О РЕШЕНИИ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Т. Л. Алексеева

Доклад посвящен изложению результатов исследования, начатых авторами в [1]. Рассматривается, важная для многих приложений, задача нахождения корней системы уравнений

$$f_i(x) = 0,\ i = \overline{1,m},\ x \in X,$$

где $f_i(x) = 0,\ i = \overline{1,m}$ – d. c. функции, т.е. функции $f_i(x)$ можно представить в виде разности двух выпуклых непрерывных функций $g_i(x)$ и $h_i(x)$:

$$f_i(x) = g_i(x) - h_i(x),\ i = \overline{1,m}, \tag{1}$$

X – выпуклое, компактное множество. Как известно, пространство d. c. функций включает в себя множество квадратичных, дважды непрерывно дифференцируемых функций и является плотным в пространстве непрерывных функций. Введем новые переменные $y_i = h_i(x)$ и обозначения

$$\bar{g}_i(x, y_i) = g_i(x) - y_i,\ \bar{h}_i(x, y_i) = h_i(x) - y_i,\ i = \overline{1,m}.$$

Тогда исходную задачу можно записать в следующем виде:

$$\bar{g}_i(x, y_i) = 0,\ i = \overline{1,m}, \tag{2}$$

$$\bar{h}_i(x, y_i) = 0,\ i = \overline{1,m},\ x \in X. \tag{3}$$

Задаче (2)–(3) можем поставить в соответствие задачу максимизации выпуклой функции на выпуклом множестве:

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{g}_i(x, y_i) + \sum_{i=1}^{m} \bar{h}_i(x, y_i) \to \max \tag{4}$$

$$\bar{g}_i(x, y_i) \le 0, i = \overline{1,m}, \tag{5}$$

$$\bar{h}_i(x, y_i) \le 0, i = \overline{1,m}, \tag{6}$$

$$x \in X. \tag{7}$$

Для решения задачи (4)–(5) используется метод ветвей и границ [2], основанный на d. c. декомпозиции (1), и приводятся результаты численных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева Т. Л., Хамисов О. В. (2001) *К нахождению корней систем квадратичных уравнений* // Труды XII Байкальской международной конференции "Методы оптимизации и их приложения", Иркутск, С. 3–12.

2. R. Horst, P. Pardalos, H. Tuy. (1995) *Introduction to Global Optimization.* Kluwer Academic Publishers, Boston.

Алексеева Татьяна Леонидовна,
ИрГУПС, ул. Чернышевского, 15, Иркутск, 664074, Россия,
e-mail: talecseeva@rbcmail.ru

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ АБСТРАКТНОГО ВЫПУКЛОГО АНАЛИЗА В ОПТИМИЗАЦИИ

М. Ю. Андрамонов

В последнее время большое внимание привлекают задачи оптимизации обобщенно выпуклых функций. С применением абстрактного выпуклого анализа сфера обобщенной выпуклости значительно расширилась. Теперь такие функции, как липшицевы, возрастающие выпуклые по лучам, возрастающие звездные, могут также быть названы обобщенно выпуклыми. Подобные функции гораздо труднее минимизировать в силу многоэкстремальности. Был предложен ряд алгоритмов липшицева программирования, в частности, методы ветвей и границ и методы случайного поиска.

Абстрактная выпуклость появилась сравнительно недавно как область исследований с потенциально большими приложениями к глобальной оптимизации.

Важное средство, которое мы будем использовать из абстрактного выпуклого анализа – это обобщенный субдифференциал. Однако в отличие от субдифференциала Кларка из невыпуклого анализа он несет глобальную, а не локальную информацию о функции. Конечно, невозможно обсуждать общие задачи абстрактного выпуклого программирования с надеждой получения эффективных вычислительных методов.

Мы предлагаем ряд методов, основанных на методе секущих углов и его расширениях, для минимизации невыпуклых функций. При этом возникает вспомогательная задача дизъюнктивного программирования. Данные методы могут широко использоваться для решения разнообразных технико-экономических задач.

Мы рассматриваем важный класс целевых функций – возрастающие функции. В большинстве задач их оптимизации можно считать, что целевая функция выпукла по лучам (ВВЛ). Для задач минимизации таких функций построен эффективный метод секущих углов, основанный на абстрактном выпуклом анализе. Заметим, что общий алгоритм максимизации возрастающих функций был построен А.М.Рубиновым.

Предлагаются три подхода к максимизации ВВЛ функций. Первый из них основан на преобразовании исходной задачи, при котором целевая функция становится вогнутой по лучам (и тогда ее можно максимизировать методом секущих углов). Второй подход основан на разбиениях единичного симплекса. В третьем подходе удаляются области, не содержащие глобальный минимум, и подход применим для произвольных возрастающих целевых функций.

Андрамонов Михаил Юрьевич,
факультет ПМПУ СПБГУ, Университетский пр., 20, Старый Петергоф,
тел. 812 5916893, e-mail: andramonov@rbcmail.ru

МИНИМИЗАЦИЯ С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ В ПАРАМЕТРИЗОВАННОМ МЕТОДЕ ВНЕШНИХ ЦЕНТРОВ

А. А. Андрианова

Требуется найти приближенное с точностью $\varepsilon > 0$ решение задачи $\min\{f(x), x \in D(0)\}$, $D(0) = \{x : x \in R_n, g(x) \leq 0\}$, где $g(x) = \max\{f_i(x), i = \underline{1..m}\}$, $D(\delta) = \{x : x \in R_n, g(x) - \delta \leq 0\}$,$D'(\delta) = \{x : x \in R_n, g(x) < 0\}$, $D'(0) \neq \emptyset$, $\overline{D'(0)} = D(0)$, $f(x)$ – непрерывная выпуклая функция, которая удовлетворяет на множестве D условию Липшица с константой $L > 0$, $g(x)$ – сильно выпуклая функция с постоянной сильной выпуклости $\mu > 0$.

Пусть $f^* = \min\{f(x), x \in D(0)\} > -\infty$, $Y \cap D(0) = \emptyset$, где $Y = Argmin\{f(x), x \in R_n\}$, множество $X^*_\varepsilon = \{x : x \in D(0), f(x) \leq f^* + \varepsilon\}$ ограничено, $\min\{g(x), x \in X^*_\varepsilon\} \neq \min\{g(x), x \in R_n\}$.

Введем следующие обозначения. Для фиксированных значений $\rho > 0, \delta > 0, t, \gamma$ положим $F(x,t,\gamma,\rho) = \max\{f(x)-t, \rho g(x)-\gamma\}$, $Z(t,\gamma,\rho,\delta) = \{x : x \in R_n, F(x,t,\gamma,\rho) \leq F^*(t,\gamma,\rho) + \delta, |f(x) - t - \rho g(x) + \gamma| \leq \delta\}$, где $F^*(t,\gamma,\rho) = \min\{F(x,t,\gamma,\rho), x \in R_n\}$. Множество $Z(t,\gamma,\rho,\delta)$ является окрестностью множества точек абсолютного минимума функции $F(x,t,\gamma,\rho)$ при заданных значениях параметров $\rho > 0, \delta > 0, t, \gamma$. Пусть известно число $\overline{f}$, для которого справедливо неравенство $f^* \leq \overline{f}$.

