BEST POSSIBLE APPROXIMATIONS FOR THE ONE-WAY AND ROUND-TRIP CENTER LOCATION PROBLEMS

A. A. Ageev

One-way and round-trip center location problems are generalizations of the classical p-center problem. In both problems an instance consists of a complete graph $G = (V, E)$, whose edges have nonnegative lengths $d(u, v)$ satisfying triangle inequality. The vertex set V is treated as the set of customers. Each customer $v \in V$ is associated with a set of depots $X(v) \subseteq V$ and a nonnegative weight $w(v)$. In the one-way model the service of a customer v consists of the travel of a server from its base $y \in V$ to a permissible depot $x \in X(v)$, loading of some package at the depot and delivering it to the customer. In the round trip model the service also includes the travel from the customer v to the home base y. The objective is to locate p servers so as to minimize the maximum customer cost (weighted distance travelled by the respective server).

The round-trip center location model (the case when $X(v) = X$ for each $v \in V$) was introduced in [1]. Tamir and Halman [3] present 9 and 12-approximations for the one-trip and round-trip problem, respectively. In this paper we show that both problems can be approximated with a performance factor of 3, which is best possible [2].

This research was supported by RFBR, grant 02-01-01153, by INTAS, grant 00-217, and by the Programme "Universities of Russia", project code UR.04.01.012.

REFERENCES

1. O. Berman, Z. Drezner, and G. O. Wesolowsky (2002) *The collection depots location problem on networks*, Naval Research Logistics **49**, 15–24.
2. D. S. Hochbaum and D. B. Shmoys (1986) *A unified approach to approximation algorithms for bottleneck problems*, J. ACM **33**, 533–550.
3. A. Tamir and N. Halman, (2003) *One-way and round-trip center location problems*, submitted for publication.

Ageev Alexander Alexandrovich,
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Akademika Koptyuga, 4, Novosibirsk, 630090, Russia,
phone: (8-383-2) 33-20-86, fax: (8-383-2) 33-25-98, e-mail: ageev@math.nsc.ru

О СРАВНЕНИИ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. В. Адельшин

Одним из актуальных направлений исследований в области целочисленного программирования является анализ работы алгоритмов, основанных на методах отсечений, ветвей и границ, методах направленного перебора и др. В работах [1,2] рассматриваются модели целочисленного линейного программирования (ЦЛП) задач максимальной и минимальной выполнимости логической формулы. Для некоторых семейств указанных задач исследовалась работа алгоритмов перебора L-классов и ветвей и границ (Лэнд и Дойг) и было показано, что число итераций этих алгоритмов растет экспоненциально с увеличением числа переменных в формуле.

В данной работе продолжается исследование в этом направлении для 1-го алгоритма Гомори. Для методов отсечений вопросы построения оценок числа итераций представляют значительный интерес. Для 1-го алгоритма Гомори и ряда других двойственных дробных алгоритмов отсечения известны верхние оценки числа итераций, полученные А. А. Колоколовым на основе свойств лексикографически монотонных последовательностей и L-разбиения [3].

В данной работе рассматриваются специальные семейства задач ЦЛП, у которых матрица ограничений может быть приведена к блочно-диагональному виду перестановкой строк и столбцов. Эти семейства являются обобщениями построенных в [1,2] задач максимальной и минимальной выполнимости, для них проводится сравнение перечисленных алгоритмов. Показано, что в отличие от методов Лэнд и Дойг и перебора L-классов, число итераций 1-го алгоритма Гомори растет линейно с увеличением размерности задач.

Кроме того, предложены алгоритмы приближенного и точного решения задачи максимальной выполнимости. Эксперименты проводились на задачах из библиотеки DIMACS, случайных задачах и на указанных выше семействах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адельшин А. В. (2002) *Задача максимальной выполнимости и некоторые алгоритмы целочисленного программирования.* В кн.: Алгебра и линейная оптимизация. Труды международного семинара, посвященного 90-летию со дня рождения С. Н. Черникова, Екатеринбург. Екатеринбург: УрО РАН, 2002. С. 235 – 239.
2. Адельшин А. В. (2003) *Задача минимальной выполнимости и некоторые алгоритмы дискретной оптимизации* // Материалы конференции "Проблемы оптимизации и экономические приложения", Омск. 2003. С. 72.
3. Колоколов А. А. (1994) *Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании.* Сиб. журнал исследования операций. 1994. Т. 2. С. 18 – 39.

Адельшин Александр Владимирович,
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (8-381-2) 23-67-39,
факс (8-381-2) 23-45-84, e-mail: adelshin@iitam.omsk.net.ru

ОДИН АЛГОРИТМ ПОИСКА d–РЕГУЛЯРНОГО СВЯЗНОГО ПОДГРАФА МАКСИМАЛЬНОГО РЕБЕРНОГО ВЕСА НА СЛУЧАЙНЫХ ВХОДАХ

А. Е. Бабурин, Э. Х. Гимади

Рассматривается задача отыскания регулярного связного остовного подграфа заданной степени максимального веса в полном графе со взвешенными ребрами. Пусть $G(V, E)$ – полный неориентированный граф без петель. Задана неотрицательная функция веса ребер $w : E \to R^+$. Задано натуральное число $1 < d < n-1$. Требуется найти подграф $G'(V, E')$ графа G, удовлетворяющий следующим трем условиям:

1. G' – связен;
2. степени всех вершин в G' равны d;
3. $\sum_{v \in V} w(v) \to max$.

В [1] был представлен приближенный алгоритм решения задачи со случайными входами, когда веса ребер графа являются случайными независимыми равномерно распределенными (в некотором числовом сегменте) величинами с одинаковой функцией распределения. Там же были получены некоторые условия асимптотической точности этого алгоритма, имеющего временную сложность $O(n^2)$.

В данном докладе для решения задачи предлагается новый приближенный алгоритм с той же временной сложностью, но лучшими оценками качества решения чем в [1]. Алгоритм использует декомпозицию задачи на ряд подзадач меньшей размерности, каждая из которых решается с использованием жадной эвристики. С вероятностью большей $(1 - 1/n)$ относительная погрешность алгоритма не превышает величины $O\left(\frac{\ln(n/d)}{n/d}\right)$. Таким образом, при $d = o(n)$ алгоритм является асимптотически точным. Аналогичные условия получены и в случае функции распределения весов ребер графа, минорирующей сответствующую (нормализованную) функцию равномерного распределения.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Kh. Gimadi, A. I. Serdukov, (2000) *A problem of finding the maximal spanning connected subgraph with given vertex degrees,* Oper. Res. Proc. 2000, Springer Verlag (2001), 55–59.

Бабурин Алексей Евгеньевич, Гимади Эдуард Хайрутдинович,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел.: (8-383-2) 33-21-89,
факс: (8-383-2) 33-25-98, e-mail: ababur@sicex.ru, gimadi@math.nsc.ru

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОИСКА МИНИМАЛЬНОГО ДВУСВЯЗНОГО ОСТОВНОГО ПОДГРАФА

В. В. Введенский, В. П. Ильев

Рассматривается задача поиска двусвязного остовного подграфа минимального веса, которая формулируется следующим образом: дан граф $G = (V, E)$, реберная связность которого $\lambda(G) \geq k$. На множестве ребер E определена функция весов $c : E \to R_+$. Требуется найти такой подграф $G^* = (V, E^*)$, что $\lambda(G^*) \geq k$ и значение $c(E^*)$ минимально.

Уже для $k = 2$ задача является NP-трудной [1]. В работе [2] для любого k предложен 2-приближенный алгоритм.

