МИНИМАЛЬНЫЕ РЕБЕРНЫЕ 1-РАСШИРЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ГРАФОВ

М. Б. Абросимов

Назовем граф $G_1 = (V_1, \alpha_1)$ реберным k-расширением графа $G = (V, \alpha)$, если граф G вкладывается в каждый подграф графа G_1, получающийся удалением любых его k ребер. Очевидно, что всякий граф имеет реберное k-расширение, например, полный граф с числом вершин на k большим.

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется минимальным реберным k-расширением (сокращенно, МР-kР) графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1) Граф G является реберным k-расширением;

2) $|V^*| = |V|$;

3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

Понятие k-расширения является общеграфовым аналогом введенного Харари и Хейзом в [1] понятия реберной k-отказоустойчивой реализации. Задача определения минимального реберного k-расширения графа в общем случае предположительно является NP полной, поэтому представляет интерес поиск классов графов, для которых можно аналитически определить вид минимальных реберных k-расширений. В данной работе рассматриваются вопросы связанные с наличием у неориентированных графов неизоморфных минимальных реберных 1-расширений (МР-1Р). Ранее аналогичные исследования были проведены для минимальных вершинных 1-расширений графов (см. [2]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Harary F., Hayes J. P. (1993) *Edge fault tolerance in graphs* // Networks. - Vol. 23. - P. 135-142.

2. Абросимов М. Б. (2000) *О неизоморфных оптимальных 1-отказоустойчивых реализациях некоторых графов* // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. - Саратов: СГУ, 2000. - Вып. 3. - С. 3-10.

Абросимов Михаил Борисович,
Саратовский Государственный Университет им. Н. Г. Чернышевского,
ул. Радищева, 18а, 71, Саратов, 410028, Россия, тел. (8-845-2) 22-44-72,
факс (8-845-2) 45-95-99, e-mail: mic@rambler.ru

ЦИКЛОВЫЕ И 2-ДИСТАНЦИОННЫЕ РАСКРАСКИ ПЛОСКИХ ГРАФОВ

О. В. Бородин, Х. Брусма, А. Н. Глебов, Я. ван ден Хойвел

Раскраска вершин плоского графа называется *цикловой*, если любые две вершины, инцидентные одной грани, окрашены в различные цвета. Наименьшее число цветов в цикловой раскраске плоского графа G называется его *цикловым хроматическим числом* и обозначается через $\chi^C(G)$. Раскраска вершин графа называется 2-*дистанционной*, если любые две вершины, находящиеся на расстоянии не более 2, окрашены в различные цвета. Ясно, что любая 2-дистанционная раскраска графа G является правильной раскраской графа G^2 и наоборот. Наименьшее число цветов в 2-дистанционной раскраске графа G называется его 2-*дистанционным хроматическим числом* и обозначается через $\chi_2(G)$.

Обычным подходом при изучении цикловых и 2-дистанционных раскрасок плоских графов является получение оценок для параметров χ^C и χ_2 с помощью величин Δ^* и Δ соответственно, где Δ^* обозначает максимальный ранг грани, а Δ — максимальную степень вершины в плоском графе. На этом пути были получены верхние оценки $\chi^C \leq \lceil\frac{5}{3}\Delta^*\rceil$ [2] и $\chi_2 \leq \lceil\frac{9}{5}\Delta\rceil + 1$ при $\Delta \geq 47$ [1] и построены примеры плоских графов, показывающие, что $\chi^C \geq \lfloor\frac{3}{2}\Delta^*\rfloor$ и $\chi_2 \geq \lfloor\frac{3}{2}\Delta\rfloor + 1$.

В настоящей работе доказаны верхние оценки для χ^C и χ_2 с использованием новых параметров k^* и k, определяемых соответственно как максимальное число вершин, инцидентных двум граням плоского графа, и максимальное число вершин, смежных с двумя вершинами графа. Полученные оценки имеют вид $\chi^C \leq \Delta^* + 3k^* + 2$ при $\Delta^* \geq 4$, $k^* \geq 4$, и $\chi_2 \leq \Delta + 3k + 20$ при $\Delta \geq 25$, $k \geq 5$. Заметим, что эти результаты при достаточно малых значениях k и k^* улучшают соответствующие оценки, в которых используются только величины Δ^* и Δ.

Авторами высказывается предположение о том, что $\chi^C \leq \Delta^* + k^*$ и $\chi_2 \leq \Delta + k + 1$ при достаточно больших значениях Δ, Δ^*, k и k^*.

Работа поддержана РФФИ (проекты 03-01-00796, 03-01-06214) и голландско-российской программой NWO (грант 047-008-006).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бородин О. В., Брусма Х., Глебов А. Н., Ван ден Хойвел Я. (2001) *Минимальные степени и хроматические числа квадратов плоских графов* // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 4. С. 9–33.
2. Sanders D. P., Zhao Y. (2001) *A new bound on the cyclic chromatic number* // J. Comb. Th. **83**, P. 102–111.

Бородин Олег Вениаминович, Глебов Алексей Николаевич,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383-2) 33-25-94,
факс (8-383-2) 33-25-98, e-mail: brdnoleg@math.nsc.ru, angle@math.nsc.ru

Hajo Broersma, University of Twente, Enschede, Netherlands,
e-mail: broersma@math.utwente.nl

Jan van den Heuvel, Centre for Discr. and Applicable Mathematics, Dep. of Mathematics, Londnon, School of Economics, Houghton Street, London WC2A 2AE, U. K.

ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ИНВАРИАНТОВ В ХИМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГРАФОВ

М. В. Видюк, Е. В. Константинова

Теория информации используется в различных областях знаний. В последние годы она интенсивно применяется в химической теории графов для описания химических структур и для поиска корреляций между физико–химическими и структурными свойствами соединений [1,2]. Построение и исследование топологических и информационных инвариантов, однозначно характеризующих топологию химического соединения, является одним из основных направлений химической теории графов [3]. В работе рассматриваются информационные и топологические инварианты, основанные на расстоянии в молекулярном графе, представляющим структурную формулу химического соединения. Чувствительность инвариантов исследуется на 3.490.538 деревьев и 1.443.032 "животных" (подграфов правильных шестиугольной, четырехугольной и треугольной решеток). Химические деревья, степень вершин которых не превышает 4, представляют структурные формулы алканов [4], а шестиугольные животные соответствуют графам планарных бензоидных углеводородов [5]. Для этих классов графов найдены наиболее чувствительные инварианты. Показана предпочтительность использования информационных инвариантов для характеризации молекулярных структур.

