $i$ , по средним затратам с фактическими общими затратами в нем, по аналогии с (2) получим баланс:

$$R_i - \Delta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(R_j - \Delta_j) + \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

из которого с учетом (2) получаем систему уравнений для определения поправок  $\Delta_i$

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\Delta_j - \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Эта система имеет ту же матрицу  $A$ , что и система (2). При этом для сохранения баланса (1) потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{j=1}^n \Delta_j = 0. \quad (4)$$

Система (3) — (4) также имеет единственное решение.

Таким образом, при учете затрат на производство (включая нормальную прибыль) оценка земли в объекте  $i$  определяется формулой  $R_i - \Delta_i$ , где обе составляющие однозначно определяются системами (1),(2) и (3),(4). Кроме того, одновременно и однозначно определяются и цены на продукцию, позволяющие возместить затраты вместе с нормальной прибылью и реализовать рентный доход. Они также имеют две составляющие. Оценка продукции равна сумме средних затрат и средней ренты, приходящейся на тот или иной продукт, с учетом поправок.

Рассмотренные модели имеют целый ряд модификаций. Отражая сложные взаимосвязи натуральных и стоимостных показателей, балансовые модели могут использоваться для исчисления рентных оценок земли и других производственных факторов и являются удобным аналитическим инструментом анализа структуры ренты и ее динамики при изменении экономических параметров.

### Литература

1. Булавский В. А., Вирченко М. И., Шестакова Н. В. Модель дифференциации рентных оценок // Сибирский журнал индустриальной математики. 2007. Т. 10, № 3.

\* Можно считать, что оценки  $R_i$  соответствуют гипотетической ситуации равноэффективности затрат по объектам.

## КОНСТРУИРОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО РАСКРОЯ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

А. Ф. Валеева<sup>1</sup>, Т. Ю. Сиразетдинова<sup>2</sup>

*Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа;*

<sup>1</sup> *aida\_val2004@mail.ru*, <sup>2</sup> *alviris@mail.ru*

Рассматриваются задачи прямоугольного раскроя полосы и листов с учетом технологических ограничений, таких, как гильотинность реза, направление волокон материала, обход дефектов материала. Исходная информация этих задач может быть задана наборами следующего вида: для задачи раскроя полосы  $\langle W; n; w; l; g; e, D \rangle$ , для задачи раскроя листов  $\langle W; L; n; w; l; g; e, D \rangle$ , где  $W$  ширина полосы или листа;  $L$  длина листа;  $n$  количество прямоугольников;  $w = (w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_n)$ ,  $w_i$  ширина прямоугольника;  $l = (l_1, l_2, \dots, l_i, \dots, l_n)$ ,  $l_i$  длина прямоугольника  $i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $g$  признак гильотинности;  $e$  признак возможности поворота прямоугольников. Вводится прямоугольная система координат: оси  $O_x$  и  $O_y$  совпадают со сторонами полосы (листа). Решение задачи представляется в виде набора элементов  $\langle X, Y \rangle$ , где  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  векторы координат прямоугольников. Положение  $i$ -го прямоугольника задается координатами нижней левой точки прямоугольника  $(x_i; y_i)$ . Пусть  $D = (d_1, d_2, \dots, d_m, \dots, d_t)$  список дефектных областей,  $m = \overline{1, t}$ . Дефектные области  $d_m$  аппроксимируются наборами прямоуголь-

ников  $\Pi_j$  на этапе подготовки исходной информации,  $d_m = \bigcup_{j=1}^k \Pi_j$ , положение  $\Pi_j$  определяется

набором  $\langle x'_j, y'_j, l'_j, w'_j \rangle$  (если решается задача раскроя полосы) и набором  $\langle x'_j, y'_j, l'_j, w'_j, n'_j \rangle$  (если решается задача раскроя листов), где  $x'_j, y'_j$  координаты нижнего левого угла дефектной области,  $l'_j, w'_j$  длина и ширина дефектной области,  $n'_j$  номер листа, который содержит дефектную область. Набор элементов  $\langle X, Y \rangle$  называется допустимым прямоугольным раскроем, если: стороны прямоугольников параллельны сторонам полосы или листов (условие ортогональности); прямоугольники не перекрывают друг друга; прямоугольники не выходят за границы полосы или листа; выполняется условие гильотинности (если решается задача гильотинного раскроя); прямоугольники не пересекаются с дефектными областями. При выполнении условий допустимости требуется найти минимальную длину занятой части полосы (если решается задача раскроя полосы) либо минимальное количество листов (если решается задача раскроя листов). Для решения задач прямоугольного раскроя разработан метод «холодного» отжига (Cold Annealing, CA) на базе процедур известной метаэвристики «имитация отжига». Основное отличие предлагаемого алгоритма состоит в том, что он работает с постоянным параметром температуры; использует несколько видов окрестности, выбор которых осуществляется случайным образом; использует новые способы расчета элементов вектора достижимости.

Общая схема получения решения задач прямоугольного раскроя состоит в следующем: генерируется начальное решение с последующим его кодированием; осуществляется поиск лучшего решения на множестве допустимых решений, которые представляются с помощью выбранного способа кодирования. Поиск лучшего решения включает в себя не только алгоритмы, работающие с кодировкой решения, но и декодеры, преобразующие полученную кодировку в карту раскроя. Качество полученного решения зависит не только от выбранного метода расчета раскроя и схемы кодирования, но и от алгоритмов декодирования карт раскроя. Был разработан декодер «вставки» (Priority Rotate Place, PRP), позволяющий учитывать технологические ограничения, возникающие в реальном производстве, в том числе, условие непересечения прямоугольников с дефектными областями материала. Декодер PRP позволяет получить ВЛ-компактную карту раскроя (ВЛ-компактная карта раскроя это карта, в которой ни один прямоугольник не может быть сдвинут вниз или влево).

Для анализа эффективности разработанных алгоритмов [1] были проведены серии численных экспериментов, которые показали, что на большинстве классов задач были получены лучшие результаты по сравнению с классическим методом «имитация отжига». При этом использование нового декодера позволило повысить качество решения по сравнению с известными

декодерами на 3-5%. Разработанное программное обеспечение [2] включено в состав автоматизированного рабочего места технолога раскройно-заготовительного производства и позволило повысить коэффициент использования материала в среднем на 5-8% по сравнению с простыми эвристиками и значительно сократить время проектирования.

### Литература

1. Мухачева Э. А., Ермаченко А. И., Сиразетдинов Т. М., Жукова (Сиразетдинова) Т. Ю. Комплекс алгоритмов и программ расчета гильотинного раскроя // Информационные технологии. 2004. № 8. С. 1825.
2. Сиразетдинов Т. М., Сиразетдинова Т. Ю., Валеева А. Ф. и др. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2007610831 от 20.02.2007. М.

# КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ И ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ИЗМЕРИМОСТЬ\*

В. А. Васильев

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; vasiliev@math.nsc.ru*

Целью настоящего доклада является обзор некоторых современных достижений в области строения ядер кооперативных игр как для конечного, так и для бесконечного числа участников. Обсуждается также ряд смежных вопросов, касающихся описания иерархических множеств Харшаньи и новой характеристики кооперативных игр, связанной с порядком полиномиальной измеримости коалиций.

1. Пусть  $Q$  - произвольное непустое множество, а  $\Sigma$  - некоторая алгебра его подмножеств. Обозначим через  $\mathcal{V}$  совокупность функций  $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ , подчиненных требованию  $v(\emptyset) = 0$ . Согласно теоретико-игровой терминологии, тройку  $\Gamma = (Q, \Sigma, v)$  будем называть кооперативной игрой, элементы множества  $Q$  - игроками, а  $e \in \Sigma$  - коалициями игроков. Напомним, что значение  $v(e)$  понимается как максимальный гарантированный доход коалиции  $e$ . Одной из главных задач теории кооперативных игр является изучение различных принципов эффективного и стабильного распределения дохода  $v(Q)$  наибольшей коалиции  $Q$  между участниками игры  $\Gamma$ . К последним относится и важнейший принцип коалиционно-эффективного распределения величины  $v(Q)$ , предлагающий осуществлять выбор решения из ядра

$$C(v) := \{x \in \mathcal{V}^1 \mid x(Q) = v(Q), x(e) \geq v(e), e \in \Sigma\}$$

(здесь и далее  $\mathcal{V}^1$  - совокупность аддитивных функций (дележей) из  $\mathcal{V}$ ).

Остановимся на некоторых результатах, относящихся к случаю  $|Q| < \infty$  и  $\Sigma = 2^Q$  (случай  $|Q| = \infty$  см., например, в [1]). С этой целью напомним (подробности см. в [2]), что множеством Харшаньи конечной игры  $(Q, 2^Q, v)$  называется многогранник  $H(v)$ , определяемый формулой

$$H(v) := \sum_{e \subseteq Q, e \neq \emptyset} v_e \Delta_e,$$

где  $v_e$  - так называемые дивиденды Харшаньи коалиций  $e \in 2^Q$ , а  $\Delta_e$  - грани  $Q$ -симплекса  $\Delta := \{p \in \mathbb{R}_+^Q \mid \sum_Q p_t = 1\}$ :  $\Delta_e := \{p \in \Delta \mid p_t = 0, t \in Q \setminus e\}$ .

Наряду с  $H(v)$  в докладе рассматриваются также иерархические множества Харшаньи

$$H_D(v) := \sum_{e \subseteq Q, e \neq \emptyset} v_e \Delta_e^D,$$

где  $\Delta_e^D := \{p \in \Delta_e \mid (t, t') \in D_e \Rightarrow p_t \geq p_{t'}\}$ ,  $D_e := \{(t, t') \in D \mid t, t' \in e\}$ , а  $D \subseteq Q \times Q$  - некоторый ориентированный граф с вершинами из  $Q$ . Для ряда важных классов конечных игр описано строение ядер  $C(v)$  в терминах  $H$ -дележей, получено прямое и двойственное описание множеств Харшаньи, найдено их представление в виде ядер соответствующих выпуклых кооперативных игр. Кроме того, построена аксиоматическая характеристика иерархических множеств Харшаньи и найдено исчерпывающее описание их крайних точек для случая древовидной иерархии.

2. В заключительной части доклада предлагается новая характеристика кооперативной игры, связанная с порядком полиномиальной измеримости её коалиций и формулируются некоторые возникающие здесь вопросы, касающиеся классической внутренней меры.

Напомним сначала определение полиномиальной разности для функций из  $\mathcal{V}$ , представляющее аналог известного понятия полиномиальной разности для нелинейных функционалов. Для

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского гуманитарного научного фонда (№ 05-02-00189а), программы Государственной поддержки ведущих научных школ (№ 4999.2006.6) и Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-06-00363).



каждого  $e \in \Sigma$  и натурального числа  $n \geq 1$  через  $H_n(e)$  обозначим семейство всех  $\Sigma$ -измеримых разбиений  $\eta = \{e_1, \dots, e_n\}$  множества  $e$ , состоящих из  $n$  элементов. Положим  $H_n := \cup_{e \in \Sigma} H_n(e)$ ,  $H := \cup_{n=1}^{\infty} H_n$ .

**Определение 1.** Пусть  $m \geq 1$  и  $\eta = \{e_1, \dots, e_m\}$  - произвольное разбиение из  $H_m$ . Полиномиальной разностью  $v(\eta)$  (порядка  $m$ ) функции  $v \in \mathcal{V}$ , отвечающей разбиению  $\eta$ , будем называть величину

$$v(\eta) := \sum_{\omega \subseteq \{1, \dots, m\}} (-1)^{m-|\omega|} v(\cup_{i \in \omega} e_i).$$

Приведем восходящее к Каратеодори ( $n = 1$ ) основное понятие этой части доклада.

**Определение 2.** Будем говорить, что множество  $e \in \Sigma$  полиномиально  $n$ -измеримо (относительно  $v$ ), если для любого разбиения  $\eta = \{e_1, \dots, e_n\} \in H_n$  выполняется равенство

$$v(\{e_1, \dots, e_n \cap e, e_n \cap e^d\}) = 0$$

( $v(\{e_1 \cap e, e_1 \cap e^d\}) = 0$  при  $n = 1$ ; здесь и ранее  $e^d := Q \setminus e$ ). Совокупность  $n$ -измеримых относительно  $v$  элементов  $e \in \Sigma$  будем обозначать через  $\Sigma_v^n$ .

**Предложение 1.** Для любой функции  $v \in \mathcal{V}$  и  $n \geq 1$  семейство  $\Sigma_v^n$  является алгеброй. При этом для каждой функции  $v \in \mathcal{V}$  последовательность алгебр  $\{\Sigma_v^n\}_{n=1}^{\infty}$  - монотонно возрастающая:  $\Sigma_v^n \subseteq \Sigma_v^{n+1}$  для любого  $n \geq 1$ .

Вводимое ниже понятие позволяет описать связь между  $v$  и алгебрами  $\Sigma_v^n$  и  $\Sigma_v := \cup_{n=1}^{\infty} \Sigma_v^n$ .

**Определение 3.** Функция  $v \in \mathcal{V}$  называется полиномиальной порядка  $n$ , если  $v(\eta) = 0$  для всех  $\eta \in H_{n+1}$ . Совокупность полиномиальных функций порядка  $n$  будем обозначать через  $\mathcal{V}^n = \mathcal{V}^n(\Sigma)$ .

**Предложение 2.** Сужение  $v_{[n]}$  функции  $v \in \mathcal{V}$  на алгебру  $\Sigma_v^n$  является полиномиальной функцией порядка  $n$  (т.е.  $v_{[n]} \in \mathcal{V}^n(\Sigma_v^n)$ ).

Как видно из предложения 2, исследование свойств алгебры  $\Sigma_v$  может представлять интерес при анализе различных эффектов "кооперабельности", присущих той или иной конфликтной ситуации. Кроме того, анализ указанной алгебры может оказаться полезным и в дескриптивной теории множеств в связи с задачами классификации неизмеримых (в классическом смысле) множеств. Сформулируем одну из задач подобного типа.

Пусть  $Q = [0, 1]$ ,  $\Sigma = 2^Q$ ,  $v = \mu_*$ , где  $\mu_*$  - внутренняя мера, порожденная мерой Лебега  $\mu$  отрезка  $[0, 1]$ :  $\mu_*(e) := \sup\{\mu(f) \mid f \subseteq e, f \in F\}$ ,  $e \subseteq Q$  (здесь  $F$  - семейство замкнутых подмножеств отрезка  $[0, 1]$ ).

**Задача.** Является ли семейство алгебр  $\{\Sigma_{\mu_*}^n\}_{n=1}^{\infty}$  стабильным ( $\Sigma_{\mu_*}^1 = \dots = \Sigma_{\mu_*}^n = \dots$ )? Если нет, то порождает ли  $\sigma$ -оболочка алгебры  $\Sigma_{\mu_*}$  все семейство  $2^Q$  ( $\sigma \Sigma_{\mu_*} = 2^Q$ )?

Среди свойств функции  $\mu_*$ , могущих оказаться полезными при рассмотрении указанной задачи, достаточно важным представляется следующее.

**Предложение 3.** Функция  $\mu_*$  является вполне положительной на алгебре всех подмножеств отрезка  $[0, 1]$  (т.е.  $\mu_*(\eta) \geq 0$  для любого конечного набора  $\eta$  попарно-непересекающихся подмножеств отрезка  $[0, 1]$ ).

## Литература

1. Васильев В. А. Функционал Шепли и полярные формы однородных полиномиальных игр // Математические труды. 1998. Т. 1, № 2. С. 24-67.
2. Vasil'ev V. A. Cores and generalized NM-solutions for some classes of cooperative games // In: Russian Contributions to Game Theory and Equilibrium Theory. Berlin-Heidelberg: Springer Verlag. 2006. P. 91-149.

## НАКОПИТЕЛЬНЫЕ ПЕНСИОННЫЕ РЕФОРМЫ И ЭФФЕКТЫ ЗАМЕЩЕНИЯ В ПРОЦЕССАХ СБЕРЕЖЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ

Н. П. Дементьев

*Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН, Новосибирск;  
dement@ieie.nsc.ru*

Российская пенсионная реформа, стартовавшая в 2002 г., предусматривала внесение накопительных элементов в государственную систему обязательного пенсионного страхования (ОПС). Пенсионные накопления предполагалось направить, главным образом, на инвестиции в производство через частные управляющие компании и негосударственные пенсионные фонды. Однако подавляющая часть населения фактически проигнорировало реформу, отказываясь доверить свои накопления частным финансовым корпорациям. Сейчас реформа зашла в тупик, и в Правительстве РФ предлагается пойти по хорошо известному на Западе пути - на основе налоговых льгот стимулировать добровольные сбережения населения в частных пенсионных фондах, роль которых пока незначительна в российской экономике.

Действительно, в ходе западных пенсионных реформ, предпринятых в начале 80-х гг. прошлого века с целью повысить сбережение в экономике, пенсионные накопления населения в частных пенсионных программах бурно росли и стали основным источником инвестиций. Однако главная цель реформ - повысить сбережение в экономике - не была достигнута. Так, в ведущих экономиках США, Великобритании и Японии нормы сбережения не только не возрастали, но, наоборот, стали быстро падать.

Нами с помощью модифицированных моделей Л. Пазинетти и Н. Калдора предпринята попытка объяснить (хотя бы частично) неожиданные итоги западных пенсионных накопительных реформ, опыт которых в России, возможно, будет востребован.

Предложена "классовая" модель экономического роста типа Пазинетти с тремя экономическими субъектами с различной нормой сбережения "работниками", "капиталистами" и государством. Предполагается, что норма сбережения капиталистов существенно выше, чем норма сбережения работников. В модели обнаружен эффект замещения в сбережении: рост нормы сбережения работников не влияет в долгосрочном аспекте на совокупное сбережение в экономике, поскольку дополнительное сбережение работников в точности уравнивается падением (замещением) сбережений капиталистов. В рамках данной модели попытки государства повысить совокупное сбережение путем стимулирования пенсионных сбережений работников окажутся, вообще говоря, безуспешными. Для достижения цели государству следует предпринять меры по повышению нормы сбережения капиталистов.

Выводы относительно процессов сбережения, полученные из упрощенных "классовых" моделей, нельзя абсолютизировать. Однако эффект замещения (пусть и не в полной мере) имеет место и в более сложных моделях. Нами была рассмотрена модель экономического роста, в "работники" разбиты на две группы. Считается, что норма сбережения в первой группе ниже, чем во второй. В модели также наблюдается эффект замещения в сбережениях двух групп, но в частичной форме. Так, стимулирование сбережения работников первой группы ведет в долгосрочном аспекте к росту совокупного сбережения, но сбережение во второй группе уменьшается.

Налоговые льготы для пенсионных накоплений, лежащие в основе накопительных пенсионных реформ, повышают их доходность. Как хорошо известно из моделей жизненного цикла типа Модильяни, повышение нормы процента чисто теоретически не всегда способствует росту сбережений населения. Действительно, в терминах уравнений Слуцкого, эффекты замещения и дохода действуют разнонаправленно: первый в сторону повышения сбережения, а второй - в сторону понижения. В литературе обычно предполагается, что эффект замещения превалирует над эффектом дохода. Опыт пенсионных накопительных реформ дает почву для сомнений, поскольку в годы их проведения норма накопления в секторе "Домашние хозяйства" имела во времени четкую тенденцию к уменьшению.

# СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЙ СМЫСЛ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОМПРОМИССНО-РАВНОВЕСНЫХ ЦЕН

В. А. Кардаш

Кисловодский институт экономики и права, Кисловодск; kardash\_v@mail.ru

## 1. Наша классификация равновесных ценовых систем

Мы выделяем 4 класса систем равновесных цен замкнутой национальной экономики [1]:

а). Известный класс усредненно-равновесных цен, получаемых на основе усредненных материальных балансов. Типовая модель — ценовая модель МОБ:

$$\bar{P}_j = \sum_{i=-1}^n \bar{a}_{ij} \bar{P}_i + \bar{s}_j + \bar{\pi}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

б). Известный класс предельно-равновесных цен, получаемых из двойственных соотношений оптимизационных задач экономики (о.о. оценки Л.В. Канторовича, цены максимального темпа экономического роста Дж. фон Неймана). Типовая модель — система уравнений оптимальных двойственных оценок:

$$\hat{P}_j = \sum_{i=1}^n \hat{a}_{ij} \hat{P}_i + \hat{s}_j + \hat{\pi}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

в). Известный класс цен рыночного равновесия, получаемых из решения локальных уравнений на основе равенства функций спроса и предложения. Типовая модель:

$$\bar{P}_j = \arg(\Phi_j(P_j) = 0, \Phi_j(P_j) = Y_j a_1(P_j) - Y_j a_2(P_j)), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

г). Малоизвестный класс компромиссно-равновесных цен, получаемых из определенного правила согласования объемов и цен купли-продажи во всей совокупности рынков при соблюдении условий платежеспособности спроса и конкурентоспособности предложения.

Типовая модель ценовая модель в [1]:  $P_j^* = \sum_{i=-1}^n a_{ij}^* P_i^* + s_j^* + \pi_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4)$

**Обозначения:**  $P_j$  - цена  $j$ -го продукта-товара;  $a_{ij}$ ,  $s_j$ ,  $\pi_j$  - коэффициенты модели, выражающие, соответственно, затраты предметов труда, трудовые затраты и прибыль на единицу  $j$ -го продукта-товара. Черта означает усреднение коэффициентов по всевозможным вариантам производства и реализации; крышка обозначает коэффициенты оптимальных (по соответствующему критерию) вариантов; звездочка указывает на усреднение коэффициентов только по тем вариантам, для которых при системе цен  $\{P_j^*\}$  соблюдаются условия платежеспособности и конкурентоспособности в реализуемых вариантах купли-продажи;  $a_1$ ,  $a_2$  в (3) это заданные параметры функций спроса и предложения, которые гипотетически должны учитывать платежеспособность и конкурентоспособность соответственно.

В классе цен (1) прибыль  $\bar{\pi}_j$  задается априори и равна  $\bar{\pi}_j = \mu_0 \bar{g}_j$ , где  $\mu_0$  - норма прибыли на единицу капитала;  $\bar{g}_j$  - усредненная капиталоемкость продукта  $j$ . В классе цен (2)  $\hat{\pi}_j = \mu_0 \hat{g}_j$ , где  $\hat{g}_j$  - капиталоемкость продукта  $j$  в оптимальном варианте его производства и реализации. В классе цен (3) структура цены явно не представима ввиду неопределенности учета в функциях спроса и предложения условий платежеспособности и конкурентоспособности соответственно.

Как показано в [1], в классе цен (4)  $\pi_j^* = P_j^* \sqrt{\frac{\mu_0 g_j^*}{P_j^*}}$ , где  $g_j^*$  - средняя капиталоемкость продукта  $j$  по вариантам, для которых соблюдаются условия платежеспособности и конкурентоспособности при системе цен  $\{P_j^*\}$ . Отсюда очевидно, что  $\pi_j^*$  явно и неявно зависят от  $\{P_j^*\}$  и представляют собой существенно нелинейную функцию от этих цен.

## 2. Цена капитала как компромиссно-равновесная цена продукта с минимальной рентабельностью капитала

Если  $\mu_j^*$  — реализуемая рентабельность капитала в производственно-рыночном секторе продукта-товара  $j$ , то имеем  $\pi_j^* = \mu_j^* g_j^*$ , и из уравнения  $\mu_j^* g_j^* = P_j^* \sqrt{\frac{\mu_0 g_j^*}{P_j^*}}$  получим:

$$\mu_j^* = \sqrt{\mu_0} \sqrt{\frac{P_j^*}{g_j^*}}, j = 1, 2, \dots, n.$$

Минимум из  $\mu_j^*$  является предельной нормой рентабельности капитала, необходимой для привлечения свободного капитала в реальные сектора экономики, т.е.:

$$\mu_0 = \min_j \mu_j^* = \sqrt{\mu_0} \min_j \sqrt{\frac{P_j^*}{g_j^*}} = \sqrt{\mu_0} \sqrt{\frac{P_{j_0}^*}{g_{j_0}^*}}, \quad (5)$$

где  $j_0$  - номер продукта-товара, где достигается минимум в (5).

Отсюда найдем:  $\mu_0 = \frac{P_{j_0}^*}{g_{j_0}^*}$ , или:  $P_{j_0}^* = \mu_0 g_{j_0}^*$ .

Таким продуктом-товаром  $j_0$  можно считать сам капитал, так что  $\mu_0$  - это рентабельность капитала на безрисковом фондовом рынке. При  $g_{j_0}^* = 1$  имеем  $P_{j_0}^* = \mu_0$ .

### 3. Цена фундаментального научного результата как предел компромиссно-равновесной цены знания.

В работе [1] введено понятие кванта приращенных знаний и выведена формула компромиссно-равновесной цены одного кванта продукта-знания:  $P^* = A + A \frac{\sqrt{\varphi}}{1 - \sqrt{\varphi}}$ ,  $\sqrt{\varphi} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{A}{D'}}$ ,

где  $A$  — материально-денежные затраты (кроме оплаты труда непосредственных производителей знаний) на производство кванта конкретного продукта-знания;  $D'$  — норма минимально-необходимой для воспроизводства научной деятельности добавленная стоимость в данном акте приращения знаний.  $D' = \mu_0 J + T$ , где  $J$  — капитал, задействованный на производстве данного кванта знания;  $T$  — оплата труда непосредственных производителей знания. Квант знаний как единица завершенного продукта научной деятельности это: выведенная формула; доказанная теорема; отлаженная компьютерная программа; реализованный инновационный проект и т.п.

Подставляя в формулу цены  $P^*$  выражение для  $\sqrt{\varphi}$ , получим:

$$P^* = \frac{A \sqrt{1 + 4 \frac{A}{D'}} + A}{\sqrt{1 + 4 \frac{A}{D'}} - 1}. \quad (6)$$

Очевидно, что для фундаментальных научных результатов, когда кванты продуктов-знаний буквально "соскальзывают с кончика пера", материально-денежные затраты  $A$  бесконечно малы, а  $D' \approx T$ . В этом случае из (6) получаем:

$$P_{\Phi}^* = \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ J \rightarrow 0}} P^*(A, J) = D' = T.$$

Таким образом, цена кванта произведенного фундаментального знания равна добавленной стоимости от этого знания, равной только цене труда производителей знания. Однако, необходимо учитывать, помимо стадии производства, стадию воплощения знаний [1]. Общественный эффект реализации фундаментального знания "размыт" во времени, в пространстве и по сферам человеческой деятельности. Поэтому реализуемая чистая добавленная стоимость как общественный эффект воплощенного знания  $\Delta D$  может оказаться на много порядков больше, чем чистая нормативная добавленная стоимость при производстве знания:  $\Delta D' = \mu_0 J$ . Разность этих величин есть общественная рента от приращенного знания:  $R = \Delta D - \Delta D'$ .

К сожалению, из-за "размытости", нечеткого выделения и неопределенности общественного эффекта от воплощаемых знаний общество во все времена незаслуженно мало уделяло внимания развитию фундаментальных наук и существенно недооценивало роль труда ученых, серьезно работающих над принципиальными проблемами в своей области.

### Литература

1. Кардаш В. А. Конфликты и компромиссы в рыночной экономике. М.: Наука, 2006.

## О ПОСЛЕДСТВИЯХ ИНВЕСТИРОВАНИЯ В ПРОИЗВОДСТВО ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ДОХОДА, ПОРОЖДЕННОГО РОСТОМ МИРОВЫХ ЦЕН НА ЭНЕРГОРЕСУРСЫ И СЫРЬЕ

В. А. Колемаев

*Государственный университет управления, Москва; kafedrapart@mail.ru*

Рост мировых цен обусловлен долговременной тенденцией повышения спроса на энергоресурсы и сырье быстрорастущих экономик Индии и Китая. Попытки воспрепятствовать этой тенденции носят паллиативный характер.

В этом докладе ставится и решается задача инвестирования в производство конъюнктурного приращения природной ренты, т.е. вышеупомянутого дополнительного дохода. Задача решается с помощью открытой трехсекторной макромоделю экономики: материальный (нулевой) сектор производит предметы труда, фондосоздающий (первый) сектор – средства труда, потребительский (второй) – предметы потребления.

Модель [1] является обобщением модели Солоу [2] в части учета макроструктуры и внешних связей. Всего в модели 18 уравнений (натуральные балансы, стоимостные и внешнеторговые балансы секторов, ограничения на ввоз-вывоз), в том числе три нелинейных: линейнооднородные производственные функции секторов. Модель используется в стационарном состоянии и в относительных показателях.

Дополнительный доход  $\Delta r$  (долл./чел.) образуется в материальном секторе. Повысив таможенную пошлину на материалы, изыдем у сектора  $(1 - \varepsilon_0)\Delta r$  часть дохода, изъятую часть поделим между фондосоздающим и потребительским секторами так, чтобы первому досталась  $\varepsilon_1\Delta r$ , второму –  $\varepsilon_2\Delta r$ ,  $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$ . Государство административными и инструментальными методами следит за целевым расходованием частей дохода  $\varepsilon_0\Delta r$ ,  $\varepsilon_1\Delta r$ ,  $\varepsilon_2\Delta r$ , только для прямого инвестирования в производство.

Оказалось, что рациональным подбором долей  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  можно обеспечить оптимальный сбалансированный (по труду, материалам и инвестиционным ресурсам) экономический рост [3]. При этом цены на средства производства (материалы и отечественные инвестированные товары) снижаются, но возникает инфляционное давление на потребительский рынок.

Установлены меры, которые позволяют примерно вдвое сократить инфляционное давление:

1. оптимальный (с точки зрения максимального увеличения удельного непроизводственного потребления) выбор долей  $\varepsilon_0^*, \varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*$ ;
2. снижение таможенной пошлины  $d_1^+$  на импортные инвестиционные товары;
3. увеличение коэффициентов квотирования  $\gamma_1, \gamma_2$  ввоза инвестиционных и потребительских товаров (большая открытость экономики в период реализации инвестиционного сценария);
4. продажа на мировом рынке вновь произведенных конкурентоспособных потребительских товаров в обмен на потребительские товары массового спроса;
5. государственная поддержка потребительского сектора, прежде всего в части агропромышленного производства и инфраструктуры.

Найдены следующие выражения для оптимальных долей распределения дополнительного дохода:

$$\varepsilon_0^* = \frac{a \frac{q_0}{q_1^+}}{1 + \gamma_1 \frac{f_1'}{\lambda}}, \quad \varepsilon_1^* = \frac{1}{1 + \gamma_1 \frac{f_1'}{\lambda}}, \quad \varepsilon_2^* = \frac{\gamma_1 \frac{f_1'}{\lambda} - a \frac{q_0}{q_1^+}}{1 + \gamma_1 \frac{f_1'}{\lambda}},$$

где

$q_0$  – мировая цена экспортируемых материалов  $\left(\frac{\text{долл.}}{\text{руб}}\right)$ ,

$q_1^+$  – мировая цена импортируемых инвестиционных товаров  $\left(\frac{\text{долл.}}{\text{руб}}\right)$ , фактическое значение

$$\frac{q_0}{q_1^+} \approx 1,85,$$

$f_1(k_1)$  — производительность труда фондосоздающего сектора как функция его фондовооруженности,

$$\lambda = \mu + \nu,$$

$\mu$  — коэффициент выбытия ОПФ (нормативное значение  $\mu = 0,05$ ),

$\nu$  — темп прироста числа занятых (фактическое значение  $\nu < 0,01$ ),

$a$  — безразмерная постоянная, определяемая из условия выполнения материального баланса (в современных условиях РФ  $a = 1,6$  при  $\gamma_1 = 0,8$  и  $a = 1,88$  при  $\gamma_1 = 1$ ).

В современных условиях РФ и при  $\gamma_1 = 1$   $\varepsilon_0^* = 0,6$ ,  $\varepsilon_1^* = 0,2$ ,  $\varepsilon_2^* = 0,2$ .

Если инвестируемый дополнительный доход будет равен 50 *долл.* в расчете на одного занятого (3,5 млрд. *долл.* в абсолютном выражении), то рост цен на потребительском рынке составит от 0,7% (в случае принятия рекомендуемых мер) до 1,5%.

Таким образом, дозированное вложение конъюнктурного приращения природной ренты в производство приводит к оптимальному сбалансированному экономическому росту, к снижению цен на средства производства и к незначительному повышению цен на потребительские товары.

### Литература

1. *Колемаев В. А.* Математическое моделирование макроэкономических процессов и систем. М.: Юнити, 2005.
2. *Solow R. M.* A Contribution to the Theory of Economic Growth // Quarterly Journal of Economics. 1956. Vol. 70. P. 65–94.
3. *Колемаев В. А.* О последствиях инвестирования в производство дополнительного дохода, порожденного ростом мировых цен на энергоресурсы и сырье // Прикладная эконометрия, 2005. № 2.

## ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕИСПРАВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Г. Ш. Лев<sup>1</sup>, А. В. Фролов<sup>2</sup>

*Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова, Барнаул;*

<sup>1</sup> *vmm@smtp.ru*, <sup>2</sup> *vmm@smtp.ru*

Заданные элементы могут быть исправными с вероятностью  $p$  или неисправными. Процесс выявления неисправных элементов состоит в одновременной проверке произвольной группы элементов. Если результат проверки положительный, то все элементы исправны. В противном случае проводятся дополнительные проверки до выявления всех неисправных элементов. Формально, стратегия проверок характеризуется парой  $(N, \alpha)$ , где  $N$  - число элементов, проверяемых на первом этапе, а  $\alpha$  - функция из некоторого класса  $\mathbf{A}$ , обладающая следующими свойствами:

- $\alpha(1) = \emptyset$ ;
- если  $N > 1$  целое, то  $\alpha(N) = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ , где числа  $n_i \geq 1$  целые и  $\sum_{i=1}^m n_i = N$ ;
- $\alpha(n_1, n_2, \dots, n_m) = (\alpha(n_1), \alpha(n_2), \dots, \alpha(n_m))$ .

Случайная величина  $\xi = \xi(N, \alpha)$  - число проверок до выявления всех неисправных элементов в исходной группе из  $N$  элементов. Обозначим,

$$f(\alpha, N, p) = M\xi.$$

При фиксированном  $p$  оптимальной будет стратегия  $(N_p, \alpha_p)$ , удовлетворяющая при  $\alpha \in \mathbf{A}$  и целых  $N$  соотношению:

$$\frac{f(N_p, \alpha_p, p)}{N_p} \leq \frac{f(N, \alpha, p)}{N}.$$

В докладе приводятся результаты, характеризующие оптимальные стратегии при различных  $0 < p < 1$ .

### Литература

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984.
2. *Мешалкин Л. Д.* Сборник задач по теории вероятностей. М.: МГУ, 1963.

## НЕТИПИЧНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОРТОГОНАЛЬНОЙ УПАКОВКИ

Э. А. Мухачева<sup>1</sup>, А. С. Филиппова<sup>2</sup>

Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа;

<sup>1</sup> *elitamuh@umk.ugatu.ac.ru*, <sup>2</sup> *annamuh@mail.ru*

В качестве основной рассматривается задача ортогональной упаковки прямоугольных предметов в полубесконечную полосу (2 Dimensional Strip Packing Problem, **2DSPP**). На входе 2DSPP имеем  $\langle W, m, w, l \rangle$ ,  $W$  — ширина полосы;  $m$  — количество предметов,  $w = (w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_m)$  — вектор ширины;  $l = (l_1, l_2, \dots, l_i, \dots, l_m)$  — вектор длин прямоугольников. Требуется найти ортогональную упаковку минимальной длины  $L$  без перекрытия предметов между собой и с границами полосы.

Задача является **NP**-трудной и для её решения часто применяют методы локального поиска. Среди различных метаэвристик выделяются *эволюционные* алгоритмы (**EA**). В их основе находятся элементарные понятия теории эволюции: *наследственность*, *мутация*, *селекция*. Основная идея EA состоит в построении некоторого множества решений оптимизационной задачи (*популяция*) и получении путем случайных действий новых решений взамен плохо пригодных старых. Хранение информации о нескольких допустимых решениях на каждой итерации создает эффект параллельных вычислений и, казалось бы, повышает шансы нахождения оптимума. Вместе с тем алгоритмы с одной пробной точкой являются не менее эффективными. В докладе рассматриваются генетические алгоритмы и эволюционный алгоритм с одной пробной точкой. Принято *ген* интерпретировать прямоугольником, *хромосому* — списком  $\pi$ , устанавливающим порядок подачи предметов на упаковку, *особь* — упаковкой. Наследственность регулируется *кроссовером* и *селекцией*, *мутация* осуществляет изменения в перестановке  $\pi$ . Типичные генетические алгоритмы способны получать упаковки с лучшими показателями эффективности. К сожалению, стандартный генетический алгоритм с декодером *нижний-левый* хороших результатов не показал. Его усовершенствования за счет улучшения декодера оказались также неэффективными [1].

**Нетипичные алгоритмы блочной структуры.** Нами предложены эволюционные алгоритмы с иной интерпретацией элементов [2]. Это одноточечный алгоритм (1+1)-EA и блочный генетический алгоритм (Block Genetic Algorithm, **GVA**) [3]. Для них определим разбиение упаковки на блоки. Пусть имеется прямоугольная упаковка  $p$ . Проведем мысленно через правые стороны прямоугольников вертикальные линии до пересечения с границами полосы. Они разделяют  $p$  на блоки  $S_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $n \leq m$  одинаковой ширины  $W$  и длины  $\chi_j$ ,  $\sum_j \chi_j = L$ . Последовательность блоков  $S_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  представляет блок-структуру упаковки  $p$ . В алгоритмах блочной структуры принимается следующая интерпретация элементов генетики. В качестве *особей* выступают блок-структуры упаковок; *генов* — отдельные блоки; *аллели генов* — перестановки предметов в фиксированных блоках. Предложена  $\Lambda$ -окрестность — множество упаковок с одинаковой пригодностью  $\Lambda$  [4]. Величина  $\Lambda$  определяется как значение функции цели для прямоугольно ориентированного линейного раскроя  $ROLC_{NF}((\lambda, \beta), \pi(p))$ , полученного с помощью алгоритма *следующий подходящий* (Next Fit, **NF**) для специальной задачи линейного раскроя с входными данными  $\langle Z := W; m; \lambda := w; \beta := l \rangle$ ,  $Z$  — длина одномерного контейнера,  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  — вектор длин предметов,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  — ассортиментный вектор. Блочная структура  $ROLC$  — *хромосома*. Пара  $(ROLC, p)$  воспроизводится из одного и того же кода  $\pi(p)$ , несущего смысл генотипа особи. Показано, что пригодность  $\Lambda$  является локальной нижней границей упаковок в  $\Lambda$ -окрестности. Приведен алгоритм построения окрестности с локальной нижней границей  $\Lambda$ .