Предлагается алгоритм в методе внешних центров, позволяющий найти ε-решение исходной задачи не более чем за заданное число $N > 0$ процессов минимизации функции вида $F(x,t,\gamma,\rho)$. Этот алгоритм является обобщением алгоритма, предложенного в [1].

Алгоритм. Фиксируется точка $x_0 \notin D(0)$, для которой $f(x_0) \leq f^*$, числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, для которых выполняется неравенство $\varepsilon > 3\delta + L\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}$, $N > 0$ – число итераций, за которое должно быть найдено ε-решение задачи. Задается возрастающая функция $\phi(u)$, удовлетворяющая условию $\phi(1) > 0, \phi(N) > 1$. Полагается $k = 0, \rho_{-1} = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon - \delta - L\sqrt{\frac{\delta}{\mu}}$.

1. Вычисляется $C_k = -\frac{L^2\sqrt{\mu}(\varepsilon_1 - 2\delta - \overline{f} + f(x_k)) - L^3\sqrt{\delta}}{\sqrt{\mu}(\mu\varepsilon_1^2 + L^2\delta)}$, $\rho_k = \max\{\rho_{k-1}; \phi(k+1)C_k\}$.
2. Фиксируется $\gamma_k = \rho_k(\frac{\mu\varepsilon_1^2}{L^2} + \delta) + \varepsilon - \delta$.
3. Выбирается $x_{k+1} \in Z(f(x_k), -\gamma_k, \rho_k, \delta)$.
4. Если $x_{k+1} \in D(0)$, то $x_{k+1} \in X^*_\varepsilon$. Процесс решения завершен.
5. Осуществляется переход к п.1 при k, замененном на $k+1$.

Доказано, что если параметр $\delta > 0$ выбран так, что $D'(-\delta) \neq \emptyset$ и $\overline{D'(-\delta)} = D(-\delta)$, не более чем за $N > 0$ итераций, проделанных по алгоритму, будет получено $\varepsilon-$решение задачи $\min\{f(x), x \in D(0)\}$. Следует заметить, что на практике в силу завышенности значений C_k условия пункта 4 алгоритма могут выполниться на итерации с номером, меньшим $N > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андрианова, Я. И. Заботин. (2002) *Управление процессом минимизации в параметризованном методе центров* // Изв. вузов. Математика, 2002, № 12, с. 3-10.

Андрианова Анастасия Александровна,
Казанский Государственный Университет,
ул. Журналистов, 7, кв. 57, 420029, Казань, тел. (8432)72-69-01, e-mail: aandr@mi.ru

О МЕРЕ НЕСОВМЕСТНОСТИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕБОВАНИЕМ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ

Н. Н. Астафьев

Как известно, для несовместных систем линейных неравенств $Ax \leq b$ или соответственно уравнений $Ax = b$ (здесь $A = (a_{ij})$ – $(m \times n)$ матрица, $x^T = (x_1, \ldots, x_n)$, $b^T = (b_1, \ldots, b_m)$) мера несовместности (чебышевская) определяется задачами

$$\min_x \max_i \{(a_{i\bullet,x}) - b_i\}; \quad \min_x \max_i \{|(a_{i\bullet,x}) - b_i|\},$$

здесь $a_{i\bullet}$ — i-ая строка матрицы A. В данной работе для системы

$$Ax = b, \ x \geq 0 \quad (m \leq n) \tag{1}$$

мера несовместности определяется на некотором классе равносильных преобразований ее системы уравнений. Будем предполагать, что $r(A) = m$. Выберем некоторую базисную подматрицу $B(J) = (a_{\bullet j_1}, \ \ldots, \ a_{\bullet j_m})$ из A, где $a_{\bullet j}$ — j-ая колонка из A, $J = \{j_1, \ \ldots, \ j_m\}$ и обозначим $e^T = (1, \ \ldots, \ 1) \in R^m$. Рассмотрим задачу:

$$v(J) = \min\{t \mid Ax = b + tB(J)e, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0\}.$$

Выпишем для нее двойственную задачу:

$$v^*(J) = \max\{(b^T, u) \mid (a^T_{\bullet j}, u) \leq 0 \ (j \in \overline{1,n}), \ \left(\sum_{j \in J} -a^T_{\bullet j}, \ u\right) \leq 1\}.$$

Утверждение 1. Всегда $v(J)$ — конечно $(v(J) = v^*(J))$ и система (1) несовместна в том и только в том случае, когда $v(J) > 0$.

Для функции $v(J)$ определим значения

$$\underline{v} = \min_J v(J); \quad \bar{v} = \max_J v(J),$$

которые, очевидно, конечны. Отрезок $[\underline{v}; \ \bar{v}]$ будем рассматривать как меру несовместности по классу $\{J\}$ равносильных преобразований.

Утверждение 2. (некоторое обобщение теоремы Фань-Цзи). Система (1) совместна тогда и только тогда, когда $\underline{v} = 0 = \bar{v}$.

Отметим, что в случае $v(J) = 0$ оптимальное решение соответствующей задачи дает некоторое неотрицательное базисное решение системы (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 04-01-00108 и НШ 792.2003.1.

Астафьев Николай Николаевич,
Институт математики и механики Уральского отделения РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620219, ГСП-384, Россия,
e-mail: astnn@imm.uran.ru

ГЛОБАЛЬНАЯ МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ ЗАДАННЫХ ПОЛИНОМАМИ

В. П. Булатов

В докладе рассматривается задача глобальной минимизации функции $\varphi(x)$ заданной полиномом на ограниченном множестве R, заданном неравенствами также с полиномиальными функциями в левах частях. Эта работа является обобщением результатов приведенных в [1,2].

Исходной задаче сопоставляется задача Лагранжа, для которой выписываются необходимые условия оптимизации. Эти необходимые условия есть замкнутая система нелинейных алгебраических уравнений с полиномиальными функциями в левых частях. Последняя система редуцируется к некоторой расширенной системе квадратичных алгебраических уравнений относительно вектора $z = (x, y)$ с выпуклыми функциями в левых частях. Показывается, что если $\{x*, y*\}$ разрешает эту систему, то $x*$ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности и обратно, если $x*$ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности, то существует $y*$ такой, что пара $\{x*, y*\}$ есть решение расширенной системы нелинейных алгебраических уравнений. Допустим, что решение исходной задачи принадлежит множеству изолированных решений в "необходимых условиях оптимальности" на некотором выпуклом компакте R^0. Тогда исходная задача сводится к минимизации $\varphi(x)$ на конечном множестве решений $z = \{x, y\}$ расширенной системы квадратичных алгебраических выражений с выпуклыми функциями в левых частях. Если $\varphi(x)$ вогнутая функция, то исходная задача сводится к поиску ее глобального минимума на выпуклой оболочке решений расширенной системы. Для ее решения предлагаются методы, аналогичные [1,2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Булатов В. П. (2000) *Глобальная оптимизация и численные методы поиска всех вещественных решений систем нелинейных алгебраических уравнений с выпуклыми функциями в левых частях.* ЖВМ и МФ. 2000. V.60 №3. P. 348-355.