Работа поддержана грантом РФФИ 03-01-00796.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Bonchev, N. Trinajstic, (1982) *Chemical information theory. Structural aspects,* Intern. J. Quantum Chem. Symp. **16**, P. 463–480.

2. E. V. Konstantinova, V. A. Skorobogatov, M. V. Vidyuk, (2003) *Applications of information theory in chemical graph theory,* Indian Journal of Chemistry, **42**A, P. 1227–1240.

3. D. Bonchev, (1983) *Information theoretic indices for characterization of chemical structures,* Chichester: Research Studies Press.

4. N. Trinajstic, (1992) *Chemical graph theory*, CRC Press, Boca Raton, FL.

5. I. Gutman, S. J. Cyvin, (1989) *Introduction to the theory of benzenoid hydrocarbons*, Berlin: Springer-Verlag.

Видюк Максим Витальевич,
Институт ядерной физики им. А. М. Будкера СО РАН,
ул. Лаврентьева 11, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383-2) 39-43-36,
факс (8-383-2) 34-21-63, e-mail: : vidyuk@inp.nsk.su

Константинова Елена Валентиновна,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383-2) 33-25-94,
факс (8-383-2) 32-25-98, e-mail: e_konsta@math.nsc.ru

АЛГОРИТМЫ ЧИСЛОВОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ГРАФОВ СЛУЧАЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В. М. Демиденко

При оценке качества и надежности симметрических криптосистем с фиксированным ключом и псевдослучайных генераторов возникают задачи, связанные с числовой характеризацией графов случайных отображений [1], [2]. Согласно [3], к таким задачам относится нахождение числа компонент связности случайного графа, их размера, длин максимальных циклов и их лидеров, наибольшей из высот деревьев в каждой компоненте связности. Специфика реальных случайных графов, возникающих в криптологических приложениях (их большие размеры и полное отсутствие априорной информации об их структуре) не позволяет применять для решения задач характеризации достаточно хорошо развитый теоретико-графовый аппарат, что приводит к необходимости разработки новых алгоритмов решения указанных задач.

Один из таких алгоритмов был предложен Келлером [3] для характеризации графов случайных небиективных отображений, время выполнения которого равнялось $O\left(n^2\right)$ в худшем и $O\left(n\sqrt{n}\right)$ в среднем случаях, а требуемая для выполнения алгоритма память составляла $O(k)$, где k — число компонент связности, а n — число вершин случайного графа. Анализ алгоритма Келлера позволил выделить его две базовые процедуры, которые в процессе выполнения алгоритма последовательно применяются ко всем вершинам случайного графа. Первая из процедур позволяет полностью характеризовать циклы, т. е. при заданной начальной вершине вычислить длину цикла компоненты связности, содержащей эту вершину, и найти минимального лидера цикла. Вторая процедура определяет длину пути, ведущего из произвольной вершины графа к лидеру цикла.

Детальное исследование базовых процедур алгоритма Келлера позволило разработать на их основе две улучшенные версии, превосходящие по быстродействию исходные аналоги на $62,5\%$ и $85,7\%$ и требующие, соответственно, $O(\log_2 n)$ и $O(\log_2^2 n)$ бит памяти. Применение улучшенных процедур не требует изменения общей схемы алгоритма Келлера и позволяет получить его ускорение, соответствующее указанным выше величинам. Базовые процедуры алгоритма Келлера и их предложенные улучшенные версии представляют самостоятельный теоретический и практический интерес, так как помимо использования в алгоритмах характеризации графов случайных отображений, могут применяться для нахождения их коллизий.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. G. Chambers (1995) *On Random Mappings and Random Permutations.* Lecture Notes in Computer Science, Springer, **1008**, 22–28.
2. B. Schneier (1996) *Applied Cryptography.* New York, John Wiley & Sons, 2nd Edition.
3. J. Keller (2002) *Parallel Exploration of the Structure of Random Functions.* Proc. PASA'02, Karlsruhe, April, 233 – 236.

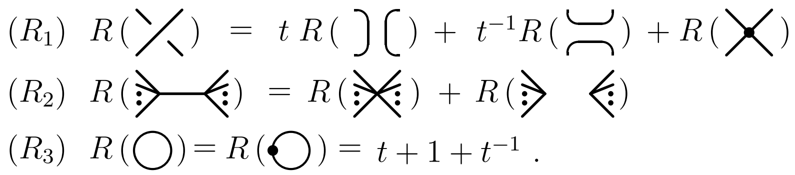
Демиденко Виталий Михайлович,
Институт математики НАН Беларуси,
ул. Сурганова 11, Минск, 220072, Беларусь,
тел.: (375-17) 284-17-62, факс: (375-17) 284-09-15,
e-mail: demidenko@im.bas-net.by

ON THE EQUIVALENCE OF TWO POLYNOMIALS OF SPATIAL GRAPHS

A. A. Dobrynin, A. Yu. Vesnin

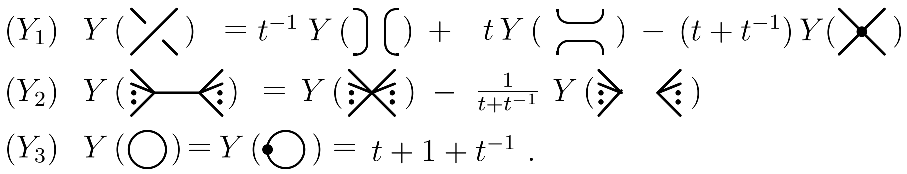
We consider *spatial* graphs, i. e. graphs which are piecewise linear embedded in $\mathbb{R}^3$. Spatial graphs G_1 and G_2 are said to be *equivalent* if they are ambient isotopic. Let $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ be a canonical projection. A regular projection $\pi(G)$ with over/under information at each crossing point is called a *diagram* of G and it is denoted by $g = g(G)$.