В докладе предлагаются приближенные методы решения задачи о минимальном двусвязном остовном подграфе. Эти методы представляют собой модификации градиетного алгоритма (дискретного аналога алгоритма наискорейшего спуска). В одной из схем для удаления выбирается ребро с максимальным произведением веса на сумму степеней его вершин. В других методах используются данные о весах смежных ребер. Рассматриваются также приближенные методы решения невзвешенного варианта задачи, в которых учитываются локальные реберные связности вершин графа.

Проведен вычислительный эксперимент на случайных графах, целью которого являлось сравнение предложенных методов между собой и известными приближенными алгоритмами. Кроме того, проводился анализ работы алгоритмов в зависимости от входных данных.

В докладе представлены описания методов и результаты экспериментов. Полученные результаты позволяют сделать вывод о перспективности предложенных схем.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Гэри, Д. Джонсон. (1982) *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.* М.: Мир.
2. S. Khuller, U. Vishkin. (1994) *Biconnectivity Approximations and Graph Carvings.*// J. ACM. 1994. V. 41. P. 214–235.

Введенский Вячеслав Владимирович, Ильев Виктор Петрович,
Омский государственный университет,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 23-67-39,
e-mail: vvedensky@rambler.ru, iljev@iitam.omsk.net.ru

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Н. И. Глебов

Рассматриваемая задача представляет собой обобщение известной минимаксной задачи о назначениях или, более точно, транспортную задачу с минимаксным критерием и ограниченными целочисленными переменными:

$$\max_{i,j} c_{ij} x_{ij} \quad \longrightarrow \quad \min_{(x)}$$

при ограничениях

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} & = & a_i, & i = 1, 2, \ldots, n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} & \le & b_j, & j = 1, 2, \ldots, m \\ 0 \ \le \ x_{ij} & \le & d_{ij}, & i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m \\ x_{ij} & - & \text{целое}, & i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \end{array}$$

где $a_i,\ b_j,\ d_{ij}$ — натуральные числа и $c_{ij} \ge 0$.

Предложен алгоритм решения данной задачи, который в общем случае является псевдополиномиальным. В случае $a_i = b_j = d_{ij} = 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, 2, \ldots, m$) алгоритм оказывается полиномиальным и имеет оценку трудоемкости $O(n^3 + nm)$, так что при $m \ge n^2$ трудоемкость алгоритма сравнима по порядку с размером матрицы $(c_{ij})_{n \times m}$. Алгоритм также корректно решает задачу и в том случае, когда целевая функция имеет более общий вид:

$$\max_{i,j} f_{ij}(x_{ij}),$$

где $f_{ij}(\cdot)$ — монотонно неубывающие функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02–01–01153).

Глебов Николай Иванович,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия; e-mail: nigleb@math.nsc.ru

ВОПРОСЫ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

М. В. Девятерикова, А. А. Колоколов

Рассматривается задача целочисленного программирования (ЦП) в следующей постановке:

$$f(x) \to max, x \in (\Omega \cap Z^n), \tag{1}$$

где f - вещественнозначная функция, а Ω - непустое множество из некоторого бесконечного класса Ψ замкнутых множеств из R^n. В работе исследуются вопросы устойчивости алгоритмов решения задачи (1), которые основаны на использовании релаксационного множества Ω.

Пусть алгоритм $\mathcal{A}$ в процессе решения задачи (1) порождает последовательность приближений $S_{\mathcal{A}}(\Omega) = \{x^{(k)} \in \Omega, k = 1, 2, ..., \tau\}$. Под устойчивостью алгоритма на классе задач с релаксационными множествами из Ψ понимается не более чем полиномиальный по n рост длины последовательности $S_{\mathcal{A}}(\Omega)$ при достаточно малых изменениях релаксационных множеств, оставляющих неизменным множество допустимых решений задачи (1).

Ранее было установлено, что метод перебора L-классов и дробный двойственный процесс отсечения с вполне регулярными отсечениями устойчивы на классе задач ЦП с замкнутыми, ограниченными множествами [1]. Для ряда других алгоритмов отсечения, в том числе алгоритмов Гомори, вопрос об устойчивости пока остается открытым.

В [2] показано, что некоторые алгоритмы ветвей и границ (схема Лэнд и Дойг) являются неустойчивыми для задач целочисленного линейного программирования с ограниченными релаксационными множествами. В данной работе установлено, что эти алгоритмы обладают тем же свойством для задач булева программирования. Кроме того, рассмотрены вопросы повышения устойчивости указанных алгоритмов, в частности, путем использования правильных отсечений.

Нами изучаются также следующие типы устойчивости алгоритмов: слабая устойчивость, устойчивость оценок длины последовательности приближений и некоторые другие.

Работа выполнена при поддержке INTAS, проект N 00-217.

ЛИТЕРАТУРА

1. Девятерикова М. В., Колоколов А. А. (2003) *Об устойчивости некоторых алгоритмов целочисленного программирования* // Известия вузов. Математика. - Казань, 2003. - N 12. - С. 41-48.

2. Колоколов А. А., Девятерикова М. В. (2003) *Анализ устойчивости алгоритмов целочисленного программирования* // Российская конференция “Проблемы оптимизации и экономические приложения”: Материалы конференции. - Омск, 2003. - С. 38-42.

Колоколов Александр Александрович, Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова 13, Омск, 644099, Россия, тел. (8-381-2) 23-67-39, факс (8-381-2) 23-45-84, e-mail: kolo@iitam.omsk.net.ru

Девятерикова Марина Владимировна, Омский государственный технический университет, Пр. Мира 11, Омск, 644050, Россия, тел. (8-381-2) 65-20-84, факс (8-381-2) 65-26-98, e-mail: devy@omgtu.ru

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ТРЕХИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ПРОБЛЕМЫ ВЫБОРА

С. А. Дичковская

Известно [4], что трехиндексная аксиальная проблема выбора (3-аксиальная ПВ) является NP-полной и имеет многочисленные практические применения [3]. В настоящей работе исследуются четыре приближенных алгоритма нахождения решения 3-аксиальной ПВ: алгоритмы α_0, α_1, α_2 из [2], трудоемкость которых составляет $O(n^4), O(n^3), O(n^2)$ действий соответственно и один алгоритм из [1], который будем обозначать через α_3, имеющий трудоемкость $O(nlnn)$ действий.

Все эти алгоритмы программно реализованы на языке Object Pascal (в среде Delphi) и по ним проведены вычислительные эксперименты на тестовых 3-аксиальных ПВ порядка n, для которых трехиндексная матрица формировалась с помощью датчика случайных чисел, настроенного на работу с целыми числами из отрезка [1,r], где $2 \le r \le n^2$. Было сформировано 5 групп задач, каждая из которых состоит из 10 серий. Порядок задач изменялся от 50 до 250. Всего было решено 50000 задач, по 1000 задач в каждой серии.

В результате проведенных вычислительных экспериментов установлено, что доля оптимальных решений 3-аксиальной ПВ, порядка n, $n \ge 50$, находимых посредствомалгоритма α_0 (алгоритмов α_1, α_2, α_3) составляет:

- не менее 97% (93%, 87%, 87%), если r=2; не менее 96% (91%, 84%, 84%), если $r = [\sqrt[3]{n}]$; не менее 90% (86%, 77%, 76%), если $r = [\sqrt[2]{n}]$; не менее 82% (75%, 68%, 67%), если $r = [n/lnn]$; не менее 73% (64%, 57%, 57%), если $r = [\sqrt[4]{n^3}]$ и не менее 59% (51%, 46%, 45%), если r=[n/2], причем с ростом n их доля увеличивается. Здесь [a]- наибольшее целое число, не превосходящее числа a;

- не более 46% (38%, 31%, 29%), если $r = [\frac{3}{4}n]$; не более 32% (26%, 19%, 19%), если $r = n$; не более 13% (8%, 5%, 4%), если $r = [nlnn]$ и не более 9% (4%, 2% , 2%), если $r = n^2$, причем с ростом n их доля уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э. Х. (1998) *Асимптотически точный подход к решению многоиндексной аксиальной задачи о назначении.* // Пленарные доклады 11 международной Байкальской школы - семинара. Иркутск, Байкал. С.62–65.