Эволюционные алгоритмы блочной структуры, (1+1)-EA и GVA различаются размером популяции. Каждый из них может реализовываться с различными окрестностями, декодерами и операторами мутаций. Используются следующие виды окрестностей: перестановка двух случайных элементов списка  $\pi$ ; перестановка двух элементов в блоке  $S_j$ ; перестановка двух *пассивных* элементов в списке  $\pi$  с сохранением  $\Lambda$ -показателя в задаче  $ROLC$ . Оператор мутации реализуется также различными способами: от наивного изменения списка  $\pi$  до его упорядочивания по



невозрастанию оценок предметов в рекордной упаковке, вычисляемых с применением *метода последовательного уточнения оценок* (Sequential Value Correction, **SVC**) [2]. Его идея связана с объективно-обусловленными оценками Л. В. Канторовича. Применяются следующие блочные декодеры: *замещение с первым подходящим* (SubFF), *жадное замещение* (SubGr), замещение с *динамическим перебором* (решением задачи 0-1 рюкзак).

**Нетипичные мультиметодные алгоритмы** предложены И. П. Норенковым [5]. В качестве генов в них фигурируют простые эвристики-декодеры, а хромосомами являются их последовательности, по которым возможно восстановление упаковки. Количество эвристик невелико и колеблется от 3-х до 12. Действие каждой эвристики заключается в выборе и вставке в нижнюю левую свободную область еще не упакованного предмета, лучшего в смысле критерия выбранной эвристики, например: предмет должен обеспечивать минимальный вертикальный зазор; предмет должен обеспечивать минимальный горизонтальный зазор; предмет должен иметь максимальную площадь и т.д..

Приведенные в докладе модификации метода реализуют *дискриминацию* эвристик по эффективности их индивидуального применения. Вероятности применения эвристик назначаются в соответствии с показателями дискриминации. Расширен список простых эвристик и модифицированный алгоритм применен в рамках одноточечного и генетического алгоритмов.

Нетипичность приведенных алгоритмов проявилась как на уровне методов локального поиска, так и при кодировании и декодировании (конструировании упаковок). Таким образом свойство нетипичности является многофункциональным. Проведены обширные эксперименты с приведенными нетипичными алгоритмами. Главный их результат заключается в том, что эволюционные блочные алгоритмы предпочтительнее мультиметодных для задач упаковки в полубесконечную полосу и наоборот, мультиметодные алгоритмы предпочтительнее блочных для решения задач упаковки в контейнеры. Показатели эффективности алгоритмов значительно превосходят аналогичные показатели традиционного генетического алгоритма. Это подтверждают результаты численного сравнения с алгоритмами, приведенными в [1].

### Литература

1. *Bortfeldt A.* A genetic algorithm for the two-dimensional strip packing problem with rectangular pieces // European Journal of Operation Research. 2006. № 172(3). P. 814–837.
2. *Мухачева Э. А., Мухачева А. С.* Задача прямоугольной упаковки: методы локального поиска оптимума на базе блочных структур // М.:Наука. АиТ. 2004. № 2. С. 101–112.
3. *Филиппова А. С.* Моделирование эволюционных алгоритмов решения задач прямоугольной упаковки на базе технологии блочных структур // Инф. тех. 2006. № 6. Приложение. 36 С.
4. *Житников В. П., Филиппова А. С.* Задача прямоугольной упаковки в полубесконечную полосу: поиск решения в окрестности локальной нижней границы // Инф. тех. 2007. № 5. С. 55–61.
5. *Норенков И. П., Косачевский О. Т.* Генетические алгоритмы комбинирования эвристик в задачах дискретной оптимизации // Инф. тех. 1999. № 2. С. 2–8.

## ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛЕСНЫХ ФЕРМ

Т. Т. Орлова

*Иркутский госуниверситет путей сообщения (ИрГУПС), Иркутск; iorlov37@mail.ru*

В связи с геополитической обстановкой в мире возрастает значение Севера для России. Механизм формирования нетрадиционных форм занятости неаборигенного населения, равно как и проблемы эффективности хозяйствования коренных малочисленных народов Севера (МНС) связываются с проектом "Сибирские лесные фермы" в рамках концепции дичеразведения в Байкальском регионе. Лесные фермы представляют собой сложные природно - хозяйственные системы нетрадиционного природопользования. Дичеразведение — одна из специализаций этих ферм. Она включает большой комплекс мероприятий: содержание диких животных и птиц, инкубирование яиц и выращивание молодняка до определенного возраста, который в дальнейшем включается в производственный процесс.

Для реализации проектов необходимо предусмотреть включение нетрадиционных отраслей хозяйства в общий производственный комплекс, то есть провести обоснование экономической целесообразности нетрадиционных отраслей; степени и характера их участия в формировании местной производственной базы. Концепция развития дичеразведения в Байкальском регионе на основе лесных ферм основывается на опыте работы заповедников (Печоро-Ильчского — республика Коми), Сумароковской лосефермы (Костромская область) с одомашненными лосями, опыт этнического природопользования тофов и эвенков. В России накоплен значительный опыт по разведению кабарги. Даже в Подмосковье ("Черноголовка") биологи успешно разводят кабаргу на ферме, получая ценную струю, не истребляя этого оленя. Успешное разведение кабарги дает основание тиражировать результаты полученных здесь научных разработок с целью дальнейшего развития фермового разведения кабарги на территории России.

В рамках лесных ферм может осуществляться разведение различных видов фауны и флоры с учетом экологических ограничений. Можно перечислить некоторые отрасли по видам животных и птиц: копытные — благородный олень, косуля, северный олень, овцебык, верблюды, лошади, яки, лось, кабарга, коза, кабан; пушные звери, заяц-русак, речные бобры; птицы — тетеревиные, фазановые, улары, страусы, куропатки, перепела и т.п.

Предлагается методология моделирования рациональной структуры лесных ферм с позиций гомеостата и оптимизации основных параметров, определяемых на основе оптимизационных расчетов. На примере лосеводства, перепелиных и страусиных ферм разрабатываются компьютерные модели, сочетающие традиционную методику расчета и особенности объектов моделирования (поведенческий аспект).

В России страусоводство набирает обороты, хотя еще в 1995 г. сама идея разведения страусов в стране казалось несбыточной. По сведениям, страусиные фермы прижились почти в 170 районах России. Перепеловодство также успешно развивается в Иркутской области и других регионах России.

## ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ АКТИВОВ С ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОЙ СТАВКОЙ ПРОЦЕНТА ДЛЯ НОВОГО БАНКА\*

Н. А. Орозбеков

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; nurlan\_o@math.nsc.ru*

В [1],[2] были представлены задача оптимизации активов банка-монополиста и ее модифицированный вариант для нового банка на рынке, где уже функционируют несколько банков. Ставка процента в [1],[2] рассматривалась единой для всех клиентов. На практике банки устанавливают ссудную ставку процента в виде кусочно-постоянной функции от таких параметров как: объем кредита, срок кредитования и т.д. Отражение этого факта в задаче оптимизации активов нового банка на действующем рынке была осуществлена введением дифференцированной ставки процента. В данном тексте мы ограничимся рассмотрением случая, когда новый банк отыскивает два различных значения ставки:  $y^1$  и  $y^2$ .

$$\sum_{i \in I_1} x_i \leq S; \quad (1)$$

$$(l_1 - 1) \sum_{i \in I_{12}} x_i + l_1 \sum_{i \in I_{11}} x_i \leq 0; \quad (2)$$

$$x_i \leq \Phi_i - \sum_{k=1}^m (q_{ik} - g_{ik}), \quad i \in I_{11}; \quad (3)$$

$$0 \leq g_{ik} \leq q_{ik}, \quad k = 1, \dots, m, \quad i \in I_{11}; \quad (4)$$

$$y^1 \geq 0, \quad y^2 \geq 0; \quad (5)$$

$$x_i \geq 0, \quad i \in I_1; \quad (6)$$

$$(y^1 - \alpha_i)x_i \leq 0, \quad i \in I_{11}^1; \quad (7)$$

$$(y^2 - \alpha_i)x_i \leq 0, \quad i \in I_{11}^2; \quad (8)$$

$$(y^1 - (1 - \Delta)\bar{y}_k)g_{ik} \leq 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad i \in I_{11}^1; \quad (9)$$

$$(y^2 - (1 - \Delta)\bar{y}_k)g_{ik} \leq 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad i \in I_{11}^2; \quad (10)$$

$$\sum_{i \in I_{12}} c_i x_i + y^1 \sum_{i \in I_{11}^1} x_i + y^2 \sum_{i \in I_{11}^2} x_i \rightarrow \max_{x_i, y}! \quad (11)$$

где  $S$  - объем денежных средств банка,  $I_1 = I_{11} \cup I_{12}$  - множество номеров всевозможных активов,  $I_{11} = \{1, 2, \dots, N\}$  - множество номеров доходных активов,  $I_{12} = \{N+1, N+2, \dots, N_1\}$  - множество номеров ликвидных активов,  $x_i$  - объем вложений банка в  $i$ -тый актив ( $i \in I_1$ ),  $l_1$  - коэффициент ликвидности ( $l_1 \in [0, 1]$ ),  $\Phi_i$  - объем средств, запрашиваемый  $i$ -тым заемщиком ( $i \in I_{11}$ ),  $\alpha_i$  - уровень ставки процента, при которой  $i$ -тый клиент может взять кредит ( $i \in I_{11}$ ),  $y$  - единая ссудная ставка процента,  $c_i$  - ставка процента по ликвидным активам ( $i \in I_{12}$ ),  $\bar{y}_k$  - ссудная ставка  $k$ -го банка ( $k = 1, \dots, m$ ),  $q_{ik}$  - объем кредита  $i$ -го предприятия в  $k$ -ом банке ( $k = 1, \dots, m; i = 1, \dots, N$ ),  $g_{ik}$  - часть кредита, которую  $i$ -ое предприятие погасило в  $k$ -ом банке и оформило кредит в новом банке,  $\Delta$  - величина указывающая на сколько ставка процента нового банка должна быть меньше ставки других банков, чтобы клиенты действующих банков перешли в новый банк.

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 07-06-00363а и № 07-06-13500офи\_ц) и гранта Президента РФ № НШ 4999.2006.6.

Величины  $y^1$ ,  $y^2$ ,  $x_i$  ( $i \in I_1$ ),  $g_{ik}$  ( $i \in I_{11}$ ,  $k = 1, \dots, m$ ) являются искомыми, и, следовательно, ограничения (1)–(6) являются линейными, а ограничения (7)–(10) и целевая функция (11) – нелинейны.

Для этой задачи разработан алгоритм нахождения оптимального решения, который заключается в том, что исходная задача разбивается на две нелинейные задачи, каждая из которых редуцируется в последовательность задач линейного программирования.

### Литература

1. Анцыз С. М., Орозбеков Н. А. Об одном подходе к построению математических моделей для оптимизации банковской деятельности // Препринт № 147. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2004. 26 с.
2. Орозбеков Н. А. Нелинейные модели оптимизации банковских активов // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. 8, № 4. С. 73–90.

# СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНОЙ ЭКОНОМИКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ МОДЕЛЕЙ К АНАЛИЗУ ЭВОЛЮЦИИ ЭКОНОМИКИ РОССИИ 1992–2005 ГГ.

А. А. Петров

*Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва; petrov@ccas.ru*

Сложность экономики - в качественном разнообразии явлений и проблем, которые существуют одновременно. Это отражается в множественности аспектов наблюдения и изучения экономики. Поэтому экономику нельзя описать одной большой моделью, каждая модель строится как инструмент, ориентированный на решение определенного класса экономических проблем. Экономике надо рассматривать как самоорганизующуюся и развивающуюся систему. Она переорганизуется и эволюционирует под действием внутренних механизмов, которые определяются сложившимися к данному периоду времени экономическими структурами и отношениями. Государственная экономическая политика, административные меры воспринимаются механизмами самоорганизации, они адаптируются к внешним воздействиям, поэтому так часто реформы дают неожиданные для их авторов результаты.

Эти главные особенности экономики надо учитывать, разрабатывая технологии анализа крупных экономических решений. Мы разрабатываем модели экономики, которые адекватно описывают сложившиеся экономические структуры и отношения, "ответственные" за изучаемый класс экономических проблем. Общий подход основан на Системном анализе развивающейся экономики. Он состоит в следующем. Обсуждается содержание поставленной экономической проблемы. Как правило, проблема формулируется нечетко и требуется провести специальное исследование, чтобы структурировать ее и сформулировать в четких понятиях, используемых в экономической теории и методологии математического моделирования. По данным экономической статистики и оценкам экспертов проводится системный анализ состояния экономики и выявляются сложившиеся в данный период времени экономические структуры – экономические агенты и их отношения. Выделяется множество материальных и финансовых активов и пассивов агентов, которое с необходимой полнотой задает состояние экономики. Выписывается полная система уравнений материальных и финансовых балансов, в силу которой изменяются активы и пассивы агентов в зависимости от активностей агентов. Активности экономических агентов описываются как их поведение и взаимодействия. Они отражают существенные особенности сложившихся экономических отношений и институтов и воздействия государственной экономической политики (налоговой политики, бюджетных расходов, государственных программ) и внешних условий (внешних рынков, внешних займов). Как правило, при создании моделей поведения и взаимодействий экономических агентов приходится выполнять серьезные исследования. Последнее объясняется тем, что переходная экономика совсем недавно стала объектом изучения экономической теории.

Система уравнений балансов дополняется описаниями активностей экономических агентов. Разрабатываются сценарии государственной экономической политики и внешнеэкономических условий. Сценарии в терминах модели выражают те крупные экономические решения, которые надо оценить с помощью модели, и внешние условия, от которых зависят последствия принятых решений. Формальные соотношения переменных и параметров модели, которые содержатся в сценарии, замыкают систему уравнений модели. Такая структура модели описывает именно влияние политики и администрирования на механизмы самоорганизации экономики. С помощью модели можно оценивать последствия крупных экономических решений через временные ряды макроэкономических показателей, рассчитанные с помощью модели. Можно анализировать эффективность и динамичность экономики, исследуя взаимозависимости временных рядов показателей. Можно сравнивать эффективность экономических решений, рассчитывая разные их варианты.

Для этого, прежде всего, проводится аналитическое исследование модели, цель которого – оценить качественное согласие модели с экономической действительностью и выяснить качественные особенности взаимосвязей макроэкономических показателей в данных конкретных

условиях. Разрабатывается эффективный численный метод исследования модели для проведения вычислительных экспериментов и выполнения массовых расчетов. По данным экономической статистики проводится идентификация и верификация модели. Наконец, по данным вычислительных экспериментов с моделью проводится анализ состояния экономики, прогнозируется ее развитие при разных вариантах крупных экономических решений, оценивается эффективность вариантов экономических решений.

Таким образом, общая схема представления экономики совокупностью экономических агентов, поведение и взаимодействия которых отражают внутренние механизмы саморегулирования экономики, сочетается с проблемно ориентированным детальным системным анализом конкретных особенностей текущего состояния экономических механизмов. Это дает предсказательную силу моделям, но постоянно ставит перед разработчиками новые задачи, для решения которых отпущено мало времени, потому что обычно сроки решения поставленной проблемы экономического анализа и прогноза ограничены.

Технология анализа экономики с помощью моделей поддерживается интеллектуальной компьютерной системой ЭКОМОД в среде пакета MAPLE. В ЭКОМОДе модель представляется в канонической форме, которая достаточно полно, гибко и единообразно отражает структуру широкого класса моделей. Соотношения вводятся в компьютер в привычной математической нотации. ЭКОМОД контролирует правильность соотношений создаваемой модели и позволяет комментировать их экономический смысл. Каноническая форма избыточна, поэтому ЭКОМОД автоматически исключает лишние переменные и приводит модель к виду, удобному для исследования. В диалоге с исследователем ЭКОМОД замыкает систему уравнений балансов описаниями поведения и взаимодействий экономических агентов, выполняет трудоемкие преобразования модели, приводя ее к виду, удобному для численного анализа. Массив результатов вычислений обрабатывается в диалоге, представляется таблицами и визуализируется графиками, диаграммами и т.п. ЭКОМОД позволяет удобно и эффективно работать с моделью на всех этапах от создания, идентификации и верификации модели до интерпретации результатов расчетов. С помощью ЭКОМОД удобно модифицировать модель, при этом каждый вариант модели с комментариями, результатами исследования и численных экспериментов запоминается системой.

С 1986 года наши исследования ориентированы на анализ эволюции структуры советской экономики по ходу перестройки и российской экономики по ходу реформы.

1. В 1986 году разработана математическая модель, которая отражала реальные механизмы регулирования производства и обращения в плановой административно регулируемой экономике.

2. В 1989 году создана модель плановой административно регулируемой экономики с кооперативным сектором, отношения которого с государственным сектором регулировались законами о социалистическом предприятии и о кооперации, принятыми в то время.

3. В 1990 году с помощью специально разработанной модели было показано, к чему приведет резкая либерализация советской экономики – были предсказаны последствия реформы 1992 года.

4. В 1991 году создана модель, отражавшая сложившиеся накануне распада СССР экономические отношения.

5. В 1993 году создана модель, отражавшая экономические отношения, сложившиеся на первом этапе реформы.

6. В 1996 году создана модель экономики региона, отражавшая экономические отношения, возникшие после ваучерной приватизации в период "финансовой стабилизации" 1995-1998 годов.

7. В 1999 году создана модель, по которой оценена макроэкономическая эффективность проекта, предлагавшего стимулировать кредитование инвестиций в реальный сектор с помощью выпуска облигаций государственного займа развития.

8. В 2002 году создана модель, которая описывает взаимодействие ТЭК и энергопотребляющих отраслей в условиях принятой экономической стратегии. Модель предназначена для оценки влияния энергетической политики на эволюцию экономики. 9. В 2004 году создана модель, в которой описан теневой оборот в российской экономике. Модель предназначена для оценки налогооблагаемой базы и оценки влияния налоговой политики на эволюцию экономики.

В докладе кратко излагаются история создания моделей, структура моделей и результаты исследований и расчетов.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ СОВРЕМЕННОЙ ЭКОНОМИКИ РОССИИ: МЕТОДЫ, ТЕХНОЛОГИИ, РЕЗУЛЬТАТЫ\*

И. Г. Поспелов

*Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва; [pospeli@ccas.ru](mailto:pospeli@ccas.ru)*

В 1975 г. в Вычислительном центре АН СССР (потом РАН) возникло новое направление исследований: *системный анализ развивающейся экономики*, в котором методология математического моделирования сложных систем, развитая в естественных науках, была синтезирована с достижениями современной экономической теории. Усилия были сосредоточены на разработке методов описания реальных экономических отношений в изучаемой системе [1].