2. Bulatov V. P., Ganhuand Necwessary D. (2003) *Optimality Conditions and Mothods of Global Optimization Optimization and Optimal Control.* Series on Computers and Operations Research. 2003. V. 1. P.69-76

Булатов Валерьян Павлович,
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (395-2)42-84-40, e-mail: bulatov@isem.sei.irk.ru

ОБ ОДНОЙ НОВОЙ ВЕРСИИ МЕТОДОВ ОТСЕЧЕНИЯ В ГЛОБАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В. П. Булатов, Н. В. Горбунова, Н. И. Федурина

В докладе рассматривается задача минимизации линейной функции $c^T x$ на замкнутом ограниченном множестве $R \subset E^n$, причем минимум понимается в глобальном смысле. Очевидно

$$min\left\{c^T x : x \in R\right\} = min\left\{c^T x : x \in coR\right\} \tag{1}$$

следовательно, решение задачи (1) сводится к конструктивным способам овыпукления R. Будем предполагать, что R задано системой неравенств $q_j\left(x\right) \le 0, j = \overline{1,m}$ и, что в каждой граничной точке $\overline{x}$ множества R известна вогнутая опорная функция $\psi\left(x\right)$, т.е. такая функция, что множество $\overline{R} = \{x : \psi(x) \le 0\} \supset R$, и $\psi\left(\overline{x}\right) = \underset{1 \le j \le m}{max}\, q_j\left(\overline{x}\right)$. Допустим также, что известна внутренняя точка x^0 множества R. Пусть уже построено множество $R^k = \left\{x : A^k x \le b^k\right\} \supset R$, найдем

$$x^k = argmin\left\{c^T x : x \in R^k\right\}, \tag{2}$$

если $x^k \in R$, то исходная задача (1) решена. В противном случае найдем точку $\overline{x}^k$ пересечения отрезка $x = \lambda x^k + (1-\lambda)\, x^0$ с границей множества R и в точке $\overline{x}^k$ построим вогнутую опорную функцию $\psi_k\left(x\right)$. Допустим, что множество R^k не вырожденное, т.е. в точке x^k n активных ограничений и им соответствует квадратная невырожденная матрица $\overline{A}^k$. Выпишем уравнения лучей, исходящих из точки $\overline{x}^k$ к соседним вершинам многогранника R^k

$$x = x^k - \lambda j s^{kj}, \quad j = \overline{1,n} \tag{3}$$

здесь s^{kj} – столбцы матрицы обратной к $\overline{A}^k$.

Теперь найдем точки $\overline{x}^{kj}$ пересечения лучей (3) с поверхностью задаваемой уравнением $\psi_k\left(x\right) = 0$. Через линейно независимые точки $\left\{\overline{x}^{k1}, \overline{x}^{k2}, \ldots \overline{x}^{kn}\right\}$ проведем плоскость $\{x : \alpha^{kT} x = \beta_k\}$, и построим полупространство $\{x : \alpha^{kT} x \le \beta_k\}$ не содержащее решения x^k задачи (2). Нетрудно увидеть, что неравенство $\alpha^{kT} x \le \beta_k$ задает правильное отсечение, т.е. множество $R^{k+1} = \left\{x : x \in R^k, \alpha^{kT} x \le \beta_k\right\}$ содержит решение x^* задачи (1).

Следующее приближение x^{k+1} найдем из решения задачи $min\left\{c^T x : x \in R^{k+1}\right\}$.

Приведенный итерационный процесс является модификацией методов отсечения в E^{n+1} [1]. Метод применяется для решения обобщенных задач линейного программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Г. Анциферов, Л. Т. Ащепков, В. П. Булатов. (1990) *Методы оптимизации и их приложения.* т.1. Математическое программирование. Новосибирск. Наука.

Булатов Валерьян Павлович, Горбунова Наталия Владимировна,
Федурина Нина Ивановна,
Иркутская Государственная сельскохозяйственная Академия – Институт систем энергетики СО РАН, ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия,
тел. (8-395-2)42-84-40, e-mail: bulatov@isem.sei.irk.ru

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ БАРЬЕРНО-ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ

М. В. Втюрина, В. Г. Жадан

Пусть $\mathbb{R}^n_+$ обозначает неотрицательный ортант $\mathbb{R}^n$. Линейная задача дополнительности (ЛЗД) состоит в нахождении двух векторов $x \in \mathbb{R}^n_+$ и $y \in \mathbb{R}^n_+$, удовлетворяющих соотношениям

$$y = Mx + q, \quad x^T y = 0. \tag{1}$$

Предполагается, что матрица M положительно определена и вектор q отличен от нулевого. Как известно, к системам вида (1) сводятся многие оптимизационные, игровые и равновесные задачи.

Для решения (1) был разработан итеративный метод, обобщающий барьерно-проективный метод для задач линейного программирования [1]. Пусть I_n – единичная матрица порядка n и пусть $D(z)$ – диагональная матрица с вектором z на диагонали. Обозначим $G(x, y) = MD(x)M^T + D(y)$. Итерации в методе проводились по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & D(x_k)\left\{I_n - \alpha_k \left[I_n + M^T G^{-1}(x_k, y_k)\,(I_n - M)\,D(x_k)\right] y_k\right\}, \\ y_{k+1} & = & D(y_k)\left\{I_n - \alpha_k \left[I_n - G^{-1}(x_k, y_k)\,(I_n - M)\,D(y_k)\right] x_k\right\}. \end{array} \tag{2}$$

Начальная пара $[x_0, y_0]$ бралась строго внутренней и допустимой, т.е. $x_0 > 0_n$, $y_0 > 0_n$ и $y_0 = Mx_0 + q$. Шаг α_k выбирался таким образом, чтобы все последующие пары также оставались строго внутренними.

В настоящем сообщении рассматривается вариант метода (2), в котором шаг α_k ищется из условия минимизации функции $V(x, y) = x^T y$ вдоль направлений перемещений при условии, что $x_{k+1} \geq 0_n$, $y_{k+1} \geq 0_n$. В этом случае текущие пары $[x_k, y_k]$ могут принадлежать границам ортанта $\mathbb{R}^{2n}_+$ и попадать в стационарные точки, которые не являются решением задачи. Показывается, как можно модифицировать метод, чтобы у него стационарными точками были бы только решения ЛЗД. Обсуждаются свойства метода и обосновывается его конечная сходимость.

Работа поддержана грантом РФФИ 03-01-00464.

ЛИТЕРАТУРА

1. Evtushenko Yu.G., Zhadan V.G. (1994) *Stable Barrier-Projection and Barrier-Newton Methods in Linear Programming* // Computational Optimization and Applications, 1994. V. 3, № 4. P. 289-304.

Жадан Виталий Григорьевич,
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН,
ул. Вавилова 40, Москва, ГСП-1, 119991, Россия, тел. (095)135-25-39,
факс (095)-135-61-59. E-mail: zhadan@ccas.ru

Втюрина Марина Витальевна,
Московский физико-технический институт (государственный университет),
Институтский пер. 9, Московская обл., г. Долгопрудный, 141700, Россия,
тел. (095)-408-77-72, e-mail: vturina@scph.mipt.ru

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК

И. И. Дикин

Рассматривается интересный класс оптимизационных задач, исследование которого в большинстве монографий, посвященных математическому программированию, отсутствует [1,2]. Следует отметить, что редки публикации, в которых изучаются численные методы решения задач геометрического программирования. Теория и методы геометрического программирования нашли применение в инженерной практике.

Для определения допустимых и оптимальных решений геометрических программ естественно применить алгоритмы метода внутренних точек [3], что в настоящей работе и делается. Предлагаются итеративные алгоритмы, в некоторой степени учитывающие специфику исследуемых экстремальных проблем. Доказаны новые теоремы сходимости непрерывных и дискретных процессов [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Даффин Р., Петерсон Э., Зенер К. (1972) *Геометрическое программирование.* – М.: Мир. – 312 с.

