КОНЕЧНЫЕ КОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ: ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА ОПТИМАЛЬНОСТИ (“ОТ ПАРЕТО ДО НЭША”) И УСТОЙЧИВОСТЬ МНОЖЕСТВА ОБОБЩЕННО-ЭФФЕКТИВНЫХ СИТУАЦИЙ

В. А. Емеличев, С. Е. Бухтояров

Пусть $X_i \subset \mathbf{R}$ – конечное множество (чистых) стратегий игрока $i \in N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 2$, $f_i(x) = C_i x$ – функция выигрыша игрока i, определенная на множестве ситуаций игры $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$, $|X_i| > 1$. Здесь C_i – i-я строка матрицы $C = (c_{ij})_{n\times n} \in \mathbf{R}^{nn}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $x_i \in X_i$, $i \in N_n$.

Для любой коалиции игроков $J \subseteq N_n$ и любой ситуации $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in X$ введем множество $W(x^0, J) = \prod\limits_{j\in N_n} W_j(x^0, J)$, где $W_j(x^0, J) = X_j$ при $j \in J$ и $W_j(x^0, J) = \{x_j^0\}$ при $j \in N_n \backslash J$. Пусть $s \in N_n$, $N_n = \bigcup\limits_{r\in N_s} J_r$ – разбиение множества N_n на s коалиций. Определим множество $(J_1, J_2, \ldots, J_s)$-эффективных ситуаций игры с матрицей C согласно формуле

$$Q^n(C, J_1, J_2, \ldots, J_s) = \{x \in X \ : \ \forall r \in N_s \quad (\pi(x, C, J_r) = \emptyset)\},$$

где $\pi(x, C, J_r) = \{x' \in W(x, J_r) \ : \ C_{J_r} x \leq C_{J_r} x' \ \& \ C_{J_r} x \neq C_{J_r} x'\}$, C_{J_r} – подматрица матрицы C, состоящая из строк с номерами множества J_r. Очевидно, что $Q^n(C, N_n)$ – множество Парето, а $Q^n(C, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\})$ – множество ситуаций равновесия по Нэшу.

Для каждого числа $r \in N_s$ через $C^{(r)}$ будем обозначать квадратную матрицу размера $|J_r| \times |J_r|$, состоящую из элементов матрицы C, находящихся на пересечении строк и столбцов с номерами J_r. Радиусом устойчивости множества $(J_1, J_2, \ldots, J_s)$ – эффективных ситуаций $Q^n(C, J_1, J_2, \ldots, J_s)$ назовем число $\rho^n(C, J_1, J_2, \ldots, J_s) = \sup\, \Xi$, если $\Xi \neq \emptyset$ и $\rho^n(C, J_1, J_2, \ldots, J_s) = 0$ в противном случае. Здесь

$$\Xi = \{\varepsilon > 0 \ : \ \forall\, C' \in \Omega(\varepsilon) \quad (Q^n(C, J_1, J_2, \ldots, J_s) \supseteq Q^n(C + C', J_1, J_2, \ldots, J_s))\},$$

$$\Omega(\varepsilon) = \{C' \in \mathbf{R}^{nn} \ : \ ||C'||_\infty < \varepsilon\}, \qquad ||C||_\infty = \max\{|c_{ij}| \ : \ (i, j) \in N_n \times N_n\}.$$

Положим

$$\varphi^n(C, J_1, J_2, \ldots, J_s) = \min_{x\in \overline{Q^n}(C, J_1, J_2, \ldots, J_s)} \ \max_{x'\in W(x, J_r)\backslash\{x\}} \ \max_{r\in N_s} \ \min_{i\in J_r} \frac{C_i(x' - x)}{||x' - x||_1},$$

где $||z||_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |z_i|$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $\overline{Q^n}(C, J_1, J_2, \ldots, J_s) = X \backslash Q^n(C, J_1, J_2, \ldots, J_s)$.