С помощью моделей удалось понять внутреннюю логику развития экономических процессов, скрывающуюся за видимой, часто казалось бы парадоксальной, картиной экономических явлений, которая не укладывалась в известные теоретические схемы. Опыт применения моделей показал, что они служат надежным инструментом анализа макроэкономических закономерностей, а также прогноза последствий макроэкономических решений **при условии сохранения сложившихся отношений**. Можно сказать, получилась целая "летопись" российских экономических реформ, выраженная языком математических моделей. Эти модели детально описаны в [2, 3].

Последняя разработка модели экономики России, учитывающая наличие теневого оборота была разработана по заказу ФАНС РФ. Она представляет новый этап развития методов моделирования, поскольку основана на новой теоретической схеме равновесия рациональных ожиданий с управлением капиталом и реализована с помощью новой технологии моделирования.

## Литература

1. Краснощеков П. С., Петров А. А. Принципы построения моделей. М.: МГУ, 1983. М.: Фазис, 2000.
2. Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А. Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат, 1996.
3. Петров А. А., Поспелов И. Г., Шананин А. А. От Госплана к неэффективному рынку: Математический анализ эволюции российских экономических структур. The Edwin Mellen Press. Lewiston, NY, USA, 1999.
4. Петров А. А., Поспелов И. Г. Модельная "летопись" российских экономических реформ. [http://isir.ras.ru/win/db/show\\_ref.asp?P=id-23268.ln-ru](http://isir.ras.ru/win/db/show_ref.asp?P=id-23268.ln-ru)
5. Поспелов И. Г. Модели экономической динамики, основанные на равновесии прогнозов экономических агентов. М.: ВЦ РАН, 2002. <http://www.ccas.ru/mmes/mmest/ecodyn03.htm>

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-01-00563-а), Российского гуманитарного научного фонда (№ 07-02-00362), по про-грамме государственной поддержки ведущих научных школ (№ НШ-5379.2006.1), про-грамм фундаментальных исследований ОМН РАН №3 и РАН №14).

# УРАВНОВЕШИВАЮЩИЕ ЦЕНЫ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕДЕЛИМОГО РЕСУРСА\*

Э. О. Рапопорт

*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; rapoport@math.nsc.ru*

Имеется два продукта и два способа производства. Состояние системы отождествляется с целочисленными точками неотрицательного квадранта плоскости. В каждый дискретный момент времени инвестор может вкладывать неделимый единичный ресурс в одно из двух производств. При вложении в первое производство система переходит из точки  $(x, y)$  в одну из точек  $(x + a_i, y + b_i)$  с вероятностями  $p_i$ , при вложении во второе производство переходит в те же точки с вероятностями  $q_i$ , где набор целочисленных векторов  $(a_i, b_i)$ ,  $1 \leq i \leq k$  задан. Некоторые из вероятностей могут быть равны нулю,  $\sum_i p_i = \sum_i q_i = 1$ . Через  $\xi$  будем обозначать двумерную случайную величину, определяемую набором вероятностей  $\{p_i\}$ , а через  $\eta$  – двумерную случайную величину, определяемую набором вероятностей  $\{q_i\}$ . Зафиксируем в каждой точке  $(x, y)$  какое-либо управление  $\alpha(x, y)$ , принимающее значения 0 или 1. Тогда при управлении  $\alpha(x, y)$  получаем марковский процесс  $Z(t) = (X(t), Y(t))$ , матрица переходов которого определяется следующим образом: из точки  $(x, y)$  мы можем попасть в точки  $(x + a_i, y + b_i)$  с вероятностями  $s_i = \alpha(x, y)p_i + (1 - \alpha(x, y))q_i$  соответственно, то-есть выполняются рекуррентные соотношения

$$Z(t+1) = Z(t) + \alpha(X(t), Y(t))\xi + (1 - \alpha(X(t), Y(t)))\eta,$$

причем  $Z(0) = (x, y)$ .

Естественно потребовать, чтобы первое управление (вложение ресурса в первое производство) было "лучше" для первого продукта, а второе управление – "лучше" для второго продукта. Формально это предположение можно записать так:

$$\begin{aligned} \sum_i p_i b_i &< 0, & \sum_i p_i (a_i + b_i) &> 0, \\ \sum_i q_i a_i &< 0, & \sum_i q_i (a_i + b_i) &> 0. \end{aligned}$$

Под вырождением системы мы будем понимать выход ее из первого квадранта.

Цель управления – минимизировать вероятность вырождения системы.

Для исследования асимптотики поведения процесса оказывается полезной система уравнений, введенная в [1], которую здесь запишем в следующем виде

$$\begin{cases} \sum_i p_i e^{-(\lambda a_i + \mu b_i)} = 1, \\ \sum_i q_i e^{-(\lambda a_i + \mu b_i)} = 1. \end{cases}$$

Эту систему будем называть системой, ассоциированной с рассматриваемым марковским процессом, или просто ассоциированной системой.

Очевидно, что пара  $(0, 0)$  является решением этой системы. Приведенные выше условия на коэффициенты системы гарантируют, что остальные решения положительны. В предположении, что эта система имеет еще только одно решение  $(\lambda, \mu)$ , в работе [1] было показано, что при  $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$   $g(x, y) = O(e^{-(\lambda x + \mu y)})$ .

Возникает вопрос о выборе рациональных цен  $(m, n)$  на продукты, позволяющий минимизировать вероятность разорения системы. Введя нормировку, можно считать, что цены имеют вид  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ .

При таких ценах естественно искать управление  $\beta(t)$  (принимающее значения 0 или 1) так, чтобы минимизировать вероятность выхода на отрицательную полуось из начального состояния  $t$  дискретного одномерного случайного процесса  $V(s)$ , порождаемого этими ценами. Пусть

---

\*Работа выполнена при поддержке (№ 07–06–00363а) и Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (№ НШ–4999.2006.6.)



$\delta_i = a_i \cos \varphi + b_i \sin \varphi$ . Рассмотрим две случайные величины  $\theta$  и  $\zeta$ , принимающие значения  $\delta_i$  с вероятностями  $\{p_i\}$  и  $\{q_i\}$  соответственно.

Тогда  $V(s)$  определяется рекуррентным соотношением

$$V(s+1) = V(s) + \beta\theta + (1-\beta)\zeta.$$

Пусть  $h(t)$  минимальное значение вероятности выхода этого процесса на отрицательную полуось из начального состояния  $t$ ,  $I(t) = \{i : t + \delta_i < 0\}$ . Тогда должны выполняться соотношения

$$h(t) = \min \left( \sum_{i \notin I(t)} p_i h(t + \delta_i) + \sum_{i \in I(t)} p_i, \sum_{i \notin I(t)} q_i h(t + \delta_i) + \sum_{i \in I(t)} q_i \right).$$

Легко видеть, что при любых  $\varphi$  справедливо неравенство  $h(x \cos \varphi + y \sin \varphi) \leq g(x, y)$ .

Цены будем называть уравнивающими для рассматриваемых случайных блужданий, если асимптотическая вероятность разорения одномерной задачи имеет вид

$$h(x \cos \varphi + y \sin \varphi) = O(e^{-(\lambda x + \mu y)}),$$

где  $(\lambda, \mu)$  – отличное от  $(0, 0)$  решение ассоциированной системы. Это условие выполняется, в частности, при  $\varphi = \arctan \frac{\mu}{\lambda}$ .

Показано, что при ценах, отличных от уравнивающих, вероятность выхода из первого квадранта при любом управлении равна единице.

### Литература

1. Рапопорт Э. О. Об одной модели распределения неделимого ресурса. // Дискретный анализ и исследование операций, Серия 2, 2005. Т. 12, № 1. С. 55-73.

# МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПОРТФЕЛЯ И ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК НОВОГО БАНКА И БАНКА-МОНОПОЛИСТА\*

А. Н. Романовская

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; antzys@math.nsc.ru*

В данной работе изучается нелинейная модель функционирования банка на период в  $T$  временных тактов. Для  $T = 2$  максимизируется следующий функционал  $f_1 - f_2 + f_3$ , где  $f_1 = \sum_{i \in I_{12}} c_i^{(1)} x_i^{(1)} + y^{(1)} \sum_{i \in I_{11}} x_i^{(1)}$  - прибыль за первый такт,  $f_2 = \sum_{i \in I_{22}} \tilde{c}_i \tilde{x}_i + \tilde{y} \sum_{i \in I_{21}} \tilde{x}_i$  - расходы за первый такт,  $f_3 = \sum_{i \in I_{12}} c_i^{(2)} x_i^{(2)} + y^{(2)} \sum_{i \in I_{11}} x_i^{(2)}$  - прибыль за второй такт. Здесь множества индексов  $I_{11}$  - доходных, а  $I_{12}$  - ликвидных активов, множества индексов  $I_{21}$  - депозитов, а  $I_{22}$  - вкладов до востребования,  $c_i^{(k)}$  и  $\tilde{c}_i$  - доходность или проценты по ценным бумагам соответственно,  $k$  - индекс такта,  $x_i^{(k)}$  и  $\tilde{x}_i$  - объемы ценных бумаг,  $y^{(k)}$  и  $\tilde{y}$  - ставки по ликвидным активам или по депозитам соответственно. Пусть  $I_{11} \cup I_{12} = \{1, \dots, N\}$  и  $I_{21} \cup I_{22} = \{1, \dots, N\}$ . В [1] был построен эффективный алгоритм решения поставленной задачи, требующий решения не более чем  $2N+2M+3$  задач линейного программирования. В настоящей работе исследован случай большой размерности задачи ( $N, M \gg 1$ ) и был построен алгоритм нахождения решения агрегированной задачи.

Кроме того, изучается модель функционирования нового банка, вышедшего на рынок банковских услуг. Кроме ограничений, предложенных в [1], вводится следующее:  $y \leq (1 - \Delta)y_k$ , где  $y$  - искомая ставка нового банка,  $y_k$  - заданные ставки остальных банков. Предлагается эффективный алгоритм решения поставленной задачи, дающий оптимальное значение ставки нового банка для привлечения наибольшего числа клиентов.

## Литература

1. Романовская А. Н. Об одном подходе к оптимизации процентных ставок, зависящих от времени. // Новосибирск: Препринт/РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; 2007.

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-06-00363) и гранта Президента РФ № НШ 4999.2006.6.

## ОТКРЫТЫЙ СИМПЛЕКС-ПАКЕТ С ГЕНЕРИРОВАНИЕМ СТОЛБЦОВ

И. В. Романовский

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург; *jvr@jr2793.spb.edu*

На кафедре исследования операций и в лаборатории исследования операций НИИММ СПб ГУ длительное время разрабатывались программные средства для решения задач линейного программирования (ЛП), и схема их организации постепенно усложнялась. Особое внимание уделялось разработанному впервые Л. В. Канторовичем и В. А. Залгаллером [1] методу решения специальных задач ЛП, впоследствии получившему название метода генерирования столбцов. В процессе развития наших программ постепенно вырабатывались требования к программным конструкциям пакета, близкие к тому, что сейчас называется объектно-ориентированным стилем программирования [2]. Обзор работ в этом направлении был представлен в [3].

В последнее время нам удалось, используя более новые конструкции (DLL, *dynamic link libraries*, динамически присоединяемые библиотеки), стандартные для системы Windows, решить остававшиеся проблемы организации программной системы и предложить схему пакета, который обладает достаточной гибкостью и открытостью.

Предлагаемый пакет ориентировался на решение задач ЛП, в которых условия могут быть заданы разными способами, в том числе алгоритмически. Алгоритмический способ описания условий здесь означает, что столбцы матрицы ограничений и коэффициенты целевой функции вычисляются (генерируются) не перед решением задачи, а в самом процессе решения. Этот способ удобен, например, когда матрица ограничений содержит очень много столбцов, а объем информации, по которой эти столбцы вырабатываются — не велик. К таким задачам относятся задачи массового раскроя, задача маршрутизации перевозок, задача ЛП с блочно-диагональной матрицей ограничений, решаемой методом разложения и др. В работе [3] дан обзор возможных применений этой схемы.

Отличие разработанной схемы в том, что программная система разбивается на несколько модулей, один из которых — это ведущая программа, а остальные присоединяются к основному в соответствии с выбором, который пользователь делает предварительно или в ходе диалога. Набор присоединяемых модулей может пополняться пользователем.

Среди выбираемых модулей находится и модуль исходных данных, в котором сосредоточена вся информация о решаемой задаче, форме представления исходных данных, форме выдачи окончательного решения и др. Он работает с исходными данными задачи, описывающими матрицу, вектор правых частей и тип ограничений, и отвечает на запросы той или иной информации от других модулей. Вместе со входящим в систему модулем дополнительных и искусственных переменных он составляет массив модулей данных.

Конструирование модуля в виде библиотеки не является в строгом смысле объектно-ориентированным программированием, но и эта форма модуля позволяет «скрывать» ее собственную информацию.

### Литература

1. Канторович Л. В., Залгаллер В. А. Расчет рационального раскроя промышленных материалов. Ленинград: Лениздат, 1951. 198 с.
2. Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование. С примерами приложений на C++. СПб.: Невский Диалект, 1998. 560 с.
3. Канторович Л. В., Романовский И. В. Генерирование столбцов в симплекс-методе // Экономика и математические методы. 1985. Т. 21, вып.1. С. 128–138.

# НЕЛИНЕЙНАЯ, ВЕРОЯТНОСТНАЯ МАКРОМОДЕЛЬ БОЛЬШОГО ЦИКЛА В ИТАЛИИ: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

А. В. Рыженков

*Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН, Новосибирск;  
ryzhenko@ieie.nsc.ru*

В итальянской экономике в 1980–2004 гг. наблюдалось, казалось бы, *парадоксальное* сочетание двух эмпирических закономерностей: темпы приростов ВВП и производительности труда были положительно коррелированы, тогда как темпы приростов нормы занятости и производительности труда отрицательно. Известна простая модель циклического роста, содержащая функцию технического прогресса Калдора и функцию механизации Гломбовского Крюгера [1]. Эта модель объясняет вторую, довольно специфическую закономерность прямыми положительными связями темпа прироста фондовооруженности и относительной оплатой труда, с одной стороны, и темпов прироста производительности труда и фондовооруженности, с другой. Однако эта простая модель не отражает первую, более общую закономерность (не только итальянской экономики)\*.

В западной экономической литературе подмечена особенность использования рабочей силы в Италии, названная рикардианской [3]: при циклическом оживлении и подъеме экономики этой страны капиталистические предприятия нанимают вначале высококвалифицированную рабочую силу для использования высокотехнологичного оборудования, а затем по мере расширения занятости они нанимают менее квалифицированных работников, использующих технологически менее прогрессивное оборудование. Однако прежние модели как с "рикардианской" рабочей силой, так и без нее не объяснили внешне парадоксального сочетания двух закономерностей, отмеченных выше.

На базе американской статистики разработана модель тенденции нормы прибыли к понижению (МТНПП), обобщающая простую модель [1, 2]. В настоящей работе МТНПП преобразована в МТНПП-И с экзогенным предложением рабочей силы благодаря модификациям функции технического прогресса и функции механизации. В этих модификациях учтены характерные для Италии (но не для США) отрицательные прямые зависимости темпа прироста производительности труда от темпа прироста нормы занятости и темпа прироста фондовооруженности от нормы занятости.

Установлено, что структура МТНПП-И содержит, в частности, восемь обратных связей темпа прироста производительности труда (семь отрицательных и одну положительную), а также восемь дополнительных обратных связей нормы занятости (семь отрицательных и одну положительную), не включающих темп прироста производительности труда. Из отмеченных шестнадцати обратных связей шесть унаследованы у простой модели.

Осуществлен переход от детерминистской формы МТНПП-И к вероятностной. Идентифицированы ее ненаблюдаемые параметры посредством применения упрощенной версии обобщенного фильтра Калмана к макроэкономическим данным за 1980–2004 гг. [4, 5]. Проведен ретроспективный статистический анализ и построены долгосрочные сценарии развития экономики Италии.

В фактической проверке модели использованы коэффициенты несоответствия Г. Тейла. Относительная среднеквадратическая ошибка ретроспективного прогноза фазовых переменных (фондоёмкости, нормы занятости, относительной оплаты труда) менее 1 процента, причем более 95 процентов этой ошибки приходится на долю неполной ковариации (несистематических расхождений). Имитационные расчеты подтвердили и объяснили две вышеуказанные закономерности, переставшие после этого казаться парадоксальными. Показано, что в первом (*инерционном*) сценарии длинная волна, или большой цикл с переменным периодом порядка 30–40

---

\* В США имела место аналогичная связь первой пары показателей и противоположная связь второй пары показателей [1, 2]. Национальные различия эффектов увеличения масштаба производства весьма значимы для политики стабилизации экономического роста в той или иной стране.

лет, доминирует над кратко- и среднесрочными квазипериодическими процессами накопления капитала.

Смягчению спада норм прибавочной стоимости и прибыли в Италии могло бы послужить либо усиление прямого отрицательного воздействия темпа прироста нормы занятости на темп прироста производительности труда во 2-м сценарии, либо переход к некоторой положительной прямой зависимости темпа прироста фондовооруженности от нормы занятости в 3-м сценарии.

Нетривиальное стационарное состояние в детерминистском варианте МТНПП-И не устойчиво в 1-м сценарии для значений параметров, идентифицированных по данным базового периода. Найдены отрицательные величины ключевых параметров функций технического прогресса и механизации, при которых происходит *суперкритическая* бифуркация Андронова Хопфа, порождающая предельные циклы с реалистическим периодом 43,3 г. в локальной близости прежнего стационарного состояния во 2-м сценарии. Однако ничтожная амплитуда предельных циклов и чрезмерная (многовековая) продолжительность перехода к ним из начального состояния 2004 г. свидетельствует о том, что они не могут служить приемлемой идеализацией большого экономического цикла. Стационарное состояние 3-го сценария с более высоким значением относительной оплаты труда, чем в 1-м и во 2-м сценариях, асимптотически устойчиво.

Экстраполяция тенденций базового периода в 1-м (инерционном) сценарии приводит к тому, что переменные МТНПП-И покидают экономическую область в ХХII веке. Для того же начального, наиболее вероятного состояния 2004 г. во 2-м и 3-м (стабилизационных) сценариях переменные модели остаются в экономической области независимо от глубины прогнозного периода.

Во всех трех сценариях вековая тенденция снижения нормы прибыли после 2000 г. сопровождается вековой тенденцией повышения нормы прибавочной стоимости, по крайней мере, с начала 1980-х гг., что согласуется с "Капиталом" К. Маркса. Анализ оригинальных моделей и выявленных объективных тенденций в данном исследовании вновь свидетельствует об актуальности этого классического произведения. Необходимо дальнейшее развитие Марксовской теории капиталистического накопления с помощью достижений современной математики и мировой статистики.