Two polynomial invariants of spatial graphs were introduced by Yamada in [1] and by Yoshinaga in [2]. The *Yamada polynomail* $R(g;t)$ of a diagram $g(G)$ is a Laurent polynomial defined by the following skein relations:



Here and below in skein relations we consider diagrams which have differences in one crossing only, and these differences are pictured in the skein relations.

The *Yoshinaga polynomail* $Y(g;t) \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ of a diagram $g(G)$ can be defined by the following skein relations:



We show that the following explicit relation between the considered polynomials holds.

Theorem. [3] *Let g be a diagram of a spatial graph with p vertices and q edges. Then*

$$Y(g;t) = (-t - t^{-1})^{p-q} R(g; t^{-1}) = (-t - t^{-1})^{p-q} R(g'; t),$$

where g' is a mirror image of g.

This research was supported by RFBR (grant 02-01-01118) and INTAS (grant 03-51-3663).

REFERENCES

1. S. Yamada (1989) *An invariant of spatial graphs.* J. Graph Theory **13**, 537-551.
2. S. Yoshinaga (1991) *An invariant of spatial graphs associated with $U_q(sl(2,C))$.* Kobe J. Math. **8**, 25–40.
3. A.A. Dobrynin, A.Yu. Vesnin (2004) *On the Yoshinaga polynomial of spatial graphs.* Kobe J. Math. **20** (to appear).

Dobrynin Andrey Alekseevich, Vesnin Andrey Yurievich,
Sobolev Institute of Mathematics, pr. Akademika Koptyuga 4, Novosibirsk, 630090, Russia, phone: (383-2) 33-25-94, fax: (383-2) 33-25-98,
e-mail: dobr@math.nsc.ru, vesnin@math.nsc.ru

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ НУМЕРАЦИИ ВЕРШИН ГРАФА

С. Д. Иванова

Рассматривается следующая задача оптимальной нумерации вершин графа с минимаксным критерием. Дан неориентированный граф $G = (V, E)$. Требуется пронумеровать вершины графа числами $1, 2, ..., |V|$ так, чтобы максимум модуля разности номеров смежных вершин был минимальным. Оптимальное значение целевой функции называется *шириной графа* G и обозначается $B(G)$.

Задача оптимальной нумерации является NP-трудной. В связи с приложениями представляют особый интерес варианты задачи на решеточных графах. Граф называется *решеточным*, если множество его вершин является подмножеством Z^2, и две вершины смежны тогда и только тогда, когда евклидово расстояние между ними равно единице. На решеточных графах задача также остается NP-трудной [2].

Для произвольного решеточного графа G определим граф $G(\alpha)$, полученный сдвигом графа G на вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in Z^2$. Обозначим через $G_{m,n}$ решеточный граф с множеством вершин $V = [1, m] \times [1, n]$, где $m, n \geq 1$. *Прямоугольная решетка* – это решеточный граф, изоморфный $G_{m,n}$ для некоторых m, n. В [1] была определена ширина прямоугольной решетки и указана ее оптимальная нумерация.

В данной работе продолжается исследование подкласса решеточных графов, которые могут быть представлены в виде объединения двух пересекающихся прямоугольных решеток (см. [3]). Он определяется следующим образом. Пусть L – решеточный граф с множеством вершин $V(L) = V(L_1) \cup V(L_2)$, где $L_1 = G_{m,n}$, $L_2 = G_{p,q}(\alpha)$, $m, n > 1$, $p \geq 1$, $q > 1$, $\alpha \in [0, m) \times [0, n)$. Найдена ширина графа L при различных значениях указанных параметров и предложены способы построения за полиномиальное время соответствующих оптимальных нумераций.

Кроме того, исследуется модель целочисленного линейного программирования для задачи оптимальной нумерации. Показано, что для любого графа G существуют упорядочения координат, при которых мощность L-накрытия задачи не меньше $(B(G) - 1)!$

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Chvátalová. (1975) *Optimal Labelling of a Product of Two Paths.*// Discrete Math. V. 11. P. 249–253.

2. J. Díaz, M. D. Penrose, J. Petit, M. J. Serna. (1999) *Layout Problems on Lattice Graphs.*// Computing and Combinatorics. Lecture Notes in Computer Science. V. 1627. P. 103–112.

3. S. D. Ivanova. (2003) *On the complexity of Bandwidth Minimization Problem for some graphs.*// EURO Working Group on Location Analysis. XIV Meeting, September 11–13, 2003, Corfu, Greece. Programme - Abstracts. p. 31.

Иванова Светлана Диадоровна,
Омский государственный университет,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 23-67-39,
e-mail: svetik2263@mail.ru

EXTREMAL PROBLEMS ON PACKING OF SPARSE GRAPHS

A. Kostochka

A number of basic problems in graph theory can be stated as packing problems. Graphs $G_1, G_2, \ldots, G_k$ (on n vertices each) *pack*, if there exists an edge disjoint placement of all these graphs into the complete graph K_n.

A famous example of a packing problem is the *Hamilton cycle problem*: the problem of existence of a spanning (Hamiltonian) cycle in an n-vertex graph G is equivalent to the question whether the n-cycle C_n packs with the complement $\overline{G}$ of G. Another example: a graph G on n vertices is *equitably* k-colorable if and only if G packs with the n-vertex graph whose components are cliques with $\lfloor n/k \rfloor$ or $\lceil n/k \rceil$ vertices.

Important examples of packing problems are problems on existence of a given subgraph, *Turan-type problems* and *Ramsey-type problems*. These examples (and many more) show that graph packing is a rather general problem. The talk will pay the main attention to packing *sparse* subgraphs. The sparseness will be measured mostly by the maximum degree of vertices or the largest average degree over the subgraphs.

The talk will discuss recent joint results of B. Bollobás, K. Nakprasit, and the speaker on three conjectures of Bollobás and Eldridge. We prove a partial case of the main Bollobás-Eldridge-Catlin Conjecture. Apart from this, we extend a conjecture and disprove another conjecture from their paper. We apply obtained results on packing of two graphs to packing many sparse graphs.