Теорема. Если $\overline{Q^n}(C, J_1, J_2, \ldots, J_s) \neq \emptyset$, то

$$\varphi^n(C, J_1, J_2, \ldots, J_s) \leq \ \rho^n(C, J_1, J_2, \ldots, J_s) \ \leq \ \max\{||C^{(r)}||_\infty \ : \ r \in N_s\}.$$

Емеличев Владимир Алексеевич, Бухтояров Сергей Евгеньевич,
Белорусский государственный университет,
пр. Ф. Скорины, 4, Минск, 22050, Беларусь,
e-mail: emelichev@bsu.by

РАДИУС КВАЗИУСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ БУЛЕВА ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. А. Емеличев, В. Н. Кричко

Пусть C_i — i–я строка матрицы $C = [c_{ij}]_{k\times n} \in \mathbf{R}^{kn}$, $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in \mathbf{R}^{mn}$, $b = (b_1, b_2, ..., b_m)^T \in \mathbf{R}^m$, $k \geq 1$, $n \geq 2$, $m \geq 1$. Будем рассматривать следующую модель k-критериальной (векторной) задачи булева программирования

$$|C_i x| \to \max, \quad i \in N_k = \{1, 2, ..., k\} \tag{1}$$

$$Ax \leq b, \quad x \in \mathbf{E}^n \backslash \{\overline{\mathbf{0}}\}. \tag{2}$$

Множество Парето [1] данной задачи обозначим через $P^k(A, b, C)$. Радиусом квазиустойчивости задачи (1)-(2) назовем число $\rho^k(A, b, C) = \sup\Omega$ при $\Omega \neq \emptyset$, $\rho^k(A, b, C) = 0$ при $\Omega = \emptyset$. Здесь $\Omega = \{\varepsilon > 0 : \ \forall (A', b', C') \in \mathcal{R}(\varepsilon) \ (P^k(A, b, C) \subseteq P^k(A+A', b+b', C+C'))\}$, $\mathcal{R}(\varepsilon) = \{(A', b', C') \in \mathbf{R}^{mn} \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{kn} : \ ||A'|| < \varepsilon, ||b'|| < \varepsilon, ||C'|| < \varepsilon\}$, $|| \ ||$– чебышевская норма l_∞ в соответствующем пространстве.

Введем функцию

$$\alpha(x, x') = \max_{i \in N(x, \ x')} \min\{\frac{|C_i(x + x')|}{||x||^* + ||x'||^*}, \frac{|C_i(x - x')|}{||x - x'||^*}\},$$

где $N(x, \ x') = \{i \in N_k : \ |C_i x| \geq |C_i x'|\}$, $|| \ ||^*$– норма l_1 в соответствующем пространстве. Через X обозначим множество всех векторов, удовлетворяющих системе (2).

Теорема. *Пусть*

$$\nu(x) = \min_{i \in N_m} \frac{b_i - A_i x}{||x||^* + 1},$$

$$\lambda(x) = \begin{cases} \min\{\alpha(x, x') : \ x' \in X \setminus \{x\}\} & \text{при } X \neq \{x\}, \\ \infty & \text{при } X = \{x\}, \end{cases}$$

$$t(x) = \begin{cases} \min_{x' \in \mathbf{E}^n \backslash X} \max\{\alpha(x, x'), -\nu(x')\} & \text{при } X \neq \mathbf{E}^n, \\ \infty & \text{при } X = \mathbf{E}^n, \end{cases}$$

где A_i — i–я строка матрицы A. Тогда для радиуса квазиустойчивости $\rho^k(A, b, C)$ векторной задачи (1)-(2) справедлива формула

$$\rho^k(A, b, C) = \min_{x \in P^k(A, b, C)} \min\{\nu(x), \lambda(x), t(x)\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Емеличев В. А., Кричко В. Н. (1999) *Об устойчивости паретовского оптимума векторной задачи булева программирования* // Дискретная математика. Т. 11, вып. 4. С. 27-32.

Емеличев Владимир Алексеевич, Кричко Виталий Николаевич
Белорусский государственный университет,
пр. Ф. Скорины, 4, Минск, 220050, Беларусь,
e-mail: emelichev@bsu.by, leonovich@tut.by

О РАДИУСЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЭФФЕКТИВНОГО РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ БУЛЕВА ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ЧАСТНЫМИ КРИТЕРИЯМИ, ЯВЛЯЮЩИМИСЯ ПРОЕКЦИЯМИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ НА $\mathbf{R}_+$

В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин

На множестве булевых векторов $X \subseteq \mathbf{E}^n = \{0,1\}^n$ зададим векторный критерий

$$([A_1x+b_1]^+, [A_2x+b_2]^+, \dots, [A_mx+b_m]^+) \to \min_{x \in X},$$

где $[\gamma]^+ = \max\{0,\gamma\}$, A_i – i-я строка матрицы $A = \{a_{ij}\} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbf{R}^m$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $m \geq 1$, $n \geq 2$.