### Литература

1. Рыженков А. В. Модели циклического роста. Новосибирск: ИЭОПП СО РАН, 2003.
2. Рыженков А. В. Диалектика непрерывности и прерывности в теории больших циклов // В кн. Системное исследование экономических процессов в России. Новосибирск: ИЭОПП СО РАН, 2004. С. 140–172.
3. Fanti L. Ricardian Type of Labour Force in a Growth Cycle Model Stable Equilibrium, Periodic Fluctuations and Chaos // *Metroeconomica*. 2001. V. 4. P. 409–447.
4. Timmer M. P., Ypma G., van Ark B. IT in the European Union: Driving Productivity Convergence? // Research Memorandum GD-67, Groningen Growth and Development Centre, October 2003, Appendix Tables, updated June 2005. Downloadable at <http://www.ggdc.net/pub/online/gd67> (online).pdf
5. Economic Report of the President 2007. Washington (D.C.): GPO, 2007. Table B. 109.

# ПАТЕРНАЛИСТСКАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИКИ С ПЕРЕКРЫВАЮЩИМИСЯ ПОКОЛЕНИЯМИ\*

А. В. Сидоров

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; *sidorov@math.nsc.ru*

В работе исследуется модель экономического роста с перекрывающимися поколениями (см. монографию [1]) экономических агентов с трехпериодным жизненным циклом: условно говоря, «молодость», «зрелость», «старость». В период наибольшей активности — «зрелости» индивиды определяют стратегические решения, касающиеся распределения своего дохода между потреблением и сбережением. Последнее, в свою очередь разделяется на «непроизводительные инвестиции», заключающиеся в материальной поддержке (на возвратной основе) «молодого» поколения, не имеющего собственных источников дохода (в чём, собственно, и состоит патерналистский аспект модели), и капиталовложений в производственный сектор, отдача от которых приходится на заключительный период жизни — «старость». Производственный сектор характеризуется неоклассической производственной функцией  $F(K_t, L_t)$ , в соответствии с которой объём производства в стоимостном выражении является функцией от капиталовложений, сделанных в предыдущий период и привлечённых трудовых ресурсов поколения, достигшего периода «зрелости». Решение задачи максимизации прибыли в производственном секторе  $F(K_t, L_t) - w_t \cdot L_t \rightarrow \max$  приводит к выявлению спроса на трудовые ресурсы  $L_t$ , величины заработной платы  $w_t$  и ставки прироста капитала  $R_t$  в текущем периоде. Выбор оптимальных стратегий потребителя осуществляется на основе максимизации сепарабельной функции полезности с коэффициентом межвременного дисконтирования полезности  $0 < \beta < 1$ :

$$u(c_{t-1}) + \beta u(d_t) + \beta^2 u(e_{t+1}) \rightarrow \max,$$

где  $c_{t-1}$ ,  $d_t$ ,  $e_{t+1}$  — объёмы потребления в периоды «молодости», «зрелости» и «старости» соответственно, поколения, чья «зрелость» приходится на период  $t$ . Данные величины удовлетворяют следующим условиям связи:

$$0 \leq c_{t-1} \leq \frac{s_{t-1}}{1 + \delta}, \quad 0 \leq d_t = w_t - R_t c_{t-1} - s_t, \quad e_{t+1} = R_{t+1} s_t,$$

где  $\delta > -1$  — темп прироста населения,  $s_{t-1}$  величина сбережений на душу населения предыдущего поколения, т. е. тех чья «зрелость» пришлась на период  $t - 1$ ,  $w_t$  — величина заработной платы в периоде  $t$ ,  $R_t$ ,  $R_{t+1}$  — ставки прироста капитала в периодах  $t$  и  $t + 1$ , соответственно,  $s_t$  — среднедушевая величина сбережений текущего поколения.

Тем самым, образуется счётная система оптимизационных задач производителя и потребителей, передающих друг другу свои оптимальные решения в качестве внешних параметров. При этом никакая конечная подсистема задач не является замкнутой. Проблема отыскания взаимосогласованной системы решений всех этих задач сводится к построению равновесной *траектории капиталовооружённости труда*  $k_t = \frac{K_t}{L_t}$ ,  $t \geq 0$ , удовлетворяющей некоторым рекуррентным соотношениям.

В данной работе доказаны существование и единственность равновесных траекторий для некоторых важнейших классов функций полезности, включая логарифмические и функции с постоянной межвременной эластичностью замещения. Кроме того, исследованы вопросы асимптотики равновесных траекторий и устойчивости стационарных состояний.

## Литература

1. *de la Croix D., Michel P.* Dynamix and Policy in Overlapping Generatins. Cambridge Univ. Press, 2002.

\* Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № НШ-4999-2006.6

# СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ИНВЕСТОРА С АДДИТИВНОЙ СЛАБО ВОЗМУЩЕННОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ\*

А. Е. Трубачева

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; aetrub@math.nsc.ru*

Исследуется проблема распределения доходов от производства между потреблением и инвестициями, когда доходы моделируются возмущенными производственными функциями. Доказана теорема о магистрали, определяющая оптимальное значение доли инвестиций. Тем самым, в случае квазинеоклассических производственных функций показано существование особого оптимального режима управления.

Изучение системы *инвестор-производство* с целью решения проблемы распределения доходов от производства между потреблением и инвестициями в настоящее время является актуальным. В большинстве работ по данной тематике изучались модели, основанные на вогнутых производственных функциях. В реальной экономике производственная функция подвергается различным возмущениям, которые обусловлены объективными причинами, спрогнозировать которые заранее невозможно. Большое значение имеет изучение зависимости экономической динамики производства от типов возмущений производственной функции, часто встречаемых на практике. В работе [1] исследовались новые классы слабо возмущенных производственных функций и были получены новые правила накопления для стационарных значений фондовооруженности. В настоящей работе продолжается изучение аддитивной модели возмущения производственной функции, т.е. функции вида  $\tilde{f}(k) = f(k) + \tau(k)$ , где  $f(k)$  — неоклассическая функция,  $\tau(k) \in C^2$ , и находится оптимальная доля инвестиций в этом случае (см. также [2]).

Априори нельзя было предположить, что при возмущенном случае существует математическое обоснование оптимального уровня управления производством. Основным результатом данной работы является нахождение этого оптимального управления.

Прежде, чем привести формулировку оптимизационной задачи, введем следующие определения.

**Определение 1.** *Стратегия инвестора*  $s(t), t \in [0, T]$  — это доля его дохода от производства, направленная на развитие данного производства.

**Определение 2.** Производственная функция  $f(k)$  называется *неоклассической*, если выполняются следующие условия:  $f' > 0, f'' < 0, f(0) = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = \infty, \lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0$ .

Функцию вида

$$\tilde{f}(k) = f(k) + \tau(k),$$

где  $f(k)$  — неоклассическая производственная функция,  $\tau(k) \in C^2$ , будем называть *аддитивной моделью возмущения производственной функции*.

**Определение 3.** Функция  $\tilde{f}(k) = f(k) + \tau(k)$  называется *аддитивно слабо возмущенной*, если  $f(k)$  — неоклассическая функция,  $\tau(k) \in C^2$  и возмущение  $\tau(k)$  мало, т.е.  $\|\tau\|_{C^2} \leq \zeta$  для  $0 < \zeta \ll 1$  и  $\tau(0) = 0$ . Иногда такие функции будем называть *квазинеоклассическими*.

Основной оптимизационной задачей, определяющей стратегию поведения инвестора при возмущении функции производства, является следующая: максимизировать функционал потребления инвестора

$$\int_0^T (1 - s(t)) \tilde{f}(k(t)) e^{-\delta t} dt \quad (1)$$

при ограничениях

$$\dot{k}(t) = s(t) \tilde{f}(k(t)) - \mu k(t), \quad (2)$$

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-06-00363-а), Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (№ НШ-4999.2006.6) и совместного российско-голландского гранта РФФИ-NWO (№ 047-017-017).

$$0 \leq s(t) \leq 1, \quad k(0) = k_0 > 0, \quad k(T) \geq k_T > 0, \quad (3)$$

где  $\tilde{f}(k)$  — аддитивно слабо возмущенная функция,  $k(t)$  — фондовооруженность,  $\delta > 0$  — константа дисконтирования,  $\mu > 0$  — темп амортизации фондов,  $k_T$  — нижняя граница фондовооруженности в момент времени  $T$ ,  $s(t)$  — доля инвестиций в доходе.

**Замечание.** Заметим, что последнее условие в (3) в литературе носит название условия “экономического горизонта”. Учитывая это условие, для прогнозирования поведения инвестора в случае неединственности решения задачи целесообразно рассматривать максимальное значение фондовооруженности, т.к. инвестор заинтересован в увеличении объемов производства, которое не происходит при уменьшении фондовооруженности.

Пусть  $\psi_0(t)$  — сопряженная функция, соответствующая подынтегральной функции в (1),  $\psi(t)$  — сопряженная функция, соответствующая уравнению (2). Тогда гамильтониан рассматриваемой задачи имеет вид

$$\mathcal{H}(\psi, k, s, t) = (1 - s(t))e^{-\delta t} \tilde{f}(k)\psi_0 + \psi[s(t)\tilde{f}(k) - \mu k].$$

**Определение 4.** Оптимальная траектория  $(k(t), s(t))$  называется *особой*, если вдоль нее выполняется соотношение

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial s} \equiv 0,$$

где  $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}e^{\delta t}$ .

Решая задачу (1)-(3) с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина, получаем

$$\begin{cases} s(t) = 1, & \text{если } q > 1, \\ s(t) = 0, & \text{если } q < 1, \\ s(t) \in [0, 1], & \text{если } q = 1, \end{cases}$$

где  $q = \psi e^{\delta t}$ ,  $\psi(t)$  — сопряженная функция. Исследовав фазовые траектории на плоскости  $(k, q)$ , рассматривая специальные не особые траектории, находим величины  $T_i$  — время прохождения  $i$ -ой траектории. Положим  $T_0 = \max\{T_i\}$ .

**Теорема.** Пусть в задаче планирования (1)-(3) функция  $\tilde{f}(k)$  является аддитивно слабо возмущенной, существуют допустимые траектории и промежуток планирования  $T$  достаточно велик ( $T > T_0$ ). Пусть также существует максимальный элемент  $k_{max}^{**}$  в множестве  $\{k_i^*, i \in I\} \cap (0, \tilde{k}_{min})$ , где  $k_i^*$  — решения уравнения  $f'(k) = \delta + \mu - \tau'(k)$ ,  $\tilde{k}_{min}$  — минимальное из решений уравнения  $f(k) = \mu k - \tau(k)$ ,  $I$  — некоторое индексное множество. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Существует по крайней мере одна оптимальная стратегия распределения дохода на потребление и инвестиции.

2) Оптимальное управление  $s(t)$  имеет следующий вид: в начале периода ( $0 \leq t \leq T^*$ ) и в конце ( $T^{**} \leq t \leq T$ ) выполнено  $s(t) \in \{0, 1\}$ , а все остальное время ( $T^* \leq t \leq T^{**}$ ) имеет место

$$s(t) = s^* = \frac{\mu k_{max}^{**}}{f(k_{max}^{**}) + \tau(k_{max}^{**})}.$$

Таким образом, для аддитивной модели возмущения производственной функции доказана магистральная теорема, показывающая, что для квазинеоклассических производственных функций существует особый оптимальный режим управления.

## Литература

1. Трубачева А. Е. Влияние возмущения производственной функции на поведение инвестора // Сиб. журн. инд. мат. 2004. Т. VII, № 3(19). С. 156–169.
2. Трубачева А. Е. Исследование поведения инвестора при различных схемах налогообложения и разных видах производственной функции // Препринт № 153. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2005. 40 с.



## ЭКОНОМИКА РОССИИ В ПОСТСОВЕТСКИЙ ПЕРИОД: АЛЬТЕРНАТИВНАЯ ОЦЕНКА ДИНАМИКИ И ЭФФЕКТИВНОСТИ

Г. И. Ханин

*Сибирская академия государственной службы, Новосибирск; galinasu@rol.ru*

Нет нужды доказывать, что невозможно осуществлять ни объективный анализ состояния экономики, ни прогноз ее развития, опираясь на недостоверную макроэкономическую информацию. Но именно так, как и в советское время, действуют не только государственные органы России, но и практически все исследовательские центры России.

Я в 70-80 годы осуществил на основе разработанных мною многочисленных методов пересчет макроэкономических показателей экономики СССР за 1928-1987 годы и получил оценки в целом за весь период на порядок отличающиеся от официальных. Осуществленный мною анализ состояния российской постсоветской макроэкономической статистики показал, что она унаследовала многие недостатки советской статистики, а зачастую, и усугубила их. С середины 90 годов, а особенно после 1998 года, мои коллеги и я осуществили пересчет подавляющего большинства макроэкономических показателей постсоветской российской экономики, особенно тщательно после 1998 года. Эти расчеты осуществлялись по большинству показателей несколькими взаимоконтролирующими независимыми методами, опираясь на более или менее достоверную исходную информацию. Учитывая ограниченность исследователей и времени, а также известную неточность некоторой части исходной информации, наши расчеты не претендуют на абсолютную точность, но дают значительно более точную картину состояния экономики, чем официальные оценки, что подтверждается их лучшей согласованностью друг с другом (например, динамика основных фондов и капитальных вложений) и другими экономическими показателями, способностью объяснять характер изменений в экономике и прогнозировать ее развитие.

Не останавливаясь на конкретных методах расчета, которые содержатся в наших публикациях, отмечу основные результаты наших расчетов и их отличия от официальных.

Наименьшие отличия от официальной статистики касаются динамики ВВП. Тем не менее, можно отметить, что в период с 1990 года по 1998 годы альтернативные оценки показывают несколько меньшее падение ВВП, а с 1999 по 2004 годы несколько меньшие среднегодовые темпы роста (в среднем примерно на 1,5 процентных пункта ежегодно) [1]. Но обе оценки показывают, что в 2006 году был достигнут уровень ВВП 1990 года. При этом, фактический объем ВВП превышает данные официальной статистики примерно на 15-20%, в основном, за счет потребления домашних хозяйств.

С учетом реальной численности нелегальных иммигрантов производительность труда находится также на уровне 1990 года и в 1999-2004 годы не выросла, вопреки данным официальной статистики, показывающей ее быстрый рост в этот период. Несколько снизилась в постсоветский период материалоемкость продукции, что является серьезным достижением.

Наибольшие долгосрочные последствия имеет сокращение примерно на одну треть за весь период основных фондов вследствие огромного сокращения доли накопления в основные фонды в ВВП и самого ВВП [2]. Слабость инвестиционного процесса в России объясняется недостатком финансовых источников накопления и огромными (более 0,5 триллиона долларов) размерами утечки капитала из России. Для выявления реальной рентабельности российской экономики нами была проведена переоценка основных фондов по их восстановительной стоимости, которая оказалась выше балансовой в 8-10 раз. С учетом этой переоценки и пересчета амортизационных отчислений весь реальный сектор экономики оказался убыточным (по крайней мере, до повышения мировых цен на топливо и сырье в последние два года). Достижение уровня ВВП 1990 года несмотря на огромное (равное периоду ВОВ) сокращение основных фондов объясняется и некоторым повышением уровня использования основных фондов и крупным сдвигом структуры экономики в сторону нефондоемких услуг.

В постсоветский период советская экономика прошла два периода: период разрушения и период восстановления. Восстановление экономики чрезвычайно облегчалось высокими мировыми

ценами на основные продукты российского экспорта в 2003-2006 годы. Для самостоятельного перехода к периоду созидания, опирающегося на новую производственную базу и в худших внешних условиях, нужны колоссальные усилия и, к сожалению, жертвы всего общества, но особенно его состоятельных слоев, сопоставимые по своим масштабам с периодами Петра I и Сталина. Они требуют также огромных изменений в социально-экономической и политической системе, коренного обновления правящего слоя [3]. Предпринимаемые в последнее время усилия в этом направлении, хотя и идут часто в правильном направлении, но носят запоздалый характер и по масштабам совершенно неадекватны масштабу экономических и политических проблем .

### Литература

1. Ханин Г. И. Российская экономика в 2001-2004 гг. альтернативная оценка // ЭКО. 2007. № 5.
2. Ханин Г. И., Фомин Д. А. Потребление и накопление основного капитала в России: альтернативная оценка // Проблемы прогнозирования. 2007. № 1.
3. Ханин Г. И. Технология экономического рывка в России (чему учит исторический опыт) // ЭКО. 2004. № 10.

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ПРЯМОГО МЕТОДА

**В. И. Хохлюк**

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; vit@math.nsc.ru*

Прямой метод разработан для численного решения общей целочисленной линейной задачи оптимизации. Этот метод с геометрической точки зрения представляет собой переход от одной вершины выпуклой оболочки всех допустимых решений задачи к другой. Как правило, используются две вычислительные схемы, реализующие прямой метод: одна для системы неравенств, а другая для системы уравнений. В обеих вычислительных схемах в качестве подзадач решаются следующие задачи.

- 1) Алгоритм Евклида для преобразования целочисленных матриц.
- 2) Приведение целочисленной матрицы к нормальному виду.
- 3) Нахождение всех крайних лучей заострённого конуса.
- 4) Вычисление коэффициентов неравенства, определяющего грань многовершинника группового уравнения, а затем и дополнительное линейное неравенство которое обеспечивает базисность целочисленного допустимого решения.

Для решения задач 1)–4) были написаны вычислительные процедуры на языках программирования высокого уровня (АЛГОЛ, Pascal, DelphiX). Проведено тщательное тестирование этих процедур.

Результаты счета оказали существенное влияние на дальнейшее совершенствование прямого метода.

### Литература

1. Хохлюк В. И. Параллельные алгоритмы целочисленной оптимизации. М.: Радио и связь, 1987.
2. Хохлюк В. И. Прямой метод целочисленной оптимизации // Препринт № 106. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002. 38 с.
3. Хохлюк В. И. Прямой метод целочисленной оптимизации // В кн.: Сборник трудов международной конференции SCP-2005, Санкт-Петербург: СПб государственный университет, 2005. Vol 2. P. 979–996.

# АЛГОРИТМЫ ПОЛИЭДРАЛЬНОЙ КОМПЛЕМЕНТАРНОСТИ ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ РАВНОВЕСИЯ В ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЯХ ОБМЕНА\*

В. И. Шмырев

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск; shvi@math.nsc.ru*

В докладе рассматривается дальнейшее развитие общего подхода [1] к построению конечных алгоритмов отыскания равновесных состояний в линейных моделях конкурентной экономики типа классической модели обмена и некоторых её обобщений. Идейную основу этого подхода можно охарактеризовать как полиэдральную комплементарность, являющуюся обобщением известной схемы линейной комплементарности [2]. Применительно к модели обмена суть подхода состоит в следующем.

Линейность целевых функций участников модели порождает разбиение симплекса цен на многогранники, задающие зоны стабильного предпочтения участников. Каждой из таких зон стабильного предпочтения можно сопоставить множество векторов цен, при которых возможен сбалансированный обмен товарами в соответствии с предпочтениями участников — зону сбалансированности, которая также является некоторым многогранником. Возникающее таким образом точечно-множественное отображение симплекса цен в себя обладает характерными свойствами линейной комплементарности и условно можно сказать, что в данном случае мы имеем дело с полиэдральной комплементарностью.

Неподвижные точки описанного отображения задают равновесные цены модели.