2. Бекишев Г. А., Кратко М. И. (1980) *Элементарное введение в геометрическое программирование.* – М.: Наука. – 144 с.

3. Дикин И. И., Попова О. М. (1997) *Исследование и ускорение сходимости алгоритмов метода внутренних точек: Решение оптимизационных задач термодинамики.* – Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН. – 70 с.

4. Дикин И. И. (2002) *Решение задачи геометрического программирования методом внутренних точек.* – Иркутск. – 18 с. – (Препр. / ИСЭМ СО РАН; N 7).

Дикин Илья Иосифович,
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН,
664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 130, тел. 426380, e-mail: idikin@isem.sei.irk.ru

СИММЕТРИЧНАЯ ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ОПТИМИЗАЦИИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ В МОДЕЛЯХ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ

С. П. Епифанов, В. И. Зоркальцев

Рассматриваются взаимно двойственные задачи минимизации дифференцируемых выпуклых функций при линейных ограничениях. Выделяемые отдельно нелинейные составляющие целевых функций являются сопряженными функциями, их градиенты – взаимнообратные отображения. Это позволяет достичь симметрии двойственных задач, аналогичной симметрии у задач линейного программирования. Определяющее свойство симметричной двойственности состоит в том, что двойственная к двойственной является исходной задачей оптимизации.

Формулируются и обсуждаются основные теоретические факты симметричной двойственности [1]. Рассматриваются ее приложения для формирования эффективных методов решения систем линейных неравенств (развитие подхода Голикова–Евтушенко [2]), для регуляризации задач линейного программирования (на базе установленных Ереминым фактов двойственности разных способов регуляризации [3]). Особое внимание уделяется приложениям к моделям потокораспределения при расчетах электрических и гидравлических цепей [1,4]. Рассматриваются новые алгоритмы расчета моделей гидравлических цепей эффективно учитывающие ортогональность матриц в ограничениях выражающих 1-й и 2-й законы Кирхгофа [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Зоркальцев В.И. (2004) *Симметричная двойственность. Приложения к моделям электрических и гидравлических цепей* . - Иркутск: Препринт ИСЭМ СО РАН, 2004, 40 с.

2. Голиков А.И. Евтушенко Ю.Г. (2001) *Новый метод решения систем линейных равенств и неравенств.*// Докл. РАН, 2001, том 381, № 4, с. 444-447.

3. Еремин И.И. (2003) *Двойственность для регуляризованных задач линейного программирования.*// Материалы конференции Проблемы оптимизации и экономические приложения. - Омск: Омский филиал ИМ СО РАН, – с. 33-35.

4. Епифанов С.П., Новицкий Н.Н. (2003) *Алгебраический анализ потокораспределения в гидравлических цепях с сосредоточенными параметрами.*// Методы исследования и моделирования технических, социальных и природных систем. - Новосибирск: Наука, 2003, - с. 221-240.

Епифанов Сергей Петрович, Зоркальцев Валерий Иванович,
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, факс (8-395-2) 42-67-96,
e-mail: Epifanov@isem.sei.irk.ru, zork@isem.sei.irk.ru

МИНИМАКСНАЯ МАТРИЧНАЯ КОРРЕКЦИЯ НЕСОВМЕСТНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. И. Ерохин

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} A & S \\ T & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ x_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $S \in \mathbb{R}^{m\times l}$, $T \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $U \in \mathbb{R}^{k\times l}$, $x_A \in \mathbb{R}^n$, $x_S \in \mathbb{R}^l$, $b \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^k$. Пусть $\mathcal{X}(A,S,T,U,b,d)$ – множество ее решений, причем $\mathcal{X}(A,S,T,U,b,d) = \emptyset$.

Пусть $H \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – некоторая матрица, $h \in \mathbb{R}^m$ – некоторый вектор. Для упрощения обозначений будем считать, что $H = (h_{ij})$, и, в то же время, $\begin{bmatrix} H & -h \end{bmatrix} = (h_{ij})$. Свяжем с системой (1) следующие две задачи:

$$\max_{i,j} |h_{ij}| \to \inf_{\mathcal{X}(A+H,S,T,U,b,d)\neq\emptyset} = \gamma, \tag{2}$$

$$\max_{i,j} |h_{ij}| \to \inf_{\mathcal{X}(A+H,S,T,U,b+h,d)\neq\emptyset} \gamma'. \tag{3}$$

Опираясь на результаты работы [1], можно показать, что от задач (2) и (3), которые являются задачами оптимизации в пространствах $\mathbb{R}^{m\times n}$ и $\mathbb{R}^{m\times(n+1)}$, можно перейти к соответствующим задачам оптимизации в пространствах $\mathbb{R}^{n+l}$, и, соответственно, $\mathbb{R}^{n+l+1}$:

$$\frac{\|b - Ax_A - Sx_S\|_\infty}{\|x_A\|_1} \to \inf_{Tx_A+Ux_S=d} = \gamma, \tag{4}$$

$$\frac{\left\|\begin{bmatrix} -A & b \end{bmatrix} z - Sx_S\right\|_\infty}{\|z\|_1} \to \inf_{[T\ \ -d]z+Ux_S=0} \gamma', \tag{5}$$

где $z \in \mathbb{R}^{n+1}$ – некоторый вектор.

Хотя задачи (4) и (5) проще чем (2) и (3), они все же являются задачами невыпуклого программирования, в силу чего подходы к их решению не очевидны. В настоящем докладе предполагается обсудить один из возможных подходов, существенно использующий алгоритмическую особенность симплекс-метода оперировать в процессе вычислений только допустимыми базисными решениями. Указанная особенность в сочетании с представлением векторов x_A и z в виде выпуклой комбинации вершин соответствующих многогранников $\|x_A\|_1 = \text{const}$ и $\|z\|_1 = \text{const}$ позволяет свести задачи (4),(5) к задачам линейного программирования, решаемым симплекс-методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерохин В. И. (2002) *Оптимальная матричная коррекция и регуляризация несовместных линейных моделей* // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 2002. Т. 9, № 2. С. 41–77.

Ерохин Владимир Иванович,
Борисоглебский государственный педагогический институт,
ул. Народная, 43, Борисоглебск Воронежской обл., 397160, Россия,
тел. (9-07354)648-89, факс (8-07354)626-01, e-mail: erohin_v_i@mail333.com

АВТОМАТИЧЕСКАЯ ГЛОБАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ.

А. Р. Ершов, О. В. Хамисов

Рассматривается задача глобальной минимизации функции $f(x)$, имеющей выпуклые и вогнутые опорные функции, на выпуклом компактном множестве $X \subset R^n$. Будем говорить, что функция $f(x), f : X \subset R^n \to R$, имеет вогнутую опорную функцию-миноратнту и выпуклую опорную функцию миноранту если существуют функции $\mu^-(x, y), \mu^- : R^n \times X \to R$ и $\mu^+(x, y), \mu^+ : R^n \times X \to R$ такие, что

1. $\mu^-(x, y)$ - непрерывна и вогнута по по x при фиксированном $y \in X$;

   $\mu^+(x, y)$ непрерывна и выпукла по x при фиксированном $y \in X$;
2. $\mu^-(x, y) \leq f(x) \leq \mu^+(x, y), \forall (x, y) \in X \times X$;
3. $\mu^-(y, y) = f(y) = \mu^+(y, y), \forall y \in X$;

Класс функций, удовлетворяющих приведенному определению, очень широк. В него, например, входят локально липшицевые функции. Рассматриваемые функции обладают следующими конструктивными свойствами [1]. Пусть $h(x)$ и $g(x)$ - функции, имеющие вогнутые и выпуклые опорные функции, тогда функции $f_i(x), i = \overline{1, 5}$ также имеют вогнутые и выпуклые опорные функции.