Функции вида $[A_ix+b_i]^+$, $x \in \mathbf{R}^n$, играют существенную роль в процедурах коррекции несовместных систем линейных неравенств, а также используются при исследовании несобственных задач линейного программирования [1].

Под радиусом устойчивости $\rho^m(x,A,b)$ эффективного вектора x, т. е. элемента множества Парето $P^m(A,b)$, будем, как обычно (см., например, [2]), понимать предельный уровень возмущений в пространстве $\mathbf{R}^{m\times(n+1)}$ (с метрикой l_1) параметров векторного критерия, сохраняющих эффективность x.

Теорема. Для вектора $x \in P^m(A,b)$ верна формула

$$\rho^m(x,A,b) = \min\{\alpha(x,x',A,b) + \beta(x,x',A,b) \ : \ x' \in X \setminus \{x\}\},$$

где

$$\alpha(x,x',A,b) = \sum_{i=1}^m \left[[A_ix'+b_i]^+ - [A_ix+b_i]^+\right]^+,$$

$$\beta(x,x',A,b) = \min\{\gamma_i(x,x',A_i,b_i) \ : \ i \in N_m\},$$

$$\gamma_i(x,x',A_i,b_i) = \begin{cases} [-A_ix-b_i]^+ & \text{при } \Delta(x,x') \neq \emptyset, \\ [-A_ix-b_i]^+ + [[-A_ix-b_i]^+ - [-A_ix'-b_i]^+]^+ & \text{при } \Delta(x,x') = \emptyset, \end{cases}$$

$$\Delta(x,x') = \{j \in N_n \ : \ x_j - x'_j = 1\},$$

$$N_k = \{1,2,\dots,k\}.$$

Работа поддержана Государственной программой фундаментальных исследований Республики Беларусь “Математические структуры 29” (грант 913/28).

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремин И. И., Мазуров Вл. Д., Астафьев Н. Н. (1983) *Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования.* М.: Наука. 336 с.

2. Бухтояров С. Е., Емеличев В. А., Степанишина Ю. В. (2003) *Вопросы устойчивости некоторых дискретных задач с параметрическим принципом оптимальности* // Кибернетика и системный анализ. № 4. С. 155 – 166.

Емеличев Владимир Алексеевич, Кузьмин Кирилл Геннадьевич,
Белорусский государственный университет,
пр. Ф. Скорины, 4, Минск, 220050, Беларусь,
e-mail: emelichev@bsu.by, kuzminkg@mail.ru

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В. А. Емеличев, А. М. Леонович

Пусть $E = \{e_1,\ e_2, ...,\ e_m\}$, $m \geq 2$, множество траекторий $T \subseteq 2^E \setminus \{\emptyset\}$, $|T| \geq 2$, A_i — i-я строка матрицы $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $n \geq 1$. Пусть частные критерии $n-$критериальной задачи $Z^n(A)$ поиска множества Парето $P^n(A)$ имеют вид:

$$\Sigma\text{-MINMAX}:\ f_i(t,\ A_i) = \max\{\sum_{j\in N(s)} a_{ij} :\ s \in S(t,\ k_i)\} \ \to\ \min_{t\in T},\ i \in I_1,$$

$$\Sigma\text{-MINMIN}:\ f_i(t,\ A_i) = \min\{\sum_{j\in N(s)} a_{ij} :\ s \in S(t,\ k_i)\} \ \to\ \min_{t\in T},\ i \in I_2,$$

где $S(t,\ k_i) = \{s \subseteq t\ :\ |s| = \min\{|t|,\ k_i\}\}$, $N(s) = \{j \in N_m : e_j \in s\}$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $I_1 \cup I_2 = N_n = \{1, 2, ...,\ n\}$; $k_1,\ k_2, ...,\ k_n$ — заданные числа из N_m.

Следуя [1, 2], траекторную задачу $Z^n(A)$ назовем устойчивой, если справедлива формула $\exists\varepsilon > 0\ \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon)\ (P^n(A + B) \subseteq P^n(A))$, где $\mathcal{B}(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{n\times m} :\ ||B|| < \varepsilon\}$. Ясно, что при $\overline{P}^n(A) = T \backslash P^n(A) = \emptyset$ задача $Z^n(A)$ устойчива.