Известно, что задача отыскания равновесия в линейной модели обмена может быть сведена к задаче линейной комплементарности [3]. Рассматриваемый подход следует принципиально иной схеме и позволяет вскрыть некоторое свойство монотонности, присущее модели. Это свойство можно охарактеризовать следующим образом: возникающая задача полиэдральной комплементарности локально сводится к задаче линейной комплементарности с матрицей ограничений, обладающей свойством положительности главных миноров (класс  $P$ ).

Рассматриваемый подход позволил предложить конечные алгоритмы отыскания равновесия для линейной модели обмена как с фиксированными, так и с переменными бюджетами [4,5,6]. При этом в случае модели с фиксированными бюджетами возникающие точечно-множественные отображения оказываются потенциальными и обладают определенным свойством монотонности (логарифмическая монотонность). В следствие этого вопрос об отыскании равновесия сводится к задаче выпуклой оптимизации.

Разработанная схема построения алгоритмов отыскания равновесия позволяет получить конечные алгоритмы и для более общих линейных модели - специальный класс моделей Эрроу-Дебре [7], обобщенная модель обмена [8], дробно-линейная модель обмена.

## Литература

1. Шмырев В. И. Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // Докл. АН СССР. 1983, т. 286, № 5, С. 1062–1066.
2. Lemke C. E. Bimatrix equilibrium points and math. programming // J. Management Sci. 1965. V. 11, No 7, p. 681–689.
3. Eaves B. C. A finite algorithm for linear exchange model // J. Math. Econ. 1976. V. 3, No 2, p. 197–204.
4. Шмырев В. И. Алгоритмы отыскания равновесия в моделях обмена с фиксированными бюджетами // Оптимизация 31, 1983, С. 137–155.
5. Shmyrev V. I. An algorithmic approach for searching an equilibrium in fixed budget exchange models. Russian contributions to game theory and equilibrium theory. Edited by Theo S. H. Driessen, Gerard van der Laan, Valeri A. Vasil'ev and Elena B. Yanovskaya. Berlin: Springer-Verlag, 2006. P. 217–235.

\*Работа выполнена при поддержке Программы поддержки ведущих научных школ Российского фонда фундаментальных исследований (№ НШ-4999.2006.6)

6. *Шмырев В. И.* Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена // Сиб. мат. журн. 1985, т. 26, No 2, С. 163–175.
7. *Шмырев В. И.* Нахождение равновесия в одном классе моделей производства-обмена // Дискретный анализ и исследование операций 2003. Серия 2. Том 10, No 1. С. 65–91.
8. *Шмырев В. И.* Обобщенная модель обмена // Дискретный анализ и исследование операций 2006. Серия 2. Том 13, No 2. С. 74–102.

# PORTFOLIO CONES AND ARBITRAGE FREE PRICES: ANYTHING GOES

C. D. Aliprantis<sup>1</sup>, M. Florenzano<sup>2</sup>, R. Tourky<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Department of Economics, Purdue University, West Lafayette, IN 47907–2056, USA;  
aliprantis@mgmt.purdue.edu*

<sup>2</sup> *Centre d’Economie de la Sorbonne, UMR 8174 CNRS–Université Paris 1, France;  
monique.florenzano@univ-paris1.fr*

<sup>3</sup> *Department of Economics, The University of Queensland, Brisbane, Australia;  
rtourky@purdue.edu*

In this paper, we show that closed normal cones in locally convex topological vector spaces of economic interest can be characterized as portfolio dominance cones of some model of portfolio trading. These results are particular cases of a general representation theorem of locally convex spaces with normal cones which can be found in [1]. In particular, if  $K$  is a closed cone in a finite dimensional vector space  $X$ , then there exists a one-to-one linear operator  $T: X \rightarrow C[0, 1]$ , interpreted as a portfolio returns operator, such that  $K$  is the pull-back cone of the positive cone of  $C[0, 1]$ , i.e.,  $K = T^{-1}(C_+[0, 1])$ . This problem originates from questions regarding arbitrage free prices in economics and is motivated by the counter example in [2] and the resolution in [3,4,5] of the economic problem highlighted by the example.

## References

1. *Schaefer H. H.*, Topological Vector Spaces. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1974.
2. *Aliprantis C. D., Monteiro P., Tourky R.* Non-marketed options, non-existence of equilibria, and non-linear prices in the journal // *J. Econ. Theory*. 2004. Vol. 114. P. 345–357.
3. *Aliprantis C. D., Florenzano M., Tourky R.* General equilibrium analysis in ordered topological vector spaces in the journal // *J. Math. Econ.* 2004. Vol. 40. P. 247–269.
4. *Aliprantis C. D., Florenzano M., Martins-da-Rocha V. F., Tourky R.* Equilibrium analysis in financial markets with countably many securities in the journal // *J. Math. Econ.* 2004. Vol. 40. P. 683–699.
5. *Aliprantis C. D., Florenzano M., Tourky R.* Linear and non-linear price decentralization in the journal // *J. Econ. Theory*. 2005. Vol. 121. P. 51–74.

# COMMUNICATION AND TRADE DISCOUNT IN MANUFACTURER–RETAILER–CONSUMER STRUCTURE\*

I. A. Bykadorov<sup>1</sup>, A. Ellero<sup>2</sup>, S. Funari<sup>3</sup>, E. Moretti<sup>4</sup>

<sup>1</sup> *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia; bykad@math.nsc.ru*

<sup>2</sup> *Università Ca' Foscari, Venezia, Italia; ellero@unive.it*

<sup>3</sup> *Università Ca' Foscari, Venezia, Italia; funari@unive.it*

<sup>4</sup> *Università Ca' Foscari, Venezia, Italia; emoretti@unive.it*

The purpose of this paper is to show some economic outcomes of the application of optimal control to marketing. We present three dynamic models.

In the first one developing the pioneering idea of Nerlove and Arrow [1] we consider [2], [3] a firm that seeks to reach a fixed level of goodwill at the end of the selling period, with the minimum total expenditure in promotional activities. The firm can only control the communication expenditure rate.

In the second one we consider [4], [5] a vertical control distribution channel where a manufacturer sells a single kind of good to a retailer. The manufacturer's profit maximization is considered in an optimal control model where the manufacturer's control is the discount on wholesale price (trade discount). The optimal discount policy of the manufacturer turns out to depend on the efficiency of the retailer and his sale motivation. Moreover we also consider [6] the manufacturer-retailer relationship in a differential game framework: the manufacturer's control is again the trade discount while the retailer controls the pass-through to the market.

In the third one we propose an optimal control problem to model the dynamics of the communication activity of a firm with the aim of maximizing its efficiency. We assume that the advertising effort undertaken by the firm contributes to increase the firm's goodwill and that the goodwill affects the firm's sales. The aim is to find the advertising policies in order to maximize the firm's efficiency index which is computed as the ratio between “outputs” and “inputs” properly weighted; the outputs are represented by the final level of goodwill and by the sales achieved by the firm during the period considered, whereas the inputs are represented by the costs undertaken by the firm, fixed costs and advertising costs. The problem considered is formulated as a fractional optimal control problem. In order to find the optimal advertising policies we use the Dinkelbach's approach [7].

## References

1. *Nerlove M., Arrow K. J.* Optimal advertising policy under dynamic conditions // *Economica*. 1962. Vol. 29, no 2. P. 129–142.
2. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E.* Minimization of communication expenditure for seasonal products // *RAIRO Operations Research*. 2002. Vol. 36, no 2. P. 109–127.
3. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E.* A model for the marketing of a seasonal product with different goodwills for consumer and retailer // *Journal of Statistics & Management Systems*. 2003 Vol. 6, no 1. P. 115–133.
4. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E.* Optimal control of retailer's motivation by trade discounts // *Rapporto n.119/2004*, Dipartimento di Matematica Applicata, Università Ca' Foscari di Venezia, 2004.
5. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E.* Optimal control of trade discount in a vertical distributional channel // In: *Rendiconti per gli Studi Economici Quantitativi*. Venezia: Dipartimento di Matematica Applicata, Università Ca' Foscari di Venezia, 2005. P. 121–129.
6. *Bykadorov I., Ellero A., Moretti E.* Trade discount policies in the differential games framework: preliminary results // *Rapporto n.130/2005*, Dipartimento di Matematica Applicata, Università Ca' Foscari di Venezia, 2005.
7. *Dinkelbach W.* On nonlinear fractional programming // *Management Science*. 1967, Vol. 13, no 1. P. 492–498.

---

\*The authors were supported by Università Ca' Foscari di Venezia, MIUR-PRIN co-financing 2005, and the Council for Grants (under RF President) and State Aid of Fundamental Science Schools (grant no. NSH-4999.2006.6).

## “ALMOST” SUBSIDY-FREE SPATIAL PRICING IN A MULTI-DIMENSIONAL SETTING\*

J. Drèze<sup>1</sup>, M. Le Breton<sup>2</sup>, A. Savvateev<sup>3</sup>, S. Weber<sup>4</sup>

<sup>1</sup> CORE, Catholic University of Louvain, Louvain-La-Neuve, Belgium; [dreze@core.ucl.ac.be](mailto:dreze@core.ucl.ac.be)

<sup>2</sup> Université de Toulouse I, GREMAQ and IDEI, Toulouse, France; [lebreton@cict.fr](mailto:lebreton@cict.fr)

<sup>3</sup> New Economic School, Moscow, Russia; [hibiny@mail.ru](mailto:hibiny@mail.ru)

<sup>4</sup> Southern Methodist University, Dallas, USA; [sweber@mail.smu.edu](mailto:sweber@mail.smu.edu)

Consider a society that faces a problem of locating one or several public facilities (or public projects as in [1]) to serve its members. The facilities, say libraries, are to be located on the plane and could be visited by citizens at some private “transportation” cost related to distance between their residence and the facility they are assigned to. Assuming that setting up and operating a facility entails a fixed set-up and operational cost, the following problems arise:

- how many facilities should be built;
- where to locate the facilities;
- how to assign citizens to the facilities;
- how to allocate the facilities costs (in the form of access fees) to citizens-users.

In this paper we examine the case where

- the demand for use of services is uniformly distributed over the plane, independently of the cost of services;
- the cost of setting up a facility is independent of location;
- access cost is proportional to Euclidean distance.

We assume that for any number and location of facilities, assignment of users to facilities and access fees, all citizens-users enjoy a “free entry” option: *any group can build a new facility for their own benefit at the standard fixed cost, and locate it at will*. A threat of free entry leads us imperatively to impose the “secession-proofness” or “core” property: at equilibrium, no group of users should be able to benefit by seceding from the proposed arrangement to set up and operate its own facility.\* The secession-proofness also can be considered as a “no cross-subsidization” condition where no group of users is required to contribute more than its stand-alone cost. In other words, the equilibrium cost allocation should ensure the voluntary participation of any group of citizens.

The secession-proofness immediately yields the total cost minimization requirement: *the society should minimize the total burden of setting up and operating all facilities and of the aggregate access fees of all citizens*. This requirement, in turn, leads to two simple but important observations: (i) since the facilities costs are location-independent, every group of citizens assigned to the same facility should place it at the “central” location that minimizes the aggregate access costs of that group;\* (ii) every citizen should be assigned to the facility closest to her residence. These observations allow us to reduce the societal problem described above to finding a partition of the society into disjoint groups of users, called *jurisdictions*, that, under (i) and (ii), satisfies the total cost minimization requirement. Any such partition will be called *efficient*.

The characterization of efficient partitions in this geometric setting is a well-documented problem in mathematics. An efficient partition consists of identical regular hexagons, whose size is calculated as a function of the ratio of fixed costs per facility to access costs per unit of distance. However, the area over which total costs per user are minimized is not a hexagon but a *disk*! Since the plane cannot be partitioned into disks, this helps to explain the first result of this paper that demonstrates that the set of secession-proof allocations is empty. This simply means that it is impossible to allocate facilities’ cost over hexagons in an efficient partition so as to rule out a threat of secession by all disk-shaped jurisdictions.

---

\*Financial support through grants R98–0631 from EERC, # NSh–1939.2003.6 School Support, RFBR No. 04–02–17227, NWO-RFBR No. 047.017.017, and Russian Science Support Foundation is gratefully acknowledged.

\*Since a geographical area served by a public facility can be identified as a political jurisdiction, the secession-proofness could then be viewed as a requirement of political stability.

\*It is easy to see that such a location is uniquely defined for every group of citizens.



The non-existence of secession-proof allocations implies that the stability can be ensured only at some cost. We consider the situation where an external source is willing to finance a fraction  $\delta$  of the total cost incurred by jurisdictions if they follow the prescribed agreement. Suppose that the total costs (set-up plus operation plus access fees) for the jurisdiction-to-be at the proposed equilibrium are subject to the discount factor  $1 - \delta$ , whereas forming a new jurisdiction to set up and operate an independent facility requires a full non-subsidized cost. Then the allocation will be  $\delta$ -secession-proof if the savings reaped by the seceding jurisdiction fall short of the subsidy obtained by members of that jurisdiction at the proposed access fee allocation.

We then turn to the examination of the minimal subsidy that can rectify stability failure. By using Fubini’s theorem, we demonstrate that the set of  $\delta$ -secession-proof allocations is non-empty if and only if the value of the subsidy,  $\delta$  is no less than the threshold  $\delta^* \approx 0.0019$ . This value is actually determined by the ratio  $1 - \delta^*$  of total per capita costs to users in an optimal disk and in an optimal hexagon. A tiny value of  $\delta^*$  (less than 0.2%) lends credence to the  $\delta$ -secession-proofness as a stability concept.

The second result of the paper is the characterization of the  $\delta^*$ -secession-proof allocations. It is provided by the so-called Rawls principle that requires the minimization of the total cost incurred by the least privileged citizen-user and produces the complete equalization of total cost for all citizens-users. A transparent characterization of that principle requires to subject access to a fee that declines linearly with the residence-to-facility distance and to adjust access fees so that operators of the facilities break even.

The Rawls principle defines uniquely the  $\delta^*$ -secession-proof allocation. (For higher values of  $\delta$ , the set of  $\delta$ -secession-proof allocations contains other allocations as well.) The Rawlsian policies are often advocated on the basis of *justice* considerations, whereas our result offers a *stability* argument in support of the Rawls principle.

### References

1. *Alesina, A. and E. Spolaore* On the number and size of nations // Quarterly Journal of Economics. 1997. Vol. 113. P. 1027-1056.
2. *Bogomolnaia, A., Le Breton, M., Savvateev, A. and S. Weber* Stability of jurisdiction structures under the equal share and median rules // Forthcoming in *Economic Theory*.
3. *Bogomolnaia, A., Le Breton, M., Savvateev, A. and S. Weber* Stability under unanimous consent, free mobility and core // Forthcoming in *International Journal of Game Theory*.
4. *Drèze, J., Le Breton, M., and S. Weber* Rawlsian pricing of access to public facilities: a uni-dimensional illustration // Forthcoming in *Journal of Economic Theory*.
5. *Greenberg, J. and S. Weber* Strong Tiebout equilibrium under restricted preferences domain // Journal of Economic Theory. 1986. Vol. 38. P. 101-117.
6. *Haimanko, O., Le Breton, M. and S. Weber* Voluntary formation of communities for the provision of public projects // Journal of Economic Theory. 2004. Vol. 115. P. 1-34.
7. *Konishi, H., Le Breton, M. and S. Weber* Equilibrium in a finite local public good economy // Journal of Economic Theory. 1998. Vol. 79. P. 224-244.
8. *Le Breton M., S. Weber* The art of making everybody happy: how to prevent a secession? // IMF Staff Papers. 2003. Vol. 50, № 3. P. 403-435.
9. *Mas-Colell A.* Efficiency and decentralization in the pure theory of public goods // Quarterly Journal of Economics. 1980. Vol. 94. P. 625-641.
10. *Weber S. and Zamir S.* Proportional taxation: nonexistence of stable structures in an economy with a public good // Journal of Economic Theory. 1985. Vol. 35. P. 178-185.

# GENERALIZATIONS OF SOBOLEV’S CONSISTENCY AND VALUES FOR TU-GAMES\*

T. S. H. Driessen

*University of Twente, Enschede, The Netherlands; t.s.h.driessen@math.utwente.nl*

In the framework of the solution theory for cooperative transferable utility games, A.I. Sobolev [2] axiomatized the well-known Shapley value, introduced by L.S. Shapley [3], by means of a so-called consistency property with reference to a specifically chosen reduced game. The goal of this paper is to generalize Sobolev’s consistency approach to the class of efficient, symmetric, and linear values, of which the Shapley value is the most important representative. For this enlarged class of values, we present a uniform treatment in three steps. Firstly, with each such value, we associate a certain reduced game, secondly we prove the corresponding consistency (reduced game) property, and thirdly, we provide an axiomatic characterization fully based on this consistency property together with some kind of standardness for two-person games. Finally, examples of axiomatizations of appealing values are discussed and concluding remarks deal with other types of consistency for certain classes of values.

## References

1. *Driessen T.S.H.* A survey of consistency properties in cooperative game theory // SIAM Review. 1991. Vol. 33. P. 43–59.
2. *Sobolev A.I.* The functional equations that give the payoffs of the players in an n-person game (in Russian) // In: Advances in Game Theory (Ed. E. Vilkas): Izdat. Mintis, Vilnius. 1973. P. 151–153.
3. *Shapley L.S.* A value for n-person games // Annals of Mathematics Study. 1953. Vol. 28. P. 307–317.

---

\*The Netherlands Organization for Scientific Research (NWO) as approved by the Dutch Russian cooperative programme NWO 047.017.017.

## VALUES FOR GRAPH-RESTRICTED GAMES WITH COALITION STRUCTURE\*

A. B. Khmel'nitskaya

*SPb Institute for Economics and Mathematics RAS, St. Petersburg; a.khmel'nitskaya@math.utwente.nl*

The study of TU games with coalition structure was initiated first by Aumann and Dréze [2], then Owen [7]. Later this approach was extended in Winter [10] to games with level structure. Another model of a game with limited cooperation presented by means of communication graphs was introduced in Myerson [6]. Different studies in both directions were done during the last three decades but mostly either within one model or another. The generalization of the Owen and the Myerson values applied to combination of both models resulted in TU games with both independent coalition and cooperation structures was investigated by Vazquez-Brage, Garcia-Jurado, and Carreras [9]. In the paper we study values for TU games with both coalition and cooperation structures, but opposite to [9] in our case a cooperation structure is related fundamentally to the given coalition structure. It is assumed that cooperation (via bilateral agreements between participants) is only possible either among the entire coalitions of the coalition structure, in other terms a priori unions, or among single players within a priori unions, no communication and therefore no cooperation is allowed between single players from distinct elements of the coalition structure. This approach allows to model different network situations, in particular, telecommunication problems, distribution of goods among different cities (countries) along highway networks connecting the cities and local road networks within the cities, or sharing an international river with multiple users without international firms, i.e., when no cooperation is possible among single users from different levels along the river, and so on. A cooperation structure is introduced by means of graphs of two types, first, presenting links among the a priori unions of the coalition structure and second, presenting links among players within each a priori union. We consider cooperation structures presented by combinations of graphs of different types – general undirected graphs, cycle-free graphs, line-graphs with linearly ordered players. Our main approach to the value is close to that of both Myerson [6] and Aumann and Dréze [2]: it is based on ideas of component efficiency and fairness adopted to graph situations under scrutiny, and it treats an a priori union as a self-contained unit. Moreover, to link both communication levels between a priori unions and within a priori unions we incorporate also the idea of the intermediate game property of the Owen value [7]. Our approach combines models of Myerson, Aumann-Dréze, and Owen, and is strongly influenced by works of Brink, Laan, and Vasil'ev [3] over solutions for line-graph games and of Herings, Laan, and Talman [5] introducing the average tree solution for cycle-free graph games as well. We introduce the new values axiomatically and show that they possess the explicit formula representation that in many cases lead to quite simple computational algorithms. We investigate the core property and the distribution of the Harsanyi dividends. We show that the problem of sharing a river among multiple users without international firms can be embedded into the framework of the introduced model.