$f_1(x) = \lambda * h(x) + \beta * g(x), \lambda, \beta \in R$;
$f_2(x) = h(x) * g(x)$;
$f_3(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$, при условии $g(x) > 0$;
$f_4(x) = \max\{h(x), g(x)\}$;
$f_5(x) = \min\{h(x), g(x)\}$.

Для явно заданной функции применение данных конструктивных свойств может быть автоматизировано, если в качестве вспомогательных функций $f_i(x)$ рассматривать элементарные функции. Набор элементарных функций конечен. Например, в качестве таковых можно использовать следующие функции:

$$f_1(x) = x, \;\; f_2(x) = sin(x), \;\; f_3(x) = ln(x), \;\; f_4(x) = e^x, \;\; f_5(x) = \frac{1}{x}.$$

Затем, глобальный минимум ищется при помощи методики, описанной в [1]. Следовательно, задачу поиска глобального минимума явно заданной функции можно автоматизировать (по крайней мере, для задач средней размерности) так, что от пользователя потребуется только введение формулы, определяющей целевую функцию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Khamisov O. V. (1999) *On Optimization Properties of Functions with a concave Minorant.* Journal of Global Optimization, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, vol. 14, 1999, pp. 79-101

Хамисов Олег Валерьевич, Ершов Андрей Рудольфович
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-84-39,
e-mail: khamisov@isem.sei.irk.ru

О МЕТОДАХ УСЛОВНОЙ МИНИМИЗАЦИИ НЕГЛАДКИХ СТРОГО ПСЕВДОВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

И. Я. Заботин

Предлагаются алгоритмы условной минимизации строго псевдовыпуклых функций, использующие в реализациях при построении подходящих направлений процедуру погружения допустимого множества в многогранники.

Решается задача $\min\limits_{x\in D} f(x)$, где $f(x)$ – строго псевдовыпуклая дифференцируемая по направлениям функция ([1]), множество $D \subset R_n$ выпукло и замкнуто, $intD \neq \oslash$. Пусть $E(y) = \{x \in R_n : f(x) \le f(y)\}$, $D(y) = \{x \in D : f(x) \le f(y)\}$, $W(f, y) = \{p \in R_n : \langle p, x - y\rangle \le 0 \; \forall \; y \in E(y)\}$, $W(f, y, D) = \{p \in R_n : \langle p, x - y\rangle \le 0 \; \forall \; y \in D(y)\}$. Первый из предлагаемых методов решения задачи заключается в следующем. Выбирается точка $x_0 \in D$. На k – ом шаге полагается $W_k = \{p \in R_n : p \in W(f, x_k), ||p|| = 1\}$, выбирается конечное множество $P_k \subset W_k$, и отыскивается такая точка $\bar{x} \in D(x_k)$, что

$$\max_{p\in P_k} \langle p, \bar{x}_k - x_k\rangle \le \sigma_k \min_{x\in D(x_k)} \max_{p\in P_k} \langle p, x - x_k\rangle \,, \; 0 < \bar{\sigma} \le \sigma_k \le 1. \qquad (1)$$

Полагается $x_{k+1} = x_k + \beta_k s_k$, где $s_k = \bar{x}_k - x_k$, а шаг $\beta_k > 0$ выбирается различными способами из условия релаксации.

Второй из предлагаемых методов предназначен для решения задачи со строго выпуклым допустимым множеством D, т. е. при условии, что $\alpha z_1 + (1 - \alpha)z_2 \in intD$ $\forall \; z_1, z_2 \in D$, $\alpha \in (0, 1)$. Этот алгоритм отличается от предыдущего только тем, что на k-ом шаге подмножество P_k выбирается из множества $W_k = \{p \in R_n : p \in W(f, x_k, D), ||p|| = 1\}$.

Доказана сходимость методов. Получены оценки скорости сходимости. Предложена конечная итерационная процедура отыскания точки $\bar{x}_k$ из условия (1), где $\sigma_k < 1$, для случая, когда $D = \{x \in R_n : f_j(x) \le 0, j \in J\}$, $f_j(x)$ – строго псевдовыпуклы. На i-ом шаге этой процедуры, $i = 0, 1, ...$, отыскивается точка y_i минимума функции $\max\limits_{p\in P_k} \langle p, x - x_k\rangle$ на некотором многограннике M_i, содержащем множество D. Затем часть множества M_i, содержащая y_i, отсекается по определенному правилу. Процесс отсечений идейно близок к известным методам погружения, разработанным в [2] для задач математического программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заботин Я. И., Кораблев А. И. (1974) *Псевдовыпуклые функционалы и их экстремальные свойства*// Изв. вузов. Математика.– 1974. – N 4. – С. 27 – 31.
2. Булатов В. П. (1997) *Методы погружения в задачах оптимизации*// Новосибирск: Наука, 158 с.

Заботин Игорь Ярославич, Казанский государственный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Татарстан, Россия,
тел. (8-8432) 31-54-53, e-mail: Igor.Zabotin@ksu.ru

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

А. В. Зыкина

Рассмотрим сложную систему, функционирование которой задается характеристиками

$$F(x) = (f_1(x), ..., f_m(x)) \in R^m,$$

зависящими от внутренних параметров системы $x \in R^n$. Каждая характеристика оценивается вектором внешних параметров $y \in R^m_+$ и с помощью квадратной матрицы P задаются допустимые характеристики

$$F(x) \leq Py. \tag{1}$$

Требуется выбрать такие внешние параметры $y = y^*$, для которых внутренние параметры системы $x^* = x(y^*)$ задают допустимые характеристики (1) с минимальной суммарной оценкой $y^T F(x)$. Кроме того, для каждой координаты характеристики выполняются классические условия дополняющей нежесткости между ограничением на координату характеристики и соотвествующей координатой оценки.

Математическая модель для решения поставленной задачи задает обратную задачу оптимизации в следующем виде

$$\min_x \{y^T F(x) \mid F(x) - Py \leq 0\} \ , \tag{2}$$

$$y^T (F(x) - Py) = 0, \ y \geq 0 \ . \tag{3}$$

Обратные задачи оптимизации можно рассматривать как специальные задачи известных классов задач, а именно, нелинейные операторные уравнения, игры n лиц с равновесием по Нешу, иерархические игры с равновесием, реализующим принцип гарантированного результата и другие. Однако критический обзор возможных подходов к решению обратных задач оптимизации показывает невозможность, либо неэффективность использования известных методов решения [1].

В связи с этим представляется актуальной разработка новых подходов к решению обратных задач.

Выписывая условия Куна-Таккера для задачи (2) при фиксированном векторе параметров $y \in R^m$ и выбирая параметры y, удовлетворяющие условиям (3), получим задачу об обобщенном решении [2] для системы неравенств, задаваемых функциями $F(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антипин А.С. (1992) *Обратная задача оптимизации: постановка задачи и подходы к ее решению.* // Обратные задачи математического программирования – М.: ВЦ РАН.

