RELOCATION PROBLEMS WITH MULTIPLE WORKING CREWS

A. V. Kononov, B. M. T. Lin

Given a fixed budget, the generic relocation problem seeks to determine a feasible reconstruction sequence of old buildings for a public housing project. The feasibility issue can be resolved because it is mathematically equivalent to makespan minimization in a two-machine flowshop. In this paper, we consider the variant where multiple working crews are available for the redevelopment project. Most of our results center on the unit-execution time (UET) situations. In this case the relocation problem is a generalization of the classical bin packing problem and can be considered as a special resource-constrained scheduling problem. We first present an NP-hardness proof for a case with two working crews and unit processing times that has remained open since 1988. Then, we design several approximation algorithms and obtain non-approximability results for different cases of relocation problem.

The research of Kononov A.V. was supported by RFBR grant 03–01–00455.

Kononov Alexander Veniaminovich, Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Akademika Koptyuga, 4, Novosibirsk, 630090, Russia,
phone: (8-383-2) 33-20-86, fax: (8-383-2) 33-25-98,
e-mail: alvenko@math.nsc.ru

Bertrand M. T. Lin, National Chi Nan University,
303, University Rd., Puli, Nantou, Taiwan, 545, R.O.C
phone: 886-49-2910960 ext 4848, fax: 886-49-2915205,
e-mail: mtlin@ncnu.edu.tw

ON THE COMPACT VECTOR SUMMATION IN STOCHASTIC MACHINE SCHEDULING

R. A. Koryakin, S. V. Sevastyanov

For a wide class of machine scheduling problems (including FlowShop, OpenShop and others), there exists a scheme which allows to reduce such problem to the *compact vector summation problem* ([2],[3]) formulated as follows. Given set of vectors $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ such that $\sum_{j=1}^n x_j = 0$, one needs to derive a permutation $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ of $\{1, \dots, n\}$ minimizing the function

$$f_X(\pi) = \max_{k=1,\dots,n} \|x_1 + \dots + x_{\pi_k}\|, \tag{1}$$

where the norm is defined by its d-dimensional unit ball B_d:

$$B_d = \{x = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) \in \mathbb{R}^d : \, |x^{(i)}| \le 1; \, |x^{(i)} - x^{(j)}| \le 1; \, i, j = 1, \dots, d\}.$$

In other words, one needs to sum vectors from X in such order π that all partial sums remain within a radius as small as possible. The problem (1) is solved ([1]) with the estimate

$$f_X(\pi) \le (d - 1 + 1/d) \max_i \|x_i\|, \tag{2}$$

which implies good makespan estimates for machine scheduling problems.

In our paper, we consider machine scheduling problems in stochastic formulation and assume all operation lengths being independent identically distributed random variables with distribution F. For a wide class of distributions F, we suggest two polynomial time algorithms. The first one almost always (for $n \to \infty$) executes a more precise reduction scheme from a machine scheduling problem to a problem of type (1). The second algorithm almost always (for $n \to \infty$) solves that problem with the bound $f_X(\pi) \le \max_i \|x_i\|/2 + o(1)$ guaranteed, which is significantly better than (2).

Thus, we show that for a wide class of stochastic machine scheduling problems, one can almost always find a much better solution in comparison with the deterministic case.

Supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant no. 02-01-01153).

REFERENCES

1. S. V. Sevastyanov (1976) *On a Compact Vector Summation.* Diskretnaya Matematika (Moscow) **3**(3), P. 66–72. (Russian)
2. S. V. Sevast'janov (1994) *On Some Geometric Methods in Scheduling Theory: a Survey.* Discrete Appl. Math. **55**, P. 59–82.
3. S. V. Sevast'janov (1995) *Vector Summation in Banach Space and Polynomial Time Algorithms for Flow Shops and Open Shops.* Mathematics of Operations Research **20**, P. 90–103.

Koryakin Roman Aleksandrovich, Sevastyanov Sergey Vassilievich,
Sobolev Institute of Mathematics, pr. Akademika Koptyuga, 4, Novosibirsk, 630090, Russia, phone: (8-383-2) 33-21-89, fax: (8-383-2) 33-25-98,
e-mails: romank@mail.nsk.ru, seva@math.nsc.ru.

СХЕМА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ $1 \mid r_j \mid L_{\max}$

А. А. Лазарев, Р. Р. Садыков

Рассматривается NP-трудная в сильном смысле проблема $1 \mid r_j \mid L_{\max}$. Для заданного примера I^α рассматриваемой проблемы необходимо на одном приборе без прерываний и одновременного обслуживания более одного требования в каждый момент времени обслужить требования множества $N^\alpha = \{1, 2, \ldots, n\}$ с моментами поступления r_j^α, продолжительностями обслуживания p_j^α и директивными сроками d_j^α. При этом минимизируется целевая функция $L_{\max}^\alpha(\pi) = \max\{c_j^\alpha(\pi) - d_j^\alpha\}$, где $c_j^\alpha(\pi)$ — момент окончания обслуживания требования $j \in N^\alpha$.