2. Кравцов В. М. (2003) *Алгоритмы нахождения асимптотически оптимального решения многоиндексной аксиальной проблемы выбора.* // Математическое моделирование экономических процессов переходного периода: Материалы 1-й Международной конференции. Минск: БГЭУ. С.280–282.

3. Arbib C., Pacciarelli D., Smriglix S. (1999) *A three-dimensional matching model for perishable production scheduling.* // Discrete Appl. Math. 1999. V92. P.1–15.

4. Balas E., Salthzman M. (1989) *Facets of the three-index assignment polytope.* // Discrete Appl. Math. 1989. Vol.23, №3. P. 201–229.

Дичковская Светлана Александровна,
Белгосуниверситет, пр. Ф. Скорины 4, Минск, 220050, Беларусь,
ул. Космонавтов 3/2, 18, т. 296-82-95, e-mail: dichkovskaya@mail.ru

ОДНА ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК

А. И. Ерзин, Н. Н. Карпышев

Пусть задан участок транспортной сети, состоящий из двух пунктов с номерами 1 и 2 и связывающего их ребра. В каждый момент времени $t = 0, \ldots, T$ в п. $i = 1, 2$ извне поставляется груз в количестве q_i^t единиц. Этот груз перевозится из одного пункта в другой транспорными средствами (ТС), которые курсируют между пунктами и за один рейс одно ТС может перевести единицу груза. Пусть каждое ТС затрачивает τ единиц времени для преодоления пути между пунктами. Требуется так организовать перевозку груза и перемещение ТС, чтобы минимизировать суммарное время простоя (ожидания ТС) груза. Если в некоторый момент времени в пункте i есть груз и есть ТС, то ТС отправляется вместе с грузом. Если же в некоторый момент в каком-нибудь пункте есть ТС, а груза нет, то возможна альтернатива: либо ТС остается в этом пункте, либо отправляется в другой пункт без груза (порожняком).

В начальный (нулевой) момент времени для каждого пункта считаем известными:
r_1 (r_2) – начальное количество ТС в пункте 1 (2);
q_1^t (q_2^t) – количество единиц груза, приходящего извне в пункт 1 (2) в момент t;
Q_1^t (Q_2^t) – количество груза, ожидающего отправление в момент t в пункте 1 (2).

Введем обозначения для переменных:
y_1^t (y_2^t) – количество единиц груза, отправляемых из пункта 1 (2) в пункт 2 (1) в момент t;
x_1^t (x_2^t) – количество порожних ТС, отправляемых из пункта 1 (2) в пункт 2 (1) в момент t.

Модель задачи запишется в виде:

$$\sum_{t=0}^{T}[(Q_1^t - y_1^t) + (Q_2^t - y_2^t)] \to \min_{x,y};$$

$$y_j^t \le Q_j^t; \qquad Q_j^t = \sum_{i=0}^{t} q_j^i - \sum_{i=0}^{t-1} y_j^i;$$

$$y_j^t + x_j^t \le r_j + \sum_{i=0}^{t}(y_{3-j}^{i-\tau} + x_{3-j}^{i-\tau}) - \sum_{i=0}^{t-1}(x_j^i + y_j^i);$$

$$x_j^t, y_j^t \in Z_0^+,\ j = 1, 2;\ t = 0, \ldots, T,$$

где $x_j^t = y_j^t = 0$ при $t < 0$.

В работе предлагается метод динамического программирования, строящий решение для случая $\tau = 1$ и имеющий псевдополиномиальную трудоемкость, равную $O(T^4R^3)$. Разработан также полиномиальный алгоритм с временной сложностью $O(T\tau)$, строящий приближенное решение, которое в случае $\tau = 1$ имеет гарантированную оценку отностительной погрешности, равную 1/5.

Ерзин Адиль Ильясович, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (8-383-2) 33-37-88, факс (8-383-2) 33-25-98, e-mail: adil@math.nsc.ru
Карпышев Николай Николаевич, Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия.

АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ЭВРИСТИК РАЗМЕЩЕНИЯ ЗАДАЧ НА ГРУППЕ КЛАСТЕРОВ

С. Н. Жук

Пусть $T_1, \dots, T_n$ – множество независимых задач, каждая из которых характеризуется временем выполнения $h(T_j)$ и требуемым числом процессоров $w(T_j)$,

$C_1, \dots, C_m$ – множество кластеров (машин), w_i – число процессоров в i-м кластере. Требуется найти размещение задач на кластерах, минимизирующее максимум из времён окончания работ на всех кластерах.

Даже для случая одного кластера, состоящего из двух процессоров, эта задача NP-трудна, т.к. соответствует задаче PARTITION [1]. Мы анализируем простые в смысле реализации эвристики, в которых брокер (система распределения задач по кластерам) работает on-line, то есть обрабатывает последовательно все приходящие к нему задачи по одной.

Алгоритм A1. Брокер для каждой поступающей к нему задачи T_j производит опрос всех кластеров C_i, для которых $w(T_j) \leq w_i$. Каждый кластер сообщает брокеру время завершения последней задачи, получающееся при размещении всех своих задач вместе с данной (каждый кластер размещает свои задачи пользуясь алгоритмом Bottom-Left [2], предварительно сортируя их в порядке убывания $w(T_k)$). Затем брокер отправляет эту задачу на один из кластеров, у которого это время минимально.

Пусть H_O – оптимальное время выполнения, H_A – время выполнения при использовании алгоритма A.

Утверждение 1. Для любого k существует такой набор задач, что $\frac{H_{A_1}}{H_O} \geq k$.

Алгоритм A2. Пусть $first(T_j) = \min\{i \mid w_i \geq w(T_j)\}$,

$$last(T_j) = \min\left\{r \mid \sum_{i=first(T_j)}^{r} w_i \geq \frac{1}{2} \sum_{i=first(T_j)}^{m} w_i\right\}$$

Кластеры $first(T_j)$, $first(T_j)+1$, …, $last(T_j)$ назовём *допустимыми* для задачи T_j. Алгоритм A2 отличается от алгоритма A1 только тем, что брокер производит опрос только допустимых для задачи кластеров.

Утверждение 2. Для любого набора задач $\frac{H_{A_2}}{H_O} \leq 10$.

Утверждение 3. Для любого $\varepsilon > 0$ существует набор задач, для которого $\frac{H_{A_2}}{H_O} \geq 7 - \varepsilon$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 02-01-00713.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Гэри, Д. Джонсон, (1982) *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи,* М., Мир.

2. B. S. Baker, E. J. Coffman and R. L. Rivest, (1980) *Orthogonal packings in two dimensions,* SIAM J. Computing, 1980, V. 9, P. 846–855.