2. Булавский В.А. (1981) *Методы релаксации для систем неравенств.* Новосибирск: НГУ.

Зыкина Анна Владимировна,
Омский государственный технический университет,
пр. Мира, 11, Омск, 644050, Россия, тел. (8-381-2) 65-20-84,
e-mail:zykina@omgtu.ru, zykin@iitam.omsk.net.ru

ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ В РЕГРЕССИОННОМ АНАЛИЗЕ

О. Н. Канева

Рассмотрим следующую задачу: построить регрессионную модель по выборке

$$(x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, N,\ x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in}).$$

Предполагается, что зависимость между входными x_i и выходной y_i величинами в векторной форме имеет вид $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_n x_n$ и предсказание осуществляется по формуле $y_i = b_0 + b_1 x_{i1} + \ldots + b_n x_{in}$, где $b = (b_0, \ldots, b_n)$ – вектор оценок неизвестного вектора параметров регрессии $\beta = (\beta_0, \ldots, \beta_n)$.

Действия внешних факторов и субъективные представления исследователя могут привести к нечеткой информации об объекте, в этом случае для решения поставленной задачи привлекаем аппарат нечетких множеств [1].

В такой постановке оценки b_j являются нечеткими числами B_j, которые, в свою очередь определим как нечеткие числа $(L - R)$-типа. В этом случае функции принадлежности нечетких чисел μ_{B_j} определяются четверкой своих параметров, то есть в виде $B_j = (b_j^-, b_j^+, d_j^L, d_j^R),\ j = 0, \ldots, n$, где b_j^-, b_j^+ – нижние и верхние модальные значения, d_j^L, d_j^R – левые и правые коэффициенты нечеткости. Из свойств нечетких чисел $(L - R)-$типа следует, что на выходе такой модели получим так же нечеткое число $(L - R)-$типа $Y = (y^-, y^+, d^L, d^R)$, где параметры нечеткого числа Y есть линейная комбинация соответствующих параметров нечетких чисел B_j.

Нахождение параметров $b_j^-, b_j^+, d_j^L, d_j^R$ сведем к решению следующей системы неравенств:

$$\begin{array}{ll} \mu_Y(y_i) \geq \alpha, & i = 1, \ldots, N, \\ d_j^L \geq 0, d_j^R \geq 0, & j = 0, \ldots, n. \end{array} \qquad (1)$$

Из решения системы (1) найдем нечеткие коэффициенты регрессии B_j, при которых результат наблюдения y_i содержится в Y со степенью принадлежности не меньше α, $\alpha \in [0, 1]$.

Если выборка содержит "аномальные" наблюдения, то параметры неопределенности d^L, d^R выхода модели Y будут иметь достаточно большие значения, а это значит, что прогноз будет иметь большую степень неопределенности. Чтобы избежать этого, изменим систему (1) следующим способом:

$$\mu_Y(y_i) \geq \alpha,\ i = 1, \ldots, N,$$

$$0 \leq d_j^L \leq \bar{d}_j^L, 0 \leq d_j^R \leq \bar{d}_j^R,\ j = 0, \ldots, n.$$

и для ее исследования используем аппарат обобщенных решений [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Вощинин А. П.,Сотиров Г. Р. (1989) *Оптимизация в условиях неопределенности: научное издание* М: Изд-во МЭИ; София: Изд-во "Техника".

2. Булавский В. А. (1981) *Методы релаксации для систем неравенств.* - Новосибирск: НГУ.

Канева Ольга Николаевна,
Омский государственный технический университет,
проспект Мира, 11, Омск, 644050, Россия, тел. (8-381-2) 65-20-84,
e-mail: kaneva@omgtu.ru, okaneva@yandex.ru

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕВЫПУКЛОГО КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Е. А. Котельников

Рассматривается задача: максимизировать $f(x) = x^T Qx + c^T x$ на многограннике $V = \{x \in R^n | Ax = b,\ \alpha \le x \le \beta\}$. Здесь A – матрица размера $m \times n$; Q – матрица размера $n \times n$; $\alpha,\ \beta,\ c \in R^n$; $b \in R^m$. Пусть $Q > 0$ и LDL^T – ее разложение Холесского. Сделав замену $y = L^T x$, преобразуем задачу к виду: максимизировать $\phi(y) = y^T Dy + c^T L^{-T} y$ на $G = \{y \in R^n | AL^{-T} y = b,\ \alpha \le L^{-T} y \le \beta\}$, и найдем $u_i = \min\limits_G y_i$ и $v_i = \max\limits_G y_i$. Рассмотрим мажоранту $M_G(y) = (L^{-1}c + Du + Dv)^T x - v^T Du$ функции ϕ на G, точку $y^* \in G$, имеющую хотя бы одну компоненту $u_i < y_i^* < v_i$, множества $G_i^- = \{y \in G | y_i \le y_i^*\},\ G_i^+ = \{y \in G | y_i^* \le y_i\}$ и мажоранты $M_{G_i^-}(y),\ M_{G_i^+}(y)$ функции ϕ на G_i^- и G_i^+ соответственно. Функции $M_G,\ M_{G_i^-},\ M_{G_i^+}$ удовлетворяет условиям $M_G \ge M_{G_i^-}$ на G_i^-, $M_G \ge M_{G_i^+}$ на $G_i^+,\ M_{G_i^-}(y^*) = M_{G_i^+}(y^*)$, которые позволяют построить метод ветвей и границ с односторонним ветвлением, на каждом уровне которого ϕ аппроксимируется сверху убывающей последовательностью линейных функций. Если Q – знакопеременная матрица, то ее можно представить $Q = Q_1 - Q_2,\ Q_1 > 0,\ Q_2 \ge 0$ с помощью, например, модифицированного разложения Холесского. Пусть $Q_1 = LDL^T$, тогда целевая функция преобразованной задачи имеет вид $\phi(y) = y^T Dy - y^T L^{-1} Q_2 L^{-T} y + c^T L^{-T} y$, а ее мажоранта $M_G(y) = (L^{-1}c + Du + Dv)^T y - y^T L^{-1} Q_2 L^{-T} y - u^T Dv$ удовлетворяет условиям, которые позволяют аппроксимировать ϕ убывающей последовательностью вогнутых мажорант на подмножествах множества допустимых решений.

Котельников Евгений Алексеевич,
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (8-383-2) 34-10-66, факс (8-383-2) 34-37-83, e-mail: zabin@rav.sscc.ru

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ НЕВЫПУКЛОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ НА ВЫПУКЛОМ КОМПАКТНОМ МНОЖЕСТВЕ.

И. В. Мокрый, О. В. Хамисов

В докладе рассматривается следующая задача глобальной оптимизации

$$q(x) \to \min, \tag{1}$$

$$x \in X \subset R^n, \tag{2}$$

где $q(x) = x^T Qx + c^T x, Q$ – $n \times n$ симметичная матрица, $c \in R^n$, множество X определяется системой неравенств

$$X = \{x \in R^n : f_i(x) \leq 0, i = 1, ..., m\}, \tag{3}$$

$f_i(x)$ – выпуклые дважды непрерывно дифференцируемые функции. Предполагается, что множество X не пусто и ограничено.