Alexandr Kostochka,
Sobolev Institute of Mathematics, 630090 Novosibirsk, Russia,
and University of Illinois, Urbana, IL 61801, USA;
e-mail: sasha@math.nsc.ru

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ 2-РАСКРАСКИ РЕКУРСИВНО ПОРОЖДАЕМЫХ k-ТЕРМИНАЛЬНЫХ ГИПЕРГРАФОВ

В. В. Лепин

Пусть $H = (V, \mathcal{E})$ — гиперграф с множеством вершин $V = V(H)$ и семейством ребер $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$. Множество вершин $U \subseteq V(H)$ называется *независимым*, если ни одно гиперребро не является подмножеством множества U. *Правильной 2-раскраской* гиперграфа называется отображение $c : V(H) \to \{1, 2\}$, где $\{1, 2\}$ — краски, такое, что ни одно ребро не является монохроматическим. Эквивалентно, правильная 2-раскраска это разбиение множества вершин на два множества независимых вершин.

Даже в случае, когда H является 3-униформным гиперграфом проблема 2-раскраски является NP-трудной. Поэтому актуальна задача разработки алгоритмов распознавания, которые отвечают, можно ли правильно 2-раскрасить гиперграф из некоторого класса гиперграфов. Рассмотрим эту задачу в классе рекурсивно порождаемых k-терминальных гиперграфов.

Упорядоченная тройка $(V, \mathcal{E}, T)$ называется *k-терминальным* гиперграфом, если $H = (V, \mathcal{E})$ — гиперграф, в котором выделено (и, возможно, упорядочено) множество вершин (*терминалов*) $T \subseteq V$ такое, что $|T| \leq k$. Пусть k фиксировано и Φ — множество всех k–терминальных гиперграфов, в котором выделено некоторое подмножество *базовых гиперграфов* $\mathcal{B} \subseteq \Phi$ и задано конечное множество рекурсивных *композиционных операций* $\mathcal{R} = \{f_1, f_2, \ldots, f_e\}$, где $f_i : \Phi^{p_i} \to \Phi$. Здесь p_i обозначает арность операции f_i. Обозначим через $\Psi_k = (\mathcal{B}, \mathcal{R}, k)$ *класс рекурсивно порождаемых k-терминальных гиперграфов* в Φ.

Уточним понятие композиционной операции f. Пусть дано m гиперграфов $H_i = (V_i, T_i, \mathcal{E}_i)$ $(1 \leq i \leq m)$, для которых множества вершин $V_1 \setminus T_1, V_2 \setminus T_2, \ldots, V_m \setminus T_m$ попарно не пересекаются. Тогда в результате применения операции $f \in \mathcal{R}$ к этим гиперграфам, получаем гиперграф $f(H_1, H_2, \ldots, H_m) = H = (V, \mathcal{E}, T)$, такой, что $V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_m$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{E}_m$ и $T \subseteq T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_m$.

Т е о р е м а. *Существует алгоритм, который за полиномиальное время отвечает, можно ли правильно 2-раскрасить рекурсивно порождаемый k-терминальный гиперграф.*

Работа выполнена при поддержке INTAS (Проект 03-50-5975).

Лепин Виктор Васильевич,
Институт математики НАН Беларуси,
ул. Сурганова 11, Минск, 220072, Республика Беларусь,
тел. (375-17) 284-17-62, факс (375-17) 284-09-15, e-mail: lepin@im.bas-net.by

НАИБОЛЬШИЕ ГРАФЫ ДИАМЕТРА 2 И СТЕПЕНИ 6

С. Г. Молодцов

Рассматриваются конечные неориентированные графы. *Порядок* графа есть число его вершин. *Степень* вершины есть число инцидентных ребер вершины. Длина кратчайшей цепи между двумя вершинами называется *расстоянием* между этими вершинами. Максимальное среди всех расстояний между двумя вершинами называется *диаметром* графа. Граф диаметра k, степень вершин которого не превосходит d, назовем (d, k)-графом.

Проблема Степень/Диаметр. *Найти максимальный порядок $n(d, k)$ среди (d, k)-графов для различных значений d и k.*

Последние известные результаты по этой проблеме приведены в [1,2]. В докладе рассматриваются графы диаметра 2. Известна верхняя *граница Мура* для порядка (d, k)-графов. Из нее следует, что $n(d, 2) \leq d^2 + 1$. Эта граница достигается только для $d = 1, 2, 3, 7$ и, возможно, 57. Для оставшихся d доказано, что $n(d, 2) \leq d^2 - 1$ [3]. Для $d = 4, 5$ известны наибольшие графы с 15 и 24 вершинами соответственно. Для $d = 6$ построен вершинно-транзитивный $(6, 2)$-граф порядка 32 [2].

Наша цель состояла в построении всех $(6, 2)$-графов максимального порядка. Для этого программа генерации всех неизоморфных графов из заданного множества вершин [4] была дополнена специальными процедурами, позволяющими проводить проверку на возможность построения графов диаметра 2 в процессе генерации. Нетрудно показать, что все $(6, 2)$-графы с порядком более 31 являются регулярными графами степени 6. Прямым комбинаторным перебором найдено, что не существует $(6, 2)$-графов порядка 35, 34 и 33. Построено ровно 6 неизоморфных $(6, 2)$-графов порядка 32, один из которых является вершинно-транзитивным графом. Общее время генерации всех $(6, 2)$-графов порядка 35, 34, 33 и 32 составило приблизительно 400 часов на компьютере Pentium-4 1.8 ГГц.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. J. Dinneen, (1994) *New Results for the Degree/Diameter Problem,* // Networks. V. 24. P. 359–367.
2. http://maite71.upc.es/grup_de_grafs/grafs/taula_delta_d.html
3. P. Erdös, S. Fajtlowicz, A. J. Hoffman, (1980) *Maximum Degree in Graphs of Diameter 2,* // Networks. V. 10. P. 87–90.
4. S. G. Molodtsov, (1994) *Computer-Aided Generation of Molecular Graphs.* // MATCH 1994. V. 30. P. 213–224.

