ЗАДАЧА РАСКРАСКИ ИНЦИДЕНТОРОВ МУЛЬТИГРАФА

В. Г. Визинг, А. В. Пяткин

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $G = (V, E)$ — ориентированный мультиграф без петель с множеством вершин V и множеством дуг E. Через $\Delta(G), \Delta^+(G)$ и $\Delta^-(G)$ обозначаются соответственно его максимальные степень, входящая и исходящая полустепени. Если дуга $e \in E$ инцидентна вершине $v \in V$, то упорядоченная пара (v, e) называется *инцидентором*. Инцидентор (v, e) удобно трактовать как половину дуги e, инцидентную вершине v. Будем также говорить, что инцидентор (v, e) *примыкает* к вершине v. Каждая дуга $e = uv$ имеет два инцидентора: *начальный* инцидентор (u, e) и *конечный* инцидентор (v, e). Эти два инцидентора называются *сопряженными* по отношению друг к другу. Два инцидентора называются *смежными*, если они примыкают к одной вершине. Множество всех инциденторов мультиграфа G обозначим через I. *Раскраской инциденторов* называется произвольное отображение $f : I \longrightarrow Z_+$, где Z_+ — множество целых положительных чисел (*цветов*). Варьируя ограничения на цвета смежных и сопряжённых инциденторов, можно получить широкий класс задач инциденторной раскраски мультиграфов.

Впервые задача раскраски инциденторов появилась в работе [10], где была рассмотрена следующая проблема. Пусть задана локальная сеть, состоящая из центральной ЭВМ и n шин, соединяющих её с периферийными объектами. Для каждой пары объектов i, j известен объём информации d_{ij}, который i-й объект должен передать j-му. Информация может передаваться либо напрямую (из i-го объекта в j-й за 1 единицу времени), либо с запоминанием в центральной ЭВМ. Пропускные способности всех шин равны 1, т. е. каждая шина в каждый момент времени может получать или передавать не более 1 единицы информации. Требуется найти расписание с минимальным временем передачи сообщений. Эта задача моделируется мультиграфом G, в котором каждая вершина соответствует шине, а каждая дуга — единице передаваемой информации (т. е. из i-й вершину в j-ю ведёт d_{ij} дуг). Расписание передачи сообщений эквивалентно раскраске инциденторов мультиграфа G, в которой цвета любых двух смежных инциденторов различны, а цвет начального инцидентора каждой дуги не превосходит цвета конечного инцидентора.

2. p – РАСКРАСКА ИНЦИДЕНТОРОВ

Раскраска инциденторов называется *правильной*, если любые два смежных инцидентора окрашены в разные цвета. Правильная раскраска инциденторов называется

Визинг Вадим Георгиевич,
Одесская государственная академия пищевых технологий,
ул. Канатная, 112, Одесса, 270039, Украина, E-mail: vizing@osaft.odessa.ua

Пяткин Артём Валерьевич,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383-2) 33-25-94,
факс (8-383-2) 33-25-98, E-mail: artem@math.nsc.ru

p–раскраской, если разность цветов конечного и начального инциденторов каждой дуги не меньше p. В частности, упомянутая выше задача оптимизации расписания передачи сообщений сводится к задаче 0–раскраски инциденторов. Задача p–раскраски инциденторов возникает при рассмотрении двухуровневой сети, где каналы связи верхнего уровня (соединяющие центральные ЭВМ) имеют высокие пропускные способности. Наименьшее число цветов, необходимое для p–раскраски инциденторов мультиграфа G, называется (инциденторным) p–хроматическим числом мультиграфа G и обозначается через $\chi(p, G)$. Основным утверждением, касающимся p–раскраски инциденторов, является

Теорема 1. Пусть G — ориентированный мультиграф. Тогда

$$\chi(p, G) = \max\{\Delta^+(G), \Delta^-(G)\} + p \tag{1}$$

При $p = 0$ формула (1) была получена в [10], при $p = 1$ — в [15], при произвольном p она была впервые доказана в [11]. Наиболее простое доказательство формулы (1) приведено в [5]. С помощью теоремы 1 легко доказывается содержащаяся в [8]

Теорема 2. Для любого неориентированного мультиграфа G справедливо равенство $\chi(p, G) = \max\{\Delta(G), \lceil\Delta(G)/2\rceil + p\}$.

Таким образом, инциденторное p–хроматическое число точно выражается через другие, легко обозримые характеристики мультиграфа. Любопытно отметить, что эта, не характерная для задач раскраски ситуация не изменится, если перейти к p–раскраске инциденторов взвешенных мультиграфов, т. е. мультиграфов, у которых каждой вершине v приписан вес $w(v)$. Раскраску инциденторов такого взвешенного мультиграфа будем называть правильной, если для каждой вершины выполняется условие: число одинаково окрашенных инциденторов, примыкающих к вершине, не больше веса вершины. Такая задача возникает в случае, когда шины сети имеют произвольные пропускные способности [11,17]. Минимальная p–раскраска инциденторов взвешенного мультиграфа $G = (V, E)$ сводится к минимальной p–раскраске невзвешенного мультиграфа, который получится из G, если каждую вершину $v \in V$ заменить на множество из $w(v)$ попарно не смежных вершин, между которыми наиболее равномерным образом распределить дуги, инцидентные v. Поэтому минимальное число цветов, необходимое для p–раскраски инциденторов взвешенного ориентированного мультиграфа равно $\max_{v\in V}\{\lceil d^+(v)/w(v)\rceil, \lceil d^-(v)/w(v)\rceil\} + p$, а неориентированного мультиграфа — $\max_{v\in V}\{R(v), \lceil R(v)/2\rceil + p\}$, где $R(v) = \lceil d(v)/w(v)\rceil$.

В теории графов достаточно много работ посвящено раскраске в предписанные цвета [14]. В работе [2] изучается p–раскраска инциденторов ориентированных мультиграфов в предписанные цвета. Предположим, что каждой дуге e мультиграфа G предписано некоторое множество $A(e)$ цветов, допустимых для раскраски инциденторов дуги e. Обозначим через $\chi_L(p, G)$ наименьшее натуральное число такое, что при любом предписании A, удовлетворяющем для любой дуги e мультиграфа G условию $|A(e)| \geq \chi_L(p, G)$, существует p–раскраска всех инциденторов мультиграфа G в предписанные цвета. Ясно, что $\chi(p, G) \leq \chi_L(p, G)$, однако, как показано в [2], равенство $\chi_L(p, G) = \chi(p, G)$ выполняется не всегда. (Аналогичный вопрос, касающийся раскраски ребер, является открытой проблемой [14]). В [2] также доказана

Теорема 3. Пусть G — ориентированный мультиграф степени Δ. Тогда $\chi_L(p, G) \leq 2\lfloor(\Delta + 1)/2\rfloor + p$.

Не решен вопрос, имеет ли место оценка $\chi_L(p, G) \leq \Delta + p$? В [8] показано, что для неориентированных мультиграфов это верно, хотя подробно раскраска инциденторов в предписанные цвета в случае неориентированных мультиграфов не изучалась.

В статьях [3, 8] изучалась тотальная раскраска мультиграфов. При тотальной p–раскраске раскрашиваются и инциденторы, и вершины, причем инциденторы p–раскрашиваются, а цвет каждой вершины отличается как от цветов примыкающих к ней инциденторов, так и от цветов смежных с ней вершин. Наименьшее число цветов, необходимое для тотальной p–раскраски мультиграфа G, обозначается через $\tau(p, G)$. Очевидно, что $\chi(p, G) \leq \tau(p, G)$. В отличие от изучавшейся в теории графов задачи тотальной раскраски ребер и вершин [14], удалось получить верхние оценки тотального p–хроматического числа, мало отличающиеся от указанной нижней оценки.

Теорема 4. Пусть G — ориентированный мультиграф. Тогда $\tau(0, G) = \chi(0, G) + 1 = \Delta(G) + 1$, а при любом $p \geq 1$ выполняется неравенство $\tau(p, G) \leq \chi(p, G) + 2$.

Не решен вопрос: верно ли при любом p неравенство $\tau(p, G) \leq \chi(p, G) + 1$?

Теорема 5. Пусть G — неориентированный мультиграф. Тогда $\tau(p, G) \leq \chi(p, G) + 1$ при любом p.

В [3, 8] доказывается также, что как для ориентированного, так и для неориентированного мультиграфа G при $p \geq 3\lfloor \Delta(G)/2 \rfloor + 1$ имеет место равенство $\tau(p, G) = \chi(p, G)$. Кроме того, в [8] устанавливается, что для неориентированного мультиграфа G при $p \leq \lfloor \Delta(G)/2 \rfloor$ верно равенство $\tau(p, G) = \chi(p, G) + 1 = \Delta(G) + 1$; приводятся также точные значения тотального p–хроматического числа для полных неориентированных графов.

3. (p, q) – РАСКРАСКА ИНЦИДЕНТОРОВ

Правильная раскраска инциденторов мультиграфа G называется (p, q)–раскраской, где $p \leq q$, если разность цветов конечного и начального инциденторов каждой дуги лежит в интервале $[p, q]$. Упоминавшаяся ранее p–раскраска является частным случаем (p, q)–раскраски при $q = \infty$, а в случае $p = q = 0$ имеет место обычная правильная рёберная раскраска. Содержательный смысл ограничения сверху на разность цветов заключается в том, что передаваемая информация не может храниться в памяти центральной ЭВМ больше заданного времени. Такое требование может быть обосновано, например, ограничением памяти центральной ЭВМ [11,17]. Наименьшее число цветов, необходимое для (p, q)–раскраски инциденторов мультиграфа G, называется (инциденторным) (p, q)–хроматическим числом мультиграфа G и обозначается через $\chi(p, q, G)$. В отличие от p–хроматического числа, для отыскания (p, q)–хроматического числа не найдено эффективного алгоритма. Приведем результаты, полученные при изучении (p, q)–хроматического числа. Легко видеть, что при любых p и q таких, что $0 \leq p \leq q$, справедливы неравенства $\chi(p, G) \leq \chi(p, q, G) \leq \chi(p, p, G)$. В работах [5,7] устанавливаются некоторые достаточные условия, при которых (p, q)–хроматическое число равно p–хроматическому. В [7] доказана

Теорема 6. Пусть G — ориентированный мультиграф. Тогда $\chi(0, 1, G) = \chi(0, G) = \Delta(G)$.

В работе [5] доказана

Теорема 7. Пусть G — ориентированный мультиграф. Тогда при $q \geq \Delta(G) - 1$ справедливо равенство $\chi(p, q, G) = \chi(p, G)$, причем при $q \leq \Delta(G) - 2$ равенство $\chi(p, q, G) = \chi(p, G)$ может не выполняться.

Обозначим через $\chi_{p,q}(\Delta)$ точную верхнюю оценку для (p, q)–хроматического числа мультиграфов степени Δ, т. е. наименьшее число такое, что для любого мультиграфа G степени Δ выполняется неравенство $\chi(p, q, G) \leq \chi_{p,q}(\Delta)$. В силу теоремы 1 при любом Δ существует мультиграф H степени Δ, для которого $\chi(p, H) = \Delta + p$. Поэтому всегда $\chi_{p,q}(\Delta) \geq \Delta + p$. В работах [12, 13] доказана

Теорема 8. При $q \geq \lceil \Delta/2 \rceil$ выполняется равенство $\chi_{p,q}(\Delta) = \Delta + p$.

В работе [13] показано также, что $\chi_{1,1}(2t + 1) \geq 2t + 3$. Пока это единственный известный пример, подтверждающий, что равенство $\chi_{p,q}(\Delta) = \Delta + p$ не всегда выполняется. В целом, исследования (p, q)–хроматического числа нельзя считать исчерпывающими. Не решен, например, такой вопрос. Пусть $p \geq 1$. Существует ли такая функция $f(p) \geq p$, что для любого Δ при $q \geq f(p)$ выполняется равенство $\chi_{p,q}(\Delta) = \Delta + p$? (В силу равенства $\chi(0, G) = \Delta(G)$ имеем, что $f(0) = 1$). Следует также отметить, что (p, q)–хроматические числа неориентированных мультиграфов вообще не изучались.

Имеет смысл упомянуть также о неоднородной или смешанной раскраске инциденторов. В работе [15] рассматривался вопрос о минимальной раскраске инциденторов ориентированного мультиграфа G при условии, что некоторые дуги 1–раскрашиваются, а другие — (0, 0)–раскрашиваются. Пусть $\chi'(G)$ — наименьшее число цветов, необходимых для правильной раскраски всех ребер мультиграфа G. Доказывается, что для раскраски указанным образом всех дуг мультиграфа G достаточно $\chi'(G) + 1$ цветов. Высказывается гипотеза, что наименьшее число цветов не больше $\max\{\chi'(G), \Delta(G) + 1\}$. Справедливость этой гипотезы при $\Delta(G) \leq 3$ доказана в [16].

4. ИНТЕРВАЛЬНАЯ РАСКРАСКА ИНЦИДЕНТОРОВ

Правильная раскраска инциденторов называется *интервальной*, если цвета инциденторов, примыкающих к каждой вершине мультиграфа, образуют интервал. Наименьшее число цветов, необходимое для интервальной p-раскраски инциденторов мультиграфа G, (если такая раскраска существует), обозначается через $\gamma(p, G)$. Очевидно, что $\gamma(p, G) \geq \chi(p, G) \geq \Delta(G)$. Интервальная раскраска имеет следующую прикладную интерпретацию. Предположим, что за простои компьютеров коммуникационной сети приходится платить штраф и решается двухкритериальная оптимизационная задача, в которой в первую очередь нужно минимизировать суммарный штраф за простои компьютеров, а после этого минимизировать общее время для передачи всех сообщений. В тех случаях, когда существует интервальная p-раскраска всех инциденторов, удается вообще избежать штрафа. Идея рёберной интервальной раскраски возникла в [1]. Интервальной раскраске инциденторов посвящены две работы [4,6]. В [4] рассматривался случай ориентированных мультиграфов. При $p \geq 2$ интервальная p-раскраска всех инциденторов ориентированного мультиграфа может не существовать (например, она не существует для мультиграфа, являющегося простым контуром). Однако для бесконтурного мультиграфа G интервальная p-раскраска существует всегда, причем $\gamma(p, G) \leq \Delta^+(G) + \Delta^-(G) + l(p - 1)$, где l — длина максимального пути в мультиграфе G. При $p \leq 1$ интервальная p–раскраска инциденторов ориентированного мультиграфа существует всегда. При $p = 1$ имеет место неравенство $\gamma(1, G) \leq \Delta^+(G) + \Delta^-(G)$. Более подробно в [4] изучалась интервальная 0–раскраска инциденторов. Оказалось, что при $\Delta(G) \leq 4$ имеет место равенство $\gamma(0, G) = \Delta(G)$. Далее, обозначим через $\Gamma(0, \Delta) = \max\{\gamma(0, G) \mid \Delta(G) = \Delta\}$. Доказано, что при $\Delta \geq 5$ имеют место неравенства

$$2\Delta - \lceil 2\Delta^{1/2} \rceil \leq \Gamma(0, \Delta) \leq 2\Delta - 4 \tag{2}$$

Остается открытой проблема уменьшения разности между верхней и нижней границах в (2). Не известно, например, верно ли равенство $\Gamma(0,\Delta) = \Delta$ при $5 \leq \Delta \leq 7$. Работа [6] посвящена интервальной p-раскраске неориентированных мультиграфов. Показано, что интервальная p-раскраска всех инцидентов неориентированного мультиграфа существует при любом p, причем при $p \leq 1$ и $\Delta(G) \geq 2$ выполняется равенство $\gamma(p,G) = \Delta(G)$. При $\Delta(G) \geq 2$ и $p \geq 2$ имеет место следующая неулучшаемая нижняя оценка $\gamma(p,G) \geq \max\{\Delta(G), \min\{2p, \Delta(G)+p\}\}$. При $p \geq 2, \Delta \geq 2$ обозначим через $\Gamma(p,\Delta) = \max\{\gamma(p,G) \mid \Delta(G) = \Delta\}$. В [6] устанавливаются две верхние оценки: $\Gamma(p,\Delta) \leq 2\Delta + p(p-1)/2$ и $\Gamma(p,\Delta) \leq \max\{\Delta, p^2+p\}$. Вторая оценка показывает, что неравенство $\Gamma(p,\Delta) > \Delta$ при фиксированном p может иметь место только при конечном множестве значений Δ, а именно, при $\Delta \leq p^2+p-1$. Случай $p = 2$ исследован полностью. Показано, что $\Gamma(2,2) = 5$, а при $\Delta \geq 3$ выполняется равенство $\Gamma(2,\Delta) = \max\{\Delta, 6\}$.

5. ОБОБЩЁННАЯ РАСКРАСКА ИНЦИДЕНТОРОВ

В случае двухуровневой сети с ограниченной пропускной способностью каналов связи верхнего уровня, задача выходит за рамки модели инциденторной раскраски. Случай сети с двумя центральными ЭВМ, соединёнными шиной пропускной способности 1 был рассмотрен в [9]. Эта задача сводится к следующей задаче обобщённой раскраски инциденторов ориентированного мультиграфа $G = (V,E)$. Пусть в G выделено подмножество дуг $E_0 \subset E$ мощности k. Для дуг из E_0 будем красить не только инциденторы, но и средние части этих дуг. Требуется найти такую 0–раскраску инциденторов G и средних частей дуг из E_0, при которой цвета средних частей различны и цвет средней части каждой дуги лежит между цветами её начального и конечного инциденторов. Обозначим наименьшее число цветов в такой раскраске через $\chi^I(G)$. Ясно, что $\chi^I(G) \geq \max\{\Delta(G), k\}$. Однако в [9] показано, что при $k \leq \Delta$ равенства может не быть. Однако при $k > \Delta$ равенство имеет место, как показывает следующая

Теорема 9. Пусть G — ориентированный мультиграф степени Δ с $|E_0| = k$. Тогда $\chi^I(G) \leq \max\{k, \Delta+1\}$.

Работа второго автора поддержана грантом СО РАН для поддержки молодых ученых и грантами РФФИ 02-01-00039 и 02-01-00977.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асратян А. С., Камалян Р. Р. *Интервальные раскраски ребер мультиграфа* // Прикладная математика. Вып. 5. Ереван: Изд-во Ереван. Ун-та, 1987. С. 25–34.

2. Визинг В. Г. *Раскраска инциденторов мультиграфа в предписанные цвета* // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 1. С. 32–39.

3. Визинг В. Г. *Раскраска инциденторов и вершин ориентированного мультиграфа* // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 3. С. 6–16.

4. Визинг В. Г. *Интервальная раскраска инциденторов ориентированного мультиграфа* // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 2. С. 40–51.

5. Визинг В. Г. *Двудольная интерпретация ориентированного мультиграфа* // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 1. С. 27–41.

6. Визинг В. Г. *Интервальная раскраска инциденторов неориентированного мультиграфа* // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т. 10, № 1. С. 14–40.

7. Визинг В. Г., Мельников Л. С., Пяткин А. В. *О (k,l)–раскраске инцидентoров* // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2000. Т. 7, № 4. С. 29–37.

8. Визинг В. Г., Тофт Б. *Раскраска инциденторов и вершин неориентированного мультиграфа* // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2001. Т. 8, № 3. С. 3–14.

9. Плеханова Н. С., Пяткин А. В. *Передача сообщений в локальной сети с двумя центральными ЭВМ* // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2002. Т. 9, № 2. С. 91–99.

10. Пяткин А. В. *Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи* // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1995. Т. 2, № 4. С. 74–79.

11. Пяткин А. В. *Задачи раскраски инциденторов и их приложения*: Дис. канд. Физ.-мат. наук. Новосибирск, 1999.

12. Пяткин А. В. *Некоторые верхние оценки для инциденторного (k,l)–хроматического числа* // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т. 10, № 2. С. 66-78.

13. Пяткин А. В. *Верхние и нижние оценки для инциденторного (k,l)–хроматического числа* // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004. Т. 11, № 1. С. 93–102.

14. Jensen T. R., Toft B. *Graph coloring problems.* New York: John Wiley & Sons, 1995.

15. Melnikov L. S., Vizing V.G. *The edge-chromatic number of a directed / mixed multigraph* // J. Graph Theory. 1999. V. 23, N 4. P. 267–273.

16. Pyatkin A. V. *Proof of Melnikov - Vizing conjecture for multigraphs with maximum degree at most 3* // Discrete Mathematics. 1998. N 185. P. 275–278.

17. Pyatkin A. V. *The incidentor coloring of multigraphs and its applications* // Discrete Appl. Math. 2002. V. 120. P. 209–217.

АЛГОРИТМЫ С ОЦЕНКАМИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Э. Х. Гимади

Аннотация

Приводится обзор некоторых результатов по задачам дискретной оптимизации, которые в общем случае являются NP-трудными. Выделяются подклассы этих задач, для которых удается построить полиномиальные (в некоторых случаях, псевдополиномиальные) алгоритмы с априорно доказуемыми оценками качества решения. Алгоритмы для решения задач на детерминированных входах характеризуются оценкой временной сложности и оценкой точности (либо относительной погрешности) решения. Для задач на случайных входах (в дополнение к указанным оценкам) добавляется еще оценка вероятности события, что результатом работы алгоритма будет решение, удовлетворяющее указанным выше оценкам временной сложности и точности решения.