Идея получения “хорошего” локального решения задачи (1)–(3) состоит в следующем. В множество X вписывается эллипсоид и целевая функция (1) минимизируется на этом эллипсоиде. Известно [1], что подобная задача полиномиально разрешима. Затем, используя полученное оптимальное решение вспомогательной задачи в качестве стартовой точки, осуществляется локальный спуск на всем множестве X.

В докладе обсуждаются различные способы вписывания вспомогательного эллипсоида в X, сравниваются различные методики решения вспомогательной задачи глобальной минимизации невыпуклой квадратичной функции на эллипсоиде, приводятся результаты численных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Y. Ye (1992) *On affine scaling algorithm for nonconvex quadratic programming.*- Mathematical Programming, v56, N3, 1992, p.285-300.

Хамисов Олег Валерьевич, Мокрый Игорь Владимирович,
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-84-39
e-mail: khamisov@isem.sei.irk.ru

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ЭКСТРАГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Л. Д. Попов

Пусть заданы X — выпуклое замкнутое множество точек евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ и $F(x)$ — монотонный липшицевый оператор, действующий из X в $\mathbf{R}^n$. Решить вариационное неравенство $\mathrm{VI}(X,F)$ — значит найти точку x, удовлетворяющую условиям

$$x \in X, \quad \langle F(x),\, y-x\rangle \geq 0 \qquad \forall y \in X;$$

здесь скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначают скалярное произведение.

В докладе обсуждается модификация регуляризованного экстраградиентного метода из [1], предложенная в [2] и описываемая следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \pi_X(x_k - \mu(F_k(\bar{x}_k) + \alpha_k x_k)), \\ \bar{x}_{k+1} = \pi_X(x_{k+1} - \mu(F_k(\bar{x}_k) + \alpha_{k+1} x_{k+1})); \end{cases}$$

здесь π_X — операция проектирования на множество X, $\{x_k\}$ — основная последовательность, $\{\bar{x}_k\}$ — последовательность ведущих (прогнозных) точек, $\mu > 0$ и $\alpha_k > 0$ — числовые параметры,

$$\|F_k(x) - F(x)\| \leq \delta_k(1 + \|x\|),\ \delta_k > 0, \quad k = 0, 1, \ldots .$$

Начальные приближения x_0, $\bar{x}_0$ выбираются в X произвольно.

Основное отличие модифицированного метода от прототипа из [1] состоит в том, что значение оператора F на каждом шаге вычисляется только один раз (хотя затем используется дважды: один раз при переопределении точки x_k основной последовательности, второй раз — при переопределении точки $\bar{x}_k$, используемой при экстраполяции направления спуска). В докладе обсуждаются условия сходимости итерационной последовательности в обычном смысле, возможности применения рассматриваемого подхода к противоречивым (несобственным [3]) задачам и предварительные результаты численных экспериментов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 04-01-00108 и НШ-792.2003.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антипин А. С., Васильев Ф. П. (2003) *Регуляризованный экстраградиентный метод для решения вариационных неравенств* // Вычислит. методы и программирование. 2002. Т. 3, № 2. С. 144–150.
2. Попов Л. Д. (2004) *О схемах формирования ведущей последовательности в регуляризованном экстраградиентном методе решения вариационных неравенств* // Известия вузов. Математика. 2004. № 1 (500). С. 70–79.
3. Еремин И. И., Мазуров Вл. Д., Астафьев Н. Н. (1983) *Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования.* – М.: Наука.

Попов Леонид Денисович,
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, 620219, Екатеринбург,
тел. (3432) 375-34-23. факс: (3423) 374-25-81, e-mail: popld@imm.uran.ru

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДОВ ЛОКАЛЬНОГО ПОИСКА В ЗАДАЧАХ НАХОЖДЕНИЯ ДОПУСТИМОЙ ТОЧКИ СИСТЕМ НЕВЫПУКЛЫХ КВАДРАТИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ.

Е. В. Таирова

Рассматривается задача нахождения допустимой точки для системы невыпуклых квадратичных неравенств

$$g_i(x) \leq 0, \tag{1}$$

$$x \in X, \tag{2}$$

где X - выпуклый компакт.

В докладе рассматривается способ сведения задачи (1)–(2) к задаче вогнутого программирования. Сопоставим задаче (1)–(2) следующую задачу:

$$\max g_i(x) \to min, \tag{3}$$

$$x \in X. \tag{4}$$

Используя свойство диагонального доминирования можно представить целевую функцию (3) в виде разности двух выпуклых функций, а задачу (3)-(4) переписать в следующем виде

$$\max_i \{\overline{g}_i(x)\} - N \parallel x \parallel^2,$$

$$x \in X,$$

где N -константа, а $\overline{g}_i(x)$ - выпуклые квадратичные функции.

Вводя новую переменную t, перепишем последнюю задачу в следующем эквивалентном виде

$$t - N \parallel x \parallel^2 \to min, \tag{5}$$

$$\overline{g}_i(x) \leq t, \tag{6}$$

$$x \in X. \tag{7}$$

Задача (5)–(7) является задачей вогнутого программирования и для ее решения применяются методы локального поиска [1]. Приводятся результаты численных экспериментов. Предлагаемый подход распространяется и на решение общих задач невыпуклого квадратичного программирования при помощи различных модификаций метода центров.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Horst, P. M. Pardalos, N. Thoai, (1995) *Introduction to Global Optimization.* – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 320 p.

Таирова Елена Викторовна,
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-87-11,
e-mail: tairova_l@mail.ru, tairova_E@rambler.ru

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВОЙСТВЕННЫХ АЛГОРИТМОВ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК НА СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ ДВУХСТОРОННИХ НЕРАВЕНСТВ

А. Ю. Филатов

В [1] для поиска решения $x \in R^n$ или максимально быстрого выявления несовместности системы двухсторонних линейных неравенств

$$Ax = b, \quad \underline{x} \le x \le \overline{x}, \tag{1}$$

где $A \in R^{m \times n}$ - матрица полного ранга, $b \in R^m$, $\underline{x} < \overline{x} \in R^n$ - заданные векторы, было предложено использовать двойственные алгоритмы. Они, как правило, значительно быстрее вырабатывают решение системы (1), если оно существует, а также быстрее устанавливают факт противоречивости условий на базе следующего критерия:

Теорема 1. *Система (1) несовместна в том и только в том случае, когда существует вектор $u \in R^m$, при котором*

$$\psi(u) \equiv b^T u - \overline{x}^T (A^T u)_+ - \underline{x}^T (A^T u)_- > 0. \tag{2}$$

Двойственные алгоритмы основаны на решении следующей задачи квадратичного программирования относительно векторов переменных $u \in R^m$, $v, w, y \in R^n$:

$$\frac{1}{2}\alpha\, y^T y - b^T u - \overline{x}^T v + \underline{x}^T w \to \min, \quad A^T u - v + w - y = 0, \quad v \ge 0, \ \ w \ge 0. \tag{3}$$

Обозначим $\tilde{y}(\alpha)$ оптимальное значение y в задаче (3) при заданном $\alpha > 0$. Доказана

Теорема 2. *Если система (1) совместна, то задача (3) имеет решение. Вектор $\tilde{x} = \alpha\tilde{y}(\alpha)$ будет решением системы (1) с минимальной нормой. Если система (1) несовместна, то задача (3) неразрешима, ее целевая функция неограниченна снизу.*

К решению задачи (3) с $\alpha = 1$ сводится подход Голикова-Евтушенко. Предельный случай $\alpha \to \infty$ идентичен постановке в виде задачи линейного программирования, использовавшейся ранее автором данного доклада.