### References

1. *Ambec S., Sprumont Y.* Sharing a river // *Journal of Economic Theory*, 2002. Vol. 107. P. 453–462.
2. *Aumann R.J., Dréze J.* Cooperative games with coalitional structures // *International Journal of Game Theory*, 1975. 4. P. 217–237.
3. *Brink R. van den, van der Laan G., Vasil'ev V.* Component efficient solutions in line-graph games with applications // forthcoming in *Economic Theory*.
4. *Harsanyi J.C.* A bargaining model for cooperative  $n$ -person games // In: *Contributions to the theory of games IV*, Tucker A.W., Luce R.D. eds. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1959. P. 325–355.
5. *Herings P.J.J., van der Laan G. Talman A.J.J.* The average tree solution for cycle-free graph games // CentER Discussion paper 2005–126, CentER, Tilburg University, Tilburg, 2005. (Forthcoming in *Games and Economic Behavior*.)

---

\*The research was supported by NWO (The Netherlands Organization for Scientific Research) grant NL-RF 047.017.017.

6. *Myerson R.B.* Graphs and cooperation in games // Mathematics of Operations Research, 1977. №2. P. 225–229.
7. *Owen G.* Values of games with a priori unions // In: Essays in mathematical economics and game theory, Henn R., Moeschlin O. eds. Berlin: Springer-Verlag, 1977. P. 76–88.
8. *Shapley L.S.* A value for  $n$ -person games // In: Contributions to the theory of games II, Tucker A.W., Kuhn H.W. eds. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1953. P. 307–317.
9. *Vazquez-Brage, M., Garcia-Jurado I., Carreras F.* The Owen value applied to games with graph-restricted communication // Games and Economic Behavior. 1996. Vol. 12. P. 42–53.
10. *Winter E.* A value for games with level structures // International Journal of Game Theory. 1989. Vol. 18. P. 227–242.

# DECISION MAKING IN THE COUNCIL OF MINISTERS OF THE EU: A FORMAL ANALYSIS\*

S. Weber<sup>1</sup>, H. Wiesmeth<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Southern Methodist University, Department of Economics, Dallas, USA; sweber@smu.edu*

<sup>2</sup> *HHL - Leipzig Graduate School of Management, Leipzig, Germany; wiesmeth@hhl.de*

Decision-Making in the Council of Ministers of the European Union according to the Treaty of Nice and according to the draft of the Constitution is characterized by complex schemes of qualified majority voting.

In the paper we consider certain structural properties of these voting rules. In particular we are interested in the allocation of the voting power, if measured by the Shapley Value. Then we asked the questions: to what extent is voting power dependent on the shares of population and votes? Are there general advantages for some member states? Is it possible to find stable solutions, which cannot be changed according to the rules given? What is happening regarding the voting power, if we allow the formation of coalitions?

## References

1. *Weber S., Wiesmeth H.* Entscheidungsfindung im Ministerrat der EU: Eine formale Analyse der Abstimmungsverfahren. Sächsische Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Sitzungsberichte Band 2, Heft 2, 2006.

---

\*The authors were supported by the Alexander von Humboldt Foundation.

---

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**  
**THEORETICAL PHYSICS**

---

**РЕАКЦИЯ  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-\pi^-$  ПРИ ЭНЕРГИИ  
ПУЧКОВ ДО 1 ГЭВ\***

**Н. Н. Ачасов<sup>1</sup>, А. А. Кожевников<sup>2</sup>**

*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;*

<sup>1</sup> *achasov@math.nsc.ru*, <sup>2</sup> *kozhev@math.nsc.ru*

Показано, что в киральной теории, построенной на нелинейной сигма модели, реакция  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-\pi^-$  при энергии пучков до 1 ГэВ может быть объяснена, только если вклад  $\rho'(1400)$  доминирует при энергии пучков около 1 ГэВ.

---

\*Работа частично поддержана Президентским грантом № NSh-5362.2006.2 для ведущих научных школ и грантом РФФИ № 07-02-00093.

## ПРИЧИННОСТЬ. ИНТЕГРАЛ НАЛОЖЕНИЯ. ТЕКУЩИЕ СПЕКТРЫ

И. И. Орлов<sup>1</sup>, Н. В. Ильин<sup>2</sup>

*Институт солнечно-земной физики ВСФ СО РАН, Иркутск;*

<sup>1</sup> *orlov@iszf.irk.ru*, <sup>2</sup> *ilyin@iszf.irk.ru*

Линейные системы (в широком смысле) весьма распространены в физике. С математической точки зрения такие системы, обычно, описываются различного рода линейными уравнениями, решения которых зависят от пространственно-временных переменных. При этом временная переменная играет явно выделенную роль, характеризуя эволюцию системы, или ее свойств, во времени. С этой переменной тесно связан важнейший физический принцип — принцип причинности. Обсуждению некоторых вопросов, связанных с этими свойствами линейных систем, и посвящена данная работа.

Простейшими примерами линейных систем, например, служат стационарные линейные четырехполюсники, осуществляющие преобразование входных сигналов в выходные сигналы. С тем чтобы конкретизировать рассматриваемый далее тип линейных систем будем использовать терминологию теории линейных цепей, и, следовательно, обсуждать свойства соответствующих четырехполюсников. Сделанные же выводы будут иметь более общее для физики значение.

Известно, что для стационарных, линейных четырехполюсников имеет место основное соотношение — интеграл наложения, или интеграл Дюамеля, обычно, записываемый в виде

$$u_p(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau)u(\tau)d\tau. \quad (1)$$

Эта общая для физики формула основана на трех принципах: стационарности, линейности и причинности. При этом именно причинность ответственна за то, что импульсный отклик  $h(\tau)$  отличен от нуля только при  $\tau > 0$ . Обычно, при анализе линейных цепей вместо временного описания используется частотный язык, переход к которому осуществляется с помощью преобразований Фурье.

Если воспользоваться представлением импульсного отклика в виде

$$h(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (2)$$

то из (1) следует представление

$$u_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)U(t, \omega)d\omega, \quad (3)$$

где использовано обозначение

$$U(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^t e^{i\omega(t-\tau)}u(\tau)d\tau, \quad (4)$$

Функция  $U(t, \omega)$  может быть названа текущим спектром. Впервые это понятие, с точностью до множителя  $\exp(i\omega t)$ , по определению было введено С. М. Рытовым [1]. В использованном же подходе оно является следствием преобразований интеграла наложения (1).

Важное свойство определения текущего спектра в форме (4) заключается в том, что эта функция, будучи аналитична в верхней полуплоскости  $\omega$ , допускает выход в верхнюю полуплоскость

по частотной переменной. Заметим, что с физической точки зрения использование текущего спектра правомерно, в то время как использование обычного спектра является физически не реализуемой операцией, ввиду использования операции интегрирования по всей временной оси. Последовательное использование такого перехода к частотному описанию требует пересмотра всех соотношений, используемых во многих разделах физики.

Если перейти в формуле (3) к текущему спектру выходного сигнала, то можно получить формулу

$$U_p(t, \omega) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau)U(\tau, \omega)d\tau, \quad (5)$$

что означает один и тот же закон преобразования текущих спектров во временной области. Формула (5), точнее описанный переход к частотному описанию интеграла наложения, дает указывает на существенное отличие от известного соотношения теории линейных цепей, когда спектральная функция на выходе четырехполюсника представляется в виде произведения его передаточной функции на спектральную функцию входного сигнала. В принципе, такое возможно лишь при условии финитности входного сигнала и финитности импульсного отклика, что для реальных физических систем обычно не имеет места.

В соответствии с обычными канонами, наряду с введением текущего спектра, желательно иметь обратное преобразование, позволяющее по текущему спектру восстанавливать сам сигнал. Если проделать стандартные преобразования, то после не сложных преобразований можно показать, что обратное преобразование дается следующим соотношением ( $\omega = \omega + i\alpha$ ,  $\alpha > 0$ )

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\omega - i\omega x}U(t, \omega + i\alpha)d\omega = \vartheta(t - x)u(t - x), \quad (6)$$

где  $\vartheta(x) = 0$  при  $x < 0$ , которое указывает на обратимость использованных преобразований.

Приведенное определение текущего спектра и соотношения с ним связанные далеко не исчерпывают всех аналитических преобразований, возникающих при исследовании динамики линейных систем с использованием частотного описания. Более того, можно сделать далеко идущий вывод о том, что при переходе к частотному описанию физических явлений следует использовать именно текущие спектры, а не обычные спектральные функции, ввиду не физичности применения преобразований Фурье, связанных с интегрированием по всей временной оси. Такая точка зрения не нова [2], но она пока систематически не используется.

Кроме того, можно подчеркнуть, что вообще временная ось по ее физическим свойствам принципиально отличается от пространственных переменных и не может выступать равноправно с последними. Точнее можно заключить, что пространство-время следует описывать как многообразие с краем и в силу этого все преобразования, “запутывающие” пространственные и временные переменные, нельзя считать физически правомерными. Как это и неприятно, но они могут рассматриваться только как чисто математические преобразования в математических моделях, без апеллирования к физической значимости такого рода действий.

### Литература

1. Рытов С. М. О некоторых “парадоксах”, связанных со спектральным разложением // УФН. 1946. Т. 29, вып. 1–2. С. 147.
2. Харкевич А. А. Спектры и анализ. М.: ГИФМЛ, 1962. 236 с.



# О СВЯЗИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ ПО ПОПЕРЕЧНОМУ ИМПУЛЬСУ И ПРОСТРАНСТВЕННОМУ ПАРАМЕТРУ ВЫЛЕТА ДЕТЕКТИРУЕМОЙ ЧАСТИЦЫ

М. Поляков<sup>1</sup>, А. Н. Валл<sup>2</sup>, А. А. Владимиров<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Institut für Theoretische Physik II, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, Germany*

<sup>2</sup> *Отдел теоретической физики, Иркутский государственный университет, Иркутск*

<sup>3</sup> *Объединенный институт ядерных исследований, Дубна*

В рамках формализма алгебры  $SO_\mu(2.1)$  получена и проанализирована связь между дифференциальным сечением рождения частицы  $C$  по поперечному импульсу и дифференциальным сечением по пространственному параметру  $\vec{b}$ , характеризующему координаты области рождения частицы  $C$ . Это распределение тесно связано с пространственной структурой взаимодействующих частиц и допускает наглядную физическую интерпретацию. Показано, что при рассеянии в заднюю полусферу, область больших поперечных импульсов дает основной вклад в функцию распределения по  $b$  в интервале  $1/2 \leq bq \sim 1$ , где  $q$  - импульс частицы  $C$ . Левая граница неравенства определяется соотношением неопределенности Гейзенберга по переменным "импульс-радиус области локализации". Пространственная структура области рождения в плоскости перпендикулярного импульса представляет собой набор дискретных аксиально-симметричных (для безспиновых частиц  $C$ ) зон. На примере модели со степенным падением формфактора при больших передачах импульса, показано, что число зон совпадает с числом конститuentов мишени. Полученная связь между сечениями по  $\vec{q}_\perp$  и  $\vec{b}$  является точной и не связана с определенной моделью, поэтому возникает возможность анализировать пространственную структуру мишени на основе экспериментальных данных по угловым распределениям частицы  $C$ . В качестве приложения рассмотрен процесс  $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$  при энергии фотона  $E_\gamma = 5$  ГэВ.

## ОБРАЗОВАНИЕ ЛЕПТОННЫХ ПАР В СОУДАРЕНИЯХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЯДЕР

В. Г. Сербо

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск;  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск;  
serbo@math.nsc.ru*

В настоящее время работает ускоритель со встречными пучками релятивистских ядер золота RHIC в Брукхэвене и вскоре начнёт работать ускоритель со встречными пучками ядер свинца LHC в ЦЕРН.

Процессы образования лептонных ( $e^+e^-$  и  $\mu^+\mu^-$ ) пар на этих ускорителях представляют существенный интерес. Поскольку сечение образования  $e^+e^-$  пар огромно и превосходит чисто адронные сечения в десятки тысяч раз, такой процесс может быть серьёзным фоном для целого ряда экспериментов. Кроме того, образование  $e^+e^-$  пар оказалось одним из главных процессов, определяющих время жизни пучка релятивистских ядер и светимость названных ускорителей.

Это означает, что важно и актуально изучение различных поправок к образованию одной лептонной пары, так же как и расчёты сечений образования нескольких лептонных пар. Так как параметр теории возмущений  $Z\alpha$  оказывается порядка единицы ( $Z\alpha \approx 0.6$  для ядер золота и свинца), приходится суммировать весь ряд по степеням ( $Z\alpha$ ), чтобы получить результат с требуемой точностью.

По этому вопросу в текущей литературе имеется много противоречивых и неправильных утверждений. Представленный доклад содержит обзор главных результатов в этой области, полученных, в основном, в работах новосибирской группы.

## ДЕМОН МАКСВЕЛЛА В ЗАЗЕРКАЛЬЕ\*

**З. К. Силагадзе**

*Институт ядерной физики им. Г. И. Буджера СО РАН, Новосибирск;  
Новосибирский государственный университет, Новосибирск;  
silagadze@inp.nsk.su*

Механические демоны Максвелла, такие как клапан Смолуховского и собачка и храповик Фейнмана, требуют для своей работы внешний источник энергии. Без внешнего питания второй закон термодинамики быстро положит конец работе демона. Но если природа обладает лево-правой симметрией, может оказаться что небольшая модификация этих устройств приведет к демонам, которые не требуют внешнего источника энергии для своей работы. Внешне такие демоны могут действовать как вечные двигатели второго рода: извлекать энергию из одного теплового резервуара, использовать эту энергию для совершения работы и оставаясь при этом изолированным от остального обычного мира. Тем не менее второй закон термодинамики не нарушается, так как демоны платят свою энтропийную цену в скрытом (в зеркальном) секторе вселенной, излучая зеркальные фотоны.

### Литература

1. *Silagadze Z. K.* Maxwell's demon through the looking glass // Acta Physica Polonica. 2007. Vol. B38, pp. 101–126.

---

\*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 06-02-16192-а).

**LIGHT SCALAR MESONS TODAY\*****N. N. Achasov***Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk; achasov@math.nsc.ru*

The following topics are considered.

1. Confinement, chiral dynamics, and light scalar mesons.
2. Chiral shielding. The  $\sigma(600)$  meson in the  $SU_L(2) \times SU_R(2)$  linear  $\sigma$  model.
3. Properties of the light scalar mesons face the experimental data on the  $\phi \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$  decay and the  $\pi\pi$  scattering.
4. The  $\phi$  meson radiative decays about nature of light scalar resonances.
5. The  $J/\psi$  decays about nature of light scalar resonances.
6. On the inclusive  $Z \rightarrow a_0(980)X$  and  $Z \rightarrow f_0(980)X$  production.
7. The  $a_0(980) \rightarrow \gamma\gamma$  and  $f_0(980) \rightarrow \gamma\gamma$  decays about nature of light scalar resonances.
8. New round in  $\gamma\gamma \rightarrow \pi^+\pi^-$ , the Belle data.
9. The  $a_0(980) - f_0(980)$  mixing: theory and experiment.

Arguments in favor of the four-quark model of the  $a_0(980)$  and  $f_0(980)$  mesons are given.

---

\*The work was supported in part by the Presidential Grant No. NSh-5362.2006.2 for Leading Scientific Schools and by the RFFI Grant No. 07-02-00093 from Russian Foundation for Basic Research.

# LIGHT SCALAR MESONS IN THE EXPERIMENTAL DATA ON THE $\phi \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$ DECAY AND THE $\pi\pi$ SCATTERING\*

N. N. Achasov<sup>1</sup>, A. V. Kiselev<sup>2</sup>

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*

<sup>1</sup> *achasov@math.nsc.ru*, <sup>2</sup> *kiselev@math.nsc.ru*

We show the results of the simultaneous analysis of the KLOE detector data on the  $\phi \rightarrow \pi^0 \pi^0 \gamma$  decay and the data on the  $\pi\pi$  scattering and the  $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$  reaction. The description is done taking into account the chiral shielding of the  $\sigma(600)$  meson and witnesses in favor of the four-quark nature of the  $\sigma(600)$  and  $f_0(980)$  mesons.

---

\*This work was supported in part by the Presidential Grant No. 5362.2006.2 for support of Leading Scientific Schools, Russian Foundation for Basic Research, project No. 07-02-00093, and the Dynasty Foundation.

# LIGHTEST SCALAR IN THE $SU_L(2) \times SU_R(2)$ LINEAR $\sigma$ MODEL\*

N. N. Achasov<sup>1</sup>, G. N. Shestakov<sup>2</sup>

*Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia;*

<sup>1</sup> *achasov@math.nsc.ru,* <sup>2</sup> *shestako@math.nsc.ru*

We consider the lightest scalar meson in the frame of the  $SU_L(2) \times SU_R(2)$  linear  $\sigma$  model, keeping in mind that this model could be the low energy realization of the two-flavour QCD. We show that the  $\sigma$  field is described by its four-quark component at least in the  $\sigma$  resonance energy (virtuality) region and the  $\sigma \rightarrow \gamma\gamma$  decay is the four quark transition. We emphasize that residues of the  $\sigma$  pole in the  $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$  and  $\gamma\gamma \rightarrow \pi\pi$  amplitudes do not give an idea about the  $\sigma$  meson nature, and the progress in studying the  $\sigma$  meson production mechanisms in different processes could essentially further us in understanding its nature.

---

\*This work was supported in part by the Presidential Grant No. NSh-5362.2006.2 for Leading Scientific Schools and by the RFFI Grant No. 07-02-00093 from Russian Foundation for Basic Research.

# DISPERSION REPRESENTATIONS FOR HARD EXCLUSIVE REACTIONS\*

M. Diehl<sup>1</sup>, D. Yu. Ivanov<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Theory Group, Deutsches Elektronen-Synchrotron DESY, Hamburg, Germany; mdiehl@mail.desy.de*

<sup>2</sup> *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia; d-ivanov@math.nsc.ru*

Several hard exclusive scattering processes admit a description in terms of generalized parton distributions (GPDs) and perturbative hard-scattering kernels, for the review see [1]. Lorentz invariance implies that the Mellin moments of generalized parton distributions are polynomials in the skewness variable  $\xi$  with a maximal power depending on the quantum numbers of the distribution. This property directly follows from the Lorentz covariance of the operator matrix elements which are parameterized by GPDs [2].