Теорема. Пусть π^α и π^β — оптимальные расписания для примеров I^α и I^β, соответственно ($p_j^\alpha = p_j^\beta$). Тогда справедливо

$$0 \le L_{\max}^\alpha(\pi^\beta) - L_{\max}^\alpha(\pi^\alpha) \le \rho,$$

где $\rho = \max\limits_{j \in N}\{r_j^\alpha - r_j^\beta\} - \min\limits_{j \in N}\{r_j^\alpha - r_j^\beta\} + \max\limits_{j \in N}\{d_j^\alpha - d_j^\beta\} - \min\limits_{j \in N}\{d_j^\alpha - d_j^\beta\}$.

Предлагается следующая схема решения исходной проблемы $1 \mid r_j \mid L_{\max}$. Произвольный пример I^α путем изменения времен поступления и/или директивных сроков сводится к примеру I^β, удовлетворяющему некоторому полиномиально разрешимому частному случаю проблемы, выраженному линейными ограничениями. При этом минимизируется величина ρ. В общем случае для этого надо решить задачу линейного программирования.

Для некоторых известных полиномиально разрешимых случаев проблемы $1 \mid r_j \mid L_{\max}$ построены эффективные алгоритмы решения задачи линейного программирования для минимизации абсолютной погрешности ρ при сведении примера I^α к примеру I^β. Таким образом, для произвольного примера I^α за полиномиальное время мы находим расписание π^β с гарантированной абсолютной погрешностью, которая является минимальной в рамках рассмотренной схемы.

Лазарев Александр Алексеевич, Садыков Руслан Равильевич,
Казанский государственный университет, кафедра экономической кибернетики,
ул. Кремлевская, 18, г. Казань, 420008,
тел. (8432) 31-54-53, факс (8432) 38-74-18, e-mail: Alexandr.Lazarev@ksu.ru

СООТВЕТСТВИЕ ДВУХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ ИСХОДНЫМ УСЛОВИЯМ

О. А. Ляхов

Показано, что требование однократного обхода вершин является чрезмерным в формализации задачи коммивояжера относительно ее исходных формулировок. Ослабленное условие – "посетить каждый пункт не менее чем по одному разу" – не противоречит большей части практических проблем, но способствует уменьшению значения критериальной функции. На примерах показано, что во многих практических задачах возможно улучшение "оптимального" решения. Определены условия, при которых решения задач в стандартной формулировке и с ослабленными условиями совпадают и различаются.

В сетевом планировании при оценке ресурсообеспеченности интервалы времени учета ресурсов и число ресурсных групп определяют степень агрегированности сетевых моделей. Необходимость в решении практических задач заставляет укрупнять модели. В результате возникают ошибки учета ресурсов во времени. Показано, что ошибки агрегирования – систематические. Они уменьшают оценки несбалансированности ресурсов относительно их реальных величин. Расчеты на ЭВМ примеров из практики показали, что величина ошибок достаточно велика, чтобы их игнорирорировать в планировании. В экспериментах отмечены ситуации, когда улучшение сбалансированности агрегированных планов одновременно ухудшает детализированное расписание.

Ляхов Олег Алексеевич,
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (8-383-2) 34-10-66, факс (8-383-2) 34-37-83, e-mail: loa@rav.sscc.ru

О ПОСТРОЕНИИ ЦИКЛИЧЕСКИХ РАСПИСАНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ ОБРАБОТКИ ОДНОТИПНЫХ ДЕТАЛЕЙ

А. А. Романова, В. В. Сервах

Рассмотрим следующие задачи построения циклических расписаний. На производственной линии, состоящей из M различных машин, необходимо обработать партию однотипных деталей. Обработка каждой детали заключается в последовательном выполнении N операций. Операция i выполняется на машине M_i в течение p_i единиц времени ($i = 1, 2, \ldots, N$). Возможно многократное использование некоторых машин в технологическом маршруте детали.

Обозначим $t(i;n)$ – время начала выполнения i-ой операции n-ой детали. Расписание называется циклическим, если для любого $i = 1, 2, \ldots, N$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $t(i;n) = t_i + (n-1)C$, где $t_i = t(i;1)$ и C – время цикла (производительность линии). В задаче необходимо построить циклическое расписание, то есть определить t_i для всех i. Циклическое расписание, кроме времени цикла, можно характеризовать временем F нахождения детали в системе и числом H одновременно обрабатываемых деталей за время цикла. Целесообразно рассматривать следующие задачи: (1) $C \to \min$; (2) $F \to \min$ при условии $C \leq C'$; (3) $C \to \min$ при условии $H \leq H'$.