Молодцов Сергей Георгиевич,
Новосибирский институт органической химии им. Н. Н. Ворожцова СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 9, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (383-2) 34-46-45, факс (383-2) 34-47-52, e-mail: molodsov@nioch.nsc.ru

A NEW CLASS RELATED TO INDUCED MATCHINGS

Yu. L. Orlovich and I. E. Zverovich

An *induced matching* in a graph G is edge-set of a 1-regular induced subgraph. An induced matching M is *maximal* if $M \nsubseteq M'$ for any other induced matching M' in G. A graph G is called *well-matched* if all maximal induced matchings in G have the same size. We show that recognizing the class $\mathcal{WELLMATCH}$ of well-matched graphs is a co-NP-complete problem even for $(2P_5, K_{1,5})$-free graphs.

Let IMatch(G) be the set of all maximal induced matchings of a graph G. We define $\sigma(G) = \min\{|M| : M \in \mathrm{IMatch}(G)\}$ and $\Sigma(G) = \max\{|M| : M \in \mathrm{IMatch}(G)\}$. In a greedy way we can find both $\sigma(G)$ and $\Sigma(G)$ in any well-matched graph G. It is well-known that the decision problem corresponding to the problem of computing $\Sigma(G)$ is NP-complete. We prove NP-completeness for $\sigma(G)$.

Ko and Shepherd [SIAM J. Discrete Math. 16 (2003)] investigated relations between $\Sigma(G)$ and $\gamma(G)$, the domination number of G. They mentioned that they know of no class of graphs for which exactly one of γ, Σ is polynomial-time computable. We show that INDEPENDENT SET, INDEPENDENT DOMINATING SET, and DOMINATING SET are NP-complete problems for well-matched graphs. Thus, for the class $\mathcal{WELLMATCH}$, γ is hard to find, while Σ is easily computable. As corollaries, we obtain that the well-known problems PARTITION INTO TRIANGLES and CHORDAL GRAPH COMPLETION are NP-complete problems for well-matched graphs. Further, PARTITION INTO SUBGRAPHS ISOMORPHIC TO P_3 is an NP-complete problem for well-matched graphs. This implies that computing Σ is NP-hard even if the input is restricted to Hamiltonian line graphs of well-matched graphs and so generalizes recent results of Kobler and Rotics [Algorithmica 37 (2003)]. Also, CHROMATIC NUMBER and CLIQUE are NP-complete problems for well-matched graphs.

We show that $\mathcal{WELLMATCH}$ is a *co-matching hereditary class*, that is it is closed under deleting an induced matching along with its neighborhood. We characterize well-matched graphs in terms of forbidden co-matching subgraphs. It means that we specify the minimal set of graphs Z such that G is well-matched if and only if G does not contain each graph in Z as a co-matching subgraph. However we prove that recognizing co-matching subgraphs is an NP-complete problem. Finally, we consider *perfectly well-matched graphs*, i.e., graphs in which every induced subgraph is well-matched. We characterize the class of all perfectly well-matched graphs in terms of forbidden induced subgraphs, thus obtaining a new polynomial-time recognizible hereditary class, where both σ and Σ are easy to compute.

Yu. Orlovich was supported by the INTAS (Project INTAS-BELARUS 03-50-5975). I. Zverovich was partially supported by DIMACS Winter 2003/2004 Award.

Orlovich Yury Leonidovich, Institute of Mathematics,
National Academy of Sciences, 11 Surganova Str., Minsk, 220072, Belarus,
phone: (375-17) 284-17-62, fax: (375-17) 284-09-15, e-mail: orlovich@im.bas-net.by

Zverovich Igor′ Edmundovich, RUTCOR − Rutgers Center for Operations Research,
640 Bartholomew Road, Piscataway, NJ 08854-8003, USA,
e-mail: igor@rutcor.rutgers.edu

ЭЙЛЕРОВЫ ЦИКЛЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Т. А. Панюкова

Задачам построения эйлеровых циклов специального вида уделяется недостаточно внимания в литературе. Единственным изданием, полностью посвященным эйлеровым циклам, можно считать монографию [1, 2], где рассмотрены некоторые виды эйлеровых цепей: 1) цепи, избегающие запрещенных переходов; 2) попарно совместимые эйлеровы цепи; 3) A-цепи в плоских графах[1]; 4) маршрут W, использующий каждое ребро ровно один раз в каждом направлении (бинаправленный двойной обход); 5) маршрут W, содержащий каждое ребро всегда в одном направлении (нигде ненулевые потоки, истинные маршруты) [2].

В [3] рассматривается построение маршрутов Петри, суть которых в том, что при обходе графа мы в качестве следующего для обхода ребра выбираем ребра, находящиеся слева или справа от текущего, поочередно.

В работе [4] доказано существование самонепересекающегося эйлерова цикла, т.е. цикла, который не имеет пересечений ни в одной из вершин графа, а только соприкосновения.

Автором рассмотрена задача [5] построения в плоском графе обхода, удовлетворяющего следующему ограничению. Пусть на плоскости S задан плоский эйлеров граф $G = (V, E)$, и пусть f_0 – внешняя (бесконечная) грань графа G. Для любого подмножества $H \subset S$ через $\mathsf{Int}\,(H)$ обозначим подмножество S, являющееся объединением всех связных компонент множества $S \backslash H$, не содержащих внешней грани f_0, другими словами, представляющее внутренность множества H. Множества вершин, ребер и граней графа G будем обозначать через V, E и F соответственно. Будем говорить, что маршрут $C = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_n v_1$, содержащий все ребра графа G имеет v-упорядоченное охватывание, если для любой его начальной части $C_{e_l} = v_1 e_1 v_2 \dots e_l,\ l \le n = |E|$ выполнено условие $\mathsf{Int}(C_l) \bigcap E = \emptyset$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фляйшнер Г. (2002) *Эйлеровы графы и смежные вопросы*: Пер. с англ. - М.: Мир, 335 с., ил.

2. Fleischner H.; (1991) *Eulerian Graphs and Related Topics, Part 1, Vol 2,* Ann. Discrete Math. 50 (North-Holland, Amsterdam).