В работе проводятся следующие эксперименты:

1. Исследование эффективности использования различных вариантов весовых коэффициентов для двойственных алгоритмов, базирующихся на решении задачи (3).

2. Проверка работы алгоритмов в пограничных условиях, когда либо имеется достаточно узкая допустимая область, либо система (1) несовместна, но за счет небольших корректировок исходных данных может быть сделана совместной.

3. Проверка практической эффективности использования алгоритмов, основанных на решении задачи (3) при конечных значениях параметра α. Эти алгоритмы обладают рядом преимуществ. В частности, в этом случае они ориентированы на поиск решения x с минимальной евклидовой нормой, что важно при решении нелинейных задач на основе линеаризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Зоркальцев, А. Ю. Филатов (2004) *Новые варианты двойственных алгоритмов внутренних точек для систем линейных неравенств* // Журнал вычислительной математики и математической физики, (в печати).

Филатов Александр Юрьевич, Институт систем энергетики им.Мелентьева СО РАН, Россия, 664033, Иркутск, ул.Лермонтова, 130,
тел. (8-395-2) 42-97-64, факс (8-395-2) 42-67-96, e-mail: fial@isem.sei.irk.ru

АЛГОРИТМЫ В МЕТОДЕ ШТРАФОВ С ДВУСТОРОННИМ ПРИБЛИЖЕНИЕМ К РЕШЕНИЮ

И. А. Фукин

Пусть функции $f(x), f_i(x), i = \overline{1,m}$ определены и непрерывны в R_n, множество $D(p) = \{x \in R_n : f_i(x) + p \leq 0, i = \overline{1,m}\}$. Требуется найти $f^* = \min\{f(x), x \in D(0)\}$ с заданной точностью ε. То есть, необходимо отыскать точку $x' \in X^*_\varepsilon$, где $X^*_t = \{x \in D(0), f(x) \leq f^* + t\}$.

Обозначим $g(x) = \max\{f_i(x), i = \overline{1,m}\}$, $F_p(x,C) = f(x) + CV_p(x)$, где функция $V_p(x)$ такая, что $V_p(x) = 0$ при $x \in D(p)$ и $V_p(x) > 0$ при $x \notin D(p)$, множество $M(\alpha) = \{x \in R_n : V_p(x) \leq \alpha\}$, число $\overline{\alpha} = \max\{\alpha : M(\alpha) \subset D(0)\}$, точка $x(C) \in \operatorname{Argmin}\{f(x) + CV_p(x), x \in R_n\}$, число $\gamma \in (0,1)$.

Теорема. Пусть $V_p(x) = W(g(x)+p)$, где $W(t)$-неубывающая по t функция. Тогда неравенство $f(x(C)) \leq f^*$ выполняется при всех $C > 0$ таких, что $g(x(C)) \geq 0$.

Из теоремы следует, что при $g(x(C)) = 0$ имеет место равенство $f(x(C)) = f^*$.

В [1] приведен алгоритм решения уравнения $g(x(C)) = 0$ по C с заданной точностью ε по функционалу $f(x(C))$ путем построения последовательностей $\{C'_k\}, \{C''_k\}$ таких, что $C'_k \to C^*, C''_k \to C^*$, где $C^* = \{C > 0 : g(x(C)) = 0\}$ и для всех k выполняется $f(x(C'_k)) \geq f^*, f(x(C''_k)) < f^*$. Вычисление останавливают при выполнении неравенства $f(x(C'_k)) - f(x(C''_k)) \leq \varepsilon$.

Для функции штрафа более общего вида в работе [2] оценено значение p, при котором выполнение неравенств $\gamma\overline{\alpha} \leq V_p(x(C)) \leq \overline{\alpha}$ влечет за собой включение $x(C) \in X^*_\varepsilon$. Там же описан алгоритм, обеспечивающий нахождение $C^* \in \{C > 0 : \gamma\overline{\alpha} \leq V_p(x(C)) \leq \overline{\alpha}\}$ за конечное число шагов с помощью двусторонних приближений. Вычислено значение $\overline{\alpha}$ для некоторых конкретных функций штрафа. Число γ в алгоритме является параметром и может выбираться произвольно из интервала $(0,1)$. Численные эксперименты показали, что при выборе значений γ, близких к 0 или 1 наблюдается значительное увеличение времени вычислений по сравнению со случаем $\gamma \in (0.1, 0.9)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заботин Я. И., Фукин И. А. (2000) *Об одной модификации метода сдвига штрафов для задач нелинейного программирования* // Изв. вузов. Матем., 2000, N12, с. 49–54.
2. Заботин Я. И., Фукин И. А. (2004) *Алгоритмы в методе штрафов с аппроксимацией допустимого множества* // Изв. вузов. Матем., 2004, N1, с. 36–47.

Фукин Игорь Анатольевич,
Казанский гос. университет, Казань, ул. Кремлевская, 18, каф. эконом. кибернетики,
тел.: (8432)31-54-53, e-mail: Igor.Fukin@ksu.ru

ПСЕВДООБОБЩЕННОЕ ВАРИАЦИОННОЕ НЕРАВЕНСТВО

Н. Б. Шамрай

Рассмотрим обобщенное вариационное неравенство (ОВН) [1]:

$$\Phi^T(x^*)(G(x) - G(x^*)) \geq 0, \ \forall G(x) \in \Omega, \tag{1}$$

где $\Omega \subseteq R^n$ — непустое замкнутое выпуклое множество, $\Phi, G : R^n \to R^m$.

При $G(x) = x$ ОВН (1) сводится к классическому вариационному неравенству:

$$\Phi^T(x^*)(x - x^*) \geq 0, \ \forall x \in \Omega. \tag{2}$$

К итерационным процессам первого порядка для решения вариационных неравенств (1) и (2) относятся проекционные методы. Итерационный процесс для ОВН (1) ведется по функции $G(x)$, что вообще говоря не очень удобно [1]. Итерационный процесс для ВН (2) ведется по x, но не предполагает наличия функции $G(x)$.

Чтобы устранить указанные недостатки, построим вариационное неравенство вида:

$$\Phi^T(x^*)(G(x) - G(x^*)) \geq 0, \ \forall x \in \Omega. \tag{3}$$

Такое вариационное неравенство назовем псевдообобщенным (ПОВН).

В работе предлагается итерационный процесс для ПОВН (3). Процесс строит последовательность точек x^k, которая сходится к решению x^* ПОВН (3) при определенных предположениях о свойствах функций $\Phi(x)$ и $G(x)$.

Показано, что задача решения ПОВН в некоторых частных случаях совпадает с обобщенным решением [2] системы неравенств

$$G(x) \leq 0, \ \forall x \in R^n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Noor M. A. (2002) *Iterative methods for generalized variational inequalities*// Applied Mathematics Letters, 15(2002), 1(январь), 77-82.

2. Булавский А. В. (1981) *Методы релаксации для систем неравенств*. Новосибирск: НГУ.

Шамрай Наталья Борисовна,
Омский государственный технический университет,
Мира 11, Омск, 644050, Россия,
тел. (8-381-2) 65-20-84,
e-mail: nb_shamray@mail.ru