1 Введение

В данной статье рассматриваются некоторые дискретные оптимизационные задачи, для которых в общем случае не удается построить точные алгоритмы полиномиальной сложности (в рамках предположения, что классы P и NP не совпадают). Выделяются подклассы этих задач, для которых удается построить полиномиальные (в некоторых случаях, псевдополиномиальные) алгоритмы с априорно доказуемыми оценками качества решения. Для алгоритмов решения задач на детерминированных входах стандартно используются оценки временной сложности и оценки точности (либо относительной погрешности) решения. В случае недетеминированных входов (в дополнение к указанным оценкам) добавляется еще оценка вероятности события, что результатом работы алгоритма будет решение, удовлетворяющее указанным выше оценкам временной сложности и точности решения.

Приведенные ниже результаты в основном получены в последние полтора-два года участниками РФФИ (проект 02-01-01153) и ИНТАС (проект 00-217).

2 Задачи размещения

2.1 Задача размещения в сетевой постановке с ограничениями на объемы производства и пропускные способности коммуникаций

В задаче размещения на сети предполагается, что затраты на транспортировку единицы продукции от одного конца ребра до другого конца равна длине (весу) этого

Гимади Эдуард Хайрутдинович,
Институт математики им. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел.: (8-383-2) 33-21-89, факс: (8-383-2) 33-25-98, e-mail: gimadi@math.nsc.ru

ребра. Для каждой вершины сети задан объем спроса продукта, затраты на открытие предприятия в этой вершине и ограничение сверху на объем производства продукта в случае, если предприятие открыто. Для каждого ребра сети указана его пропускная способность. Требуется найти множество открытых предприятий и план транспортировки продукта от этих предприятий в пункты спроса, чтобы полностью удовлетворить спрос и минимизировать суммарные затраты на открытие предприятий и транспортные затраты на доставку продукта в пункты спроса. Задача является обобщением классической задачи размещения с неограниченными объемами производства и пропускными способностями коммуникаций, которая NP-трудна. Для последней известны полиномиальные точные алгоритмы для сети в форме дерева. Впервые алгоритм временной сложности $O(mn)$ (m—число возможных мест (вершин) размещения предприятий, n—число пунктов спроса) был предложен автором (1984 г.). Для задачи с учетом пропускных способностей коммуникаций Вознюк И.П. (1999 г.) предложил псевдополиномиальный алгоритм трудоемкостью $O(nB^2)$, где B—суммарный объем спроса. В настоящее время в случае древесной сети предлагается точный алгоритм такой же временной сложности для решения задачи, в которой заданы как ограничения как на объемы производства предприятий так и на пропускные способности коммуникаций (Гимади Э.Х., Дзюба А.С., 2004 г.).

Ранее для общей задачи размещения с ограниченными объемами производства было проведено обоснование некоторых условий асимптотической точности полиномиального приближенного алгоритма при случайных входных данных с равномерной функцией распределения (Вознюк И.П., Гимади Э.Х., Филатов М.Ю., 2001 г.).

2.2 Метрическая многоуровневая задача размещения

Метрическая многоуровневая задача размещения обобщает обычную классическую метрическую задачу размещения. В этой задаче каждое предприятие принадлежит к одному из k уровней и каждой точке спроса требуется назначить обслуживающий путь, проходящий последовательно через открытые (размещенные) предприятия всех уровней, начиная с первого и кончая последним. Минимизируется суммарная стоимость обслуживания, представляющая собой сумму стоимости открытия предприятий и стоимости обслуживания, равную сумме длин обслуживающих путей; при этом предполагается, что расстояния между пунктами удовлетворяют неравенству треугольника (порождаются некоторой метрикой на множестве всех пунктов). Модель включает в себя в качестве частного случая задачу многоуровневого размещения на сетях и может быть сформулирована как задача об оптимальном покрытии путями точек спроса.

Рекордная на настоящий момент оценка точности 3 получена Aardal, Chudak, Shmoys (1999 г.) алгоритмом, который основан на округлении оптимального решения линейной релаксации с экспоненциальным числом переменных. Полиномиальность этого алгоритма достигается применением метода эллипсоидов. Это побудило исследователей к поиску простых комбинаторных алгоритмов с константными оценками точности.

Агеевым А.А. (2003 г.) установлено, что с помощью комбинаторного алгоритма решения обычной метрической задачи размещения с оценкой точности 1.52 (Mahdian, Ye, Zhang, 2002 г.) строится комбинаторный алгоритм с оценкой точности 4.56 для метрической многоуровневой задачи размещения.

3 Задачи коммивояжера

3.1 Евклидова задача коммивояжера

Для задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве представлен алгоритм, являющийся асимптотически точным и обладающий более высокими оценками точности, чем известный алгоритм Сердюкова (1987 г.) на широком подклассе исходной задачи (Бабурин А.Е., Гимади Э.Х., 2002 г.).

3.2 Задача отыскания остовного связного подграфа максимального веса с заданными степенями вершин

Пусть $G(V, E)$ – полный n-вершинный неориентированный граф без петель с неотрицательной весовой функцией w ребер. Заданы числа $d_1, d_2, ..., d_n$, представляющие графическое множество степеней графа G, $1 < d_i < n-1, i = 1, 2, \ldots, n$. Требуется найти суграф $G'(V, E')$ графа G, удовлетворяющий следующим трем условиям: 1. G' – связен; 2. степени всех вершин в G' равны d; 3. $\sum_{v \in V} w(v) \to max$. Задача является обобщением известной задачи коммивояжера на максимум.

Представлены приближенные алгоритмы решения некоторых классов задачи с детерминированными и случайными входами. В общем случае задача решается за время $O(n^3)$ с относительной погрешностью не более $2/(d^2+d)$, где $d = \min\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$. В метрическом случае достигается в 2 раза меньшая относительная погрешность. Еще меньшая погрешность достигается в случае эвклидовых расстояний.

Ранее Сердюковым и одним из авторов был представлен приближенный алгоритм решения задачи со случайными входами, когда веса ребер графа являются случайными независимыми равномерно распределенными (в некотором числовом сегменте) величинами с одинаковой функцией распределения. Были получены некоторые условия асимптотической точности этого алгоритма, имеющего временную сложность $O(n^2)$.

В данном докладе для решения задачи предлагается новый приближенный алгоритм с той же временной сложностью, но лучшими оценками качества решения чем ранее известные. Алгоритм использует декомпозицию задачи на ряд подзадач меньшей размерности, каждая из которых решается с использованием жадной эвристики. С вероятностью большей $(1 - 1/n)$ относительная погрешность алгоритма не превышает величины $O\Big(\frac{\ln(n/d)}{n/d}\Big)$. Таким образом, при $d = o(n)$ алгоритм является асимптотически точным. Аналогичные условия получены и в случае функции распределения весов ребер графа, минорирующей сответствующую (нормализованную) функцию равномерного распределения (Бабурин А.Е., Гимади Э.Х., 2004 г.).

3.3 Метрическая задача отыскания двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального суммарного веса

Бабуриным А.Е., Гимади Э.Х. и Коркишко Н.М. (2003 г.) исследована метрическая задача отыскания двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального суммарного веса в полном неориентированном взвешенном графе, в котором выполняется неравенство треугольника.

Рассматриваемая задача возникает, например, при планировании одновременной работы двух роботов, обрабатывающих n деталей на плате. Каждый из роботов совершает замкнутый обход всех деталей. В интересах технологической безопасности прохождение роботов по одному и тому же ребру запрещается. При этом требуется минимизировать суммарное время, затрачиваемое роботами на обработку деталей.

Показано, что задача NP-трудна в сильном смысле. Для решения задачи построены приближенные алгоритмы с временной сложностью $O(n^3)$ и с гарантированными оценками точности, асимптотически (с ростом n) равными 9/4 (в случае одной весовой функции) и 12/5 (в случае двух весовых функций). Получение оценок существенно опирается на классический результат Кристофидеса и Сердюкова, предложивших (независимо друг от друга) приближенный алгоритм построения гамильтонова цикла в полном графе с расстояниями, удовлетворяющими неравенству треугольника. Этот алгоритм находит решение с гарантированной оценкой точности 3/2 за время $O(n^3)$, определяемое сложностью отыскания совершенного паросочетания минимального веса. При построении первого алгоритма (в случае одной весовой функции) авторы использовали технику склеивания циклов 2-фактора в гамильтонов цикл, примененную ранее Сердюковым и Косточкой (1985 г.).

3.4 Задача отыскания двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов максимального суммарного веса

Агеевым А.А., Бабуриным А.Е., Гимади Э.Х. и Коркишко Н.М. (2003 г.) предложен приближенный алгоритм решения с временной сложностью $O(n^3)$ и с гарантированной оценкой точности 3/4. Отправная идея построения алгоритма навеяна работой Сердюкова А.И. (1984), в которой представлен приближенный алгоритм АС для нахождения гамильтонова цикла в полном неориентированном взвешенном графе с теми же оценками временной сложности и точности алгоритма. Идея алгоритма АС состоит в следующем. Сначала в графе строятся два подграфа — два-фактор и паросочетание (каждый максимального веса). Очевидно, их суммарный вес не менее, чем 3/2 от веса гамильтонова цикла максимального веса. Ребра построенных подграфов распределяются по двум частичным турам, дополняемым далее до гамильтоновых циклов посредством остальных ребер. За решение принимается тот гамильтонов цикл, вес которого больше. Это решение имеет константную оценку точности, равную 3/4. Однако прямое применение алгоритма АС к задаче, рассматриваемой в данной статье, оказывается неприемлемым, поскольку уже сами частичные туры по алгоритму АС могут содержать пересекающиеся ребра.

4 Многоиндексные задачи о назначениях

Предложен полиномиальный алгоритм для решения трехиндексной аксиальной задачи о назначениях, которая заключается в выборе в трехмерной матрице порядка n таких n элементов, что при каждом фиксированном значении одного из индексов в полученном сечении содержится ровно один элемент и сумма выбранных элементов минимальна. Приведены условия, при которых этот алгоритм позволяет находить асимптотически точные решения задач на случайно задаваемых входах. Аналогичные результаты получены и для многоиндексной версии задачи.

Проведено исследование k-слойной планарной задачи о назначениях, которая заключается в выборе в трехмерной матрице размера $n \times n \times k$, таких nk элементов, что при фиксированном значении третьего индекса полученная подматрица размера $n \times n$ содержит ровно по одному элементу в каждой строке и каждом столбце и сумма выбранных во всей матрице элементов минимальна. Известно, что задача NP-трудна при $k \geq 2$. При $k < n/2$ построен приближенный алгоритм временной сложности $O(mn^2 + m^{7/5})$, который при $k \leq \ln n$ позволяет находить решение, асимптотически совпадающее с оптимальным.

Аналогичные результаты были получены для модификаций аксиальных и планарных задач, связанных с дополнительным требованием одноцикличности одной или нескольких подстановок, определяющих решение задачи.

Отметим, что в случае максимизационных вариантов задач условия асимптотической точности оказались намного проще (Гимади Э.Х., Коркишко Н.М., 2003 г.).

5 Задачи теории расписаний

5.1 Календарное планирование при ограниченных ресурсах складируемого типа

Показана полиномиальная разрешимость задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами и директивными сроками, когда выделяемые ресурсы складируемого типа и имеют произвольный знак, а длительности работ положительные целые числа. В случае, когда произвольный знак имеют требуемые ресурсы, задача становится NP-трудной (Гимади Э.Х., Севастьянов С.В., 2003 г.).

5.2 Календарное планирование при наличии контуров в сети

Рассмотрена задача календарного планирования на минимум произвольной неубывающей функции от моментов завершения работ и с ограничениями предшествования, заданными ориентированным графом G (типа работы-вершины) с n вершинами, m взвешенными дугами и допускающим наличие контуров. В случае, когда ограничения на потребляемые ресурсы отсутствуют, построен алгоритм точного решения, имеющий трудоемкость $O(nm)$ (Севастьянов С.В., 2003 г.).

5.3 Построение расписаний с прерываниями

Для достаточно общей задачи на построение расписаний с прерываниями Севастьяновым С.В. (2002-2003 г.г.) получен ряд теоретических результатов:

а) при условии существования оптимального расписания доказано существование такого расписания с конечным (и полиномиальным от длины записи входной информации) числом прерываний;

б) для задачи с произвольным регулярным критерием доказано существование оптимального расписания при условии, что множество допустимых расписаний непусто;

в) для задачи с сепарабельным критерием типа суммы или максимума неубывающих кусочно линейных функций от моментов завершения выделенных множеств операций доказана теорема о рациональной структуре оптимального решения: доказано существование дробной единицы времени, в терминах которой все изменения в расписании происходят в моменты, кратные выбранной единице; при этом размер записи дробной единицы не превосходит полинома от длины записи исходных данных, что обеспечивает принадлежность данной задачи классу NP.

5.4 Двухстадийные задачи построения расписаний с жесткими задержками

Изучались двухстадийные задачи построения расписаний с жесткими задержками. Задачи построения расписаний с жесткими задержками принадлежат к наиболее труднорешаемым с алгоритмической точки зрения. В первой из рассматриваемых задач одна машина выполняет все операции заданного множества работ. Вторая задача принадлежит к типу flow shop: имеются две машины, причем первая машина выполняет все первые операции, вторая машина — все вторые операции заданного множества работ. В обеих задачах вторая операция начинает выполняться по истечении заданного (зависящего от работы) промежутка времени после окончания первой операции, (т. е. имеет место жесткая задержка). Обе задачи NP-трудны в сильном смысле даже в случае единичных длительностей работ (доказано Yu в 1996 г.) и в этом случае легко переформулируются как задачи разбиения на графах. Для случая единичных длительностей для первой задачи нами построен алгоритм с оценкой точности 7/4, для второй задачи построен алгоритм с оценкой точности 3/2. Установлено также, что оценка точности первого алгоритма неулучшаема. Отметим, что это первые нетривиальные алгоритмические результаты для данного класса задач. (Агеев А.А., Бабурин А.Е., 2003 г.)

6 О разрешимости оптимизационных задач алгоритмами типа покоординатного подъема

Шенмайером В.В. получены оценки точности быстрого эвристического алгоритма типа покоординатного подъема для задачи о кратчайшем пути с входными данными, удовлетворяющими условию симметричности. Условие симметричности выражает "равноправность", "изотропность"всех допустимых решений относительно друг друга. Данному условию удовлетворяет широкий класс индивидуальных задач, в частности, задачи, являющиеся представлением в виде задачи о кратчайшем пути многих других известных задач дискретной оптимизации (Коммивояжер, Изоморфизм подграфу, Разбиение на треугольники и др.)

Исследуемый жадный алгоритм является одним из самых распространенных алгоритмов, используемых для получения быстрых "разумных"допустимых решений. Однако известно немного классов задач, на которых алгоритм имеет хорошие гарантированные оценки погрешности. Во многом это обусловлено отсутствием на сегодняшний день эффективных техник для оценивания точности алгоритма. Предлагается исследовать поведение алгоритма в условиях симметричного входа задачи. Проведен анализ жадного алгоритма в худшем случае, а именно найдены формулы для оценок погрешности в терминах заданного симметричного графа для задач на минимум и на максимум.

7 О полиномильной разрешимости одной задачи суммирования векторов на максимум

Бабуриным А.Е. (2003 г.) исследовалась задача суммирования векторов из некоторого векторного нормированного пространства V на максимум. В качестве базовой взята задача максимально неравномерного разбиения заданного множества k-мерных векторов на два подмножества : *для заданных n векторов* $v_1, \ldots, v_n \in R^k$, *требуется максимизировать функцию* $||S(x)||_*$, где $S(x) = \sum_{i=1}^n v_i x_i$, $x_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$, $||.||_*$ — одна из стандартных норм пространства R^k,

Построены полиномиальные алгоритмы решения задачи в случае, когда пространство V совпадает с R^k с первой (L_1) или L_∞ нормой. Предложен алгоритмический подход для отыскания точного решения задачи в евклидовом k-мерном пространстве V произвольной размерности k. Показана ее полиномиальная разрешимость в евклидовых пространствах R^2 и R^3.

Анализ задачи основан на рассмотрении другой задачи — выбора подмножества заданного множества k-мерных векторов, обладающего максимумом нормы суммы векторов этого подмножества. Данная модель может быть применена к решению задач выбора оптимального (максимизирующего прибыль) производства на предприятии, когда некоторые характеристики выбираемых компонент могут иметь отрицательный знак (затраты на ресурсы). Тогда каждая компонента может быть представлена вектором, где ее характеристики – координаты вектора. При суммировании векторов (одновременном выборе ряда компонент производства) соответствующие координаты складываются (как и соответствующие им характеристики компонент). Роль целевой функции (метрики в пространстве векторов) играет оценка эффективности производства.

Данная работа была выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (проект 02-01-01153) и ИНТАС (проект 00-217).

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУРЫ СПЕЦИАЛЬНЫХ ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. Т. Дементьев, А. И. Ерзин

Одним из направлений исследования "больших" систем является рассмотрение их как многоуровневых систем с иерархической структурой. Иерархический принцип построения имеют различные организационные структуры, базы данных, сети передачи данных, системы мониторинга и принятия решений, системы связи, снабжения, управления и оповещения, системы параллельных вычислений и многие другие.

Вопросами оптимизации иерархических систем в той или иной степени занимались такие ученые как Ю. Б. Гермейер, Г. П. Захаров, М. Месарович, Н. Н. Моисеев, Т. Л. Саати, L. P. Jennergren, F. Murtagh, P. Willett и др. В данной работе приводятся результаты авторов, полученные при исследовании иерархических систем различного назначения. В обобщенном виде они сводятся к следующему:

- Осуществлена классификация иерархических систем.
- Построены и исследованы модели оптимизации структуры и состава иерархических систем различных классов.
- Исследованы задачи дискретной оптимизации, лежащие в основе разработанных моделей. Предложены точные, асимптотически точные и приближенные алгоритмы их решения. Осуществлен априорный и апостериорный анализ качества предложенных методов. Выделены эффективно разрешимые классы задач, определены условия эффективного построения субоптимальных решений, а также найдены апостериорные оценки точности алгоритмов.
- Осуществлена практическая реализация разработанных моделей и методов в системах различного назначения.

Теперь отметим некоторые из конкретных результатов.

В работе [1] были построены и исследованы модели оптимизации структуры однородных, неоднородных и древовидных иерархических систем. Здесь рассмотрена так называемая базовая модель, заключающаяся в синтезе минимальной по стоимости структуры управления над заданным множеством V_0 однородных элементов нулевого уровня. Каждый элемент связывается с одним из элементов первого уровня управления. В свою очередь, элементы первого уровня (которые также считаются однородными) связываются с элементами второго уровня и т. д. Элементы $(l-1)$-го уровня связываются с единственным элементом l-го уровня. Количество уровней управления $l \leq L$ и количество элементов $(k-1)$-го уровня, связанных с i-м элементом k-го уровня, являются искомыми величинами.

Дементьев Владимир Тихонович, Ерзин Адиль Ильясович,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия;
тел.: (8-383-2) 33-37-88, fax: (8-383-2) 33-25-98,
e-mail: demvt@math.nsc.ru, adil@math.nsc.ru

Затраты на создание (содержание) i-го элемента (пункта) k-го уровня и затраты на связи с ним x_{ki} элементов $(k-1)$-го уровня задаются неотрицательными функциями $f^k(x_{ki})$, зависящими лишь от количества присоединенных к пункту i элементов уровня $k-1$. Если обозначить через n_k количество элементов k-го уровня иерархии $(k = 1, \ldots, l; n = n_0 = |V_0|)$, то математическая модель запишется в виде:

$$\sum_{k=1}^{l} \sum_{i=1}^{n_k} f^k(x_{ki}) \longrightarrow \min_{x_{ki}, n_k}; \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n_k} x_{ki} = n_{k-1},\ k = 1, \ldots, l; \qquad (2)$$

$$1 = n_l < n_{l-1} < \ldots < n_1 < n_0 = n; \quad l \leq L; \qquad (3)$$

$$l, x_{ki}, n_k \in Z^+. \qquad (4)$$

Для задачи (1)–(4) предложен полиномиальный алгоритм построения оптимального решения, использующий декомпозицию задачи и метод динамического программирования и имеющий трудоемкость $O(Ln^3)$ и память $O(Ln^2)$ (полиномиальность следует из очевидного неравенства $L < n$). Рассмотрены частные случаи функций затрат, когда удается уменьшить трудоемкость решения базовой задачи. Найдены условия, при которых оптимальная структура является равномерной. В одном из частных случаев дается аналитическое решение задачи.

Рассмотрены также модели, которые являются обобщениями базовой модели. Они позволяют учесть надежность и время передачи информации по иерархической структуре, а также возможность назначения исполнителей на работы и создание иерархической структуры управления над множеством исполнителей. Для поставленных задач предложены эффективные методы решения.