Задача (1) полиномиально разрешима, задачи (2) и (3) — NP-трудны в сильном смысле [1,2]. Но оптимальное решение задачи (1) может быть не рационально с производственной точки зрения. В работе был построен класс задач, в которых при минимальном значении C значение F велико, а незначительное увеличение времени цикла приводит к существенному сокращению F. В связи с этим необходимо минимизировать не только длину цикла, но и время нахождения детали в системе. Величины F, C и H связаны соотношением $H = \lceil \frac{F}{C} \rceil$. Таким образом, в задаче (3) одновременно учитываются F и C.

В данной работе изучаются различные подходы к решению задач (2) и (3). Установлено, что для задачи (2) не существует $FPTAS$, если $P \neq NP$. Для задачи (3) при $H' < n$ предложен алгоритм трудоемкости $C_{n-1}^{H'-1}O(n)$, показывающий, что при фиксированном H' задача полиномиально разрешима. При $H' \geq n$ задача также полиномиально разрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Roundy. (1992) *Cyclic schedules for job shops with identical jobs* //Mathematics of Operations Research. - 1992. - Vol. 17, N 4. p. 842–865.
2. C. Hanen. (1994) *Study of a NP-hard cyclic scheduling problem: The recurrent job-shop* // European Journal of Operational Research. - 1994. - Vol. 72. p. 82-101.
3. M. R. Gary, D. S. Johnson. (1978) *"Strong" NP-completeness results: Motivation, examples, and implication.* - Journal of the ACM 25, 1978. p. 499-508.

Романова Анна Анатольевна, Омский государственный университет,
пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (8-381-2) 22-56-96, e-mail: anuta81@bk.ru

Сервах Владимир Вицентьевич, Омский филиал института математики
им. С. Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия,
тел. (8-381-2) 30-19-97, факс (8-381-2) 23-45-84, e-mail: svv@iitam.omsk.net.ru

ОБЩИЕ СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА РАСПИСАНИЙ ДОПУСКАЮЩИХ ПРЕРЫВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ

С. В. Севастьянов

Понятие *расписания*, как нетрудно понять, является базовым в Теории Расписаний. Между тем, расписание, как ключевой объект наших исследований, не всегда поддается не только эффективному нахождению, но даже описанию. Такая ситуация наблюдается, в первую очередь, при рассмотрении задач, допускающих неограниченное число прерываний операций. Действительно, поскольку для задания такого расписания необходимо задать информацию о **каждом фрагменте** каждой операции, то в некоторых случаях число фрагментов операций в оптимальном расписании может расти неполиномиально от длины записи входной информации (и значит, эффективного алгоритма решения такой задачи не существует по определению); в других случаях оптимальное расписание может потребовать бесконечного дробления операций (тогда задача **алгоритмически неразрешима**); и наконец, в третьих случаях оптимального решения может не существовать вовсе — при том, что множество допустимых решений непусто.

Между тем, очевидная исключительность задач с прерываниями в контексте прочих задач зачастую игнорируется исследователями. Вопросы о существовании оптимального расписания с конечным (либо полиномиальным) числом прерываний — как и существования оптимального расписания вообще — не ставятся при исследовании конкретных задач, а если и ставятся, то ответы на них, как правило, предполагаются "очевидными" (но не всегда верными). Наше исследование нарушает эту традицию. Впервые для очень широкого круга моделей (включающего большую часть известных в литературе моделей теории расписаний и календарного планирования с ограничениями на ресурсы и прерываниями операций) и для широкого набора целевых функций (включающего все "классические" целевые функции) получены теоремы о существовании оптимального решения, о существовании решения с конечным/полиномиально ограниченным числом прерываний, о рациональной структуре оптимального решения, о существовании решений с прерываниями в целых точках, и т.п. Построен ряд примеров, подтверждающих необходимость тех или иных свойств моделей и целевых функций, используемых в формулировках теорем.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00039).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ph. Baptiste, J. Carlier, A. Kononov, M. Queyranne, S. Sevastianov, M. Sviridenko. *Structural Properties of Preemptive Schedules.* SIAM J. of Computing, submitted.