Жук Сергей Николаевич, Московский физико-технический институт,
Институтский переулок, 9, г. Долгопрудный, 141700, Московская область,
тел. (095) 408 5700, e-mail: zhuk_sergey@mail.ru

РЕШЕНИЕ МИНИСУММНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ С ЗАПРЕЩЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ

Г. Г. Забудский, М. В. Орлова

На плоскости размещено m объектов в точках $P_1, P_2, ..., P_m$ и k запрещенных зон в виде изотетичных прямоугольников. Объединение зон обозначим через Z. Необходимо разместить на той же плоскости n новых объектов в точках X_1, $X_2, ...$, X_n вне запрещенных зон таким образом, чтобы суммарное взвешенное расстояние между объектами было минимальным. Пусть w_{ij} и v_{jk} – удельные стоимости связей между фиксированным объектом i и новым j и новыми объектами j и k соответственно. Математическая модель задачи имеет вид:

$$\sum_{1\le j<k\le n} v_{jk} d(X_j, X_k) + \sum_{1\le i\le m} \sum_{1\le j\le n} w_{ij} d(P_i, X_j) \to \min \qquad (1)$$

$$X_j \notin Z, j = 1, 2, ..., n, \qquad (2)$$

где $d(\cdot,\cdot)$ – некоторая метрика.

Задача с минимаксным критерием и прямоугольной метрикой рассматривалась в [1]. В данной работе также используется прямоугольная метрика. Для размещения одного нового объекта и произвольного числа запрещенных областей предложен эффективный алгоритм, использующий процедуру построения контура области Z [2]. Для общего случая задача (1)–(2) записывается в виде модели частично-целочисленного линейного программирования с булевыми переменными. Для этого предварительно по области Z строится совокупность прямоугольных областей, в которых допускается размещение новых объектов. Предложен алгоритм ветвей и границ и эвристический алгоритм для ее решения. Проведен вычислительный эксперимент.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта INTAS 00-217.

ЛИТЕРАТУРА

1. Забудский Г. Г. (2004) *Алгоритмы решения минимаксной задачи размещения на плоскости с запрещенными зонами*// Автоматика и телемеханика. М. 2004, N2. С. 93–100.

2. Препарата Ф., Шеймос М. (1989) *Вычислительная геометрия: Введение.* М.:Мир. 478 с.

Забудский Геннадий Григорьевич,
Омский филиал Института математики им С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39,
факс (8-381-2) 23-45-84, e-mail: zabudsky@iitam.omsk.net.ru,

Орлова Мария Владиславовна,
Омский государственный университет,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96

АЛГОРИТМ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ В КОНТЕЙНЕРЫ

В. В. Залюбовский

Задача упаковки в контейнеры (BPP) формулируется следующим образом: множество неотрицательных чисел $x_1, \ldots, x_n$ необходимо разбить на минимальное число подмножеств таким образом, чтобы сумма чисел в каждом из них не превосходила заданной константы $C > 0$. Задача является NP-трудной в сильном смысле [1], и большая часть исследований связана с построением приближенных алгоритмов [2]. К настоящему времени известно лишь несколько работ, посвященных алгоритмам нахождения точного решения BPP [3,4].

В работе предлагается метод ветвей и границ, использующий представление допустимых решений задачи в виде перестановок специального вида. Мы вводим понятие *NF-активных* упаковок и показываем, что поиск оптимального решения можно вести только в этом классе. Доказано, что каждой перестановке соответствует ровно одна NF-активная упаковка, а при дополнительных условиях на структуру перестановки удается добиться также однозначности обратного соответствия. Безызбыточность выбранной схемы представления решения в сочетании с использованием в качестве процедуры восстановления решения алгоритм NextFit, имеющий линейную сложность, позволяют существенно ускорить процесс поиска.

Кроме того, проведен сравнительный анализ различных процедур нахождения нижних оценок как с точки зрения точности оценок, так и по соотношению "качество-сложность".

Работа поддержана грантом РФФИ 02-01-01153.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Гэри, Д. Джонсон. (1982) *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.* М.: Мир.
2. E. G. Coffman, M. R. Garey, D. S. Johnson (1997) *Approximation algorithms for bin packing: a survey.* In: D. S. Hochbaum (ed.) Approximation Algorithms for NP-hard Problems. PWS Publishing, Boston, 1997. pp. 46–93.
3. S. Martello, P. Toth (1990) *Lower bounds and reduction procedures for bin packing problem.* // Discrete Applied Mathematics 1990. V. 28. P. 59–70.
4. A. Scholl, R. Klein, C. Jürgens (1997) *BISON: A fast hybrid procedure for exactly solving the one-dimensional bin packing problem.* // Computers and Operations Research 1997. V. 24. P. 627–645.

Залюбовский Вячеслав Валерьевич,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (8-383-2) 33-21-89, факс (8-383-2) 32-25-98, e-mail: slava@math.nsc.ru

АНАЛИЗ ДРОБНОГО НАКРЫТИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О ПОСТАВКАХ ПРОДУКЦИИ

Л. А. Заозерская

Рассматривается задача о поставках продукции, которой соответствует следующая задача частично целочисленного программирования (ЧЦП):

$$F(z,x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}z_{ij} + g_{ij}(x_{ij})) \to min$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \le M_i,\ i = \overline{1,n},$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = A_j,\ j = \overline{1,m},$$

$$m_{ij}z_{ij} \le x_{ij} \le M_i z_{ij},\ i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m},$$

$$z_{ij} \in \{0,1\},\ i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m},$$

где все $M_i, A_j, m_{ij} \in Z_+$, $a_{ij} \ge 0$, а $g_{ij}(x_{ij})$ – неотрицательные вогнутые функции при $x_{ij} > 0$. В [1] доказано, что соответствующая задача поиска допустимого решения является NP-трудной даже в случае $m = 1$.

При анализе эффективности ряда алгоритмов решения задач ЧЦП важную роль играет такая характеристика задач как мощность L_k-разбиения дробного накрытия [2]. В работе предложено параметрическое семейство задач о поставках продукции с линейной целевой функцией, обладающих L_k-накрытиями, мощность которых растет экспоненциально с увеличением размерности задачи при любом порядке переменных. Указаны такие задачи с разностью между оптимальными значениями целевой функции задачи и ее непрерывной релаксации, равной любому натуральному числу. С использованием данного семейства построена задача о поставках продукции с L_k-накрытиями подобного типа, которая относится к классу NP-трудных задач. Показано, что эти задачи являются трудными для решения методом Лэнд и Дойг и некоторыми другими методами.

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект 00-217), РГНФ (проект 04-02-00238а).

ЛИТЕРАТУРА

1. S. S. Chauhan, A. V. Eremeev, A. A. Kolokolov, V. V. Servakh. (2002) *On solving concave cost supply management problem with single manufacturing unit.* // Proc. of Production System Design, Supply Chain Management and Logistics Conference. Miedzyzdroje, Poland, 2002. P. 147–154.

2. А. А. Колоколов. (1993) *Применение регулярных разбиений в целочисленном программировании.* // Известия вузов. Математика. – Казань, 1993. №12. С. 11–30.

Заозерская Лидия Анатольевна,
Омский филиал Института математики им С. Л. Соболева СО РАН
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (8-381-2) 23-67-39,
факс (8-381-2) 23-45-84, e-mail: zaozer@iitam.omsk.net.ru

О ПРИБЛИЖЕННОМ АЛГОРИТМЕ ОТЫСКАНИЯ ПОКРЫТИЯ ГРАФА С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ СИММЕТРИИ

Т. В. Заховалко, И. В. Козин, Н. К. Максишко

Группой симметрии S графа будем называть любую подгруппу группы автоморфизмов этого графа. S-орбитой частичного графа G будем называть объединение $\bigcup_{s\in S} s(G)$ всех образов графа G при действиях отображений из S. Частичный граф G будем называть симметричным относительно действия заданной группы симметрии S, если сужение любого элемента этой группы на граф G является автоморфизмом этого графа. Другими словами, частичный граф симметричен относительно действия группы S, если его S-орбита совпадает с графом G. Для любого частичного графа G и группы симметрии S определим меру симметрии, как отношение количества вершин графа G количеству вершин его S-орбиты.