3. Zitnik A. (2002) *Plane graphs with Eulerian Petrie walks* Diskrete Mathematics, 2002. - 244. - P. 539-549.

4. Белый С. Б. (1983) *О самонепересекающихся и непересекающихся цепях.* Математические заметки, 1983. - Т.34. - №4. - С. 625-628.

5. Panioukova T. A., Panyukov A. V. (2003) *Algorithms for Construction of Ordered Enclosing Traces in Planar Eulerian Graphs.* The International Workshop on Computer Science and Information Technologies' 2003 Proceedings of Workshop, Ufa, September 16-18, 2003. Volume 1, Ufa State Technical University, p. 134-138.

Панюкова Татьяна Анатольевна,
Южно-Уральский государственный университет,
пр. Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия,
тел: (3512) 67-90-47, e-mail: kwark@mail.ru

ПРЯМОЙ АЛГОРИТМ ПРОВЕРКИ ИЗОМОРФИЗМА ГРАФОВ

А. В. Пролубников, Р. Т. Файзуллин

Нами предлагается алгоритм решения задачи проверки изоморфизма графов, основанный на использовании аппарата линейной алгебры и ее численных методов. Вопрос о вычислительной сложности задачи проверки изоморфизма графов до сих пор остается открытым. Разработаны полиномиальные алгоритмы решения частных случаев задачи, получаемых внесением некоторых ограничений на структуру графов. В частности, полиномиально разрешимы задачи проверки изоморфизма графов с ограниченной степенью вершин [1], графов с ограниченной кратностью собственных значений их матрицы смежности [2]. Предлагаемый нами алгоритм является полиномиальным для широкого класса графов, включающего указанные выше.

Алгоритм работает с матрицами смежности графов, видоизмененными до положительно определенных, что соответствует рассмотрению не исходных неориентированных невзвешенных графов, а взвешенных мультиграфов с теми же множествами вершин, но в множества ребер которых добавлены взвешенные петли. Последовательно возмущая матрицы мультиграфов в ходе работы алгоритма, к завершению его работы мы получаем матрицы, которым соответствуют мультиграфы с тривиальными группами автоморфизмов. При этом если $G_A = \langle V_A, E_A \rangle$ и $G_B = \langle V_B, E_B \rangle$ – графы, изоморфизм которых проверяется, а $G'_A = \langle V_A, E'_A \rangle$ и $G'_B = \langle V_B, E'_B \rangle$ – мультиграфы, соответствующие возмущенным матрицам, то

$$G_A \simeq G_B \Leftrightarrow G'_A \simeq G'_B \text{ и } \exists! P: \ (A_0 = PB_0P^{-1} \text{ и } A = PBP^{-1}),$$

где P – матрица перестановки, задающая изоморфизм, $A_0,\ B_0$ – матрицы смежности $G_A,\ G_B,\ A, B$ – матрицы смежности $G'_A,\ G'_B$.

Алгоритм является прямым в том смысле, что в ходе его итераций построение изоморфизма происходит без использования какой-либо модификации процедуры рекурсии с возвратом, широко используемой для решения задачи. Вычислительная сложность алгоритма для указанных классов графов может быть оценена как $O(n^5 \log_2 n)$, где n – число вершин графа [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Luks, E.M. (1982) *Isomorphism of graphs of bounded valence can be tested in polynomial time* // Journ. of Comput. System Sci., 1982. PP. 42–65.
2. Babai, L., Grigoryev, D. Y., Mount, D. M. (1982) *Isomorphism of graphs with bounded eigenvalue multiplicity* // Proc. 14^{th} ACM Symp. on Theory of Comput., STOC, 1982. PP. 310–324.
3. Пролубников А. В., Файзуллин Р. Т. (2003) *Класс графов, задача проверки изоморфизма для которых разрешима за полиномиальное время алгоритмом спектрального расщепления* // Математические структуры и моделирование: Сб. научн. тр. Под ред. А. К. Гуца. Омск: Омск. гос. университет, 2003. Вып. 11. С. 28–57.

Пролубников Александр Вячеславович, Файзуллин Рашит Тагирович,
Омский государственный университет, пр. Мира 55-а, Омск, 644077, Россия,
тел. (3812) 67-12-06, e-mail: faizulin@univer.omsk.su, prolubnikov@univer.omsk.su

СВОЙСТВА ГРАФОВ, ПОЛУЧЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ ОПЕРАЦИИ ДУБЛИРОВАНИЯ ВЕРШИН

Е. В. Просолупов

Определим операцию дублирования вершин графа как добавление к каждой вершине графа G новой вершины, смежной в новом графе с теми и только теми вершинами, с которыми была смежна исходная вершина в G. Подобные операции использовались, например, в [1–3]. Здесь нас интересуют значения некоторых инвариантов графа при дублировании вершин. Нетрудно показать, что полученный с помощью операции дублирования вершин граф всегда обладает теми же хроматическим числом и размером максимальной клики, что и исходный. Построим два семейства симметричных матриц следующим образом: $P_1 = Q_1 = (1)$,

$$P_{i+1} = \begin{pmatrix} P_i & P_i \\ P_i & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q_{i+1} = \begin{pmatrix} q_1^{\langle i\rangle} & q_1^{\langle i\rangle} & \dots & q_{2^{i-1}}^{\langle i\rangle} & q_{2^{i-1}}^{\langle i\rangle} \\ q_1^{\langle i\rangle} & 0 & \dots & q_{2^{i-1}}^{\langle i\rangle} & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_i^{(t)} = \left.\begin{pmatrix} 0 & P_i & \dots & P_i \\ P_i & 0 & \dots & P_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_i & P_i & \dots & 0 \end{pmatrix}\right\} t, \qquad Q_i^{(t)} = \left.\begin{pmatrix} 0 & Q_i & \dots & Q_i \\ Q_i & 0 & \dots & Q_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_i & Q_i & \dots & 0 \end{pmatrix}\right\} t,$$

где $q_j^{\langle i\rangle}$ – j-ый столбец матрицы Q_i, $i \geq 1$ и $t \geq 2$ – целые числа. По матрицам смежности $P_i^{(t)}$ и $Q_i^{(t)}$ построены два семейства графов: $G_i^{(t)}$ и $F_i^{(t)}$. Семейство $G_i^{(t)}$ в терминах графов может быть построено с помощью операции дублирования вершин из полного графа с t вершинами. Можно показать, что $G_i^{(2)} = F_i^{(2)}$ для любого $i \geq 1$.