Были рассмотрены модели определения оптимальной структуры и состава неоднородных многоуровневых иерархических систем с учетом потоков между элементами системы, которые определяются составом пунктов. Эти модели могут быть использованы при оптимизации структуры и состава метрологической службы, системы мониторинга и управления, многокаскадной (многоуровневой) системы снабжения и др.

Рассмотренная в [1] модель является обобщением NP-трудной задачи многоуровневого размещения. Предложен приближенный алгоритм, основанный на линейной релаксации и решении двойственной задачи с последующим локальным улучшением решения. Для построения точного решения задачи используется метод ветвей и границ, в котором нижние границы и рекорд находятся с полиномиальной трудоемкостью, равной $O(LN^2)$, где N – общее число пунктов.

В [1] помещена также модель построения оптимального остовного дерева с учетом затрат как на создание ребер, так и на передачу потока между терминалами и центром. Пусть $G = (V, E)$ – связный неориентированный граф с множеством вершин $V = \{0, 1, \ldots, n\}$ и множеством ребер E. Через F обозначим множество подграфов-деревьев T графа G, связывающих вершины V, а через $P_k(T)$ – цепь, соединяющую вершины k и 0 в дереве T. Произвольному ребру графа $(i, j) \in E$ поставим в соответствие неотрицательные числа: "вес" a_{ij} и "длину" b_{ij}. Каждой вершине $k \neq 0$ сопоставим "удельный вес" $d_k > 0$, т. е. вес, приходящийся на единицу длины любой цепи, выходящей из вершины k. Величину d_k можно представить как объем данных, которые циркулируют между вершинами k и 0. Задача заключается в поиске дерева с минимальным суммарным весом:

$$\sum_{(i,j)\in T} a_{ij} + \sum_{k=1}^{n} d_k \sum_{(i,j)\in P_k(T)} b_{ij} \longrightarrow \min_{T\in F}. \tag{5}$$

Эта модель имеет богатую область приложений, и рассматривалась рядом отечественных и зарубежных авторов, среди которых Э. А. Ахпателов, А. В. Злотов, В. А. Клетин, В. Н. Лившиц, Д. Т. Лотарев, В. А. Трубин, F. Maffioli. В. К. Попковым и С. Б. Каулем, а также независимо M. Dell'Amico и F. Maffioli, была доказана NP-трудность задачи (5). Значительная доля публикаций посвящена реализациям метода ветвей и границ, разработке эвристических приближенных алгоритмов и их апостериорному анализу. Для модели на минимум затрат авторами были предложены новые приближенные алгоритмы, найдены *априорные* оценки их относительной погрешности, исследовано асимптотическое поведение решений при различных дополнительных условиях, а также выделены частные случаи, когда оптимум строится эффективно. Для задачи на максимум затрат, которая также NP-трудна, построены приближенные алгоритмы с оценками погрешности для наихудшего случая и "в среднем".

Позже был опубликован ряд статей [2, 3, 6], в которых исследовались задачи оптимизации структуры и состава систем, имеющих применение в различных технических приложениях. Среди рассмотренных моделей – задачи маршрутизации на различных взвешенных графах, которые можно охарактеризовать как задачи построения оптимальных связывающих корневых деревьев с дополнительными ограничениями.

Исследовались NP-трудные проблемы построения коммуникационных деревьев с дополнительными ограничениями, среди которых, в частности, 1) построение оптимального остовного дерева ограниченного радиуса; 2) построение оптимального дерева Штейнера на графе с ограниченными длинами путей и ограниченным количеством точек Штейнера; 3) построение оптимального прямоугольного дерева Штейнера с путями одинаковой длины.

Первая из перечисленных выше задач заключается в следующем. Задан полный неориентированный граф $G = (V, E),\ V = \{0, 1, \dots, n\}$, с неотрицательными весами ребер a_{ij} . Пусть, как и прежде, через $F = F(G)$ обозначено множество остовных деревьев графа G. Требуется построить дерево, являющееся решением задачи:

$$\sum_{(i,j)\in T} a_{ij} \longrightarrow \min_{T\in F}(\max); \tag{6}$$

$$|P_k(T)| \le R, k = 1, \dots, n, \tag{7}$$

где R – заданное положительное целое число, а через $|P_k(T)|$ обозначено количество ребер в цепи $P_k(T)$. Эта задача рассмотрена в двух постановках: на максимум и на минимум веса искомого дерева. Показана их полиномиальная эквивалентность. Для проблемы построения максимального остовного дерева впервые предложен полиномиальный (квадратичный) алгоритм, строящий приближенное решение с *гарантированной* относительной погрешностью

$$\max\left\{\frac{3}{5}, \frac{R+3}{R+7}, \frac{R-1}{R+1}\right\}.$$

Позже А. И. Сердюковым [5] для задачи (6)–(7) на максимум был предложен алгоритм с оценкой $(R-1)/R$.

Для модели построения минимального остовного дерева ограниченного радиуса предложены приближенные полиномиальные алгоритмы с априорными оценками точности, зависящими от числовых параметров задачи. Рассмотрены частные случаи.

Задача 2) состоит в следующем. Пусть задан граф $G = (V, E),\ V = \{0, 1, \dots, n\}$, в котором вершина 0 – центр (корень или источник). Для каждого терминала $k \in V' \subseteq V$ задана максимально допустимая длина пути $d_k > 0$ из него в центр. Для каждого ребра $(i, j) \in E$ заданы целые неотрицательные числа: "вес" c_{ij} и "длина" d_{ij}. Требуется построить такое прямоугольное минимальное дерево Штейнера T, которое связывает вершины $V' \cup \{0\}$, и в котором:

– для каждого терминала $k \in V'$ длина пути из центра 0 не превосходит заданной величины d_k.

– количество точек Штейнера $S(T)$ не превышает заданного числа B.

Математическая модель задачи записана ниже.

$$\sum_{(i,j)\in T} c_{ij} \longrightarrow \min_{T\in F}; \tag{8}$$

$$\sum_{(i,j)\in P_k(T)} d_{ij} \le d_k,\ \ k \in V'; \tag{9}$$

$$S(T) \le B. \tag{10}$$

Здесь F – множество деревьев Штейнера для множества $V' \cup \{0\}$. Задача (8)–(10) имеет применение в различных приложениях, в частности при проектировании интегральных схем и коммуникационных сетей, и рассматривалась в различных постановках рядом авторов. Среди них E. G. Friedman, A. Kahng, Y. Kajitani, M. Pedram, I. Pyo, M. Sarrafzadeh, A. Takahashi, M. Tellez и др., ссылки на работы которых можно найти в [6]. Большинство авторов использовали эвристические подходы с последующим апостериорным анализом качества строящегося решения. При этом применялись процедуры локального улучшения первоначально построенного решения. К точным методам следует отнести метод ветвей и границ, который, правда, может быть применен лишь для задач малой размерности. Поэтому в апостериорном анализе упомянутые авторы в основном сравнивали свои алгоритмы с ранее известными подходами.

Авторами был предложен [6] полиномиальный параметрический метод построения допустимого решения, качество которого зависит от величины одного параметра. С помощью численного эксперимента удалось выбрать конечное множество значений параметра, при которых лучшее из построенных решений оказывалось достаточно хорошим. При этом решения задач малой размерности сравнивались с оптимальными решениями, а качество деревьев, построенных для задач большой размерности, сравнивалось с решениями, построенными ранее известными алгоритмами. Оказалось, что решение, строящееся предложенным алгоритмом, лучше решений, построенных ранее известными алгоритмами. Отметим, что ограничения на длины путей и на количество точек Штейнера ранее в литературе не рассматривались.

Кроме упомянутых выше общих результатов, исследованы частные случаи. В частности, показано, что в случае, когда строится минимальное остовное дерево с кратчайшими путями, предложенный алгоритм строит оптимальное решение за $O(n^2)$ операций.

Модель 3) заключается в построении минимального прямоугольного дерева Штейнера с *одинаковыми* длинами путей. В некоторых приложениях, например при синтезе сигнальной сети вычислительной системы, необходимо связать между собой терминалы и вершину-источник минимальным по весу связывающим деревом, в котором времена передачи команды из источника в терминалы одинаковы. Так как разница в моментах получения управляющих сигналов разными элементами влияет на быстродействие всей системы, задача построения сигнального дерева с одинаковыми длинами путей из источника сигнала в терминалы является важной проблемой, и ей посвятили свои работы (см. библиографию в [3]) K. D. Boese, J. Cong , A. B. Kahng, C. K. Koh, J. Kong, G. Robins и другие авторы. В частности, J. Kong, A. Kahng, G. Robins показали, что проблема построения сигнального дерева с минимальной разницей моментов получения команд разными элементами является NP-трудной. Для построения искомого дерева в литературе применяются два подхода. Первый использует последовательное построение максимальных паросочетаний минимального веса. В основе второго подхода лежит построение некоторой остовной конструкции, часто в виде латинской буквы "H", с последующим присоединением к ней терминалов. Упомянутые эвристики имеют ряд недостатков, поэтому предложен новый подход [3]. Сначала исходная проблема сводится к модели на специальной иерархической структуре. Это позволяет в дальнейшем не следить за длинами строящихся путей, т.к. в построенной иерархической структуре все допустимые пути будут иметь одинаковую длину. Затем для каждого ребра численно оценивается возможность его вхождения в искомое дерево. На основе этих характеристик строится допустимое дерево на иерархической структуре, которое затем легко представляется на исходном графе. Впервые рассмотрена модель с возможностью перемещения терминалов. Если допустимое дерево не удавалось построить без перемещения терминалов, то разрешалось их перемещение в пределах заданной окрестности. Во время построения дерева на иерархической структуре к терминалам добавлялись промежуточные вершины, в которые могли быть перенесены терминалы, находящиеся от них на единичном расстоянии. Для поиска новых мест размещения терминалов, в которые не были найдены допустимые пути, достаточно найти соответствующее паросочетание. Рассмотрены частные случаи модели, когда искомое дерево строится полиномиальным алгоритмом. Проведен численный эксперимент, который показал высокую эффективность подхода. Так при сравнении его с популярным методом, использующим последовательное построение паросочетаний, он оказался не хуже в 85% случаев.

В работе [5] предложен эффективный эвристический подход к решению задачи, возникающей при проектировании интегральной схемы, который объединяет стадию размещения логических элементов чипа со стадией детальной маршрутизации и при этом минимизирует как критическую (максимальную) задержку, так и площадь чипа, необходимую для маршрутизации. Предложенный подход, который использует иерархический характер сети, решает сложную задачу и не всегда строит ее решение. Отдельные задачи, как размещения, так и маршрутизации сами по себе уже сложны для решения, а одновременное размещение и маршрутизация делают проблему существенно более сложной. Поэтому предложенный метод (впрочем, как и другие) иногда может не найти ни одного допустимого решения. В таких случаях можно допустить увеличение критической задержки. Другой вариант решения проблемы, когда предложенный подход не находит допустимого решения, – это уменьшить размер ячеек решетки. Такой способ даст больше возможностей для маршрутизации, но и увеличит количество узлов решетки, что приведет к увеличению трудоемкости алгоритма.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00977).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дементьев В. Т., Ерзин А. И., Ларин Р. М., Шамардин Ю. В. (1996). *Задачи оптимизации иерархических структур.* Новосибирск: Изд-во Новосибирского университета.

2. Ерзин А. И. (1987). *Задачи построения остова максимального веса с ограниченным радиусом.* // Управляемые системы: Сб. научн. тр. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР. Вып. 27. С. 70-78.

3. Ерзин А. И., Чо Д. Д. (2003). *Задача построения синхронизирующего сигнального дерева.* // Автоматика и телемеханика. №3. С. 163-176.

4. Ерзин А. И., Чо Д. Д. (2003). *Задача одновременного размещения и маршрутизации при проектировании интегральных схем.* // Автоматика и телемеханика. №12. С. 177-190.

5. Сердюков А. И. (1998). *К задаче о максимальном остове ограниченного радиуса.* // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. Т. 5. №3, С. 64-69.

6. Erzin A. I., Cho J. D. (2000). *A Deep-Submicron Steiner Tree.* // Mathematical and Computer Modelling. V. 31. №6/7. P. 215-226.

WIENER INDEX OF ITERATED LINE GRAPHS

A. A. Dobrynin, L. S. Mel'nikov

The Wiener index is the sum of distances between all unordered pairs of vertices of a simple graph G:

$$W(G) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} d(u,v),$$

where $d(u,v)$ is the number of edges in a shortest path connecting the vertices u and v.

Mathematical properties and chemical applications of the Wiener index have been intensively studied in the last thirty years (see recent reviews [1–3]). There are two groups of closely related problems which have attracted the attention of researchers for a long time: how W depends on the structure of a graph and how W changes under graph operations.

The iterated line graph of a graph G is defined as $L^k(G) = L(L^{k-1}(G))$, where $k \geq 1$, $L^0(G) = G$ and $L(G)$ is the line graph of G. A graph $L^2(G)$ is called the *quadratic line graph* of G. The size of $L^k(G)$ rapidly increases when k tends to infinity. Therefore for sufficiently large k the inequality $W(G) < W(L^k(G))$ holds for any graph G except for $K_{1,3}$, simple cycles and simple paths. The concept of line graph has found various applications in chemical research [4, 5].

In this report we observe results known for the Wiener index of iterated line graphs. In particular, we are interesting in finding of graphs G with the property $W(G) = W(L^k(G))$ for $k \geq 1$.

1. Cycle-containing graphs. If a cycle-containing graph, except a simple cycle, satisfies the equality $W(G) = W(L(G))$ then it has at least two cycles. There are 26 smallest bicyclic graphs of order 9 and 71 tricyclic graphs of order 12 [6]. The following question was put forward in [6]: does there exist graphs with cyclomatic number λ having the property $W(G) = W(L(G))$ for every $\lambda \geq 4$?

Two infinite families of graphs with increasing cyclomatic number are presented in [7]. The equality of Wiener indices for these graphs with cyclomatic number λ and their line graphs leads to the following Diophantine equations

$$x^2 - 5y^2 = \pm 4, \tag{1}$$

where $y^2 = 20\lambda^2 - 12\lambda + 1$ and $x = 10\lambda - 3$. This is a well-known equation in the number theory called the Pell equation. A solution of equations (1) satisfies the following recurrent relations [8]:

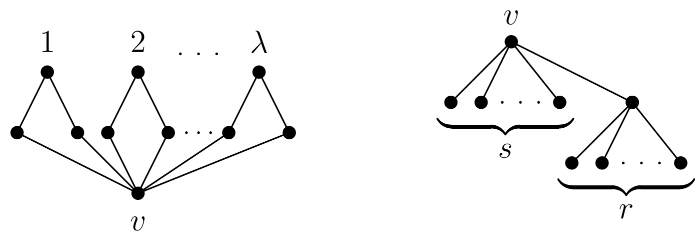
$$\begin{cases} x_n = (x_{n-1} + 5y_{n-1})/2 \\ y_n = (x_{n-1} + y_{n-1})/2 \end{cases} \tag{2}$$

where $x_0 = 1$ and $y_0 = 1$. All even n generate solutions for the right part 4 of (1) and odd n generate solutions for -4. In order to construct an infinite family of graphs with increasing

Dobrynin Andrey Alekseevich, Mel'nikov Leonid Sergeevich,
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Academica Koptyuga 4, Novosibirsk, 630090, Russia, phone: (383-2) 33-25-94,
fax: (383-2) 33-25-98, e-mail: dobr@math.nsc.ru, omeln@math.nsc.ru

cyclomatic number, we find an infinite subsequence of (2) which provides integer-valued of λ. However, the obtained λ does not cover all possible values of the cyclomatic number.

A complete solution of the question has been recently constructed by the authors. Families of bipartite and outerplanar graphs with property $W(G) = W(L(G))$ have been found for every cyclomatic number. Such graphs consist of a cyclic subgraph and a tree-like subgraph (see figure below). A tree-like subgraph may be a generalized star or a double star (a double star is shown in the figure).



Let the graph $G_{\lambda,s,r}$ be obtained from the pictured graphs by identifying vertices v. There are certain relations between the numbers of branches in a tree-like subgraph and the cyclomatic number of graphs having the same Wiener index. As an illustration, we give a result of this kind.

Theorem 1. *Graphs $G_{\lambda,2\lambda-4,2}$ and $G_{\lambda,2\lambda-6,5}$ with the cyclomatic number $\lambda \geq 3$ satisfy the equality $W(G) = W(L(G))$.*

All the constructed graphs with the considered property contain cycles of small sizes (C_3 or C_4). It would be interesting to find graphs with the large girth.

Question. Does there exist a graph with the girth g having the property $W(G) = W(L(G))$ for every $g \geq 5$?

2. Trees. Buckley shown that the Wiener indices of a tree and its line graph are always distinct [9]. Namely, for a tree T with $n \geq 2$ vertices

$$W(L(T)) = W(T) - \binom{n}{2}.$$

Therefore, the following question naturally arises: does there exist a tree T with the property

$$W(L^2(T)) = W(T)\,? \qquad (3)$$

The smallest trees with this property have been found by inspection all trees of order $n \leq 26$ [2,10,11]. Table shows the number of such trees. Here t_n is the number of all n-vertex trees and w_n denotes the number of trees having property (3).

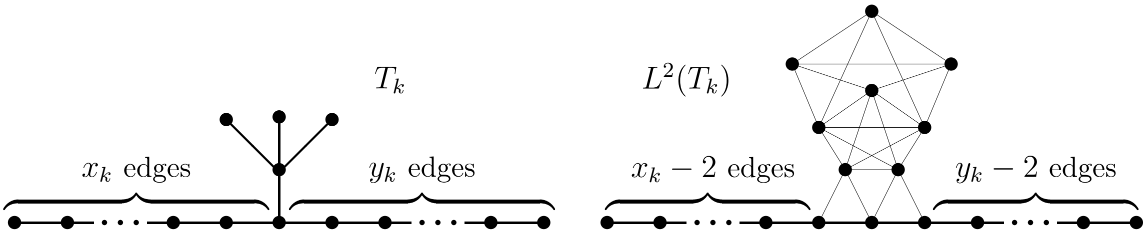
Table 1: The number of trees of order n with property(3).

n	t_n	w_n	n	t_n	w_n	n	t_n	w_n
9	47	1	15	7741	22	21	2144505	513
10	106	1	16	19320	25	22	5623756	576
11	235	1	17	48629	66	23	14828074	1520
12	551	0	18	123867	73	24	39299897	1715
13	1301	7	19	317955	204	25	104636890	3763
14	3159	8	20	823065	231	26	279793450	4085

The above data leads to the following question: does there exist an infinite family of trees having property (3)? We answer this question in affirmative.

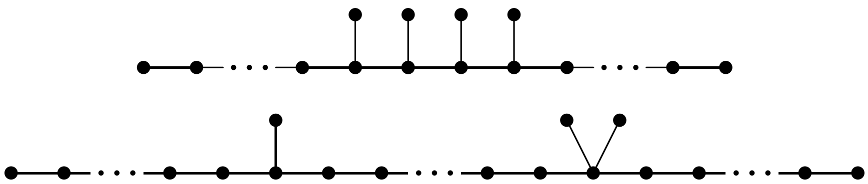
Theorem 2. *There exist infinite families of trees T satisfying equality (3).*

To prove this result, we construct several families of trees in question [11]. They belong to specific classes of trees known in graph theory as lobsters and caterpillars. A tree is a *caterpillar* if the removal of all its endvertices results in a path. A tree is a *lobster* if the removal of all its endvertices results in a caterpillar. The structure of lobsters T_k and their quadratic line graphs are presented below:



Here $x_k = 3(k^2 - k + 2)/2$ and $y_k = 3(k^2 + k + 2)/2$, $k \geq 0$. Since $x_{k+1} = y_k$, two neighbor trees of this family differ in the length of one long branch.

Other families contain trees called combs and forks (see figure below). Forks form an infinite two-parameter family of growing trees with property (3) [12].



Attempts to find trees with $W(T) = W(L^3(T))$ lead to the following conjecture.

Conjecture. There is no tree satisfying equality $W(T) = W(L^k(T))$ for any $k \geq 3$.

3. The generalized stars. An interesting problem was posed in [12]: construct an infinite family of trees satisfying equality (3) such that they have several paths growing from a vertex. A generalized star S is a tree consisting of paths, called branches, with the unique common endvertex. The number of branches is equal to the maximal vertex degree $\Delta \geq 3$ of a generalized star. The following relation between Wiener indices of S and its quadratic line graph has been derived in [13].

Theorem 3. *Let S be a star with q edges and Δ branches of length $k_1, k_2, \ldots, k_\Delta$. Then*

$$W(L^2(S)) = W(S) + \frac{1}{2}\binom{\Delta - 1}{2}\left[\sum_{i=1}^{\Delta} k_i^2 + q\right] - q^2 + 6\binom{\Delta}{4}.$$

This implies necessary conditions for a generalized star and its quadratic line graph to have the same Wiener index.

Theorem 4. *Let S be a generalized star with Δ branches. If $\Delta = 3$, then $W(L^2(S)) < W(S)$. If $\Delta \geq 7$, then $W(L^2(S)) > W(S)$.*

This implies that if $W(S) = W(L^2(S))$, then $\Delta \in \{4, 5, 6\}$. Infinite families of generalized stars with this property for $\Delta = 5, 6$ have been constructed.