Для $i \in N_n$ и $t \in T$ введем обозначения

$$W_i(t,\ A) = \begin{cases} \{t' \in T\backslash\{t\} :\ \ U_i(t',\ A_i) \subseteq U_i(t,\ A_i)\}, & \text{если } i \in I_1, \\ \{t' \in T\backslash\{t\} :\ \ U_i(t,\ A_i) \subseteq U_i(t',\ A_i)\}, & \text{если } i \in I_2, \end{cases}$$

$$U_i(t,\ A_i) = \begin{cases} \operatorname{Arg\,max}\{\sum_{j\in N(s)} a_{ij}\ :\ s \in S(t,\ k_i)\}, & \text{если}\ \ i \in I_1, \\ \operatorname{Arg\,min}\{\sum_{j\in N(s)} a_{ij}\ :\ s \in S(t,\ k_i)\}, & \text{если}\ \ i \in I_2. \end{cases}$$

Теорема. *При* $\overline{P}^n(A) \neq \emptyset$ *задача* $Z^n(A)$, $n \geq 1$, *устойчива тогда и только тогда, когда справедлива формула*

$$\forall t \in \overline{P}^n(A)\ \ \exists t' \in P^n(A)\ \ \forall i \in N_n\ \ (f_i(t,\ A_i) \leq f_i(t',\ A_i) \implies\ \ t' \in W_i(t,\ A_i)).$$

Работа поддержана Государственной программой фундаментальных исследований Республики Беларусь "Математические структуры 29" (грант 913/28).

ЛИТЕРАТУРА

1. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., Леонович А. М. (2004) *Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации* // Автоматика и телемеханика. N 2. С. 79–92.

2. Emelichev V. A., Girlich E., Nikulin Yu. V., Podkopaev D. P. (2002) *Stability and regularization of vector problen of integer linear programming* // Optimization. Vol. 51, N 4. P. 645–676.

Емеличев Владимир Алексеевич, Леонович Андрей Михайлович,
Белорусский государственный университет,
пр. Ф. Скорины, 4, Минск, 220050, Беларусь,
e-mail: emelichev@bsu.by, leonovich@tut.by

КАЧЕСТВЕННАЯ НИЖНЯЯ ОЦЕНКА В КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДВУХУРОВНЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

М. С. Ершова

Рассматривается задача двухуровневого программирования:

$$\min_x F(x,y)$$

при условиях

$$G_i(x,y) \le 0,\ i = 1,...,p;$$

$$\min_y f(x,y);\ g_i(x,y) \le 0,\ i = 1,...,q. \tag{1}$$

Здесь $x \in E^n$, $y \in E^m$ — векторы переменных соответственно верхнего и нижнего уровня, F и f — квадратичные по совокупности переменных функции, причем f — выпуклая, G_i — выпуклые квадратичные, а g_i — линейные функции. Пусть в задаче нижнего уровня (1) допустимая область ограничена.

Двухуровневая задача математического программирования может быть представлена как одноуровневая

$$\min_{x,y} F(x,y);\ (x,y) \in \Psi,$$

где Ψ — неявно заданное допустимое множество, называемое индуктивной областью. Индуктивная область является частью слабого допустимого множества

$$S = \{(x,y) : G_i(x,y) \le 0,\ i = 1,...,p,\ g_i(x,y) \le 0,\ i = 1,...,q\}.$$

Для такой задачи предложен метод ветвей и границ, основанный на последовательном разбиении слабого допустимого множества, а вместе с ней неявно и индуктивной области. Элемент разбиения S_p слабого допустимого множества образован линейными и выпуклыми квадратичными неравенствами. Некоторую (заданную неявно, возможно несвязную и невыпуклую, но ограниченную) его часть составляет соответствующее подмножество Ψ_p индуктивной области.

Верхняя оценка оптимального значения целевой функции на Ψ_p достигается путем локальной минимизации целевой функции верхнего уровня при условии равенства нулю невязки двойственности в задаче нижнего уровня.

Для построения оценки снизу целевая функция верхнего уровня минимизируется на эллипсоиде, который содержит в себе область Ψ_p. В докладе исследуются возможности качественной аппроксимации этой заданной неявно, в общем случае невыпуклой области. Приводятся численные результаты, касающиеся качества оценок и работы метода в целом.