Севастьянов Сергей Васильевич,
Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия;
тел. (8-3832) 332189, e-mail: seva@math.nsc.ru

СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ РАСПИСАНИЙ В ЗАДАЧЕ ДЖОНСОНА С ПРЕРЫВАНИЯМИ

С. В. Севастьянов, Д. А. Тарасова, И. Д. Черных

Рассматривается трехмашинная задача Джонсона (или задача FLOW SHOP) на минимум длины расписания в двух постановках — с разрешением прерываний и без прерывания операций. В общепринятой системе эти задачи обозначаются как $F3|pmtn|C_{\max}$ и $F3||C_{\max}$ соответственно. Исследуется соотношение между оптимумами этих задач, а также их отношение к стандартной нижней оценке $\bar{C}$ (равной максимуму из наибольшей машинной нагрузки и наибольшей длины работы) в худшем случае. Пусть S^* обозначает оптимальное расписание для данного входа, а S^{**} — оптимальное расписание с прерываниями. Если $C_{\max}(S, I)$ обозначает длину расписания S для входа I, то

$$\bar{C}(I) \leqslant C_{\max}(S^{**}, I) \leqslant C_{\max}(S^*, I). \tag{1}$$

Обозначим три функции от I, входящие в (1), через $\eta_0(I), \eta_1(I)$ и $\eta_2(I)$ соответственно. Тогда соотношение между ними удобно описать с помощью функций

$$\rho_j^i(m) \doteq \sup_{I \in \mathcal{I}_m} \frac{\eta_i(I)}{\eta_j(I)},\ 0 \leqslant j < i \leqslant 2,$$

где $\mathcal{I}_m$ — множество входов задачи с m машинами. Основной результат работы (полученный с использованием компьютерной программы) состоит в нахождении точного значения $\rho_0^1(3) = \frac{9}{5}$, т.е. — в определении точного интервала локализации оптимумов задачи Джонсона с прерываниями: $C_{max}(S^{**}) \in [\bar{C}, \frac{9}{5}\bar{C}]$. В совокупности с ранее известными результатами это дает нам полную картину значений $\rho_j^i(3)$. В качестве побочного продукта получен алгоритм приближенного решения данной задачи с относительной погрешностью $\frac{9}{5}$ и линейной трудоемкостью. При этом строящееся алгоритмом расписание содержит не более одного прерывания.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02-01-00039, 02-01-01153).

Севастьянов Сергей Васильевич, Черных Илья Дмитриевич,
Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-3832) 332189,
e-mail: seva@math.nsc.ru, metal@ngs.ru

Тарасова Дарья Александровна,
Новосибирский Государственный Университет,
пр. Академика Коптюга, 2, Новосибирск, 630090, Россия

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ МАКСИМАЛЬНОГО ВРЕМЕННОГО СМЕЩЕНИЯ

О. Н. Шульгина

Исследуется NP–трудная в сильном смысле задача теории расписаний — задача минимизации максимального временного смещения. Для указанной задачи предложены и обоснованы приближенный алгоритм решения и псевдополиномиальный алгоритм решения NP–трудного частного случая.

Опишем сначала второй из алгоритмов. Пусть требования задачи можно перенумеровать одновременно по неубыванию моментов поступления и невозрастанию директивных сроков. Алгоритм решения этого частного случая заключается в следующем. Первоначально отыскивается приближенное расписание со значением y целевой функции задачи, отличающееся от оптимального значения на величину, не превышающую $p_{max} = \max_{j \in N} p_j$, где N – множество требований, p_j – продолжительность обслуживания требования $j \in N$. Затем, уменьшая последовательно значение y на единицу и строя на каждой итерации допустимое расписание со значением целевой функции, не превышающим текущего значения y, не более, чем за p_{max} шагов отыскивается оптимальное расписание указанного NP–трудного частного случая. Получена следующая псевдополиномиальная оценка трудоемкости алгорита: $O(n^2 \sum_{j \in N} p_j + np_{max} \sum_{j \in N} p_j)$, где n – количество требований. Процедуры построения приближенного расписания, а также допустимых относительно y расписаний на каждом шаге описанного алгоритма предложены в [1,2].

На основе алгоритма решения частного случая разработан приближенный алгоритм той же трудоемкости решения общего случая задачи. Для него теоретически получена оценка абсолютной погрешности по значению целевой функции. Идея приближенного метода заключается в следующем. Некоторым алгоритмом директивные сроки требований изменяются так, чтобы новые параметры требований удовлетворяли условиям приведенного выше частного случая. Далее применяется описанный алгоритм решения частного случая. Полученное расписание является приближенным расписанием с минимальным значением верхней границы абсолютной погрешности оптимального значения целевой функции на множестве оптимальных расписаний указанного частного случая. Минимизация верхней границы абсолютной погрешности обеспечивается алгоритмом изменения директивных сроков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шульгина О. Н. (2001) *Процедура построения допустимого расписания для задачи минимизации максимального временного смещения*// Исслед. по прикл. матем. – Выпуск 23. – Казань. – С. 150 – 158.
2. Шульгина О. Н., Щербакова Н. К. (2003) *Об одном приближенном алгоритме решения NP–трудной задачи теории расписаний*// Исслед. по прикл. матем. – Выпуск 24. – Казань, – С. 147 – 159.

Шульгина Оксана Николаевна,
Казанский государственный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Татарстан, Россия,
тел. (8-8432) 31-54-53, e-mail: Oksana.Shulgina@ksu.ru