Let $\Delta = 5$. All trees have two branches of fixed length and three growing branches.

F1. Generalized stars of the first family have $6(k^2+3)$, $k \geq 0$, edges and branches of length $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = k_4 = 2k^2 - k + 5$, and $k_5 = 2k^2 + 2k + 5$.

F2. Trees of the second family have $6(k^2+3)$, $k \geq 0$, edges and branches of lengths $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 2k^2 - 2k + 5$ and $k_4 = k_5 = 2k^2 + k + 5$.

F3. The third family contains generalized stars with $q = 6(k^2+k+4)$, $k \geq 0$, edges and branches of length $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 2k^2 + 6$, $k_4 = 2k^2 + 3k + 6$, and $k_5 = 2k^2 + 3k + 9$.

Let $\Delta = 6$. An infinite family of such trees is formed by stars with the following lengths of branches: $k_1 = 3$, $k_2 = 4k^2 + 33$, $k_3 = k_4 = 4k^2 - k + 36$, and $k_5 = k_6 = 4k^2 + k + 36$.

It would be interesting to construct an infinite family of stars with $\Delta = 4$ branches.

This work was supported by RFBR (project codes 02–01–00039 and 04–01–00715).

REFERENCES

1. Dobrynin A. A., Gutman I. *The Wiener index for trees and graphs of hexagonal systems* // Diskretn. Anal. Issled. Oper. Ser. 2. 1998. V. 5, N 2. P. 34–60, in Russian.

2. Dobrynin A. A., Entringer R., Gutman I. *Wiener index for trees: theory and applications* // Acta Appl. Math. 2001. V. 66, N 3. P. 211–249.

3. Dobrynin A. A., Gutman I., Klavžar S., Žigert P. *Wiener index of hexagonal systems.* // Acta Appl. Math. 2002. V. 72, N 3. P. 247–294.

4. Gutman I., Estrada E. *Topological indices based on the line graph of the molecular graph* // J. Chem. Inf. Comput. Sci. 1996. V. 36. P. 541–543.

5. Gutman I., Popović L., Mishra B. K., Kaunar M., Estrada E., Guevara N. *Application of line graphs in physical chemistry. Predicting surface tension of alkanes* // J. Serb. Chem. Soc. 1997 V. 62. P. 1025–1029.

6. Dobrynin A. A., Gutman I., Jovašević V. *Bicyclic graphs and its line graphs with the same Wiener index* // Diskretn. Analiz Issled. Oper. Ser. 2. 1997. V. 4, N 2. P. 3–9, in Russian.

7. Dobrynin A. A., Mel'nikov L. S. *Wiener index for graphs and their line graphs with increasing cyclomatic number* // Appl. Math. Lett., submitted.

8. Redmond D. *Number Theory: An Introduction.* New York, Basel: Marcel Dekker, 1996.

9. Buckley F. *Mean distance of line graphs* // Congr. Numer. 1981. V. 32. P. 153–162.

10. Dobrynin A. A. *Distance of iterated line graphs* // Graph Theory Notes New York. 1998. V. 37. P. 8–9.

11. Dobrynin A. A., Mel'nikov L. S. *Trees and their quadratic line graphs having the same Wiener index* // MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 2004. V. 50. P. 145–164.

12. Dobrynin A. A., Mel'nikov L. S. *Trees, quadratic line graphs and the Wiener index* // Croat. Chem Acta, accepted for publication.

13. Dobrynin A. A., Mel'nikov L. S. *Wiener index of generalized stars and their quadratic line graphs* // Discrete Appl. Math., submitted.

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕКТОРНЫХ ЗАДАЧ БУЛЕВА ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. А. Емеличев, В. Н. Кричко, Д. П. Подкопаев

Под устойчивостью задачи дискретной оптимизации обычно понимают некоторое свойство инвариантности множества оптимальных решений при "малых" возмущениях ее параметров. В качестве таких параметров, как правило, выступают коэффициенты критерия, а в некоторых случаях возмущениям подвергаются и параметры ограничений. В настоящем докладе представлены результаты работ [1-3], касающиеся устойчивости векторной задачи линейного булева программирования к возмущениям и коэффициентов векторного критерия, и параметров ограничений. Приведенные здесь формулы и оценки радиусов устойчивости получены с помощью техники, предложенной в [4] для анализа устойчивости скалярной (однокритериальной) задачи линейного булева программирования.

Пусть $C = [c_{ij}] \in \mathbf{R}^{k\times n},\ A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{m\times n},\ b \in \mathbf{R}^m,\ k \geq 1,\ n \geq 2,\ m \geq 1,\ \mathbf{E}^n = \{0,1\}^n$.

Рассмотрим векторную (k-критериальную) задачу булева программирования

$$Cx \to \max, \tag{1}$$

$$Ax \leq b,\ x \in \mathbf{E}^n, \tag{2}$$

состоящую в нахождении множества паретовских оптимумов P. Будем предполагать, что $P \neq \emptyset$. Через X будем обозначать множество решений системы (2).

Расстояние между задачей (1)-(2) и "возмущенной" задачей

$$(C + C')x \to \max, \tag{3}$$

$$(A + A')x \leq b + b',\ x \in \mathbf{E}^n, \tag{4}$$

определим числом

$$\max\{\| C' \|,\ \| A' \|,\ \| b' \|\},$$

где $\|\ .\ \|$ – чебышевская норма (l_∞) в соответствующем пространстве. Через $\|\ .\ \|^*$ будем обозначать норму в сопряженном пространстве (l_1).

Определение 1. Радиусом устойчивости $\rho^k(A,b,C)$ векторной задачи (1)-(2) называется инфимум расстояний от этой задачи до задач вида (3)-(4), каждая из которых или не имеет решений, или имеет хотя бы один паретовский оптимум, не являющийся паретовским оптимумом задачи (1)-(2).

Положим $\bar{P} = \mathbf{E}^n \setminus P,\ \nu(x) = -\beta(x)$,

$$\beta(x) = \max\left\{\frac{A_i x - b_i}{\| x \|^* + 1} :\ i \in N_m\right\}, \qquad \alpha(x',x) = \min\left\{\frac{C_i(x'-x)}{\| x' - x \|^*} :\ i \in N_k\right\},$$

где $A_i\ \ (C_i)$ – i-я строка матрицы $A\ \ (C),\ N_m = \{1,2,\ldots,m\}$.

Емеличев Владимир Алексеевич, Кричко Виталий Николаевич,
Подкопаев Дмитрий Петрович,
Белорусский государственный университет,
пр. Ф. Скорины, 4, 220050, Минск, Беларусь,
e-mail: emelichev@bsu.by, vnkrichko@tut.by, padkapayeu@bsu.by

Теорема 1 [1]. *Если $\bar{P} \neq \emptyset$, то*

$$\min_{x\in\bar{P}}\max_{x'\in X\setminus\{x\}}\min\{\alpha(x',x),\nu(x')\} \le \rho^k(A,b,C) \le \min_{x\in\bar{P}}\max_{x'\in X\setminus\{x\}}\max\{\alpha(x',x),\beta(x)\}.$$

Если $\bar{P} = \emptyset$, то $\rho^k(A,b,C) = \max\{\nu(x) :\ x \in \mathbf{E}^n\}$.

Введем обозначения

$$\lambda(x^0) = \begin{cases} \min\{\alpha(x^0,x) :\ x\in X, x\neq x^0\}, & \text{если } X \neq \{x^0\},\\ +\infty, & \text{если } X = \{x^0\}, \end{cases}$$

$$t(x^0) = \begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbf{E}^n\setminus X}\max\{\alpha(x^0,x),\beta(x)\}, & \text{если } \mathbf{E}^n\setminus X \neq \emptyset,\\ +\infty, & \text{если } \mathbf{E}^n\setminus X = \emptyset. \end{cases}$$

Теорема 2 [2]. *Если x^0 – единственный паретовский оптимум задачи (1)-(2), то*

$$\rho^k(A,b,C) = \min\{\nu(x^0),\lambda(x^0),t(x^0)\}. \tag{5}$$

При $k = 1$ из формулы (5) получаем формулу радиуса устойчивости скалярной задачи линейного булева программирования в случае, когда оптимальное решение единственно. Эта формула в некотором смысле уточняет формулу из [4]

Определение 2. Радиусом устойчивости $\rho^k(x^0,A,b,C)$ паретовского оптимума x^0 векторной задачи (1)-(2) называется инфимум расстояний от этой задачи до задач вида (3)-(4), в которых x^0 не является паретовским оптимумом.

Пусть

$$\tilde{t}(x^0) = \begin{cases} \min\limits_{x\in\mathbf{E}^n\setminus X}\max\{\tilde{\alpha}(x^0,x),\beta(x)\}, & \text{если } \mathbf{E}^n\setminus X \neq \emptyset,\\ +\infty, & \text{если } \mathbf{E}^n\setminus X = \emptyset, \end{cases}$$

$$\tilde{\alpha}(x^0,x) = \max\left\{\frac{C_i(x^0-x)}{\|\ x^0-x\ \|^*} :\ i\in N_k\right\},$$

$$\tilde{\lambda}(x^0) = \begin{cases} \min\{\tilde{\alpha}(x^0,x) :\ x\in X, x\neq x^0\}, & \text{если } X \neq \{x^0\},\\ +\infty, & \text{если } X = \{x^0\}. \end{cases}$$

Теорема 3 [3]. *Радиус устойчивости паретовского оптимума x^0 векторной задачи (1)-(2) выражается формулой*

$$\rho^k(x^0,A,b,C) = \min\{\nu(x^0),\tilde{\lambda}(x^0),\tilde{t}(x^0)\}.$$

Заметим, что все величины, фигурирующие в формулах и оценках радиусов устойчивости, имеют вполне определенный смысл. Например, $\nu(x^0)$ – предельный уровень возмущений пары (A,b), при которых x^0 остается решением системы (2), а $\lambda(x^0)$ – предельный уровень возмущений матрицы C, сохраняющих оптимальность решения x^0 по Парето.

Из теоремы 3, в частности, вытекает

Следствие [3]. *Для радиуса устойчивости оптимального решения x^0 скалярной ($k = 1$) задачи*

$$cx \to \max, \tag{6}$$

$$Ax \leq b, \ x \in \mathbf{E}^n \tag{7}$$

справедлива формула

$$\rho^1(x^0, A, b, c) = \min\left\{\min_{i \in N_m} \frac{b_i - A_i x^0}{\| x^0 \|^* + 1}, \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \frac{c(x^0 - x)}{\| x - x^0 \|}, t(x^0)\right\},$$

где

$$t(x^0) = \min_{x \in \mathbf{E}^n \setminus X} \max\left\{\frac{c(x^0 - x)}{\| x - x^0 \|}, \max_{i \in N_m} \frac{A_i x^0 - b_i}{\| x^0 \|^* + 1}\right\}, \quad \textit{если } \mathbf{E}^n \setminus X \neq \emptyset,$$

$t(x^0) = +\infty$, *если* $\mathbf{E}^n \setminus X = \emptyset$.

Отсюда следует очевидный факт, что радиус устойчивости оптимального решения x^0 скалярной задачи (6)–(7) может быть больше нуля лишь в том случае, когда x^0 – единственное оптимальное решение.

Приведенные результаты нетрудно распространить и на векторную задачу булева программирования с квадратичными частными критериями (см. [5]).

Отметим, что вопросы устойчивости к возмущениям параметров ограничений векторной задачи на конечном множестве целочисленных точек выпуклого многогранника исследованы в [6] (см. также [7]).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Емеличев, В. Н. Кричко, Д. П. Подкопаев. *О радиусе устойчивости векторной задачи линейного булева программирования* // Дискретная математика. 2000. Т. 12, вып. 2. С. 25–30.

2. В. А. Емеличев, В. Н. Кричко. *О радиусе устойчивости паретовского оптимума векторной задачи булева программирования* // Известия АН Республики Молдова. Математика. 1999. №1. С. 79–84.

3. В. А. Емеличев, В. Н. Кричко. *Об устойчивости паретовского оптимума векторной задачи булева программирования* // Дискретная математика. 1999. Т. 11, вып. 4. С. 27–32.

4. В. К. Леонтьев, К. Х. Мамутов. *Устойчивость решений в задачах линейного булева программирования* // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1988. Т. 28, №10. С. 1475–1481.

5. В. А. Емеличев, В. Н. Кричко. *Радиус устойчивости эффективного решения векторной квадратичной задачи булева программирования* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2001. Т. 41, №2. С. 346–350.

6. Т. Т. Лебедева, Т. И. Сергиенко. *Сравнительный анализ различных типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленной оптимизации* // Кибернетика и системный анализ. 2004. №1. С. 63–70.

7. И. В. Сергиенко, Л. Н. Козерацкая, Т. Т. Лебедева. *Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач.* Киев: Навукова думка. 1995. 169 С.

О НЕЯВНЫХ ФОРМАХ ВЫРАЗИМОСТИ В МНОГОЗНАЧНЫХ ЛОГИКАХ

О. М. Касим-Заде

Неявные формы выразимости в многозначных логиках: неявная выразимость, неявная сводимость, параметрическая выразимость и некоторые другие введены А. В. Кузнецовым как обобщения понятия выразимости функций суперпозициями [9]. Такие формы позволяют выражать функции как решения систем неявных уравнений различных типов.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ k-значной логики P_k называется параметрически выразимой над системой функций $A \subseteq P_k$, если найдутся функции Φ_i, Ψ_i, выразимые суперпозициями функций системы A или являющиеся тривиальными (селекторными) функциями, такие, что система уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, \ldots, x_n, \pi_1, \ldots, \pi_p, y) = \Psi_1(x_1, \ldots, x_n, \pi_1, \ldots, \pi_p, y), \\ \ldots \\ \Phi_q(x_1, \ldots, x_n, \pi_1, \ldots, \pi_p, y) = \Psi_q(x_1, \ldots, x_n, \pi_1, \ldots, \pi_p, y) \end{cases}$$

при любых фиксированных $x_1, \ldots, x_n$ имеет по крайней мере одно решение в переменных $\pi_1, \ldots, \pi_p, y$, причем в любом таком решении $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Если при любых $x_1, \ldots, x_n$ не только значение специальной переменной y, но и значения всех параметров $\pi_1, \ldots, \pi_p$ определены однозначно, то f называется регулярно параметрически выразимой над A [6]. Если параметры отсутствуют ($p = 0$), то f называется неявно выразимой над A. Функция f называется выразимой над системой A по неявной сводимости, если существует последовательность функций $f_1, \ldots, f_{m-1}, f_m = f$, в которой каждая функция f_i неявно выразима над $A \cup \{f_1, \ldots, f_{i-1}\}$.

Неявные формы выразимости, вообще говоря, сильнее выразимости суперпозициями. Например, в двузначной логике P_2 функция отрицания $\bar{x}$ неявно выразима над системой монотонных функций $A_1 = \{xy, x \vee y, 0, 1\}$. Соответствующая система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} xy = 0, \\ x \vee y = 1. \end{cases}$$

Единственным решением этой системы при любом x является $y = \bar{x}$. В то же время $\bar{x}$ не выразима суперпозициями функций системы A_1, так как не является монотонной. В действительности система A_1 является неявно полной в P_2, т. е. над ней неявно выразима любая функция двузначной логики.

В любой многозначной логике описанные формы выразимости упорядочены по неубыванию выразительной силы следующим образом: выразимость суперпозициями, неявная выразимость, неявная сводимость, регулярная параметрическая выразимость, параметрическая выразимость.

Присоединив к системе A все выразимые над ней функции f, получим множество функций, называемое: в случае параметрической выразимости, регулярной параметрической выразимости, неявной сводимости — замыканием системы A относительно соответствующей формы выразимости, в случае неявной выразимости —

Касим-Заде Октай Мурадович,
МГУ им. М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет,
Воробьевы горы, Москва, 119992, Россия, e-mail: kasimz@mech.math.msu.su

неявным расширением системы A. Для первых трех форм описанные операции присоединения являются операциями замыкания в обычном смысле и порождают в P_k соответствующие системы замкнутых классов. В случае неявной выразимости дело обстоит иначе: при $k \geq 3$ соответствующая операция присоединения не транзитивна (двузначная логика составляет исключение). Эта особенность неявной выразимости существенно затрудняет ее изучение.

Наиболее полно изучены неявные формы выразимости в двузначной логике. Здесь все четыре неявные формы выразимости эквивалентны (т. е. над любой системой выражают одни и те же функции) [2, 4, 9]. Известно описание системы всех параметрически замкнутых классов в P_2 [9]. Число этих классов конечно и равно 25. В силу эквивалентности всех форм указанное описание без изменений переносится и на них. Эти результаты отчетливо показывают возможности неявных форм выразимости: под действием любой из них счетная система замкнутых по суперпозиции классов функций в P_2 «сжимается» в конечную систему параметрически замкнутых классов.

В k-значных логиках, начиная с трехзначной, положение существенно иное. При любом $k \geq 3$ все четыре неявные формы выразимости в P_k не эквивалентны [4, 9]. Число параметрически замкнутых классов в P_k при любом $k \geq 2$ конечно [1, 9, 16]. В то же время при любом $k \geq 3$ система неявных расширений и системы замкнутых классов, соответствующих двум остальным неявным формам выразимости в P_k, бесконечны и имеют мощность континуума [4].

Значительная часть исследований в области неявных форм выразимости посвящена вопросам полноты. Критерии полноты в терминах предполных классов установлены в P_2 для всех четырех неявных форм выразимости [3, 9]. Аналогичный критерий установлен для параметрической полноты в P_3 [1]. Последний результат прямо переносится на случай регулярной параметрической полноты в P_3. Хотя регулярная параметрическая выразимость и параметрическая выразимость в P_k при $k \geq 3$ не эквивалентны, при любом $k \geq 2$ эти формы выразимости эквивалентны по полноте [8].

Недавно найден критерий неявной полноты в P_3. Описаны 27 конкретных конечных систем функций трехзначной логики таких, что заданная система функций неявно полна в P_3 тогда и только тогда, когда ее замыкание по суперпозиции содержит хотя бы одну из этих 27 систем [14]. Обычно критерии полноты формулируются в терминах предполных классов, т. е. максимальных по включению неполных систем. В данном случае, напротив, найдены все минимальные с точки зрения замыкания по суперпозиции неявно полные системы. Как следствие из найденного критерия полноты установлено, что в P_3 число неявно предполных классов конечно и что эти классы образуют критериальную по неявной полноте систему [14]. В P_3 установлен также критерий неявной шефферовости функций [13].

Найден критерий типа теоремы Слупецкого неявной полноты систем функций в P_k, $k \geq 2$, содержащих все одноместные функции. Роль класса Слупецкого в этом случае, как оказалось, выполняет класс всех квазилинейных функций (класс Бурле) [12]. Попутно установлено, что класс всех одноместных функций в P_k обладает любопытными свойствами: он неполон по неявной выразимости при любом $k \geq 2$; полон по неявной сводимости при любом $k \geq 4$ и неполон при $k = 2, 3$; полон по параметрической выразимости при любом $k \geq 3$ и неполон при $k = 2$ [12].

Известны также критерии параметрической полноты и полноты по неявной сводимости в некоторых логиках, соответствующих отдельным классам функций в P_k (см., например, [10, 11, 15]).

Результаты исследований в области неявных форм выразимости в многозначных логиках нашли применение при решении некоторых вопросов теории управляющих систем [3, 6], универсальной алгебры [4]. Вопросы сложности, связанные с неявными формами выразимости, изучались в [3, 5, 6, 7].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 02-01-00985), программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1807.2003.1), программы «Университеты России» и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы дискретной математики» (проект «Оптимальный синтез управляющих систем»).

ЛИТЕРАТУРА

1. Данильченко А. Ф. *О параметрической выразимости функций трехзначной логики* // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 4. С. 397–416.

2. Касим-Заде О. М. *О неявной выразимости булевых функций* // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 1995. № 2. С. 44–49.

3. Касим-Заде О. М. *О синтезе сетей из функциональных элементов* // Доклады РАН. 1996. Т. 348, № 2. С. 159–161.

4. Касим-Заде О. М. *О неявной выразимости в двузначной логике и криптоизоморфизмах двухэлементных алгебр* // Доклады РАН. 1996. Т. 348, № 3. С. 299–301.

5. Касим-Заде О. М. *Об одной метрической характеристике неявных и параметрических представлений булевых функций* // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука. Физматлит, 1996. С. 133–188.

6. Касим-Заде О. М. *О сложности параметрических представлений булевых функций* // Математические вопросы кибернетики. Вып. 7. М.: Наука. Физматлит, 1998. С. 85–160.

7. Касим-Заде О. М. *О поведении функций Шеннона сложности параметрических представлений булевых функций* // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2001. № 3. С. 66–68.

8. Касим-Заде О. М. *Об эквивалентности двух видов параметрической полноты в k-значных логиках* // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докладов XIII Международной конференции (Казань, 27–31 мая 2002 г.). Часть I. М.: Изд-во Центра прикладных иследований при механико-математическом ф-те МГУ, 2002. С. 83.