Ершова Мария Станиславовна,
Институт систем эгергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия,
тел. (8-395-2) 42-87-11, e-mail: nechaeva_m@mail.ru

НИЖНИЕ И ВЕРХНИЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ ВЫБОРА РЯДА ИЗДЕЛИЙ С ЧАСТИЧНЫМ ВНЕШНИМ ФИНАНСИРОВАНИЕМ

Д. С. Иваненко, А. В. Плясунов

В задаче выбора оптимального ряда изделий считается заданным множество работ, подлежащих выполнению, и множество изделий, которые могут использоваться для этого. Требуется выполнить все работы с наименьшими затратами. Затраты на разработку, производство и эксплуатацию изделий, а также ограничения на объемы производства изделий считаются известными.

Особенностью рассматриваемой постановки является покрытие части расходов на производство средствами инвестора, который может получить любые изделия из числа произведенных по заранее согласованным (уменьшенным) ценам. В таких условиях выбор ряда изделий и выбор множества изделий, используемых для погашения кредита, становятся взаимозависимыми, что приводит к двухуровневой математической модели [1]. На верхнем уровне выбирается ряд изделий, которые будут производиться для выполнения работ, а на нижнем уровне инвестор стремится максимизировать суммарную эффективность выбранных им изделий, исходя из величины своего кредита.

Предлагается способ сведения двухуровневой задачи к семейству одноуровневых задач размещения специального вида, основанный на декомпозиции допустимого множества исходной задачи [1]. Это сведение используется для построения нижних и верхних границ на оптимальное значение целевой функции задачи [2]. Полученные оценки анализируются с точки зрения вычислительной сложности. Устанавливается связь между различными нижними границами для данной задачи [3].

Работа поддержана грантом РФФИ 03–01–00455.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочетов Ю. А., Плясунов А. В. (2002) *Задача выбора ряда изделий с частичным внешним финансированием.* // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2002. Т. 9. N 2. С. 78–96.
2. Geoffrion A. (1974) *Lagrangean Relaxation for Integer Programming.* // Math. prog. study, 1974. V. 2. P. 82–114.
3. Cornuejols G., Sridharan R., Thizy J. M. (1991) *A comparison of heuristics and relaxations for the capacitated plant location problem.* // EJOR. N. 50. P. 280–297.

Иваненко Дмитрий Сергеевич, Плясунов Александр Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (8-383-2) 33-20-86, факс (8-383-2) 32-25-98,
e-mail: ivanen@math.nsc.ru, apljas@math.nsc.ru

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ БИЛИНЕЙНОГО РАВНОВЕСНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

Д. В. Иванов

Рассматривается следующая задача равновесного программирования.
Найти $y^* \in D$:

$$y^* \in Argmin\left\{x^T(\Phi y^* + \phi) + \frac{1}{2}x^T Bx : \ Ax \leq b, \ x \geq 0\right\}, \qquad (1)$$

где Φ и B — $n \times n$ матрицы, A — $m \times n$ матрица, $b \in E^m$,

$$D = \left\{x \in E^n : \ Ax \leq b, \ x \geq 0\right\}.$$

Если матрица B неотрицательно определена, то задача (1) является задачей выпуклого билинейного программирования [1]. В докладе приводятся результаты численного решения выпуклой задачи (1) при помощи методов, описанных в [1].
Если же не делать предположений относительно матрицы B, то задача (1) в общем случае оказывается невыпуклой и может иметь несколько равновесных решений, каждому из которых соответствует несколько значений целевой функции (конечно, может оказаться и так, что задача (1) не будет иметь равновесных решений). В этом случае для решения рассматриваемой задачи применяются методы невыпуклого квадратичного программирования.

Часть доклада посвящена приложению используемой методики решения задачи вида (1) к решению прикладных задач энергетики, связанных с управлением функционирования ЭЭС в рыночных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антипин А. С. (2002) *Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном равновесном программировании.* – М.: ВЦ РАН.