В работе рассматривается задача отыскания в заданном графе частичных графов определенного вида, обладающих максимальной (минимальной) мерой симметрии. В частности, исследовалась задача отыскания такого частичного графа, каждая компонента которого изоморфна одному из графов заданного набора.

Для решения задачи предлагается приближенный полиномиальный алгоритм. На каждом шаге алгоритма делается попытка разместить очередную компоненту связности в S -орбите уже построенного частичного графа. В случае неудачи компонента добавляется к частичному графу и строится новая орбита.

Имеется промышленная программная реализация алгоритма для частного случая специального вида: решение задачи о симметричном размещение рекламных блоков на страницах рекламных изданий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зыков А. А. (1987) *Основы теории графов.* М.: Наука. 384 с.
2. Перепелиця В. О., Заховалко Т. В., Максишко Н. К. (2001) *Точні алгоритми для задач покриття графів зірками та ланцюгами* // Вісник Київського національного університету. Серія: фізико-математичні науки. 2001, вип. 5. С. 154–162.

Заховалко Татьяна Викторовна,
Козин Игорь Викторович,
Максишко Наталия Константиновна,
Запорожский государственный университет,
ул. Жуковского, 66, Запорожье, 69600, Украина,
тел. (0612) 64-55-12, e-mail: ains@comint.net

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О МИНИМАЛЬНОЙ РАСКРАСКЕ ГРАФА

В. П. Ильев

Рассматривается задача о минимальной раскраске графа. *Раскраска* неориентированного n-вершинного графа $G = (V, E)$ есть разбиение $P = (V_1, \ldots, V_k)$ множества V на попарно непересекающиеся подмножества, где каждое V_i – независимое множество вершин графа. Число $|P| = k$ называется *мощностью* или *числом* раскраски P. Задача состоит в отыскании раскраски минимальной мощности.

Задача является NP-трудной [1]. Существует $O(n(\log\log n)^2/(\log n)^3)$-приближенный полиномиальный алгоритм решения этой задачи [2].

Предлагается следующий простой приближенный алгоритм решения задачи о минимальной раскраске графа.

Алгоритм GC.

Шаг 0. Начать с тривиальной раскраски $P = (V_1, \ldots, V_n)$, где $V_i = \{v_i\}$, $i = 1, \ldots, n$. Перейти на шаг 1.

Шаг i ($i = 1, \ldots, n$). Текущая раскраска P содержит множество V_i. Если существует такое $j \in \{i+1, \ldots, n\}$, что множество $V_i \cup V_j$ независимо в G, то $V_j \leftarrow V_i \cup V_j$ и удалить из P множество V_i. Если $i < n$, то перейти на шаг $i+1$, иначе $S \leftarrow P$.

Конец.

Доказано, что для любого графа G этот алгоритм находит такую раскраску P, что $|P| - |P_0| \leq n - |P|$, где P_0 – оптимальная раскраска графа (т.е. $|P_0| = \chi(G)$ – хроматическое число графа G).

Получены гарантированные оценки погрешности алгоритма GC. В частности, доказано, что для любого графа G

$$\frac{|P|}{|P_0|} \leq \frac{n(n+1) - 2m}{2n},$$

где n – число вершин, m – число ребер графа G. Эта оценка достижима (например, на полных графах).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Гэри, Д. Джонсон. (1982) *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.* М.: Мир.

2. M. M. Halldórsson. (1993) *A Still Better Performance Guarantee for Approximate Graph Coloring.*// Inform. Process. Lett. 1993. V. 45. P. 19–23.

Ильев Виктор Петрович,
Омский государственный университет,
а/я 4553, Омск, 644001, Россия, тел. (3812) 56-70-88,
e-mail: iljev@iitam.omsk.net.ru

ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ В ЗАШУМЛЕННОЙ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗАДАННОГО ЧИСЛА ФРАГМЕНТОВ ИЗ ЭТАЛОННОГО НАБОРА И ЕЕ РАЗБИЕНИЕ НА УЧАСТКИ, ВКЛЮЧАЮЩИЕ СЕРИИ ОДИНАКОВЫХ ФРАГМЕНТОВ

А. В. Кельманов, Л. В. Михайлова

Рассматривается задача совместного обнаружения (поиска) фрагментов из эталонного набора в зашумленной числовой последовательности и разбиения этой последовательности на участки, включающие серии одинаковых фрагментов. Последовательный (on-line) подход к решению данной задачи традиционен и широко применяется в приложениях, связанных с обработкой и распознаванием сигналов. В работе исследован альтернативный – апостериорный (off-line) – подход. Анализируется случай заданного числа квазипериодически повторяющихся фрагментов.

Формальная постановка задачи, основанная на принципе максимального правдоподобия, приводит к минимизации критерия

$$F(\mu_1, ..., \mu_L, n_1, ..., n_{\mu_L}) = \sum_{n=a}^{b} \{y_n - \sum_{i=1}^{L} \sum_{m=\mu_{i-1}+1}^{\mu_i} u_{n-n_m}(i)\}^2,$$

где $\mu_0 = 0$, $\mu_L = M$, $L \le M$, при ограничениях: 1) $\mu_0 < \mu_1 < ... < \mu_L$; 2) $a \le n_1 \le a^+ \le b$; 3) $a \le b^- \le n_M \le b$; 4) $0 < q \le T_{min} \le n_m - n_{m-1} \le T_{max}$, $m = 2, ..., M$; здесь a, a^+, b, b^-, T_{min}, T_{max} и q – целые числа, ограничение 1) – условие разбиения последовательности на однородные участки, 2) и 3) – краевые условия, 4) – условие квазипериодичности повторов; M – число повторов, L – число серий, y_n, $n = a, \ldots, b$, – наблюдаемая последовательность. Кроме того, предполагается, что 5) $0 < \sum_{n=a}^{b} y_n^2 < \infty$, и при каждом $i = 1, ..., L$ имеют место: 6) $u_j(i) = 0$, $j \ne 0, ..., q-1$, и 7) $0 < \sum_{j=0}^{q-1} u_j^2(i) < \infty$. Эталонный набор $(U^{(1)}, ..., U^{(L)})$, где $U^{(i)} = (u_0(i), ..., u_{q-1}(i))$, $i = 1, ..., L$, считается заданным.

Исходная задача сведена к дискретной задаче минимизации целевой функции

$$G(\mu_1, ..., \mu_L, n_1, ..., n_{\mu_L}) = \sum_{i=1}^{L} \sum_{m=\mu_{i-1}+1}^{\mu_i} g_i(n_m),$$

где $g_i(n) = \sum_{j=0}^{q-1} \{u_j^2(i) - 2y_{j+n} u_j(i)\}$, $i = 1, ..., L$, $n = a, \ldots, b$. Сформулированы необходимые и достаточные условия совместности системы ограничений. Для общего случая, когда $g_i(n): \ Z \to \Re$, $i = 1, ..., L$, – функция, ограниченная на $[a, b]$, получены рекуррентные формулы, гарантирующие отыскание глобального экстремума за полиномиальное время. Временная и емкостная сложности алгоритма есть величины $O[LM(T_{max} - T_{min} + 1)(b - a + 1)]$ и $O[LM(b - a + 1)]$ соответственно, где $b - a + 1$ – длина последовательности. В зависимости от значений параметров задачи временная сложность алгоритма изменяется в интервале от $O(b - a + 1)$ до $O[(b - a + 1)^4]$; емкостная сложность лежит в диапазоне от $O(b-a+1)$ до $O[(b-a+1)^3]$. Приведены результаты численного моделирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 03-01-00036.