Теорема 1. Граф G является t-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда существует такое i, что G является подграфом графа $F_i^{(t)}$.

Теорема 2. Если для любого i существует k такое, что граф $F_i^{(t)}$ является подграфом графа $G_k^{(t)}$, то граф является t-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда он встречается среди подграфов графов, получаемых дублированием вершин из любого графа с $\omega(G) = \chi(G) = t$.

Следствие. Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он встречается среди подграфов графов, получаемых дублированием вершин из любого непустого двудольного графа.

Пусть граф G' получен дублированием вершин графа G. Обозначим $\overline{\chi}(G)$ — размер минимального кликового покрытия графа G; $\alpha(G)$ — мощность максимального независимого множества вершин графа G.

Теорема 3. $\max\{2\alpha(G), |V(G)| + t\} \leq \alpha(G') \leq \overline{\chi}(G') \leq |V(G)| + s$, где t – количество изолированных вершин графа G, s – минимальное число клик размера 1 по всем кликовым покрытиям графа G.

ЛИТЕРАТУРА

1. Knuth D. E. (1994) *The Sandwich Theorem* // Electron. J. Combinat. 1, A1, 48pp.
2. Kotlov A., Lovasz L. (1996) *The rank and size of graphs* // J. Graph Theory 23, 185–189.
3. Mycielski F. (1953) *Sur le coloriage des graphs* // Collog. Math. 3, № 2, 161–162.

Просолупов Евгений Викторович, Санкт-Петербургский гос. университет, Университетский пр. 35, Петродворец, Санкт-Петербург, 198504, Россия, тел. (812) 428-71-59, e-mail: pev@oasis.apmath.spbu.ru

(k,l)-РАСКРАСКА ИНЦИДЕНТОРОВ: НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

А. В. Пяткин

Под *инцидентором* в ориентированном мультиграфе $G = (V, E)$ понимается упорядоченная пара (v, e) из вершины $v \in V$ и инцидентной ей дуги $e \in E$. Инцидентор (u, e) дуги $e = uv$ назовём *начальным*, а инцидентор (v, e) — *конечным*. Если два инцидентора имеют общую вершину, то они называются *смежными*. Множество всех инциденторов обозначается через I. Раскраской инциденторов называется произвольное отображение $f : I \longrightarrow Z_+$. Раскраска f называется (k, l)-раскраской, если цвета любых смежных инциденторов различны, а разность цветов конечного и начального инциденторов любой дуги лежит в интервале $[k, l]$. Минимальное число цветов, необходимое для (k, l)-раскраски любого мультиграфа степени Δ обозначается через $\chi_{k,l}(\Delta)$. Ясно, что $\chi_{k,l}(\Delta) \geq k + \Delta$. Вопрос о верхних оценках для этого числа до конца ещё не изучен.

В докладе обсуждаются некоторые верхние оценки для $\chi_{k,l}(\Delta)$, в частности:

1) Если $k \geq \lceil \Delta/2 \rceil$, то $\chi_{k,k}(\Delta) = \chi_{k,\infty}(\Delta) = k + \Delta$.

2) Если $l \geq \lceil \Delta/2 \rceil$, то $\chi_{k,l}(\Delta) = \chi_{k,\infty}(\Delta) = k + \Delta$.

3) Для любого $k \geq 1$, $\chi_{k,k}(\Delta) \leq \lceil 3\Delta/2 \rceil + k - 1$.

4) Для любого нечётного Δ, $\chi_{1,1}(\Delta) \geq \Delta + 2$.

5) Для любого $k \geq 1$, $\chi_{k,k}(4k) = 5k$.

Результаты 1)–4) опубликованы ранее в работах [1,2].

Работа поддержана РФФИ (проекты 02-01-00977 и 02-01-00039) и молодёжным грантом СО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Пяткин. (2003) *Некоторые верхние оценки для инциденторного (k, l)-хроматического числа* // Дискретный анализ и исследование операций, Сер. 1. Том 10, №2. С. 66–78.

2. А. В. Пяткин. (2004) *Верхние и нижние оценки для инциденторного (k, l)-хроматического числа* // Дискретный анализ и исследование операций, Сер. 1. Том 11, №1. С. 93–102.

Пяткин Артём Валерьевич,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383-2) 33-25-94,
факс (8-383-2) 33-25-98, e-mail: artem@math.nsc.ru

ИЗОМОРФИЗМЫ ЦВЕТНЫХ ГРАФОВ И ДРЕВЕСНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО РАССТОЯНИЮ

О. В. Расин

Под графом мы понимаем неориентированный граф без петель и кратных ребер. Если U – подмножество множества вершин V графа G, то через $G(U)$ будем обозначать подграф графа G, порожденный множеством U.

Определение. *Цветным графом* называется пара (G, f), где G – обыкновенный граф, а f – функция из множества вершин графа G в начальный отрезок натурального ряда $\{1, \dots, s\}$. Для вершины v графа G число $f(v)$ называется *цветом* вершины v. Число вершин цвета i называется *кратностью цвета* i

В дальнейшем будем говорить, что цветной граф G принадлежит классу BC_k, если кратности всех его цветов не превосходят k. Бабаи разработал полиномиальный алгоритм проверки изоморфизма в классе цветных графов, у которых кратность каждого цвета ограничена константой k [1].