Иванов Дмитрий Владиславович,
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-87-11,
e-mail: vid_divanov@mail.ru

ОДНА ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОДУКЦИИ ПРЕДПРИЯТИЙ

Л. Ю. Прокопьева

В системах “Производство-Потребление” нередко возникает следующая схема реализации продукции: одна часть продукции направляется по договорам–поставкам, другая — на свободный рынок. При этом Производитель, имеющий несколько предприятий, сам решает, какое количество продукции от каждого предприятия выделить на обязательные поставки и как её распределить по потребителям. Другая же часть продукции, выделенная Производителем для свободного рынка, “распределяется” самими участниками рынка с учётом их предпочтений.

В работе рассматривается задача оптимального распределения продукции предприятий следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} c_{ij}\,x_{ij} + \max_{x^*_{ij}\in \mathrm{X}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{m} c_{ij}\,x^*_{ij} \to \max_{\{y_i\},\{x_{ij}\}}$$

$$\begin{cases} 0 \le y_i \le a_i\ ,\ i=\overline{1,n};\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = \sum\limits_{j=1}^{k} b_j; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j\ ,\ j=\overline{1,k};\ \sum\limits_{j=1}^{k} x_{ij} = y_j\ ,\ i=\overline{1,n};\ x_{ij}\ge 0\ ,\ i=\overline{1,n}, j=\overline{1,k}; \end{cases}$$

где X - множество оптимальных решений x^*_{ij} задачи:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{m} d_{ij}\,x_{ij} \to \min_{\{x_{ij}\}}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j\ ,\ j=\overline{k+1,m}; \qquad \sum\limits_{j=k+1}^{m} x_{ij} = a_i - y_i\ ,\ i=\overline{1,n}; \\ x_{ij}\ge 0\ ,\ i=\overline{1,n}, j=\overline{k+1,m}; \end{cases}$$

Здесь a_i — объем производства i-го предприятия, $i=\overline{1,n}$; y_i — количество продукции i-го предприятия, направляемое на обязательные поставки, $i=\overline{1,n}$; b_j — объем спроса j-го потребителя $j=\overline{1,m}$; c_{ij} — доход i-го предприятия от реализации единицы продукции j-му потребителю $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,m}$; d_{ij} — закупочно-транспортные затраты на единицу продукции, приобретаемой j-м потребителем на i-м предприятии, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{k+1,m}$; x_{ij} — объем продукции поступающей от i-го предприятия j-му потребителю, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$;
В работе получены следующие результаты:

1. показано, что данная задача NP-трудна (к её частному случаю с сводится двухуровневая задача о назначении);
2. выделены эффективно-разрешимые случаи;
3. предложен приближенный метод решения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант 02-01-00977

Прокопьева Людмила Юрьевна,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акадамика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. 33-37-88, e-mail: luc_up@gorodok.net

ДВУХУРОВНЕВАЯ ЗАДАЧА ВЫБОРА ЦЕН НА ПРОДУКЦИЮ ПРЕДПРИЯТИЙ

И. А. Рыков

В работе рассматривается следующая задача отыскания оптимальных цен на продукцию предприятий с учётом реакции потребителей:

$$f(x^*,u,v) = \max_{x^*_{ij}\in X^*} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} min(u_i - c_{ij}, v_i)x^*_{ij} \to \max_{u,v\geq 0}$$

где X^* – множество оптимальных решений $x^*_{ij}(u,v)$ задачи:

$$\begin{cases} g(x,u,v) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} min(u_i, v_i + c_{ij})x_{ij} & \to & \min\limits_{x_{ij}} \\ x_{ij} & \geq & 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} & = & a_i, \qquad i = 1,\dots m \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} & = & b_j, \qquad j = 1,\dots n \\ min(u_i, v_i + c_{ij}) & \leq & d_j, \text{ для всех } (i,j) : x_{ij} > 0 \end{cases}$$

Здесь верхний уровень - производитель имеет m предприятий с объёмами производства a_i, для которых выбираются отпускная и поставочная цены (u_i и v_i). Нижний уровень - потребитель имеет n пунктов потребления с объёмами b_j, ценовыми порогами d_j (внешние цены) и транспортными издержками на единицу продукции c_{ij}.

В работе показано:

1. Задача NP-трудна (к её частному случаю с $n = 2$, $c_{ij} = 0$ сводится задача о разбиении)

2. В случае одного вектора цен u или v рассматриваемая задача дискретна, то есть оптимальное решение выбирается из конечного набора значений: $u^*_i \in \{d_1, \dots d_n, \infty\}$, $v^*_i \in \{d_1 - c_{i1}, \dots d_n - c_{in}, \infty\}$. Алгоритм полного перебора при этом имеет трудоёмкость $O(n^m)$.