Кельманов Александр Васильевич, Михайлова Людмила Викторовна,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (8-383-2) 333-291, факс (8-383-2) 322-598, e-mail: {kelm, okolnish}@math.nsc.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ МОДЕЛИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ О МИНИМАЛЬНОМ КОМИТЕТЕ

А. А. Колоколов, Д. И. Ягофарова

В [2,3] и других работах, посвященных задаче о минимальном комитете, особое внимание уделяется связанным с ней моделям целочисленного программирования (ЦП). Пусть X – произвольное множество и задана система включений $D_i \subset X$, $i = \overline{1,m}$, для которой допускается $\bigcap\limits_{i=1}^{m} D_i = \emptyset$. В [3] предложена модель ЦП для поиска минимального комитета этой системы, которую сложно исследовать с помощью метода регулярных разбиений [1]. На ее основе нами построена адаптированная для указанного метода модель целочисленного линейного программирования:

$$s \to \min \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \ge s, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_j \le 2s - 1, \tag{3}$$

$$s \ge 1, \ t_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

$$s, \ t_j \in Z, \quad j = \overline{1,n}, \tag{5}$$

где $A = (a_{ij})_{m \times n}$ – булева матрица инциденций множеств D_i и максимально совместных подсистем рассматриваемой системы включений. Установлена взаимосвязь модели (1)–(5) с задачей о минимальном комитете.

Следует отметить, что при фиксированном s система неравенств (2) представляет собой обобщение системы линейных ограничений задачи о покрытии множества. В данной работе изучается выпуклое многогранное множество, определяемое ограничениями (2)-(4), структура его L-разбиения и возможность применения алгоритмов перебора L-классов на основе ранее выполненных исследований [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Еремеев, Л. А. Заозерская, А. А. Колоколов. (2000) *Задача о покрытии множества: сложность, алгоритмы, экспериментальные исследования.* // Дискретный анализ и исследование операций. 2000. Сер. 2, Т. 7. С. 22–46.
2. Вл. Д. Мазуров, М. Ю. Хачай. (2004) *Комитеты систем линейных неравенств.* // Автоматика и телемеханика. 2004. №2. С. 43–54.
3. М. Ю. Хачай. (2004) *К задаче о минимальном комитете.* // Тезисы докладов Всероссийской конференции “Алгоритмический анализ неустойчивых задач”. Екатеринбург, 2004. С. 309.

Колоколов Александр Александрович, Ягофарова Дарья Ивановна,
Омский филиал Института математики им С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия,
тел. (8-381-2) 23-67-39, факс (8-381-2) 23-45-84,
e-mail: kolo@iitam.omsk.net.ru, yagofarova@iitam.omsk.net.ru

ОБ ОТСЕЧЕНИЯХ БЕНДЕРСА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

Н. А. Косарев, Н. А. Рубанова

Одним из подходов к решению задач оптимального размещения предприятий является применение декомпозиционных алгоритмов с отсечениями Бендерса [1,2]. В данной работе проводится теоретическое исследование ряда таких алгоритмов для задачи о p-медиане на минимум и простейшей задачи размещения (ПЗР).

В рассматриваемых алгоритмах на каждой итерации сначала определяется набор открытых предприятий, затем находится наилучшее прикрепление клиентов, которое рассматривается как решение задачи линейного программирования. Соответствующие оптимальные значения двойственных оценок используются для построения отсечения Бендерса.

С использованием понятия *глубины отсечения* [1], которая равна количеству исключаемых допустимых наборов открытых предприятий, строятся семейства задач ПЗР и о p-медиане, являющиеся сложными для метода декомпозиции Бендерса при достаточно естественных способах выбора оптимальных значений двойственных оценок (отсечения Бендерса имеют глубину, равную 1). В этом случае число итераций рассматриваемых алгоритмов экспоненциально, в частности, для задачи о p-медиане оно равно C_m^p, где m — число предприятий. Проведены аналогии между полученными неравенствами Бендерса и известными отсечениями целочисленного программирования, например, вполне регулярными отсечениями. Для задачи о p-медиане на основе указанных семейств выделен частный случай, обладающий теми же свойствами и принадлежащий классу NP-трудных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колоколов А. А., Косарев Н. А. (2003) *Исследование отсечений Бендерса для задачи о p-медиане* // Материалы Всероссийской конференции "Проблемы оптимизации и экономические приложения", 1–5 июля 2003 г., Омск. – С. 96.
2. Колоколов А. А., Леванова Т. В. (1996) *Алгоритмы декомпозиции и перебора L-классов для решения некоторых задач размещения*// Вестник Омского государственного университета. Омск: ОмГУ, 1996. – N1. – С. 21–23.

Косарев Николай Александрович,
Омский государственный университет,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (8-381-2) 22-56-96.
e-mail: nkosarev@mail.ru

Рубанова Наталья Алексеевна,
Омский государственный университет путей сообщения,
пр. Маркса, 35, Омск, 644024, Россия, тел. (8-381-2) 36-18-11

ПОЛИЭДРАЛЬНАЯ КОМБИНАТОРИКА В МНОГОИНДЕКСНЫХ АКСИАЛЬНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧАХ

М. К. Кравцов

Основные результаты комбинаторной теории p-индексных ($p \geq 2$) аксиальных транспортных многогранников (p-АТМ) изложены в [1]. В докладе обсуждаются некоторые старые и новые результаты, полученные белорусской школой исследователей в указанном направлении. К этим результатам относятся (терминологию см. в [1]):

- теоремы, касающиеся асимптотического поведения некоторых классов p-АТМ порядка $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$ (здесь и далее предполагается, что $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_p \geq 2$): с ростом порядка многогранника отношение числа p-АТМ с максимальным количеством k-граней к общему числу p-АТМ стремится к единице, где $k = \prod_{s=1}^{p} n_s - \sum_{s=1}^{p} n_s - \left[\frac{n_p}{2}\right] + p - 1$; почти все p-АТМ имеют диаметр, не меньший $\sum_{s=1}^{p} n_s - p + 1$; почти все 2-АТМ имеют максимальный диаметр (М. К. Кравцов, А. П. Крачковский, 1998);

- теорема о представлении 3-АТМ порядка $n_1 \times n_2 \times n_3$ в виде некоторой $(n_1 n_2 n_3 - n_1 - n_2 - n_3 + 2)$-грани трехиндексного планарного транспортного многогранника порядка $(n_1 + 1) \times (n_2 + 1) \times (n_3 + 1)$ (М. К. Кравцов, А. П. Крачковский, 1999);

- опровержение гипотезы 17[1], согласно которой p-АТМ $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$ порядка $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_p$, $p \geq 3$, определенный целочисленными векторами $a^1, a^2, \ldots, a^p$, имеет максимальное число целочисленных вершин (ЦВ) тогда и только тогда, когда всякий 2-АТМ $M(a^1, a^s)$ порядка $n_1 \times n_s$, $s = 2, \ldots, p$, обладает максимальным числом вершин;

- верхние оценки числа целочисленных точек и ЦВ p-АТМ $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$;

- теорема, опровергающая гипотезу 18[1] о том, что для всякого p-АТМ M, определенного целочисленными векторами, справедлива оценка $\frac{f_0^z(M)}{f_0(M)} \geq \frac{2}{p}$, где $f_0^z(M)$ – число ЦВ, а $f_0(M)$ – число вершин многогранника M;

- решение проблемы о том, что для любого числа $r \in \{4, 6, 7, \ldots, min\{n_1, n_2 + n_3 - 2\} + n_2 + n_3 - 2\}$, $n_3 \geq 3$, и только для него, найдется 3-АТМ порядка $n_1 \times n_2 \times n_3$, определенный целочисленными векторами, содержащий r-нецелочисленные вершины, т. е. вершины, число дробных компонент у которых равно r (М. К. Кравцов, Е. В. Лукшин, 2003).