Пусть G – некоторый граф, а u и v – его вершины. Длина кратчайшего маршрута из вершины u в вершину v обозначается через $d_G(u, v)$ и называется расстоянием между вершинами u и v. По аналогии с [2], введем

Определение. *Пусть $G = (V, E)$ – связный цветной граф. $TreeColor_k$-разложением графа G* называется тройка $(\{X_i : i \in I\}, T = (I, F), r)$ такая, что 1) $\bigcup\limits_{i \in I} X_i = V$ и $X_i \cap X_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$, где $i, j \in I$; 2) T является корневым деревом с корнем в вершине $r \in I$; 3) $|X_r| = 1$; 4) для любых $i \in I$ и $v \in X_i$ выполняется $d_G(X_r, v) = d_T(r, i)$, 5) для каждого ребра $\{v, w\} \in E$ существуют такие $i, j \in I$, что $v \in X_i$, $w \in X_j$ и либо $i = j$, либо $\{i, j\} \in F$; 6) для любого $i \in I$ граф $G(X_i)$ принадлежит классу BC_k

Пусть k и l – натуральные константы. Через $\mathcal{T}BC_k^l$ обозначим класс графов, которые обладают хотя бы одним $TreeColor_k$-разложением $D =(\{X_i : i \in I\}, T = (I, F), r)$, что каждая вершина в T имеет не более l сыновей.

Теорема 1. *Существует алгоритм, который для двух произвольных цветных графов из класса $\mathcal{T}BC_k^1$, за время $O(n^8 \cdot (2k!)^6) \cdot (n + (2k)^2)$ определяет изоморфны они или нет.*

Теорема 2. *Существует алгоритм, который для двух произвольных цветных графов из класса $\mathcal{T}BC_k^l$ за время $O(l! \cdot n^9 \cdot (2k!)^6) \cdot (n + (2k)^2)$ определяет изоморфны они или нет.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Hoffmann C. M., (1982) *Group-Theoretics Algorithms and Graph Isomorphism,* Lecture Notes in Computer Science, Vol. 136 (Springer, Berlin).
2. Bodlaender H. L., de Fluiter B., Thilikos D. M., Yamazaki K., (1997) *Isomorphism for graphs of bounded distance width,* Department of Computer Science, Utrecht Univercity.

Расин Олег Вениаминович,
Уральский государственный университет им. А. М. Горького,
пр. Ленина, 51, Екатеринбург, 620083, Россия,
тел. (8-343) 350-50-75, e-mail: ovr@r66.ru

ЗАДАЧА ВЫДЕЛЕНИЯ P-ЦЕНТРА С ГАРАНТИРОВАННЫМИ ОЦЕНКАМИ НА ПРЕДФРАКТАЛЬНОМ ГРАФЕ С ЗАТРАВКОЙ — ДВУДОЛЬНЫЙ ГРАФ

А. А. Узденов

В данной работе рассматривается известная задача о p-центрах [1] в новой постановке на предфрактальных и фрактальных графах. Используем общепринятое обозначение $G = (V, E)$ для всякого конечного или бесконечного графа [2, 3]. Термином "затравка" [2, 3] условимся называть связный n-вершинный граф $H = (W, Q)$ с ребрами, взвешенными двумя числами $a_{ij}^l \in [a, b]$ и $b_{ij}^l \in [c, d]$, $1 \le i, j \le n$. Недостающие определения предфрактальных и фрактальных графов можно найти в [2, 3], а недостающие определения графов можно найти в [1, 4].

Обозначим через $X = Y_p^*$ множество всех центров предфрактального (n, L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$. На множестве X определим критерии

$$F_1(x) = [s(Y_p)] \to \min, \quad F_2(x) = \sum_{p_i^l \in X} a_{ij}^l \to \min,$$
$$F_3(x) = \sum_{p_i^l \in X} b_{ij}^l \to \min, \quad F_4(x) = |Y_p| \to \min,$$

где $F_1(x)-$ p_i^l-центр, $F_2(x)$, $F_3(x)$ – суммарный минимальный вес рёбер, участвующих в p-центрах, $F_4(x)$ – мощность множества Y_p.

Для решения этой задачи предложены полиномиальные алгоритмы α_1 и α_2 с оценками, обоснованием которых являются следующие теоремы:

Теорема 1. Алгоритм α_1 выделяет абсолютный p_i^l-центр, $1 \le i \le s$, на предфрактальном (n, l)-графе $G_l = (V_l, E_l)$, $1 \le l \le L$, оптимальный по $F_1(x)$ с оценками $F_2(x) \le \frac{n^{L-1} \cdot k^{L-1} \cdot b}{2}$, $F_4(x) \le p$, где $k < \frac{a}{b}$ [4]. Причём трудоёмкость [5] алгоритма α_1 равна $\tau(\alpha_1) = O(N^2)$, где $N = |V|$.

Теорема 2. Алгоритм α_2 выделяет абсолютный p_i^l-центр, $1 \le i \le s$, на предфрактальном (n, l)-графе $G_l = (V_l, E_l)$, $1 \le l \le L$, оптимальный по $F_1(x)$ с оценками $F_3(x) \le \frac{n^{L-1} \cdot k^{L-1} \cdot d}{2}$, $F_4(x) \le p$, где $k < \frac{a}{b}$ [4]. Причём трудоёмкость [5] алгоритма α_2 равна $\tau(\alpha_2) = O(N^2)$, где $N = |V|$.

]**Теорема 3.** p_i^l-центр предфрактального (n, L)-графа $G_l = (V_l, E_l)$ равен $p_i^l = \left\{ v_{i,\eta}^{l*} \middle| m_i d\left(v_{i,\eta}^{l*}, v_{i,\eta}^l\right) < 2^{2\cdot(L-1)} \cdot k^{L-1} \right\}$, $1 \le l \le L$, $1 \le i \le n$, η – номер затравки, если затравка – полный двудольный граф.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кристофидес Н. (1978) *Теория графов. Алгоритмический подход.* М.: Мир.

2. Кочкаров А. М. (1998) *Распознавание фрактальных графов.* Нижний Архыз.

3. Кочкаров А. М., Перепелица В. А. (1999) *Метрические характеристики фрактального и предфрактального графа.* Сб. РАН САО.

4. Емеличев В. А. и др. (1990) *Лекции по теории графов.* – М.: Наука.

5. Гэри М., Джонсон Д. (1982) *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.* М.: Мир.

Ахмат Абдулахович Узденов,
Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия,
каф. математики, ул. Ставропольская, 36, Черкесск, 369000, тел. (87822) 3-33-87