9. Кузнецов А. В. *О средствах для обнаружения невыводимости или невыразимости* // Логический вывод. М.: Наука, 1979. С. 5–33.

10. Куку И. В. *О параметрической полноте систем формул в цепных логиках* // Известия АН МССР. Серия физико-технических и математических наук. 1988. № 3.

11. Куку И. В., Раца М. Ф. *Критерии параметрической полноты в логике простейшей псевдобулевой алгебры с несравнимыми элементами* // Сборник трудов семинара по дискретной математике и ее приложениям (Москва, МГУ, 1990 г.). М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 1997. С. 52–53.

12. Орехова Е. А. *Об одном критерии неявной полноты в k-значной логике* // Математические вопросы кибернетики. Вып. 11. М.: Наука. Физматлит, 2002. С. 77–90.

13. Орехова Е. А. *О критерии неявной шефферовости в трехзначной логике* // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. 2003. Т. 10, № 3. С. 82–105.

14. Орехова Е. А. *О критерии полноты по неявной выразимости в трехзначной логике* // Математические вопросы кибернетики. Вып. 12. М.: Наука. Физматлит, 2003.

15. Раца М. Ф., Куку И. В. *О полноте по неявной сводимости в логике первой матрицы Яськовского* // Известия АН МССР. Серия физико-технических и математических наук. 1988. № 1.

16. Burris S., Willard R. *Finitely many primitive positive clones* // Proc. Amer. Math. Soc. 1987. V. 101, N 3. P. 427–430.

О ЧИСЛЕ K-НЕРАЗДЕЛЕННЫХ СЕМЕЙСТВ ПОДМНОЖЕСТВ N-ЭЛЕМЕНТНОГО МНОЖЕСТВА

А. Д. Коршунов

Потребность в изучении различных семейств подмножеств конечного множества, удовлетворяющих тем или иным ограничениям, возникает при решении некоторых задач дискретной математики. Среди простейших ограничений, которым должны удовлетворять семейства подмножеств конечного множества, является отсутствие в каждом семействе k членов (подмножеств) с пустым пересечением, $k = 2, 3, \ldots$. Такие семейства называются *k-неразделенными.*

Нетрудно видеть, что задача о числе k-неразделенных семейств подмножеств n-элементного множества эквивалентна задаче о числе так называемых k-неразделенных булевых функций от n переменных, определяемых следующим образом.

Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *k-неразделенной,* если у любых k двоичных наборов, на которых f равна 1, имеется по меньшей мере одна общая единичная компонента. Такие функции часто называют функциями, удовлетворяющими условию A^μ, $\mu = 2, 3, \ldots$ (см., например, [1], [2]).

Пусть $F_k(n)$ обозначает множество k-неразделенных булевых функций от n переменных. Можно, конечно, предложить точные формулы для числа функций из $F_k(n)$ (т. е. $|F_k(n)|$), являющиеся формульной записью различных алгоритмов перебора всех булевых функций от n переменных и проверкой их на k-неразделенность. Однако не ясно, как из таких формул извлечь информацию о величине $|F_k(n)|$.

В связи с этим обстоятельством возникает желание найти асимптотические формулы для размера множества $F_k(n)$ при $n \to \infty$. Такие формулы мною были получены. Они имеют следующий вид.

Теорема 3. *При любом нечетном $n \to \infty$*

$$
\begin{aligned}
|F_2(n)| \sim n \cdot 2^{2^{n-1}} (3/2)^{\binom{n-1}{(n-3)/2}} \exp\Bigg\{ & \binom{n-1}{(n-5)/2} \Bigg[\frac{1}{2}(2/3)^{(n+3)/2} \\
& + \frac{1}{2^6}(n^2 - 2n - 23)(2/3)^{n+3} - \frac{1}{2^{14}\cdot 3}\left(1653n^4 + 2248n^3 - 8162n^2\right. \\
& \left. +1176n + 1741\right)(2/3)^{3(n+3)/2}\Bigg] + \binom{n-1}{(n-1)/2}\Bigg[\frac{1}{2}(2/3)^{(n-1)/2} \\
& + \frac{1}{2^6\cdot 3^2}(n^2 + 14n - 159)(2/3)^{n-1} - \frac{1}{2^{10}\cdot 3^4}(177n^4 - 561n^3 \\
& - 861n^2 - 1527n + 16596)(2/3)^{3(n-1)/2}\Bigg]\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Коршунов Алексей Дмитриевич,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия;
тел. 8–3832–33–38–69, e-mail: korshun@math.nsc.ru

Теорема 2. *При любом четном $n \to \infty$*

$$|F_2(n)| \sim 2^{2^{n-1}} (3/2)^{\frac{1}{2}\binom{n}{n/2}} \exp\left\{ \binom{n}{n/2-1} \left[\frac{1}{3}(2/3)^{n/2} - \frac{1}{2^3 3^2}(n+6)(2/3)^n \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{1}{2^7 3^4}(5n^3 + 8n^2 + 76n + 288) \right) (2/3)^{3n/2} \right] \right\}.$$

Теорема 3. *При любом фиксированном $k \geqslant 3$ и $n \to \infty$*

$$|F_k(n)| \sim n \cdot 2^{2^{n-1}}.$$

Доказательство каждой теоремы проводится в два этапа и основано на разбиении множества $F_k(n)$ на подмножества $F_k^1(n)$ и $F_k^2(n)$. Функции из $F_k^1(n)$ называются *типичными,* а из $F_k^1 2(n)$ — *нетипичными.*

Приведем сведения (неполные) о структуре типичных функций. Пусть $E^{n,k}$ обозначает множество двоичных наборов длины n, в каждом из которых имеется k единиц и $n-k$ нулей. Двоичные наборы $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\overline{\widetilde{\alpha}} = (\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_n})$, где $\overline{\alpha_i} = \alpha_i \oplus 1$, называются *противоположными.* Если A — произвольное множество наборов из $E^{n,k}$, то через $\overline{A}$ обозначается множество наборов, каждый из которых противоположен одному набору из A. Все наборы из $\overline{A}$ принадлежат множеству $E^{n,n-k}$. Если A — произвольное множество наборов из $E^{n,k}$, то через $P^1(\overline{A})$ обозначается множество наборов $\widetilde{\beta}$ из $E^{n,k-s}$ таких, что $\widetilde{\beta}$ предшествует по меньшей мере одного набору $\widetilde{\alpha}$ из $\overline{A}$ (т. е. $\widetilde{\beta} \prec \widetilde{\alpha}$).

При четном n множество $F_2^1(n)$ состоит из функций f, удовлетворяющих следующим требованиям.

1) Функция f равна 0 на каждом наборе из $E^{n,0} \cup \ldots \cup E^{n,n/2-2}$.

2) На каждом наборе из $E^{n,n/2+2} \cup \ldots \cup E^{n,n}$ функция f может принимать произвольные значения.

3) Если f равна 1 на наборах 2-неразделенного множества $A \subseteq E^{n,n/2-1}$, то на наборах из $E^{n,n/2+1} \setminus \overline{A}$ функция f может принимать произвольные значения.

4) Пусть A — множество 2-неразделенных наборов из $E^{n,n/2-1}$, на которых функция f равна 1. Тогда на наборах из $E^{n,n/2} \setminus P^1(\overline{A})$ функция f может быть задана произвольно, но так, чтобы на любых двух противоположных наборах она одновременно не принимала значение 1.

5) Функция f равна 1 не более чем на $\binom{n}{n/2-1}(2/3)^{n/2+1}$ наборах из $E^{n,n/2-1}$.

6) Множество наборов из $E^{n,n/2-1}$, на которых функция f равна 1, состоит из так называемых одноэлементных, двухэлементных и трех типов трехэлементных связок.

При любом нечетном n множество $F_2^1(n)$ является объединением n равномощных подмножеств $F_2^{1,i}(n)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Подмножество $F_2^{1,i}(n)$ ассоциируется с i-й переменной. Пусть $E_{i,0}^{n,k}$ ($E_{i,1}^{n,k}$) обозначает множество наборов из $E^{n,k}$, в каждом из которых i-я компонента равна 0 (равна 1). Подмножество $F_2^{1,i}(n)$ состоит из таких функций f, которые удовлетворяют следующим требованиям.

1) Функция f равна 0 на всех наборах из $E^{n,0} \cup \ldots \cup E^{n,(n-5)/2}$.

2) На наборах из $E^{n,(n+5)/2} \cup \ldots \cup E^{n,n}$ функция f может принимать произвольные значения.

3) Функция f может быть равна 1 только на таких наборах из $E^{n,(n-3)/2}$, которые принадлежат множеству $E_{i,1}^{n,(n-3)/2}(n)$.

4) Пусть A — множество наборов из $E_{i,1}^{n,(n-3)/2}$, на которых функция f равна 1. Тогда на наборах из $E^{n,(n+3)/2} \setminus \overline{A}$ функция f может принимать произвольные значения.

5) Пусть B — 2-неразделенное множество наборов из $E_{i,0}^{n,(n-1)/2}$), на которых функция f равна 1. Тогда на наборах из $E_{i,1}^{n,(n+1)/2}(n) \setminus \overline{B}$ функция f может принимать произвольные значения.

6) На наборах из $(E_{i,1}^{n,(n-1)/2} \setminus P^1(\overline{B})) \cup (E_{i,0}^{n,(n+1)/2} \setminus P^1(\overline{A}))$, функция f может быть задана произвольно с соблюдением 2-неразделенности.

7) Функция f равна 1 не более чем на $\binom{n-1}{(n-3)/2}(2/3)^{(n+3)/2}$ наборах из $E_{i,1}^{n,(n-3)/2}$ и не более чем на $\binom{n-1}{(n-1)/2}(2/3)^{(n-1)/2}$ наборах из $E_{i,0}^{n,(n-1)/2}$.

8) Каждое из множеств A и B состоит из одноэлементных, двухэлементных и трех типов трехэлементных связок.

При любом фиксированном $k \geqslant 3$ множество $f_k^1(n)$ состоит из таких функций f, что у всех наборов, на которых f равна 1, имеется по меньшей мере одна общая единичная компонента.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект 02–01–00939) и программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–313.2003.1).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Марченков С. С. *Замкнутые классы булевых функций.* М.: Физматлит, 2000.

[2] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. *Функции алгебры логики и классы Поста.* М.: Наука, 1966.

СЛОЖНОСТЬ В СРЕДНЕМ И ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Н. Н. Кузюрин

Известно, что многие NP-трудные задачи комбинаторной оптимизации не имеют хороших приближенных полиномиальных алгоритмов при анализе по худшему случаю. В частности, для любого фиксированного $\delta > 0$ максимальная клика в графе не может быть аппроксимирована в полиномиальное время с мультипликативной точностью $n^{1-\delta}$, если $NP \neq coRP$ [1], а минимальное покрытие не может быть аппроксимировано с мультипликативной точностью $(1-\delta)\ln m$ (если не выполнено включение $NP \subseteq DTIME[n^{O(\log\log n)}]$) [2]. Почти такая же ситуация и в задачах целочисленного линейного программирования (ЦЛП), для которых наилучшие приближенные алгоритмы основаны на методе вероятностного округления решений их линейных релаксаций [3,4].

Рассмотрение более широких классов алгоритмов, например, вероятностных, часто приводит к лучшим приближениям. Другой подход заключается в переходе к *полиномиальным в среднем* алгоритмам, понимая под последними алгоритмы, математическое ожидание времени работы которых (при заданном вероятностном распределении на исходных данных) ограничено полиномом от длины входа [5].

Классические исследования по анализу сложности в среднем проведены для симплекс-метода решения задач линейного программирования [6,7,8] (новые результаты см. в [9]). Что касается задач ЦЛП, то давно известны результаты по анализу сложности в среднем метода ветвей и границ для специального подкласса задачи о рюкзаке [10] и метода динамического программирования для некоторых классов задач о многомерной упаковке [11]. Недавно, доказана полиномиальность в среднем одного классического алгоритма, основанного на методе динамического программирования, для задачи о рюкзаке [12]. Аналогичный результат для любого фиксированного числа линейных ограничений получен в [13] (см. также более раннюю работу [14], в которой получен несколько более слабый результат).

Интересные попытки были предприняты с целью построения полиномиальных в среднем приближенных алгоритмов для плохо аппроксимируемых задач (например, КЛИКИ). Так в [15] предложен полиномиальный в среднем алгоритм для нахождения клики в графе, имеющий мультипликативную точность $O(\sqrt{n}/\log n)$ (для случая, когда все ребра графа независимо появляются с вероятностью 1/2), что существенно лучше аппроксимаций, полученных полиномиальными алгоритмами.

В докладе предполагается рассмотреть эти и другие результаты по точным и приближенным алгоритмам для различных классов задач ЦЛП с полиномиальным в среднем временем работы, в частности, оценки среднего времени работы некоторых вариантов метода ветвей и границ для классов ЦЛП типа покрытия и упаковки.

В последние годы в теоретической криптографии активизирован поиск задач, которые также сложны "в среднем", как и в худшем случае. Основополагающий результат Ajtai [16] основан на доказательстве того факта, что задача типа рюкзак (или точнее сумма подмножеств) обладает указанным свойством. В связи с этим ре-

Кузюрин Николай Николаевич,
Институт системного программирования РАН,
ул. Б. Коммунистическая, 25, Москва, 109004, Россия, e-mail: nnkuz@ispras.ru

зультатом возрастает интерес к исследованию способов решения различных классов задач ЦЛП "для почти всех" входов. Для задач ЦЛП типа покрытия мы можем показать, что метод вероятностного округления дает константную аппроксимацию для "почти всех" исходных данных (в отличие от логарифмической при анализе по худшему случаю). Сходные результаты для другой вероятностной модели получены в [17].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 02-01-00713.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Hastad (1997) *Some optimal inapproximability results*, Proc. 28th ACM Symposium on Theory of Computing, 1–10.

2. U. Feige (1996) *A threshold of* $\ln n$ *for the approximating set cover*, Proc. of the ACM Symposium on Theory of Computing, 314-318 (1996)

3. A. Srinivasan (1999) *Improved approximations of packing and covering problems*, SIAM J Comput., **29** 648-670.

4. C. Chekuri, S. Khanna (1999) *On Multidimensional Packing Problems*, Proc. 10th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), 185-194.

5. Y. Gurevich (1991) *Average case completeness*, J. Comp. System Sci., **42** (3), 346–398.

6. K. H. Borgward (1982) *Some distribution independent results about the asymptotic order of the average number of pivot steps of the simplex method*, Math. of Operations Research, **7**, 441–462.

7. S. Smale (1983) *On the average number of steps in the simplex method of linear programming*, Math. Programming, **27**, 241–262.

8. M. Haimovich (1983) *The simplex method is very good! – On the expected number of pivot steps and related properties of random linear programs*, preprint.

9. D. A. Spielman, Shang-Hua Teng (2001) *Smoothed analysis of algorithms: why simplex algorithm usually takes polynomial time*, Proc. 33rd ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), 296–305.

10. V. Chvatal (1980) *Hard knapsack problems*, Operations Research, **28**, 1402–1411.

11. Н. Н. Кузюрин (1994) *Полиномиальный в среднем алгоритм в целочисленном линейном программировании*, Дискретный анализ и исследование операций, **1**(3).

12. R. Beier, B. Vocking (2003) *Random knapsack in expected polynomial time*, 35th ACM Symp. on Theory of Computing, San Diego.

13. R. Beier, B. Vocking (2004) *Typical Properties of Winners and Losers in Discrete Optimization*, 36th ACM Symp. on Theory of Computing, Chicago, Illinois.

14. M. E. Dyer, A. M. Frieze (1989) *Probabilistic analysis of the multidimensional knapsack problem*, Math. of Operations Research, **14**(1), 162–176.

15. M. Krivelevich, V. H. Vu (2000) *Approximating the independence number and the chromatic number in expected polynomial time*, Proceedings ICALP 2000, Springer, LNCS **1853**, 13-24.

16. M. Ajtai (1996) *Generating Hard Instances of Lattice Problems*, In 28th ACM Symposium on Theory of Computing, Philadelphia, 99–108.

17. N. Kuzjurin (2003) *Generalized covers and their approximations*, EuroComb'03, Prague, September 8–12, Abstracts, 247–250.

ОБУЧЕНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРНЕТ-ТЕХНОЛОГИЙ. ОТКРЫТАЯ УЧЕБНАЯ ОБОЛОЧКА ILIAS — ОПИСАНИЕ И ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ

Е. А. Нурминский, Н. Б. Шамрай

Введение

Быстрая смена технологий, высокий темп обновления оборудования, растущие требования к квалификации работников, появление новых и совершенствование старых средств распространения информации требуют адекватного ответа со стороны системы образования. В этих условиях образовательная система должна не только вооружать знаниями, но и, в следствии постоянного и быстрого обновления знаний, формировать потребность в непрерывном и самостоятельном обучении.

Одной из попыток ответить на эти вызовы современного мира является развитие дистанционных средств обучения, которые при наличии соответствующей инфраструктуры позволяют использовать резервы вне офисного времени обучаемых, удаленные интеллектуально-педагогические ресурсы, не требуют значительных капитальных затрат на оборудование учебных центров, делают высшее и другие уровни образования доступным для широких слоев населения, сохраняют и приумножают знания.

Вместе с тем, эффективность подобных форм обучения, особенно при преподавании фундаментальных дисциплин, традиционно оценивается научно-педагогической общественностью весьма низко. Нельзя не согласиться, что в подобном скепсисе есть доля истины, но все же представляется возможным, что эта образовательная технология может найти свою область разумного применения. В данном докладе мы рассмотрим некоторые варианты ее реализации и личный (пока небольшой) опыт применения.

1 Обзор проблемы

Метод проведения занятий в соответствии с установившимися традициями прошлого века в виде аудиторных лекционных курсов, сопровождающихся практикумами в лабораториях, страдает значительными изъянами. Вот некоторые из них:

- абстрактное изложение теории на лекции, не подкрепленное реально действующим примером, снижает мгновенный эффект восприятия материала, ставит его в зависимость от степени доверия к лектору, а окончательное освоение откладывает до практического занятия;

- потери времени на конспектирование занимают не менее 50% продолжительности лекции и оставляют не так много возможностей для того, чтобы вникнуть в содержание;

Нурминский Евгений Алексеевич, ИАПУ ДВО РАН,
ул. Радио, 5, Владивосток, 690041, Россия, e-mail: nurmi@dvo.ru

Шамрай Наталья Борисовна, Омский государственный технический университет,
Мира 11, Омск, 644050, Россия, тел. (8-381-2) 65-20-84, e-mail: nb_shamray@mail.ru

- развернутый по инициативе отдельного студента диалог с лектором, зачастую приводит к срыву плана лекции либо авторитарно прерывается, не удовлетворив интереса студента;

- наличие филиалов у учебного заведения, приводит к необходимости командировок преподавательского состава. В связи с этим процесс обучения теряет свою непрерывность, приобретает дискретный характер. Это существенно влияет на запоминаемость учебного материала и, как правило, приводит к существенному снижению качества образования;

- ограниченные возможности по предоставлению широким слоям населения качественного и доступного образования. Существует широкий контингент лиц, остро нуждающихся в образовательных услугах, которые традиционная система образования предоставить не может.

Приведенные недостатки стимулируют поиск, апробацию и внедрение некоторых альтернативных, неантагонистических существующим в системе образования, новых форм получения образования, адекватных нарождающемуся информационному обществу. Одной из таких форм получения образования является дистанционное обучение с использованием интерактивных курсов, базирующихся на интернет-технологиях (ИДО). В дальнейшем, говоря о дистанционном образовании, мы будем иметь в виду именно эту форму.

1.1 Преимущества дистанционного образования

Дистанционное обучение от традиционных форм обучения отличают следующие характерные черты:

- **Гибкость.** Обучающиеся, занимаются в удобное для себя время, в удобном месте и в удобном темпе. Каждый может учиться столько, сколько ему лично необходимо для освоения курсов и получения необходимых знаний по выбранным дисциплинам.

- **Модульность.** В основу программ ИДО закладывается модульный принцип. Каждая отдельная дисциплина (учебный курс) адекватна по содержанию определенной предметной области. Это позволяет из набора независимых учебных курсов формировать учебный план, отвечающий индивидуальным или групповым потребностям.

- **Параллельность.** Обучение может проводиться при совмещении основной профессиональной деятельности с учебой, то есть "без отрыва от производства".

- **Дальнодействие.** Расстояние от места нахождения обучающегося до образовательного учреждения (при условии качественной работы связи) не является препятствием для эффективного образовательного процесса.

- **Асинхронность.** В процессе обучения обучающий и обучаемый работают по удобному для каждого расписанию.

- **Охват.** Количество обучающихся не является критичным параметром.

- **Рентабельность.** Под этой особенностью подразумевается экономическая эффективность ИДО.
- **Новые информационные технологии.** В ИДО используются преимущественно новые информационные технологии, средствами которых являются компьютерные сети, мультимедиа системы и т.д., что одновременно приучает студентов к практическому их использованию.
- **Социальность.** ИДО в определенной степени снимает социальную напряженность, обеспечивая равную возможность получения образования независимо от места проживания и материальных условий.
- **Интернациональность.** ИДО обеспечивает удобную возможность экспорта и импорта образовательных услуг.