ЛИТЕРАТУРА

1. Емеличев В. А., Кравцов М. К. (1991) *Полиэдральные аспекты многоиндексных аксиальных транспортных задач* // Дискретная матемематика 1991. Т. 3, вып. 2. С. 3–24.

Кравцов Михаил Константинович, НИЭИ Минэкономики РБ,
ул. Славинского, 1, к. 1., Минск, 220086, Республика Беларусь,
тел. (+375 17) 264-35-24, e-mail: vicrab@mail.ru.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О МНОГОМЕРНОМ РЮКЗАКЕ

А. А. Кузнецова, Т. В. Яковлева

В работе рассматривается следующая задача дискретной оптимизации:

$$\left.\begin{array}{l} \langle c,x\rangle \uparrow \max, \quad x\in\{0,1\}^n; \\ \langle a^j,x\rangle \le \beta_j, \;\; j=1,\dots,m, \end{array}\right\} \qquad (MKP)$$

где $\beta_j, c_i, a_i^j > 0,\;\; a_i^j \le \beta_j,\;\; \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^j > \beta_j,\;\; i=1,\dots,n,\; j=1,\dots,m,$ и все коэффициенты — целые числа.

Также в качестве вспомогательной структуры рассматривается частный случай (при $m=1$) задачи (MKP) — задача о рюкзаке:

$$\langle c,x\rangle \uparrow \max, \quad \langle a,x\rangle \le \beta, \quad x\in\{0,1\}^n. \qquad (KP)$$

Задача (KP) равносильна [1] следующей непрерывной задаче обратно-выпуклого программирования:

$$\left.\begin{array}{c} \langle c,x\rangle \uparrow \max, \\ \langle a,x\rangle \le \beta, \;\; \| x-\dfrac{e}{2}\|^2-\dfrac{n}{4}\ge 0, \\ x\in\Pi=\{x\in I\!\!R^n \mid 0\le x_i\le 1\}. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Для решения обратно-выпуклой задачи (1) на основании условий глобальной оптимальности [2] и стратегии глобального поиска [1, 2] строится алгоритм, ключевыми моментами которого являются аппроксимация поверхности уровня, решение линеаризованной задачи и построение оценок сверху на численное значение задачи.

Для решения задачи о многомерном рюкзаке разработан метод, в котором использована частичная декомпозиция задачи (MKP) на задачи о рюкзаке с одним ограничением и применен алгоритм решения задачи (KP), эффективность которого проверена вычислительным экспериментом в [3].

Результаты проведенного на серии задач из OR-Library вычислительного эксперимента показали, что глобальное решение найдено в 36% задач; в остальных задачах удалось значительно (в среднем до 99%) приблизиться к известному решению. Максимальная погрешность решения (около 8%) была получена всего в двух задачах. При этом полученные алгоритмом оценки сверху на численные значения задач в среднем в 80 раз лучше оценок, построенных на основе LP-релаксации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецова А. А., Стрекаловский А. С., Цэвээндорж И. (1999) *Об одном подходе к решению целочисленных задач оптимизации.* ЖВММФ, Том 39, № 1, с. 9–16.

2. Стрекаловский А. С. (1993) *Об экстремальных задачах на дополнениях выпуклых множеств.* Кибернетика и системный анализ, № 1, с. 113–126.

3. Кузнецова А. А., Яковлева Т. В. (2003) *К решению задачи о рюкзаке алгоритмом с построением оценок.* Материалы Всероссийской конференции “Инфокоммуникационные и вычислительные технологии и системы” (Улан-Удэ, 5-9 августа 2003 г.). Ч. 2. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, с. 133–136.

Кузнецова Антонина Александровна, Яковлева Татьяна Владимировна,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия,
тел. (8-395-2) 51-13-98, факс (8-395-2) 51-16-16, e-mail: kuznet@icc.ru, yak@icc.ru

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ВЫБОРА ИЗДЕЛИЙ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Р. М. Ларин, Е. В. Хмель

Рассматривается задача

$$S(x,y) = \sum_{i=1}^{n}(-c_i^0 x_i^0 + c_i y_i) \to \max_{x,y}$$

$$x_i \in \{0,1\},\ 0 \le y_i \le a_i x_i \quad (i=\overline{1,n}),$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \le b,\ \sum_{i=1}^{n} d_i y_i \le d,$$

где $0 \le c_i \le d_i$, а a_i $(i=\overline{1,n}), b, d$ – положительны.

Эта задача является частично-целочисленной, и для её решения предлагается применить метод ветвей и границ по переменным x_i $(i=\overline{1,n})$. Переходя к двойственной задаче по непрерывным переменным y_i, получаем задачу

$$\Phi(x,v,w) = \sum_{i=1}^{n}\{a_i \max(0, c_i - v - d_i w) - c_i^0\}x_i + bv + dw \to \max_{x} \min_{v\ge 0, w\ge 0},$$

причём

$$\max_{x,y} S(x,y) = \max_x \min_{v,w} \Phi(x,v,w).$$

Справедливы неравенства

$$\Phi(\bar{x}, v', w') = \min_{v,w}\Phi(\bar{x},v,w) \le \max_x \min_{v,w}\Phi(x,v,w) \le \min_{v,w}\max_x \Phi(x,v,w) = \Phi(\bar{x},\bar{v},\bar{w}).$$

Здесь слева – нижняя оценка для метода ветвей и границ, справа – верхняя; $(\bar{x},\bar{v},\bar{w})$ – решение задачи $\min_{v,w}\max_x \Phi(x,v,w)$; а (v',w') – решение задачи $\min_{v,w}\Phi(\bar{x},v,w)$. Эти задачи легко модифицируются для случая, когда некоторые компоненты вектора x заданы.

Определение верхней оценки – это решение задачи выпуклого программирования с кусочно-линейной целевой функцией при ограничениях $v \ge 0$, $w \ge 0$. Для её нахождения применяется метод, аналогичный симплекс-методу. Подобная процедура используется и при вычислении нижней оценки.

Понятно, что метод ветвей и границ можно применить непосредственно к исходной задаче. Однако при предлагаемом подходе понижается размерность пространства. Кроме того, при непрерывном векторе x минимакс равен максимину, что позволяет надеяться на высокое качество оценок.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 02-01-00977.

Ларин Рудольф Михайлович, Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Академика В. А. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (8-383-2) 33-34-97, e-mail: larin@math.nsc.ru

Хмель Екатерина Владимировна, Новосибирский госуниверситет, ММФ,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. 8-913-8905450, e-mail: he-814@gorodok.net

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ МЕТОДОМ ПЛЕТЕЙ И ГРАНИЦ

А. В. Мартюшев

Для известной квадратичной задачи о назначениях [1] предлагается обобщение метода ветвей и границ, названного методом плетей и границ [2]. В нем оцениваются не единичные частичные решения, а наборы блоков частичных решений (плети). Разработана техника работы с плетьми и проведен ряд численных экспериментов на известных в литературе трудных задачах [3]. В некоторых задачах удалось улучшить рекорд.