3. Для задачи с одним вектором цен предлагается точный алгоритм неявного перебора.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант 02-01-00977.

Рыков Иван Александрович,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акадамика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. 33-37-88, e-mail: luc_up@gorodok.net

ВЕКТОРНАЯ ЗАДАЧА ПОКРЫТИЯ ПРЕДФРАКТАЛЬНОГО И ФРАКТАЛЬНОГО ГРАФА ЛЕСОМ

С. И. Салпагаров

При моделировании экономических, физических, экологических задач большой размерности удобно использовать предфрактальные и фрактальные графы [1].

Хаотическая предфрактальная модель предполагает наглядную связь между структурой [2] системы и ее количественными (экономическими, энергетическими, физическими) характеристиками во времени, т.е. в динамике. Эта модель позволяет учитывать изменение связи с течением времени. Целью работы является выделение полиномиальных многокритериальных задач покрытия графа лесом и построение соответствующего алгоритма.

Пусть дан предфрактальный [1, 2] (n, L)-граф $G_L = (V_L, E_L)$ порожденный затравкой $H = (W, Q)$ и каждому ребру u_{ij}^r сопоставлены веса a_{ij}^r, b_{ij}^r, выбранные произвольно из интервалов: $a_{ij}^r \in [k^{r-1}a, k^{r-1}b]$, $b_{ij}^r \in [k^{r-1}c, k^{r-1}d]$, где $k < 1$ – коэффициент подобия, a, b, c, d – произвольные числа. Под типом дерева будем понимать число ребер, образующих это дерево.

Далее будем говорить, что дерево имеет ранг $l = 1, \dots L$, если выделенное дерево состоит только из ребер ранга l.

Ранговым типом дерева называется тип S дерева ранга l и обозначается R_s^l. Покрытием $x(n, L)$ – графа $G_L = (V_L, E_L)$, $(L = 1 \dots n)$ называем такой подграф $D = (V, E_x)$, где каждая компонента связности P_S, $(S = 1, 2, \dots)$ графа D представляет собой дерево, причем пересечение компонент P_S, $(S = 1, 2, \dots)$ образует $\emptyset$, а объединение вершин P_S образует множество V, $|V| = N$. Множество всех покрытии x обозначим через X. На множестве X определим минимизируемые критерии: $F_1(x) = \sum_{u_{ij} \in x} a_{ij}^r$ – вес покрытия по a_{ij}^r; $F_2(x) = \sum_{u_{ij} \in x} b_{ij}^r$ – вес покрытия по b_{ij}^r; $F_3(x)$ – критерии ранговых типов; $F_4(x) = |x|$ – число компонент в покрытии X. Эти критерии определяют паретовское множество [3]. Мы рассматриваем задачи, для которых важно выделение полных [3] решений, $X^0 \in \tilde{X}$. (X^0 называется полным множеством, если $F(X^0) = F(\tilde{X}$, $F(x) = (F_i(x), i = 1, 4, x \in X)$.

Предлагается алгоритм α_1 выделения покрытия лесом $x \in X^0$ предфрактального графа, обоснованием которого служит

ТЕОРЕМА 1. Алгоритм α_1 выделяет на предфрактальном (n, L)- графе покрытие оптимальное по $F_1(x)$ и $F_3(x)$, причем $F_2(x) \leq \frac{k^{L-1} n^L d}{2}$, где $H = (W, Q)$ – произвольный граф, и $\tau(\alpha_1)$ $O(N^4)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Алгоритм α_1 модифицируется так, что с его помощью можно выделить полное множество альтернатив X^0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочкаров А. М., Перепелица А. В. (1999) *Метрические характеристики фрактального и предфрактального графа.* Сб. РАН САО.

2. Хакен Г. (1985) *Синергетика: Иерархия неустоичивости в самоорганизующихся системах и устройствах.* – М.: Мир.

3. Перепелица В. А., Мамедов А. А. (1995) *Исследование сложности и разрешимости векторных задач на графах.* Учебное пособие. Черкесск.

Салпагаров Сосланбек Исмаилович, Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия, ул. Московская, 63, Черкесск, тел.: (8 878-22)5-36-52