Both the physical amplitude and the hard-scattering kernels fulfill dispersion relations. Dispersion relations play an important role in the description of exclusive processes, relating the real and imaginary parts of the amplitude. We give a detailed investigation of their consistency at all orders in perturbation theory. We have shown, generalizing the leading-order results derived in [3], that GPDs have to satisfy the following integral relations

$$\int_{-1}^1 dx F(x, \xi) \left[ \frac{1}{\omega\xi - x} - \sigma \frac{1}{\omega\xi + x} \right] = \int_{-1}^1 dx F\left(x, \frac{x}{\omega}\right) \left[ \frac{1}{\omega\xi - x} - \sigma \frac{1}{\omega\xi + x} \right] + \mathcal{I}(\omega) \quad (1)$$

for  $\sigma = \pm 1$  and any  $\omega \geq 1$ , where  $F$  is one of the distributions. In eq. (1) Cauchy’s principal value prescription is to be used at  $x = \pm\omega\xi$ . The only cases where  $\mathcal{I}(\omega)$  is nonzero occur for unpolarized distributions and  $\sigma = +1$ , it is related with the contribution of spin zero exchange in these channels.

These results shed light on the information about generalized parton distributions that can be extracted from the real and imaginary parts of exclusive amplitudes. They also provide a practical consistency check for models of these distributions in which Lorentz invariance is not exactly satisfied.

## References

1. *Diehl M.* Generalized parton distributions // *Phys. Rept.* 2003. V. 388. P. 41–277.
2. *Ji X. D.* Off-forward parton distributions // *J. Phys. G.* 1998. V. 24. P. 1181–1205.
3. *Anikin I. V. and Teryaev O. V.* Dispersion relations and subtractions in hard exclusive processes. Preprint. arXiv:0704.2185 [hep-ph].

---

\*D. Yu. Ivanov was supported by the Russian Foundation for Basic Research (no. 06–02–16064).

# STATUS OF THE MUON ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT\*

S. I. Eidelman

*Budker Institute of Nuclear Physics SB RAS, Novosibirsk; eidelman@inp.nsk.su*

Magnetic moments of elementary particles are among the most precisely measured quantities in modern physics. Recently the E821 Collaboration at BNL published the final results on the muon anomalous magnetic moment  $a_\mu = (g - 2)_\mu/2$  [1]. The relative accuracy achieved in this experiment is  $5 \cdot 10^{-7}$ :  $a_\mu = (11659208 \pm 6) \cdot 10^{-10}$ . Although  $a_e$  is measured with a  $4.9 \cdot 10^{-10}$  accuracy,  $a_\mu$  is much more sensitive to new physics effects: the gain is usually  $\sim (m_\mu/m_e)^2 \approx 4.3 \cdot 10^4$ .

Any significant difference of  $a_\mu^{\text{exp}}$  from  $a_\mu^{\text{th}}$  indicates new physics beyond the Standard Model (SM). It is conventional to express the theoretical prediction as

$$a_\mu^{\text{th}} = a_\mu^{\text{SM}} + a_\mu^{\text{non-SM}}, \quad a_\mu^{\text{SM}} = a_\mu^{\text{QED}} + a_\mu^{\text{EW}} + a_\mu^{\text{had}}. \quad (1)$$

For the quantum electrodynamics (QED) term the analytical calculation of the  $\alpha^3$  terms, the numerical calculation of the  $\alpha^4$  terms and estimation of some of the  $\alpha^5$  terms gives after recent improvements [2]:  $a_\mu^{\text{QED}} = (116584718.09 \pm 0.14 \pm 0.08) \cdot 10^{-11}$ , where the first uncertainty is due to the QED coefficients and the second is caused by the accuracy of  $\alpha$ . For the electroweak (EW) term the most recent estimation including all one- and two-loop terms as well as part of three-loop terms gives [3]:  $a_\mu^{\text{EW}} = (15.4 \pm 0.1 \pm 0.2) \cdot 10^{-10}$ . Here the first error is caused by the hadronic loop uncertainties and the second by the allowed range of the Higgs mass.

The hadronic contribution can also be written as a sum of three terms:

$$a_\mu^{\text{had}} = a_\mu^{\text{had,LO}} + a_\mu^{\text{had,HO}} + a_\mu^{\text{had,LBL}}. \quad (2)$$

The dominant contribution comes from the first, leading order term. Although this term can't be calculated from first principles, one obtains from dispersion relations:

$$a_\mu^{\text{had,LO}} = \left(\frac{\alpha m_\mu}{3\pi}\right)^2 \int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds \frac{R(s) \hat{K}(s)}{s^2}, \quad (3)$$

where  $R(s) = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ , and the kernel  $\hat{K}(s)$  grows from 0.63 at  $s = 4m_\pi^2$  to 1 at  $s \rightarrow \infty$ . The factor  $1/s^2$  emphasizes the role of low energies, particularly important is the reaction  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  with a large cross section below 1 GeV. As a result, 73% of the central value comes from this channel and more than 92% comes from the energy region below 2 GeV.

Recent high precision measurements of various hadronic cross sections performed with two detectors CMD-2 [4] and SND [5] at the VEPP-2M collider significantly improved the accuracy with which the quantity  $R(s)$  can be determined. Particularly impressive is the progress in the precise measurements of the cross section of the process  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ .

The calculation of the dispersion integral in Eq.(3) above gives the new value of the hadronic contribution to  $a_\mu$ :  $(690.9 \pm 3.9 \pm 1.9 \pm 0.7) \cdot 10^{-10}$ , where the first error is experimental, the second is due to the radiative corrections and the third is theoretical. Taking the hadronic term due to the higher order corrections from [6] and the hadronic light-by-light term from [7] and summing all the terms, we obtain the new theoretical prediction for the value of the anomalous magnetic moment,  $(11659180.5 \pm 5.6) \cdot 10^{-10}$ . One can see that  $a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{th}} = (27.5 \pm 8.4) \cdot 10^{-10}$ , which is  $3.3\sigma$  below the experimentally measured one.

One can try to improve the accuracy by using the data on the  $\tau$  lepton, however, at the moment they disagree with those from  $e^+e^-$  if conservation of vector current (CVC) is additionally applied [8]. Further progress in the field can be related to the new measurements of hadronic cross sections of

---

\*The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (no. 06-02-04018 and no. 06-02-16156) and by the grant DFG GZ: 436 RUS 113/769/0-2.



$e^+e^-$  annihilation as well as solving the existing problem with the application of CVC to the data on the  $\tau$  lepton.

The author is grateful to N.N. Achasov for the kind invitation to present this talk. This work would be impossible without extraordinary efforts of the staff of VEPP-2M, CMD-2 and SND collaborations. I'm indebted to my collaborators M. Davier, A. Höcker, F. Jegerlehner and M. Passera for numerous discussions and fruitful work together.

### References

1. *Bennett G. W. et al.* Final Report of the Muon E821 Anomalous Magnetic Moment Measurement at BNL // Phys. Rev. D, 2006, vol. 73, p. 072003.
2. *Passera M.* Electron, Muon and Tau Magnetic Moments // 2007, hep-ph/0702027.
3. *Czarnecki A., Marciano W. J.* Refinements in Electroweak Contributions to the Muon Anomalous Magnetic Moment // Phys. Rev. D, 2003, vol. 67, p. 073006.
4. *Akmetshin R. R. et al.* High-Statistics Measurement of the Pion Form Factor in the  $\rho$  Meson Energy Region with the CMD-2 Detector // Phys. Lett. B, 2007, vol. 648, p. 28.
5. *Achasov M. N. et al.* Update of the  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  Cross Section Measured by SND Detector in the Energy Region  $400 \text{ MeV} < \sqrt{s} < 1000 \text{ MeV}$  // J. Exp. Theor. Phys., 2006, vol. 103, p. 380.
6. *Hagiwara K. et al.* Predictions for  $g - 2$  of the Muon and  $\alpha(QED)(M_Z^2)$  // Phys. Rev. D, 2004, vol. 69, p. 093003.
7. *Davier M. and Marciano W. J.* The theoretical prediction for the Muon Anomalous Magnetic Moment // Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 2004, vol. 54, p. 115.
8. *Davier M. et al.* Updated Estimate of the Muon Magnetic Moment Using Revised Results from  $e^+e^-$  Annihilation // Eur. Phys. J. C, 2003, vol. 31, p. 531.

## SCALAR MESON PUZZLE IN QCD

**A. H. Fariborz<sup>1</sup>, R. Jora<sup>2</sup>, J. Schechter<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> *SUNY Institute of Technology, Utica, NY 13504 USA; fariboa@sunyit.edu*

<sup>2</sup> *Syracuse University, Syracuse, NY 13244-1130 USA; cjora@phy.syr.edu*

<sup>3</sup> *Syracuse University, Syracuse, NY 13244-1130 USA; schechte@phy.syr.edu*

First, a brief survey of recent results on the puzzling scalar meson spectrum will be presented. Understanding these features may provide important clues to eventually solving QCD in its highly non-perturbative low energy regime. A model which gives an interesting physical picture of mixing between quark-antiquark scalars and possible scalars which contain two quarks and two antiquarks will be discussed in some detail.

## AUTHOR INDEX

---

### ALGEBRA AND MATHEMATICAL LOGIC

---

Alaev P. E. ....	19	Potapov V. N. ....	36
Aleev R. Ž. ....	20	Revin D. O. ....	37
Amaglobeli M. G. ....	21	Rimatsky V. V. ....	38
Buturlakin A. A. ....	22	Rukhaia Kh. M. ....	39
Churkin V. A. ....	43	Schreiner P. A. ....	44
Eshkeev A. R. ....	28	Sokolov V. V. ....	20
Grechkoseeva M. A. ....	26	Sudoplatov S. V. ....	41
Karpenko A. V. ....	33	Tibua L. M. ....	39
Kaygorodov I. B. ....	32	Vasil'ev A. V. ....	23
Korobov A. A. ....	35	Vdovin E. P. ....	25
Krotov D. S. ....	36	Zeevald O. V. ....	30

---

### GEOMETRY, TOPOLOGY, AND MATHEMATICAL ANALYSIS

---

Abrosimov N. V. ....	113	Nikolaev D. O. ....	80
Akishev G. A. ....	46	Nikolaev I. G. ....	127
Aubry J.-M. ....	115	Omel'chenko A. V. ....	49
Berdinskii D. A. ....	48	Ovchinnikov M. A. ....	82
Bogdanov A. A. ....	49	Panov T. E. ....	84
Chueshev V. V. ....	116	Panteleev V. P. ....	85
Egorov A. A. ....	63	Parfenov A. I. ....	129
Egorov D. V. ....	65	Petrov M. I. ....	49
Fominykh E. A. ....	108	Plotnikova E. A. ....	87
Gichev V. M. ....	55	Prokopenko E. V. ....	88
Greshnov A. V. ....	57	Pupyshev I. M. ....	71
Gundyrev I. A. ....	59	Püttmann T. ....	131
Gutman A. E. ....	61	Repovš D. ....	132
Isangulova D. V. ....	117	Rodionov E. D. ....	90
Kachurovskii A. G. ....	68	Romanov A. S. ....	92
Karmanova M. ....	118	Sbrodova E. A. ....	94
Katsunova A. S. ....	66	Sergeeva O. A. ....	98
Klimenko E. Ya. ....	120	Sgibnev M. S. ....	96
Koptev A. V. ....	61	Shatnykh O. N. ....	109
Kopteva N. V. ....	120	Skurikhin E. E. ....	100
Kopylov Ya. A. ....	122	Slavolyubova Ya. V. ....	102
Korablëv F. G. ....	70	Slavskii V. V. ....	90
Korobkov M. V. ....	123	Smailov E. S. ....	104
Korol'ko A. E. ....	71	Sychëv A. V. ....	105
Kussainova L. ....	124	Tarkaev V. V. ....	106
Kutateladze S. S. ....	125	Tropp E. A. ....	49
Lazareva E. G. ....	73	Vesnina A. Yu. ....	50
Matveev S. V. ....	75	Vodop'yanov S. K. ....	51
Meshkov V. R. ....	49	Voronin A. F. ....	53
Nikitina T. N. ....	77	Yakovlev A. A. ....	111

---

**DIFFERENTIAL EQUATIONS AND MATHEMATICAL PHYSICS**


---

Anikonov D. S. ....	133	Kostrigina O. S. ....	160
Arbuzov E. V. ....	135	Kozhanov A. I. ....	168, 170
Belgart L. V. ....	179	Krasnik A. V. ....	173
Blokhin A. M. ....	137	Lomov A. A. ....	175
Bogovskii M. E. ....	139	Lyulko N. A. ....	199
Bondar L. N. ....	141	Matveeva I. I. ....	151, 152
Bukhgeim A. L. ....	135	Mendziv M. V. ....	181
Bushmanov R. S. ....	143	Neshchadim M. V. ....	176
Chuesheva N. A. ....	195	Pyatkov S. G. ....	177
Chumakov G. A. ....	197	Romanovskii R. K. ....	179, 181
Chumakova N. A. ....	197	Rylov A. I. ....	183
Demidenko G. V. ....	151, 152	Safonova T. A. ....	154
Denisova T. E. ....	190	Sazhenkov S. A. ....	185
Egorov I. E. ....	154	Skazka V. V. ....	186
Gaidov Yu. A. ....	146	Tkachev D. L. ....	137
Glazatov S. N. ....	148	Trakhinin Yu. L. ....	188
Golubyatnikov V. P. ....	146	Uspenskii S. V. ....	190
Gordienko V. M. ....	149	Vasil'eva E. N. ....	190
Imomnazarov Kh. Kh. ....	165	Volokitin E. P. ....	145
Kabanikhin S. I. ....	166	Yegorshin A. O. ....	155, 157
Khripton M. D. ....	193	Zagreбина S. A. ....	164
Klevtsova Yu. Yu. ....	152	Zhiber A. V. ....	160
Koltunovskii O. A. ....	171	Zhukova O. G. ....	162
Kononenko L. I. ....	172		

---

**PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS**


---

Kovalevskii A. P. ....	201	Sakhanenko A. I. ....	203
Linke Yu. Yu. ....	203	Savishchenko N. V. ....	209
Lotov V. I. ....	205	Topchii V. A. ....	212
Mogulskii A. A. ....	206	Utev S. ....	214
Nasyrov F. S. ....	208		

---

**COMPUTATIONAL MATHEMATICS  
AND MATHEMATICAL MODELING**


---

Belykh V. N. ....	215	Gunbin K. V. ....	245
Biberdorf E. A. ....	217	Imomnazarov Kh. Kh. ....	225
Bogdanov V. V. ....	219	Ivanov M. S. ....	228
Chervonnaya E. A. ....	239	Khotyanovsky D. V. ....	228
Chupakhin A. P. ....	247	Kirillov V. A. ....	246
Esharov E. A. ....	248	Kogay V. V. ....	245
Fadeev S. I. ....	231, 244, 245, 246	Korolev V. K. ....	244
Gaidomak S. V. ....	223	Kudryavtsev A. N. ....	228
Gainova I. A. ....	244	Kuzin N. A. ....	246

Kvasov B. I. ....	230	Rogalyov A. N. ....	241
Likhoshvai V. A. ....	231	Shigarov A. B. ....	246
Loshmanov A. Yu. ....	232	Shumilov B. M. ....	248
Lutsenko N. A. ....	234	Skorospelov V. A. ....	243
Medvedev A. E. ....	244	Slavina L. B. ....	237
Mironova V. V. ....	231	Trotsyuk A. V. ....	228
Miroshnichenko V. L. ....	236	Turuk P. A. ....	243
Omelianchuk N. A. ....	231	Vaskevich V. L. ....	220
Pivovarova N. B. ....	237	Volkov Yu. S. ....	222
Poddubny V. V. ....	239	Zadorin A. I. ....	227
Popova N. I. ....	217	Zhapbasbay B. M. ....	225

---

## DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH

---

Ageev A. A. ....	250	Lutkov V. A. ....	274
Alekseeva E. V. ....	253	Malyugin S. A. ....	276
Borodina Yu. V. ....	254	Mel'nikov L. S. ....	264
Chemisova D. A. ....	295	Perezhogin A. L. ....	278
Chernykh I. D. ....	274	Puzynina S. A. ....	279
Dobrynin A. A. ....	264	Pyatkin A. V. ....	281
Erzin A. I. ....	266	Romanov A. M. ....	282
Fedoryaeva T. I. ....	290	Rudnev A. S. ....	284
Gimadi E. Kh. ....	259, 261, 262	Rychkov K. L. ....	285
Glazkov Yu. V. ....	261	Sevast'yanov S. V. ....	270
Kel'manov A. V. ....	268	Shakhshneider A. V. ....	262
Khamisov O. V. ....	291	Solov'eva F. I. ....	286
Khelemendik R. V. ....	293	Sviridenko M. I. ....	270
Kononov A. V. ....	270	Tokareva N. N. ....	288
Konstantinova E. V. ....	296	Vasil'eva A. Yu. ....	255
Le Gallou A. ....	262	Velikanova Yu. Yu. ....	257
Los' A. V. ....	272	Vizing V. G. ....	258

---

## GAME THEORY AND MATHEMATICAL ECONOMICS

---

Aliprantis C. D. ....	333	Kolemaev V. A. ....	308
Antsyz S. M. ....	298	Le Breton M. ....	335
Bulavsky V. A. ....	299	Lev G. S. ....	310
Bykadorov I. A. ....	334	Moretti E. ....	334
Dement'ev N. P. ....	305	Mukhacheva E. A. ....	311
Drèze J. ....	335	Orlova T. T. ....	313
Driessen T. S. H. ....	337	Orozbekov N. A. ....	314
Ellero A. ....	334	Petrov A. A. ....	316
Filippova A. S. ....	311	Pospelov I. G. ....	318
Florenzano M. ....	333	Rapoport E. O. ....	319
Frolov A. V. ....	310	Romanovskaya A. N. ....	321
Funari S. ....	334	Romanovsky J. V. ....	322
Kardash V. A. ....	306	Ryzhenkov A. V. ....	323
Khanin G. I. ....	328	Savvateev A. ....	335
Khmelnitskaya A. B. ....	338	Shestakova N. V. ....	299
Khokhlyuk V. I. ....	330	Shmyrev V. I. ....	331

Sidorov A. V. ....	325	Vasil'ev V. A. ....	303
Sirazetdinova T. Yu. ....	301	Virchenko M. I. ....	299
Tourky R. ....	333	Weber S. ....	335, 340
Trubacheva A. E. ....	326	Wiesmeth H. ....	340
Valeyeva A. F. ....	301		

---

**THEORETICAL PHYSICS**

---

Achasov N. N. ....	341, 347, 348, 349	Orlov I. I. ....	342
Diehl M. ....	350	Polyakov M. ....	344
Eidelman S. I. ....	351	Schechter J. ....	353
Fariborz A. H. ....	353	Serbo V. G. ....	345
Il'in N. V. ....	342	Shestakov G. N. ....	349
Ivanov D. Yu. ....	350	Silagadze Z. K. ....	346
Jora R. ....	353	Vall A. N. ....	344
Kiselev A. V. ....	348	Vladimirov A. A. ....	344
Kozhevnikov A. A. ....	341		

МАТЕМАТИКА В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ

Российская конференция, посвященная 50-летию  
Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

17–23 сентября 2007 г.

Тезисы докладов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН  
пр. Академика В. А. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090