К более отдаленным или гипотетическим преимуществам относятся использование систем искусственного интеллекта, экспертных систем для представления знаний, консультаций, генерации тестов и пр.

Вышеперечисленные преимущества порождают в общем-то положительное отношение обучаемых (по крайней мере студентов дневной формы обучения) к технологиям дистанционного образования, что подтверждается данными опросов, приведенными в Табл. 1.1. Опрос был проведен в ОмГТУ. Из таблицы видно, что студенты,

Таблица 1: Опрос студентов.

No.	Вопрос	38.4%	5.5%	45.2%	6.8%	4.1%
1.	Есть ли в вашем личном распоряжении ПК?	да	нет	да	да	да
2.	Есть ли доступ к сети Internet?	нет	нет	да	да	нет
3.	Есть ли желание использовать интернет в учебном процессе?	да	да	да	нет	нет

в большинстве своем (89.1%), желают использовать интерактивные средства образования, как дополнение к аудиторным занятиям. Практически все оснащены ПК, но не все имеют доступ в интернет. Среди положительных ответов на 3-й вопрос были и весьма эмоциональные "Да, очень хочу", "Да, было бы замечательно". Основная причина отказа в интернет-обучении, при наличии доступа — это высокая плата за передачу данных. Но многие, даже при наличие платного интернета, готовы использовать его в учебном процессе.

1.2 Недостатки дистанционного образования

Перечисленные особенности определяют преимущества ИДО перед другими формами получения образования. Вместе с тем ИДО предъявляет и определенные дополнительные требования как к преподавателю, так и к слушателю, не облегчая, а подчас увеличивая трудозатраты и того и другого.

Безусловно, любая система обучения не идеальна. К организационным недостаткам ИДО можно отнести следующие обстоятельства:

- при аттестации в интерактивном режиме затруднена идентификация студента;

- существуют ограничения возможности применения полностью интерактивного дистанционного обучения в связи с зачастую низким качеством услуг связи.

Среди иных факторов, препятствующих использованию этой формы обучения студентами, можно отметить:

- недостаток стимулов, в том числе и экономических;
- отсутствие навыков самостоятельной работы над учебным материалом;
- технические проблемы.

Любопытно, что и со стороны преподавателей факторы, препятствующие развитию ИДО те же, но в другой интерпретации: недостаток экономических стимулов связан с неопределенностью форм оплаты труда преподавателей при работе по схеме ИДО; отсутствие навыков связано с необходимостью овладения новыми, зачастую достаточно сложными средствами ИДО; технические проблемы состоят в неразвитости сетевой инфраструктуры, как по месту работы, так и дома.

На стороне преподавателей негативное отношение усугубляется, возможно, чрезмерным усердием энтузиастов ИДО, которые стремятся свести к этой форме все образование вообще и/или ищут в интернет-технологиях некую "серебряную пулю". Последние иллюзии, впрочем, при реальном применении достаточно быстро рассеиваются и интернет-средства занимают полезное, но отнюдь не главенствующее место в общем наборе образовательных технологий. Тем не менее, они привносят много нового и интересного в практику преподавания, что приводит к постоянно расширяющейся сфере их применения. Несомненно, эти технологии пришли, чтобы остаться и в данный момент актуальной является задача выбора подходящих средств и их освоение.

2 Как это сделать

В киберпространстве существует значительное количество систем ИДО, каждая из которых обладает своими достоинствами и недостатками. С точки зрения потенциального применения их можно в первую очередь разделить на коммерческие предложения (закрытые) и некоммерческие (системы с открытым кодом).

Различие между этими системами заключается не только в стоимости, но и в принципах построения (централизованные — децентрализованые), расширяемости (есть возможность подключать свои модули или нет), адаптируемости (можно настраивать под свои потребности или нет), поддержке (можно ли консультироваться с разработчиками или для этого нужен дополнительный контракт на поддержку), взаимодействие с другими средствами (используются ли открытые форматы данных для коммуникаций или нет) и т.д.

В условиях неустоявшихся технологий ИДО, неопределенного спроса и скудного опыта применения открытые системы обладают определенными преимуществами (упомянем лишь несколько): по сути дела неограниченной свободой экспериментирования с различными продуктами, прямыми контактами с разработчиками, отсутствием ограничений на типы и количество инсталляций, ориентацией на открытые

Таблица 2: Программные системы с открытым кодом.

Система	Дом. страница проекта	Разработчик	Русский
Atutor	`http://www.atutor.ca`	Университет Торронто (Канада)	нет
dotLRN	`http://www.dotlrn.org`	Консорциум: Массачусетский технологический (США), Университет Гейдельберга (Германия), Университет Манхейма (Германия), Университет Галлилея (Италия), Университет Бергена (Норвегия)	нет
ILIAS	`http://www.ilias.uni-koeln.de`	Университет Кельна (Германия)	есть
LON-CAPA	`http://www.lon-capa.org`	Университет шт.Мичиган(США)	нет
Moodle	`http://www.moodle.com`	Частная компания (Австралия)	есть

и общепринятые форматы данных, энтузиазмом и духом взаимопомощи пользователей, возможность повлиять на направления развития системы, начиная от заказа определенных функций вплоть до непосредственного участия в реализации.

Исходя их этих соображений, было принято решения рассмотреть в первую очередь именно открытые системы ИДО. Дополнительным аргументом являлось то, что использование таких систем можно было реализовать как инициативу "снизу", не привлекая руководство учебного заведения для выделения финансов на закупку часто весьма дорогостоящих коммерческих решений.

Кроме этого существовало опасение, что будет принято административно-ориентированное решение, обеспечивающее в первую очередь удобства администраторов от образования, но игнорирующее именно интересы преподавателей. Особо велика такая опасность по отношению к математически насыщенным дисциплинам, которые выдвигают весьма специфические требования к системам разработки и поддержки курсов и где уже существует определенная традиция и большой объем подготовленного материала.

Наиболее известные программные системы ИДО с открытым кодом представлены в Табл. 2

В результате анализа ситуации было принято решение провести тестирование и опытное применение системы ILIAS, которая, во-первых, поддерживает русский язык и, во-вторых, допускает использование TEXдля подготовки курсов. Надо отметить, что и по другим обзорам и оценкам ILIAS занимала достаточно высокие места в рейтинге подобных систем.

3 ILIAS — текущее состояние

Система ILIAS базируется в основном на следующих открытых продуктах: web-сервер Apache, СУБД MySQL, скриптовый язык PHP. Для ряда специальных работ используются также открытые графические конверторы, программы сжатия, библиотеки. Все это достаточно легко получается из интернет и на современных Linux-дистрибутивах (мы используем SuSE-9.0 в настоящий момент) сборка системы происходит без особых проблем, чему помогает достаточно подробное руководство.

Языковые зависимости выделены в отдельные файлы по каждому языку, так что русификация системы прошла без особых проблем, хотя отдельные элементы интерфейса еще надо доработать.

Основная трудность при овладении ILIAS заключается в довольно сложной системе администрирования курсов. Курсы предоставляются слушателям, объединенным в ”группы”. Группы надо создавать, приписывать им определенные права, ассоциировать с курсами и пр. Все это в значительной степени ложится на автора курса, который не всегда морально к этому готов. Однако альтернатива — специальный системный администратор, занимающийся всем этим хлопотным делом, наверное, еще хуже. Такие администраторы, в силу их загруженности, либо замедляют процесс, либо вносят в него дополнительные ошибки. Так что решения, принятое разработчиками, по-видимому, разумно.

Авторам курсов система предоставляет две основные возможности: либо подготовить курс за пределами ILIAS и импортировать его в виде HTML-ресурса, либо, используя встроенный в систему редактор курсов, готовить его непосредственно в системе. При этом достаточно иметь сетевое соединение и на машине автора — какой-либо приемлемый браузер. Тип машины автора и платформа не имеют особого значения. Сам редактор является вполне типичной CMS (Content Management System) и дает достаточные возможности для сборки страниц курса с элементами более 20 типов — текстовых и мультимедийных.

Для математически ориентированных курсов особое значение имеет возможность включать в курс элементы, подготовленные с помощью TeX— как на уровне отдельных формул, так и на уровне файлов, представляющих TeX-документы. В последнем случае происходит конвертация TeX-документа в HTML-ресурс с помощью системы tex4ht, весьма мощной системы, позволяющей использовать при подготовке HTML-ресурсов всю мощь TeX-LaTeXи сопровождающих пакетов. Надо сказать, что это относительно новая функция системы и ее настройка на сервере потребовала некоторых раздумий. Хотя существующая технология и не идеальна, но она и не претендует на роль полномасштабной издательской системы — возможности современных мониторов и каналов связи все еще не слишком впечатляющие и результат вполне им соответствует. Ознакомиться с результатами такой конвертации можно на сайте авторов `http://lis.dvo.ru/ilias` по гостевому входу: имя пользователя — guest, пароль — anonim.

Подробнее система будет представлена на дополнительных занятиях в ходе конференции, здесь мы отметим лишь еще одну важную особенность работы с ILIAS: это активно развивающаяся система, сопровождаемая группой разработчиков, оперативно реагирующих на проблемы пользователей. Более того, часто можно получить полезный, а то и бесценный совет от собственно пользователей или в ходе дискуссии на форуме ILIAS.

В настоящее время идет отладка 3-го поколения системы, которое будет в основном XML-ориентировано. Очевидно, что по мере развития XML у ILIAS тоже будут появляться новые функциональные возможности, так что этой системе можно прогнозировать достаточно долгую жизнь. Что касается ее роли в создании российской среды ИДО, то можно рекомендовать по крайней мере попробовать с ней практически ознакомиться с тем, чтобы на ее фоне судить о других.

Работа поддержана ФЦП ”Интеграция” проект Ф0012 ”Создание электронного научно-образовательного ресурса Открытого университета ДВГУ-ДВО РАН”.

ПРОБЛЕМА БОРСУКА И ХРОМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА НЕКОТОРЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

А. М. Райгородский

В настоящем докладе мы обсудим современное положение дел в двух тесно связанных между собою проблемах комбинаторной геометрии — проблемах, которые, будучи едва ли не самыми яркими и значимыми в своей области, на протяжении последних десятилетий привлекали внимание многочисленных специалистов. Речь пойдет о проблемах Борсука и Нелсона – Эрдеша – Хадвигера. Дабы сделать краткое изложение максимально ясным и прозрачным, мы дадим сначала постановки упомянутых проблем в их самом наглядном - оригинальном и, так сказать, классическом - виде. В самом деле, проблема, впервые сформулированная в 1933 году известным польским математиком К. Борсуком (см. [1]), состоит в отыскании наименьшего числа $f(d)$ частей меньшего диаметра, на которые может быть разбито произвольное ограниченное множество в d-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$. В свою очередь, проблема Нелсона – Эрдеша – Хадвигера, возникшая, по-видимому, в 1950 году и имеющая весьма интригующую, почти детективную историю своего создания (см. [2]), сводится к определению минимального количества цветов $\chi(\mathbf{R}^d)$, в которые можно так раскрасить все точки в $\mathbf{R}^d$, чтобы точки, отстоящие друг от друга на расстояние 1, были непременно разноцветными. Видно, насколько просты и изящны по своей формулировке наши проблемы. Однако, как это часто бывает, они весьма и весьма нетривиальны, огромное число тонких результатов относительно этих проблем было получено в разное время, и тем не менее до сих пор многие вопросы остаются неисследованными, а перспектив, которые можно наметить здесь, оказывается даже больше, чем это было когда-либо прежде.

В действительности, обе проблемы имеют глубокую теоретико-графовую природу. Мы будем называть графом расстояний бесконечный "геометрический" граф $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, у которого множество вершин $\mathcal{V}$ совпадает с евклидовым пространством $\mathbf{R}^d$, а ребрами соединены те и только те пары вершин (пары d - мерных векторов), расстояние между которыми равно 1:

$$\mathcal{E} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1\}.$$

В свою очередь, если фиксировано множество Ω в $\mathbf{R}^d$, то отвечающим ему графом диаметров мы будем называть (вообще говоря, бесконечный) "геометрический" граф $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\Omega) = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ с множеством вершин $\mathcal{V} = \overline{\Omega}$ (черта означает замыкание) и множеством ребер

$$\mathcal{E} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \operatorname{diam} \Omega\}.$$

Понятно, что в новой терминологии $\chi(\mathbf{R}^d)$ – это хроматическое число графа расстояний (его еще вслед за П. Эрдешом называют хроматическим числом пространства),

Райгородский Андрей Михайлович,
МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет,
кафедра математической статистики и случайных процессов,
Воробьевы горы, 119992, ГСП-2, Москва, факс: (095) 939-20-90 и (095) 956-68-52,
тел.: (095) 939-16-48, 289-81-63, 932-34-09,
e-mail: araigor@avangard.ru, mraigor@yandex.ru

а $f(d)$ – это точная верхняя грань хроматических чисел графов диаметров. С одной стороны, такая терминология просто удобна для обсуждения проблем в едином ключе, а с другой стороны, она дает почву для создания теоретико-графовых методов решения исходных задач.

Разумеется, несколько смущает, на первый взгляд, тот факт, что рассматриваемые нами "геометрические" графы имеют бесконечные - более того, континуальные - множества вершин. Однако нетрудно показать, что их хроматические числа заведомо конечны, а в этом случае работает теорема Эрдеша - де Брёйна (см. [3]), утверждающая, что эти хроматические числа достигаются на конечных подграфах исходных графов.

Выпишем вкратце те направления исследования, которые здесь естественно возникают и в которых удается достичь значительных продвижений:

1. Доказательство нижних и верхних оценок для хроматических чисел геометрических графов в малых размерностях и в асимптотике по d.

2. Доказательство нижних и верхних оценок для хроматических чисел "конечных геометрических" графов, т.е. конечных подграфов графов расстояний и диаметров (в последнем случае мы имеем дело фактически с разбиением многогранников на части, что из различных соображений важно само по себе).

3. Изучение связи между конечными геометрическими графами и случайным графом (например, вопросов реализации случайных графов "почти наверное" в качестве конечных геометрических графов).

4. Обобщение результатов на случай не только евклидовых, но произвольных метрических пространств - скажем, пространств $\mathbf{R}^d$ с гёльдеровыми метриками l_q и пр. Ясно ведь, что все определения останутся в силе, коль скоро мы заменим евклидово расстояние произвольной метрикой.

5. Обобщение результатов на случай, когда речь идет о графах $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ вида: $\mathcal{V} = X$ ((X, ρ) - некоторое метрическое пространство),
$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in X \times X : \rho(x, y) \in H\},$$
где H - некоторое (возможно, бесконечное) множество.

В нашей лекции мы вначале подробно остановимся на захватывающей истории классических проблем, затем осветим различные аспекты перечисленных выше направлений исследований и, наконец, сформулируем новые задачи и гипотезы. Отметим, что наиболее полные обзоры по проблемам могут быть найдены в [2], [4], [5], [6] и [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 02-01-00912), гранта поддержки Ведущих научных школ НШ-136.2003.1, гранта Президента РФ МК-3130.2004.1 и гранта ИНТАС 03-51-5070.

ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n - dimensionale euklidische Sphäre*, Fundamenta Math., 20 (1933), 177 - 190.

[2] A. Soifer, *Mathematical coloring book*, Center for Excellence in Mathematical Education, 1997.

[3] N. G. de Bruijn and P. Erdös, *A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations*, Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wet., Ser. A, 54 (1951), N5, 371 - 373.

[4] А. М. Райгородский, *Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств*, УМН, 56 (2001), N1, 107 - 146.

[5] А. М. Райгородский, *Хроматические числа*, Московский Центр Непрерывного Математического Образования, Москва, 2003.

[6] A. M. Raigorodskii, *The Borsuk partition problem: the seventieth anniversary*, Math. Intelligencer, 26 (2004), N3.

[7] V. G. Boltyanski, H. Martini and P.S. Soltan, *Excursions into combinatorial geometry*, Universitext, Springer - Verlag, Berlin Heidelberg 1997.

ГИПОТЕЗА КАМЕРОНА–ЭРДЕША О ЧИСЛЕ МНОЖЕСТВ, СВОБОДНЫХ ОТ СУММ

А. А. Сапоженко

Подмножество A целых чисел называется *свободным от сумм*, (сокращенно, МСС) если для любых $a, b \in A$ число $a + b$ не принадлежит множеству A. Для любых действительных чисел q и p обозначим через $[q, p]$ множество натуральных чисел x таких, что $q \leq x \leq p$. Семейство всех подмножеств $A \subseteq [t, n]$, свободных от сумм, обозначим через $S(t, n)$. Пусть $s(t, n) = |S(t, n)|$, а $s(n) = |S(1, n)|$. В 1988 г. П. Камерон и П. Эрдеш [9] предположили, что $s(n) = O(2^{n/2})$. Они доказали, что $s(n/3, n) = O(2^{n/2})$ и, кроме того, что существуют константы c_0 и c_1, такие, что $s(n/3, n) \sim c_0 2^{\lceil n/2 \rceil}$ для четных n и $s(n/3, n) \sim c_1 2^{\lceil n/2 \rceil}$ для нечетных n. Статья [9] инициировала ряд работ по перечислению МСС во множестве целых чисел и в группах. Н. Алон [7], Н. Калкин [8], доказали, что $\log s(n) \leq (n/2)(1 + o(1))$ (здесь и далее $\log m = \log_2 m$). В. Лев, Т. Лучак и Т. Шон [10] и А. А. Сапоженко [3] получили асимптотику для числа МСС в абелевых группах четного порядка. К. Г. Омельянов и А. А. Сапоженко [1] доказали, что $s(n/4, n) = O(2^{n/2})$. Результат получен без использования фактов из [9]. Ими же было доказано [2], что $s(q, n) = O(2^{n/2})$ при $q \geq n^{3/4}\sqrt{\log n}$. Пусть $S^1(n)$ — семейство всех подмножеств нечетных чисел из отрезка $[1, n]$ и $s^1(n) = |S^1(n)| = 2^{\lceil n/2 \rceil}$. Целью данной статьи является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1.
$$s(n) \sim s(n/3, n) + s^1(n). \tag{1}$$

Содержательно это означает, что семействами $S^1(n)$ и $S(n/3, n)$ в основном исчерпывается семейство МСС в отрезке $[1, n]$ натурального ряда. Отсюда вытекает справедливость гипотезы Камерона-Эрдеша. Автору стало известно, что аналогичный результат получен недавно Б. Грином [11]. Из (1) и [9] следует, что $s(n) \sim (c_0+1)2^{\lceil n/2 \rceil}$ для четных n и $s(n) \sim (c_1 + 1)2^{\lceil n/2 \rceil}$ для нечетных n, где c_0, c_1 — упомянутые выше константы из статьи [9]. Доказательство основного утверждения проводится в два этапа. Пусть
$$\widetilde{S}(n) = S(n) \setminus (S(n/3, n) \cup S^1(n)). \tag{2}$$

На первом этапе (теорема 3) доказывается, что для семейства $\widetilde{S}(n)$ существует так называемая почти правильная система контейнеров. На втором доказывается, что $|\widetilde{S}(n)| = o(2^{n/2})$. Отсюда вытекает теорема 1.