ЛИТЕРАТУРА

1. Koopmans T. C., Beckmann M. *Assignment Problems and the Location of Economic Activities.* Econometrica, vol.25, No. 1, 1957, p. 53–76
2. Давыдов Г. В., Давыдова И. М. *Метод плетей и границ.* Исследование операций и статистическое моделирование. Издательство Санкт-Петербургского Университета. 1994. Вып. 6. с. 14–30
3. http://www.opt.math.tu-graz.ac.at/qaplib/inst.html

Мартюшев Алескей Владимирович,
Санкт–Петербургский государственный университет,
Университетский пр., 28, 198504, Старый Петергоф, Санкт-Петербург, Россия,
тел.: 8-812-5265458, e-mail: MLeshaV@yandex.ru

О ГАРАНТИРОВАННОЙ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ГРАДИЕНТНОГО АЛГОРИТМА НА ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ ДВУХ СУПЕРМАТРОИДОВ

А. Б. Рамазанов

В данной работе рассматривается задача максимизации ρ-координатно-выпуклой функции, понятие которой введено в [1], на пересечении двух суперматроидов. Для этой задачи впервые получены априорные и апостериорные гарантированные оценки точности градиентного алгоритма покоординатного подъема, который уточняет и обобщает ранее известные аналогичные оценки из [2]. Кроме того найдены новые условия, когда значения целевой функции рассматриваемой задачи в глобальном (оптимальном) и градиентном экстремуме совпадают.

Рассматривается следующая задача А дискретной оптимизации:

$$\max\{f(x) : x = (x_1, \cdots, x_n) \in S_1 \cap S_2\},$$

где $f(x)$ ρ-координатно-выпуклая функция на Z^n_+ [1], $S_1, S_2 \subseteq Z^n_+$ – суперматроиды [2], Z^n_+ – множество n–мерных неотрицательных целочисленных векторов. Пусть x^*– оптимальное, а x^g – градиентное (то есть построенное с помощью градиентного алгоритма покоординатного подъема [1-3]) решении задачи А.

Теорема. *Пусть в задаче А $f(x)$ неубывающая функция, $\omega_1(\rho, \delta_f) > 0$. Тогда справедлива следующая гарантированная оценка погрешности градиентного алгоритма покоординатного подъема для решения задачи А*

$$(f(x^*) - f(x^g))/(f(x^*) - f(0)) \le \varepsilon,$$

где $\varepsilon = (2 - B(\rho, r, h))/3$, $B(\rho, r, h) = (h - r)^2\omega(\rho)/h^2\omega_1(\rho, \delta_f)$,

$$h = \max\{h(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i : x \in S_1 \cap S_2\},\ r = \min\{h(x) - 1 : x \in Z^n_+ \backslash (S_1 \cap S_2)\},$$

$$\omega_1(\rho, \delta_f) = 2\Omega(\delta_f) - \omega(\rho),\ \delta_f = (\delta^f_1, \cdots, \delta^f_n),\ \delta^f_i = f(e^i) - f(0),\ i = \overline{1, n},\ \Omega(\delta_f) = \sum_{i=1}^{n} \delta^f_i,$$

$$\omega(\rho) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad N^+_\rho = \emptyset, \\ \left(\sum\limits_{i \in N^+_\rho} \frac{1}{\rho_i}\right)^{-1}, & \textit{если} \quad N^+_\rho \ne \emptyset, \end{cases} \qquad N^+_\rho = \{i : \rho_i > 0, i = \overline{1, n}\},$$

e^i – i-й единичный n-мерный орт.

Следствие 1. *В условиях теоремы, если $B(\rho, r, h) = 1$, то $\varepsilon = 1/3$ (ср. с [2]).*

Следствие 2. *В условиях теоремы, если $B(\rho, r, h) = 1$ и $S_1 \cap S_2$ суперматроид, то $f(x^*) = f(x^g)$.*

Следствие 3. *В условиях теоремы, если $S_1 \cap S_2$однородный суперматроид [2], то $\varepsilon = 1/2$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. V. A. Emelichev, M. M. Kovalev, A. B. Ramazanov. // J. Discrete Mathematic and Applications. 1992. V. 2. P. 113-131.

2. М. М. Ковалев. (1987) *Матроиды в дискретной оптимизации.* // Бел. Гос. Ун-т.

3. Н. И. Глебов. //Управляемые системы. Новосибирск: Наука, 1973. Вып. 11. С.10-15.

Рамазанов Али Багдаш оглы, Бакинский Государственный Университет,
пр. Гянджа, 111/24, Баку, 370126, Азербайджан, e-mail: rab-unibak@rambler.ru

РЕШЕНИЕ МИНИСУММНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ НА ЛИНИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА МАКСИМАЛЬНЫЕ РАССТОЯНИЯ

Д. В. Филимонов

Рассматривается задача размещения взаимосвязанных объектов на сети, в вершинах которой расположены фиксированные объекты. Новые объекты связаны с фиксированными и размещаются в вершинах. В одной вершине можно размещать произвольное количество новых объектов. Заданы максимальные допустимые расстояния между парами объектов. В задаче используется минисуммный критерий оптимизации.

Пусть фиксированные объекты расположены в вершинах $v_1, ..., v_m$ сети, n – количество новых объектов. Введем обозначения: $I = \{1, ..., m\}$, $J = \{1, ..., n\}$. Размещением объектов назовем однозначное отображение $\pi : J \to I$. В размещении π новый объект $j \in J$ размещается в вершине $v_{\pi(j)}$.

Через w_{ij}, $i \in I$, $j \in J$, обозначим удельные стоимости связей фиксированного объекта i и размещаемого j. Через v_{jk} обозначим удельные стоимости связей новых объектов j и k между собой, $j, k \in J$, $j < k$. Необходимо найти размещение, минимизирующее суммарную стоимость связей между объектами:

$$\sum_{j,k\in J,\ j<k} v_{jk} d(v_{\pi(j)}, v_{\pi(k)}) + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} w_{ij} d(v_i, v_{\pi(j)}) \to \min_{\pi}, \tag{1}$$

удовлетворяющее ограничениям:

$$d(v_{\pi(j)}, v_{\pi(k)}) \le b_{jk},\ j,k \in J,\ j < k, \tag{2}$$

$$d(v_i, v_{\pi(j)}) \le c_{ij},\ i \in I,\ j \in J. \tag{3}$$

Здесь b_{jk} и c_{ij} – максимальные допустимые расстояния между соответствующими объектами, $d(\cdot,\cdot)$ – расстояние между вершинами сети.

В работе [3] предложен полиномиальный алгоритм решения задачи (1) на линии. В [1] рассматривалось решение задачи (1),(3) на древовидной сети. На произвольной сети задача является NP-трудной [2].

В докладе предлагается полиномиальный алгоритм решения задачи (1)-(3) на линии, в котором задача сводится к решению серии вспомогательных задач без ограничений на максимальные расстояния новых объектов между собой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Забудский Г. Г., Филимонов Д. В. (2000) *Алгоритмы решения задач размещения на деревьях с ограничениями на максимальные расстояния* // Материалы международной конференции "Дискретный анализ и исследование операций"Новосибирск, 2000. С.165.
2. Kolen A. (1982) *Location problems on trees and in rectilinear plane* // Stitchting Mathematish Centrum, Kruislaan 413, 1098 SJ, The Netherlands, Amsterdam, 1982.
3. Picard J. C., Ratliff D. H. (1978) *A cut approach to the rectilinear distance facility location problem* // Oper. Res.– 26(3).– 1978.– P. 422–433.

Филимонов Дмитрий Валерьевич, Омский государственный университет,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел.(3812) 22-56-96,
e-mail: fdv@iitam.omsk.net.ru