Системы контейнеров. Положим $N = [1, n]$, и пусть N^0 и N^1 — соответственно подмножества четных и нечетных чисел из N. Рассмотрим два семейства $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ подмножеств множества N. Будем говорить, что семейство $\mathcal{B}$ *покрывает* семейство $\mathcal{A}$, если для всякого $A \in \mathcal{A}$ существует $B \in \mathcal{B}$ такое, что $A \subseteq B$. Множества $B \in \mathcal{B}$ будем называть *контейнерами,* а семейство $\mathcal{B}$ — *системой контейнеров для* $\mathcal{A}$. В дальнейшем везде $R_{i,p} = [i, i + p - 1]$, а $L_{i,p} = [i - p + 1, i]$. Если X — интервал в N, то множество $B \cap X$ будем называть X*-фрагментом* множества B. Будем использовать

Сапоженко Александр Антонович, МГУ им. М. В. Ломоносова,
Факультет вычислительной математики и кибернетики,
Воробьевы горы, Москва, 119992, Россия, e-mail: sapozhen@mastak.sitek.ru

обозначение $B_{i,p}$ для множества $B\cap X$, если $X = R_{i,p}$. Везде далее $\hat{q} = n^{3/4}\log n$ и $\widetilde{q} = \hat{q}\log n$. Систему $\mathcal{B}$ контейнеров для $\mathcal{A}$ будем называть *правильной*, если выполнены следующие условия:

1) для достаточно больших n и любого $B \in \mathcal{B}$

$$|B| \le n/2 + O(\hat{q}). \tag{3}$$

2) для достаточно больших n

$$|\mathcal{B}| \le 2^{o(\hat{q})}. \tag{4}$$

3) для любых $i \in [\widetilde{q}, n-\widetilde{q}]$, $p \in [\widetilde{q}, n-i]$

$$||B_{i,p}| - p/2| \le \hat{q}. \tag{5}$$

4) для любых $\sigma \in \{0,1\}$, $i \in [\widetilde{q}, n-\widetilde{q}]$ и $p \in [\widetilde{q}, n-i]$

$$||B_{i,p} \cap N^{\sigma}| - p/4| \le \hat{q}. \tag{6}$$

Систему $\mathcal{B}$ контейнеров для $\mathcal{A}$ назовем *почти правильной*, если она является правильной для некоторого подсемейства $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ такого, что $|\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'| = o(2^{n/2})$. Мы сводим задачу об оценке $s(n)$ к оценке числа независимых множеств в графе Кэли. Если $F \subseteq [1,n]$ и $V \subseteq [1,n]$, то граф $\mathcal{C}_F(V)$ с множеством вершин V, в котором пара $\{i,j\} \subseteq V, i \ne j$, является ребром тогда и только тогда, когда $|i-j| \in F$ или $i+j \in F$, назовем *графом Кэли* на множестве V относительно F. Подмножество A вершин графа G называется *независимым*, если подграф, порожденный множеством A, не содержит ребер. Ясно, что для всякого МСС $A \subseteq V$ и любого $F \subseteq A$ множество A независимо в графе $\mathcal{C}_F(V)$. Пусть $\mathcal{I}(G)$ — семейство независимых множеств графа G, а $I(G) = |\mathcal{I}(G)|$. Семейство $\mathcal{B}$ подмножеств вершин графа G назовем *покрывающим*, если для всякого $A \in \mathcal{I}(G)$ существует $B \in \mathcal{B}$ такое, что $A \subseteq B$. Пусть ∂v — множество вершин, смежных с v, а $\partial A = \left(\bigcup_{v\in A}\partial v\right) \setminus A$. Пусть $l \le k-\theta \le k+\theta \le p$. Граф с p вершинами, в котором минимальная степень вершины не меньше l, максимальная степень вершины не больше m, доля вершин, степень которых больше $k+\theta$, не превышает ε, доля вершин, степень которых меньше $k-\theta$, не превышает δ, назовем $(p,l,k,m,\delta,\varepsilon,\theta)$*-графом*.

Теорема 2. *Пусть $G = (V,E)$ является $(p,l,k,m,\delta,\varepsilon,\theta)$-графом, $k > 3$. Тогда существует покрывающее семейство $\mathcal{B}$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) *для всякого $D \in \mathcal{B}$*

$$|D| \le p\frac{k+\delta(k-l)+\varepsilon(m-k)+\theta}{2k-\sqrt{k\log k}}; \tag{7}$$

2) *для достаточно больших p*

$$|\mathcal{B}| \le 2^{p\sqrt{\frac{\log k}{k}}}; \tag{8}$$

3) *для достаточно больших p*

$$I(G) \le 2^{\frac{p}{2}\left(1+\delta\left(1-\frac{l}{k}\right)+\varepsilon\left(\frac{m}{k}-1\right)+O\left(\frac{\theta}{k}+\sqrt{\frac{\log k}{k}}\right)\right)}. \tag{9}$$

Сводя задачу оценки числа МСС в отрезке натуральных чисел к оценке числа независимых множеств в подходящих графах Кэли и используя результаты статьи [2], получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Существует почти правильная система контейнеров для* $\widetilde{S}(n)$.

Положим $\nu = \lfloor n/4 \rfloor + 1$, $X = [\nu, \lfloor n/2 \rfloor]$, $Y = [\lfloor n/2 \rfloor + 1, n]$, $Z = [1, \nu - 1]$. С этого момента вплоть мы будем считать, что зафиксирована некоторая правильная для $\widetilde{S}'(n)$ система $\mathcal{B}$ и контейнер $B \in \mathcal{B}$. Положим $\widetilde{S}_B(n) = \{A \in \widetilde{S}'(n) | \, A \subseteq B\}$, $D = B \cap X$ и $H = B \cap Y$. Если $K \subseteq N$, то $K + K = \{i + j \in N | \, \{i, j\} \subseteq K\}$. Пусть $Q = D + D$ и $\widetilde{Q} = Q \cap H$. Пусть $\Gamma = (D, E)$ граф с множеством вершин D и множеством E ребер вида $\{\{i, j\} : \, i + j \in \widetilde{Q}\}$ (петли, т.е. пары вида $\{i, i\}$ допустимы). Число $i + j$ будем рассматривать как *цвет* ребра $\{i, j\}$. Тогда ребра графа Γ правильно раскрашены в $|\widetilde{Q}|$ цветов. Для $P \subseteq E$ пусть $Ch(P)$ — множество цветов ребер из P и $\chi(P) = |Ch(P)|$. Подмножество ребер называется *паросочетанием*, если в нем никакие два ребра не смежны. Петли могут являться элементами паросочетания. Положим $\chi(\Gamma) = \max \chi(P)$, где максимум берется по множеству всех паросочетаний графа Γ.

Лемма 1. *Пусть* $\chi(\Gamma) = \mu$. *Тогда существует подмножество* $D' \subseteq D$ *такое, что*

$$|D'| \geq |D| - 2\mu \tag{10}$$

и

$$|D' + D'| \leq |Y|/2 + \hat{q} + \mu. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть P — паросочетание такое, что $\chi(P) = |P| = \mu$. Пусть W — множество вершин паросочетания P. Положим $D' = D \setminus W$. Тогда (10) выполнено. Пусть $\overline{H} = Y \setminus H$. Ясно, что $D' + D' \subseteq Ch(P) \cup \overline{H}$. Иное ведет к противоречию с максимальностью $\chi(P)$. В силу (5) имеем $|\overline{H}| \leq |Y|/2 + \hat{q}$. Отсюда вытекает (11).

Теорема 4 (Г. А. Фрейман [5]). *Если множество* K *целых чисел таково, что* $|K + K| \leq 2|K| - 1 + b$, *где* $0 \leq b \leq |K| - 3$, *то* K *содержится в арифметической прогрессии длины* $|K| + b$.

Следствие 1. *Пусть* $\widetilde{Q} = Q \cap H$ *и* $\Gamma = (D, E)$ *— определенный выше граф. Тогда*

$$\chi(\Gamma) \geq |D|/8. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть D' — множество, определенное в лемме 1, и $\chi(\Gamma) = \mu$. Предположим, что $\chi(\Gamma) < |D|/8$. Тогда

$$|D'| \geq |D| - 2\mu > 3|D|/4 \geq (3/4)(|X|/2 - \hat{q}) > |X|/3.$$

Пусть R — арифметическая прогрессия минимальной длины, содержащая D'. Тогда $R \subseteq X$. Ясно, что R не может иметь разность, большую чем 2, так как в этом случае $|R| \leq |X|/3$.

Пусть R имеет разность 2. Положим $\|R\| = \max\{r \in R\} - \min\{r \in R\} + 1$. Из (6) следует, что

$$\|R\| \geq 4|D \cap R| - 4\hat{q} \geq 4|D'| - 4\hat{q} > 3|D| - 4\hat{q}.$$

Поскольку $\|R\| \leq |X|$, $|X| \leq 2|D|+2\hat{q}$ ввиду (5), а $|D| \gg \hat{q}$, приходим к противоречию.

Пусть R имеет разность 1. Из (5) вытекает, что $|R| \geq 2|D \cap R| - 2\hat{q} \geq 2|D'| - 2\hat{q}$. По теореме 4

$$|D' + D'| \geq 3|D'| - 2\hat{q} - 1 = 9|D|/4 - 2\hat{q} - 1 \geq 9|Y|/16 - 5\hat{q}.$$

При $\mu < |D|/8$ это противоречит (11).

Доказательство теоремы 1. Сначала оценим сверху $|\widetilde{S}_B(n)|$. Контейнер B однозначно определяет граф Г. Можно считать, что граф Г однозначно определяет паросочетание P такое, что $|P| = \chi(P) = \chi(\Gamma)$, а, значит, и $T = Ch(P)$. Заметим, что по определению $T \subseteq H$. Пусть $t = |T|$. Положим $S_1 = \{A \in \widetilde{S}_B(n) \,|\, |A \cap T| \geq |t|(1-\varepsilon)/2)\}$ и $S_2 = \widetilde{S}_B(n) \setminus S_1$. Оценим $|S_1|$. Для $M \subseteq T$ пусть $W(M)$ — множество концов ребер паросочетания P, окрашенных в цвета из M. Пусть $M = A \cap T$, w_1 — число вершин из $W(M)$, инцидентных петлям, и $w_2 = |W(M)| - w_1$. Тогда число подмножеств $C \subseteq W(M)$ таких, что $C \cup M$ свободно от сумм, не превышает $3^{w_2/2}$, а число подмножеств множества $B \setminus (T \cup W(M))$ в силу (3) равно $2^{|B|-|T|-|W(M)|} = 2^{n/2-|T|-|W(M)|+O(\hat{q})}$. Заметим, что $3^{w_2/2}2^{-|W(M)|} \leq 3^{w_2/2}2^{-w_2-w_1} \leq (4/3)^{|M|}$. Поскольку $|M| \geq t(1-\varepsilon)/2$ для $A \in S_1$, то

$$|S_1| \leq \sum_{M \subseteq T} 3^{w_2/2}2^{n/2-|T|-|W(M)|+O(\hat{q})} \leq 2^{n/2-(t/2)(1-\varepsilon)\log(4/3)+O(\hat{q})}. \tag{13}$$

С другой стороны, в силу неравенства больших уклонений, число подмножеств $M \subseteq T$ таких, что $|M| < t(1-\varepsilon)/2$, не превосходит $2^t \exp\{-2\varepsilon^2 t\}$. Так как $T \subseteq B$, то число подмножеств множества $B \setminus T$ в силу (3) равно $2^{n/2-|T|+O(\hat{q})}$. Отсюда

$$|S_2| \leq 2^{n/2-t(2\varepsilon^2 \log e)+O(\hat{q})}. \tag{14}$$

Из (13) и (14), положив $\varepsilon = 0.2346$ и учтя, что $t \geq |D|/8 = n/64 + O(\hat{q})$ в силу (12), имеем

$$|\widetilde{S}_B(n)| = |S_1| + |S_2| \leq 2^{n/2-0.0158(|D|/8)+O(\hat{q})} \leq 2^{n/2-0.0024n+O(\hat{q})}.$$

Верхнюю оценку для $|\widetilde{S}'(n)|$ получим суммированием $|\widetilde{S}_B(n)|$ по B. Принимая во внимание (4), имеем

$$|\widetilde{S}'(n)| \leq \sum_{B} |\widetilde{S}_B(n)| \leq 2^{o(\hat{q})} \cdot 2^{n/2-0.0024n+O(\hat{q})} = 2^{n/2-0.0024n+o(hq)}. \tag{15}$$

Поскольку $|\widetilde{S}(n)| = |\widetilde{S}'(n)| + o(2^{n/2})$, то из (2), теоремы 3 и (15) вытекает (1).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 04-01-00359).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Омельянов К. Г., Сапоженко А. А., *О числе множеств, свободных от сумм, в отрезке натуральных чисел.*// Дискретная математика, (2002) 14, No 3, с. 3–7.

[2] Омельянов К. Г., Сапоженко А. А., *О числе и структуре множеств, свободных от сумм, в отрезке натуральных чисел.*// Дискретная математика, (2003) 15, No 4, с. 11–15.

[3] Сапоженко А. А. *О числе множеств, свободных от сумм в абелевых группах* // Вестник московского университета, Серия 1, Математика, Механика, No 4, 2002, С. 14-18. 2001, С. 56–62.

[4] Сапоженко А. А. *О числе независимых множеств в расширителях* // Дискретная математика, т. 13, вып. 1, 2001, С. 56–62.

[5] Фрейман Г. А., *Сложение конечных множеств*, Изв. Высш. Учебн. Завед., Математика, **6(13)**, (1959), 202–213.

[7] Alon N., *Independent sets in regular graphs and Sum-Free Subsets of Finite Groups.*// Israel J. of Math., 73 (1991), No 2, 247–256.

[8] Calkin N. *On the number of sum-free set*// Bull. London Math. Soc., 22 (1990), 141–144.

[9] Cameron P., Erdos P., *On the number of integers with various properties*// in R. A. Mollin (ed). Number Theory: Proc. First Conf. Can. Number Th. Ass., Banff, 1988, — de Gruyter. 1990 — P. 61–79.

[10] Lev V.F., Luczak T., Schoen T., *Sum-free sets in Abelian groups*, Israel Journ.Math. 125 (2001) 347, P.347–367.

[11] Green B., *The Cameron-Erdos conjecture*, Bull. Lond. Math. Soc. Сдано в печать.

COMPUTERS, GRAPHS AND DISCOVERY

Pierre Hansen

As already stressed by Archimedes [4] discovery and proof are different activities, which require different methods. One must first find what is to be proved, i.e., a conjecture, by any procedure, possibly aided by a physical model, then prove it or refute it by logical means. Both tasks can be aided by computers in various fields of mathematics. Fully automated proofs in graph theory are still limited to simple properties [19][20][22][16][24][25]. In contrast, partly automated proofs, which use both human reasoning and specialized computer programs, have met with much success since the proof of the 4-color theorem [1][2][3][36] (and despite the controversy on the reliability of such proofs, see e.g. [5]). To illustrate, the fifth update of a "dynamic survey" on "Small Ramsey Numbers" [35] reviews results which were obtained with the aid of the computer in 71 papers among the 274 which are cited. Recourse to the computer to complete a difficult proof is thus widespread.

In this talk, we focus on computer aids to discovery, i.e., finding conjectures and refutations, in graph theory.

Quite a few systems have been developed in the last 25 years. They are based on different principles:

a) Enumeration

All graphs with up to 12 vertices have been enumerated. Various systems use (usually smaller) such lists to suggest conjectures about particular classes of graphs or to refute conjectures, e.g. in Colton's HR system.

Programs such as McKay's Geng [33][34] perform an orderly generation of graphs satisfying various types of constraints and exploit symmetry. Specific enumeration programs are also in wide use.

b) Interactive Computing

The system GRAPH developed by Cvetković and co-workers [16][17][18][23] from 1980 onwards is the pioneering example, and led to numerous research papers. It exploits the speed of the computer together with effective graph representation.

c) Invariant manipulation

The INGRID system of Brigham and Dutton [6][7][8][9] exploits a database of graph relations to compute bounds on the values of invariants. This leads, among other features, to generate conjectures of particular forms.

d) Generation and selection

The Graffiti program of Fajtlowicz [26][27][28][29][30][31] generates large numbers of a priori conjectures then eliminates false or uninteresting ones by various heuristics, or by proving or disproving easy ones by hand and iterating. Remaining conjectures are publicized on the Written On the Wall site.

e) Heuristic Optimization

Caporossi's and Hansen's system Autographix (AGX) [10][11][12][15][13][14] determines near-optimal graphs for some invariant (or formula involving several invariants) using the Variable Neighborhood Search metaheuristic of Hansen and Mladenović [32]. Then conjectures are determined in:

Pierre Hansen, GERAD and Department of Quantitative Methods in Management, HEC Montréal, Canada, phone: (1-514) 340-6052,
fax: (1-514) 340-5665, e-mail: Pierre.Hansen@gerad.ca

e1) a numerical way exploiting the mathematics of Principal Component Analysis:
e2) a geometric way, using a gift-wrapping algorithm to find the converse hall of points representing graph in invariant space. (This approach is also followed in the recent GrapHedron system of Mélot et al.)
e3) an algebraic way, recognizing the class of extremal graphs obtained and performing algebraic manipulations to deduce conjectures from the experiences of individual invariants.

These approaches will be reviewed, illustrated by examples and compared.

REFERENCES

[1] Appel, K., and Haken, W. *Every planar map is four colorable. Part I. Discharging.* Illinois J. Math., 21 (1977), 429 – 490.

[2] Appel, K., and Haken, W. *Every planar map is four colorable. Part II. Reducibility.* Illinois J. Math., 21 (1977), 491 – 567.

[3] Appel, K., and Haken, W. *Every planar map is four colorable.* Contemp. Math., 98 (1989), 1 – 741.

[4] Archimedes. *The method of mechanical theorem proving, cited by J. Gray in "Sale of the Century ?".* The Mathematical Intelligencer, 21 (1999), 12 – 15.

[5] Barefoot, C. A., Entringer, R. C., and Mullhaupt, A. P. *Computer based proofs by induction in graph theory – A house of cards ?* Math. Comput. Modelling 17, 11 (1993), 17 – 23.

[6] Brigham, R. C., and Dutton, R. D. *Ingrid: A software tool for extremal graph theory research.* Congressum Numerantium, 39 (1983), 337 – 352.

[7] Brigham, R. C., and Dutton, R. D. *A compilation of relations between graph invariants.* Networks, 15 (1985), 73 – 107.

[8] Brigham, R. C., and Dutton, R. D. *A compilation of relations between graph invariants. Supplement 1.* Networks, 21 (1991), 421 – 455.

[9] Brigham, R. C., Dutton, R. D., and Gomez, F. *INGRID: A graph invariant manipulator.* J. Symbolic Computation, 7 (1989), 163 – 177.

[10] Caporossi, G., Cvetkovic, D., Gutman, I., and Hansen, P. *Variable Neighborhood Search for Extremal Graphs 2. Finding Graphs with Extremal Energy.* J. of Chem. Inf. and Comp. Sci., 39 (1999), 984 – 996.

[11] Caporossi, G., Dobrynin, A. A., Hansen, P., and Gutman, I. *Trees with palindromic Hosoya polynomials.* Graph Theory Notes N. Y., 37 (1999), 10 – 16.

[12] Caporossi, G., Gutman, I., and Hansen, P. *Variable Neighborhood Search for Extremal Graphs 4. Chemical Trees with Extremal Connectivity Index.* Computers and Chemistry, 23 (1999), 469 – 477.

[13] Caporossi, G., and Hansen, P. *Finding Relations in Polynomial Time.* In Proceedings of the XVIth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI) (Stockholm, 1999), vol. 2.

[14] Caporossi, G., and Hansen, P. *Variable Neighborhood for Extremal Graphs 1. The System AutoGraphiX.* Discr. Math., 212 (2000), 29 – 44.

[15] Caporossi, G., and Hansen, P. *Variable Neighborhood for Extremal Graphs 5. Three ways to automate finding conjectures.* Discr. Math., 276 (2004), 81 – 94.

[16] Cvetković, D. *Discussing graph theory with a computer, II: Theorems suggested by the computer.* Publications de l'Institut Mathématique de Beograd, 47 (1983), 29 – 33.

[17] Cvetković, D., and Kraus, L. *"Graph" an expert system for the classification and extension of the knowledge in the field of graph theory, User's manual.* Elektrotehn. Fak., Beograd, 1983.

[18] Cvetković, D., Kraus, L., and Simić, S. *Discussing graph theory with a computer, I: Implementation of graph theoretic algorithms.* Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak (1981), 100 – 104.

[19] Cvetković, D. *Discussing graph theory with a computer, IV: Knowledge organisation and examples of theorem proving.* In Proceeding of the Fourth Yugoslav Seminar on Graph Theory (Novi Sad, 1983), pp. 43 – 68.

[20] Cvetković, D. *Discussing graph theory with a computer, VI: Theorems proved with the aid of the computer.* Bulletin de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts, T. XCVII (1988), 51 – 70.

[21] Cvetković, D., and Pevac, I. *Discussing graph theory with a computer, III: Man-machine theorem proving.* Publ. Inst. Math. (Beograd) 34(49)(1983), 37 – 47.

[22] Cvetković, D., and Pevac, I. *Man-machine theorem proving in graph theory.* Artificial Intell., 35 (1988), 1 – 23.

[23] Cvetković, D., and Simić, S. *Graph theoretical results obtained by the support of the expert system "graph".* Bulletin de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts, T. CVII (1994), 19 – 41.

[24] Epstein, S. L. *On the discovery of mathematical theorems.* In Proceedings of the Tenth International Joint Conference on Articial Intelligence (Milan, Italy, 1987), pp. 194 – 197.

[25] Epstein, S. L., and Sridharan, N. S. *Knowledge representation for mathematical discovery : Three experiments in Graph Theory.* J. of Apllied Intelligence, 1 (1991), 7 – 33.

[26] Fajtlowicz, S. *Written on the Wall.* A regulary updated file accessible from http://www.math.uh.edu/~clarson/.

[27] Fajtlowicz, S. *On conjectures of Graffiti – II.* Congr. Numer., 60 (1987), 187 – 197.

[28] Fajtlowicz, S. *On conjectures of Graffiti.* Discrete Mathematics, 72 (1988), 113 – 118.

[29] Fajtlowicz, S. *On conjectures of Graffiti – III.* Congr. Numer., 66 (1988), 23 – 32.

[30] Fajtlowicz, S. *On conjectures of Graffiti – IV.* Congr. Numer., 70 (1990), 231 – 240.

[31] Fajtlowicz, S. *On conjectures of Graffiti – V.* In Seventh International Quadrennial Conference on Graph Theory (1995), vol. 1, pp. 367 – 376.

[32] Hansen, P., and Mladenović, N. *Variable Neighborhood Search : Principles and Applications.* European J. of Oper. Res., 130 (2001), 449 – 467.

[33] McKay, B. D. *Nauty user's guide (version 1.5).* Tech. Rep. TR-CS-90-02, Department of Computer Science, Australian National University, 1990.

[34] McKay, B. D. *Isomorph-free exhaustive generation.* Journal of Algorithms, 26 (1998), 306 – 324.

[35] Radziszowski, S. P. *Small Ramsey Numbers. Dynamic Survey 1.* Electr. J. of Combin. (1994). Updated 1998.

[36] Robertson, N., Sanders, D., Seymour, P., and Thomas, R. *The four-color theorem.* Journal of Combinatorial theory, Ser. B, 70 (1997), 2 – 44.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ СРЕДНЕЙ СЛОЖНОСТИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

А. В. Чашкин

Введение

В докладе рассматривается средняя сложность вычисления булевых функций неветвящимися программами с условной остановкой и ограниченной памятью и монотонными неветвящимися программами с условной остановкой. Эти программы являются частными случаями неветвящихся программ с условной остановкой, рассмотренных в [1]–[3]. Программы в [1]–[3] вычисляют булевы функции и их работу можно представить следующим образом. Вычисления выполняет процессор, снабженный памятью, состоящей из отдельных ячеек, которые будем обозначать символами x_i, y_j и z_k. Ячейки x_i содержат значения независимых переменных x_i. Ячейки y_j используются для хранения промежуточных результатов вычислений, эти ячейки будем называть внутренними переменными. Ячейки z_k используются для записи результатов работы программы, такие ячейки будем называть выходными переменными. Процессор работает под управление программы, являющейся последовательностью вычислительных команд и команд остановки. Каждая вычислительная команда имеет вид $a = f(b, c)$ и за единицу времени вычисляет значение булевой функции f, аргументы которой b и c являются переменными x_i, y_j или z_k. Вычисленное значение присваивается внутренней или выходной переменной a. Команда остановки имеет вид $\mathtt{Stop}(q)$, где аргумент q есть x_i, y_j или z_k. Если значение аргумента равно единице, то команда $\mathtt{Stop}(q)$ прекращает работу программы. Если значение аргумента равно нулю, то выполняется следующая команда программы. Число команд, выполненных программой P на наборе переменных x, назовем временем работы P на x и обозначим через $T_P(x)$. Величину

$$T(P) = 2^{-n} \sum T_P(x),$$

где суммирование производится по всем двоичным наборам длины n, назовем *средним временем работы* программы P. Если для некоторой n-местной булевой векторфункции f и любого двоичного набора x длины n справедливо равенство $f(x) = P(x)$, то будем говорить, что программа P вычисляет функцию f. Величину

$$T(f) = \min T(P),$$

где минимум берется по всем программам, вычисляющим f, назовем *средней сложностью* функции f. Программу P, вычисляющую функцию f, для которой справедливо равенство $T(P) = T(f)$, назовем *минимальной* программой. *Сложностью* $C(P)$ программы P назовем число команд этой программы. Величину

$$C(f) = \min C(P),$$

где минимум берется по всем программам, вычисляющим f, назовем *сложностью* функции f. Величина $C(f)$ характеризует время, необходимое для вычисления f в худшем случае, поэтому $C(f)$ так же будем называть сложностью в худшем случае.

Чашкин Александр Викторович, МГУ им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет, Воробьевы горы, Москва, 119992, Россия,
e-mail: chash@online.ru, chash@mech.math.msu.su

В качестве примера рассмотрим программу P, вычисляющую систему из двух функций — дизъюнкции и конъюнкции четырех переменных:

$$z_1 = x_1 \oplus x_2;\ z_2 = 0;\ \texttt{Stop}(z_1);\ z_1 = x_3 \oplus x_4;\ \texttt{Stop}(z_1);\ z_1 = x_1 \vee x_3;\ z_2 = x_1 \& x_3.$$

В этой программе дизъюнкция вычисляется переменной z_1, а конъюнкция — переменной z_2. Легко видеть, что сложность этой программы равна семи. Найдем ее среднее время работы. Первая команда остановки прекращает ее работу на восьми наборах: (0100), (0101), (0110), (0111), (1000), (1001), (1010), (1011); вторая команда остановки — на четырех наборах: (0001), (0010), (1101), (1110); наконец, на оставшихся четырех наборах (0000), (0011), (1100) и (1111) выполняются все команды программы. Поэтому для среднего времени работы имеем

$$T(P) = \frac{1}{16}\Big(3 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 5\Big) = \frac{9}{2}.$$

Отметим, что неветвящаяся программа, не содержащая команды остановки и вычисляющая функцию, отличную от независимой переменной, является обычной схемой из функциональных элементов, базис которой состоит из всех не более чем двухместных булевых функций. Поэтому средняя сложность любой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, существенно зависящей не менее чем от двух переменных, не больше ее схемной сложности, т. е.

$$T(f(x_1, \ldots, x_n)) \leq L(f(x_1, \ldots, x_n)).$$

Здесь $L(f)$ обозначает сложность вычисления функции f схемами, базис которых состоит из всех двухместных булевых функций.

1. Программы с ограниченной памятью

Будем говорить, что программа P использует память объема M, если сумма числа внутренних и числа выходных переменных этой программы равна M. Положим

$$T_M(f) = \min T(P), \qquad C_M(f) = \min C(P),$$

где минимум берется по всем программам, которые вычисляют f и объем памяти которых не превосходит M. Имеет место следующий результат.

Теорема. 1 *Пусть $n \to \infty$, $n \leq M \leq 2^n$. Тогда*: (i) *для почти каждой булевой функции f, зависящей от n переменных,*

$$T_M(f) \gtrsim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^{n-1}}{\log_2 M};$$

(ii) *для каждой булевой функции f, зависящей от n переменных,*

$$T_M(f) \lesssim \frac{2^{n-1}}{\log_2 M}.$$

Далее n-местные булевы вектор-функции с m компонентами будем называть булевыми (n, m)-вектор-функциями. Для средней сложности вычисления булевых вектор-функций программами с ограниченной памятью имеет место следующий результат.

Теорема. 2 *Положим* $\gamma = \frac{2}{m+2}$. *Пусть* $n \to \infty$, $m = n^{\mathcal{O}(1)}$, $n + m \le M \le 2^n$. *Тогда*: (i) *для почти каждой булевой* (n, m)*-вектор-функции* f

$$T_M(f) \gtrsim \frac{m}{2-\gamma} \cdot \frac{2^{n-1}}{\log_2 M};$$

(ii) *для каждой булевой* (n, m)*-вектор-функции* f

$$T_M(f) \lesssim \frac{m+2}{2} \cdot \frac{2^{n-1}}{\log_2 M}.$$

Из теоремы 2 легко извлекается следствие, устанавливающее асимптотически точную формулу для средней сложности почти всех булевых вектор-функций с растущим числом компонент при их вычислении программами с ограниченной памятью.

Следствие. 1 *Пусть* $n, m \to \infty$, $m = n^{\mathcal{O}(1)}$, $n + m \le M \le 2^n$. *Тогда*: (i) *для почти каждой булевой* (n, m)*-вектор-функции* f

$$T_M(f) \sim \frac{2^{n-2}m}{\log_2 M};$$

(ii) *для каждой булевой* (n, m)*-вектор-функции* f

$$T_M(f) \lesssim \frac{2^{n-2}m}{\log_2 M}.$$

Сложность булевых функций при их вычислении схемами с ограниченной памятью исследовалась ранее В. К. Коробковым. Им в частности было установлено, что если использовать память объема M, то при $n, M \to \infty$ сложность L_M почти каждой n-местной булевой функции асимптотически равна $\frac{2^n}{\log_2 M}$. Из этого результата и из теоремы 1 следует, что при одинаковом объеме памяти, используемом схемами и неветвящимися программами с условной остановкой, отношение схемной и средней сложности равно константе для почти всех булевых функций. С другой стороны, нетрудно показать, что существуют функции для которых такое отношение значительно больше. В следующей теореме устанавливается порядок величины максимально возможного отношения схемной сложности n-местной булевой функции к ее средней сложности при вычислениях с ограниченной памятью. Положим $\mu_M(n) = \max L_M(f)/T_M(f)$, где максимум берется по всем n-местным булевым функциям.

Теорема. 3 *Пусть* $n \to \infty$, $n \le M \le 2^n$. *Тогда*

$$\mu_M(n) \asymp \sqrt{\frac{2^n}{\log_2 M}}. \tag{1}$$

2. Монотонные программы

Рассматриваемые далее монотонные программы отличаются от произвольных программ из [1]–[3] тем, что в вычислительных командах используются только монотонные булевы функции: дизъюнкция, конъюнкция, тождественная функция и две константы 0 и 1. Нетрудно видеть, что любая булева функция может быть вычислена подходящей монотонной неветвящейся программой с условной остановкой. В качестве примера рассмотрим следующую программу:

$$z = 0;\ y = x_1 \& x_2;\ \texttt{Stop}(y);\ z = 1;\ y = x_1 \vee x_2;\ \texttt{Stop}(y);\ z = 0,$$

которая, как легко видеть, вычисляет линейную функция $x_1 \oplus x_2$. Средней монотонной сложностью и монотонной сложностью булевой функции f назовем величины

$$T_m(f) = \min T(P), \qquad C_m(f) = \min C(P),$$

где минимумы берутся по всем монотонным программам, вычисляющим f. Ниже через $L_{\{\&,\vee,\neg\}}(f)$ обозначается сложность реализации булевой функции f схемами в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$. Следующая теорема доказывается при помощи результатов о сложности слой-функций из [6].

Теорема. 4 *Для каждой булевой (n, m)-вектор-функции f*

$$C_m(f) \leq 2nL_{\{\&,\vee,\neg\}}(f) + 7n^2.$$

Из предыдущей теоремы, теоремы 1 и результатов работы [5] имеем следующее утверждение о средней монотонной сложности почти всех булевых функций.

Теорема. 5 *Пусть $n \to \infty$. Тогда: (i) для почти каждой булевой функции f, зависящей от n переменных,*

$$T_m(f) \gtrsim \frac{3}{4} \cdot \frac{2^{n-1}}{n};$$

(ii) для каждой булевой функции f, зависящей от n переменных,

$$T_m(f) \lesssim \frac{c \cdot 2^n}{n},$$

где c — некоторая постоянная.

Сравнение теорем 1 и 5 показывает, что для почти всех булевых функций их средняя монотонная и средняя сложности отличаются не более чем в постоянное число раз. В приводимой ниже теореме 6 оценивается максимально возможное значение этого отношения. Положим $\lambda(n) = \max T_m(f)/T(f)$, где максимум берется по всем n-местным булевым функциям.

Теорема. 6 *Существуют такие постоянные c_1 и c_2, что*

$$c_1\sqrt{2^n/n} \leq \lambda(n) \leq c_2\sqrt{2^n \cdot n}$$

Далее приведем два утверждения о монотонной средней сложности конкретных булевых функций.

Теорема. 7 *Пусть $f_n : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n$ — линейная булева вектор-функция, в матрице которой все элементы, кроме стоящих на главной диагонали, равны единице. Тогда при $n \to \infty$*

$$T_m(f_n) \asymp n^2, \qquad C_m(f_n) \asymp n^2.$$

Так как для линейной булевой вектор-функции f_n из теоремы 7 справедливо равенство $L(f_n) \asymp n$, то легко видеть, что неравенство в теореме 4 является точным с точностью до постоянного множителя.

Теорема. 8 *При* $n \to \infty$

$$T_m(x_1 \oplus \cdots \oplus x_n) \asymp n \log_2 n, \qquad C_m(x_1 \oplus \cdots \oplus x_n) \asymp n \log_2 n.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00985), программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1807.2003.1), программы «Университеты России» (проект УР.04.03.007) и программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики» (проект «Оптимальный синтез управляющих систем»).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чашкин А. В. *О среднем времени вычисления значений булевых функций* // Дискретный анализ и исследование операций. 1997. Вып. 1. С. 60–78.

[2] Чашкин А. В. *О среднем времени вычисления булевых операторов* // Дискретный анализ и исследование операций. 1998. Вып. 1. С. 88–103.

[3] Чашкин А. В. *Среднее время вычисления значений элементарных булевых функций* // Дискретная математика. 2000. Вып. 4. С. 109–120.

[4] Чашкин А. В. *О средней монотонной сложности линейных булевых функций* // Материалы XIV Международной школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем". Н. Новгород 2003. С. 92–97.

[5] Шоломов Л. А. *О реализации недоопределенных булевых функций схемами из функциональных элементов* // Проблемы кибернетики. Вып. 21. — М.: Наука, 1969. — С. 215–226.

[6] Wegener I. *The Complexity of Boolean Function.* Willy and B.G. Teubner, Stuttgart. 1987.

МНОГОГРАННИКИ МНОГОИНДЕКСНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ: АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД

В. Н. Шевченко

Обозначения. $\mathbf{Q}$ – поле рациональных чисел, $\mathbf{Z}$ – кольцо целых чисел; $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(n-m)!}$ – число сочетаний из m по n; $[n]$=$\{1,\ldots$,n$\}$; если $\mathbf{A} \in \mathbf{Q}$, то $\mathbf{A}_+$ – множество неотрицательных целых чисел из $\mathbf{A}$, и $\mathbf{A}^{m\times n}$ – множество матриц с элементами из множества $\mathbf{A}$ с m строками и n столбцами, в частности, $\mathbf{A}^{m\times 1}$ обозначим через $\mathbf{A}^m$ и матрицу (единственную) из $\{1\}^{m\times n}$ обозначим $\mathbf{1}^{m\times n}$; $\mathbf{0}^{m\times n} \in \{0\}^{m\times n}$; E_n – единичная матрица n-го порядка и e_j – ее j-ый столбец ($j = 1,\ldots,n$); через A' обозначим матрицу, транспонированную к матрице A. Нам потребуется еще кронекерово произведение матриц (определение и свойства см., например, в [1]): если $A = (a_{ij}) \in \mathbf{Q}^{m\times n}$ и $B \in \mathbf{Q}^{s\times t}$, то их кронекеровым произведением называется блочная матрица из $\mathbf{Q}^{ms\times nt}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \ldots & a_{1n}B \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}B & \ldots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

1. Широко известная [2-4] транспортная задача (*ТЗ*) заключается в минимизации линейной функции на многограннике, задаваемом в евклидовом пространстве $\mathbf{Q}^{n_1 n_2}$ неравенствами $x_{j_1 j_2} \geq 0$ и уравнениями

$$\sum_{j_1\in[n_1]} x_{j_1 j_2} = b_{0 j_2}\ (j_2 \in [n_2]),\ \sum_{j_2\in[n_2]} x_{j_1 j_2} = b_{j_1 0}\ (j_1 \in [n_1]).$$

Естественный переход от двух к k индексам (широкий спектр прикладных задач, получаемых таким образом, см., например, в [3]), накладывает на неотрицательные переменные $x_J = x_{j_1\ldots j_k},\ J = (j_1\ldots j_k) \in [n_1]\times\cdots\times[n_k]$ ограничения – равенства типа:

$$\sum_{j_1\in[n_1]}\cdots\sum_{j_s\in[n_s]} x_{j_1\ldots j_k} = b_{0\ldots 0 j_{s+1}\ldots j_k},\ j_\nu \in [n_\nu] \text{ при } \nu > k.$$

Если суммировать не по первым s индексам, а по индексам j_{i_μ} с номерами i_μ из множества $I = \{i_1,\ldots,i_s\}$, где $1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq k$, то получим равенство (ср. [4,5])

$$\sum_{j_{i_1}\in[n_{i_1}]}\cdots\sum_{j_{i_s}\in[n_{i_s}]} x_{j_1\ldots j_k} = b_{j_1\ldots j_{i_1}-1\,0\,j_{i_1}+1\ldots j_{i_s}-1\,0\,j_{i_s}+1\ldots j_{i_k}},\ j_\nu \in [n_\nu] \text{ при } \nu \notin I. \quad (1)$$

Матрицу системы (1) будем обозначать через $T_I(n_1,\ldots,n_k)$ или, короче, через T_I, а столбец правых частей – через b_I. Итак, для задания k-индексной *ТЗ* кроме натуральных чисел $n_1,\ldots,n_k$ надо задать конечное число $I_1,\ldots,I_t$ различных подмножеств множества $[k]$ и, полагая $I = I_\tau$, для каждого $\tau \in [t]$ записать уравнения

Шевченко Валерий Николаевич,
Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского,
пр-т Гагарина 23, Н. Новгород, 603950, Россия, тел. (8312) 65-78-81.
e-mail: shev@uic.nnov.ru, shvn4@uic.nnov.ru

(1). Вообще говоря, $s_\tau = |I_\tau| \neq |I_\sigma|$ при $\sigma \neq \tau$, если же $s_\tau = s$ ($\tau \in [t]$), то назовем задачу *s-валентной*, а в противном случае – *разновалентной*. При $t = \binom{k}{s}$ s-валентная задача называется *k-индексной s-арной ТЗ*; при $s = 1$ назовем ее *планарной*, а при $s = k - 1$ – *аксиальной*. Следует заметить впрочем, что терминологию нельзя считать установившейся: например, в [5] s-арная задача называется *симметричной*, я же предпочитаю сохранить этот термин для случая, когда $n_1 = \ldots = n_k = n$.

Используя, как и в [6], кронекерово произведение и лексикографически упорядочивая переменные и уравнения, систему (1) можно переписать в матричном виде $T_I x = b_I$, где $T_I = T(1, I) \times \cdots \times T(k, I)$, а $T(\mu, I) = \mathbf{1}^{1 \times n_\mu}$ при $\mu \in I$ и $T(\mu, I) = E_{n_\mu}$ при $\mu \notin I$. Тогда система уравнений

$$Tx = b \tag{2}$$

k-индексной *ТЗ* (можно считать это эквивалентным определением) состоит из t блоков, где блок с номером $\tau \in [t]$ имеет вид $T_{I_\tau} x = b_{I_\tau}$.

В развернутом виде матрицу Т k-индексной *ТЗ* будем обозначать через $T(k; I_1, \ldots, I_t; n_1, \ldots, n_k)$; если она симметричная – через $T(k; I_1, \ldots, I_t; n)$; если она s-арная – через $T(k, s; n_1, \ldots, n_k)$, если она еще и симметричная – через $T(k, s, n)$. В частности, обычная *ТЗ* имеет матрицу $T(2, 1; n_1, n_2)$. Кроме того, положим $T(k, 0; n_1, \ldots, n_k) = E_N$, $T(k, k; n_1, \ldots, n_k) = \mathbf{1}^N$, где $N = \prod_{i \in [k]} n_i$.

Вопросы сводимости k-индексных *ТЗ* к задачам с меньшим числом индексов рассмотрены в [5], где, в частности, показано, что можно ограничиться случаем попарно несравнимых $I_1, \ldots, I_t$. Будем считать также, что $n_1 \geq \ldots \geq n_k \geq 2$.

Множество

$$\boldsymbol{P}(T, b) = \{x \in \mathbf{Q}_+^N |\ Tx = b\} \tag{3}$$

назовем *k-индексным транспортным многогранником*, а множество

$$\boldsymbol{P}(T, b, d) = \{x \in \boldsymbol{P}(b) |\ x \leq d\}$$

– его *d-усечением*. Рассматриваются также многогранники $\boldsymbol{P}(T_\leq, b)$ и $\boldsymbol{P}(T_\leq, b, d)$, в которых система уравнений $Tx = b$ заменяется системой неравенств $Tx \leq b$.

Широкий круг вопросов (например, условия совместности, число вершин, число базисов), как правило успешно решаемый при $k = 2$ (см. [4] и имеющуюся там библиографию), легко обобщить на многоиндексный случай, но, к сожалению, не часто удается получить удовлетворительные ответы.

В первую очередь это связано с тем, что, как хорошо известно, при переходе от $k = 2$ к $k \geq 3$ (за исключением случая $T(k, 1, 2)$) матрица T перестает быть вполне унимодулярной (*вполне унимодулярной* называется целочисленная матрица, все миноры которой равны 0, либо ± 1; если же этим свойством обладают только базисные миноры, то матрицу назовем *унимодулярной*). Особенно это важно при изучении вопросов, связанных с пересечением $P(T, b)$ или $P(T, b, d)$ с целочисленной решеткой, к которым сводятся многочисленные обобщения задачи о назначениях [4] (в этом случае все координаты вектора b равны 1). Разумеется, здесь имеются и NP-полные задачи (начиная с $k = 3$). По-видимому, [7] - первая публикация такого рода. В ней фактически доказано, что задача определения, содержит ли $P(T, b)$ при $k = 3$ и $s = 1$ целочисленную точку, является NP-полной. Аналогичный результат для $P(T, b, d)$ при $k = 3$, $s = 2$, $n_1 = n_2 = n_3 = n$, $b = \mathbf{1}^{3n}$, $d_J \in \{0, 1\}$ можно найти в [8,9].

2. Хорошо известно (см., например, [4]), что при неунимодулярной матрице T существует целочисленный вектор b, при котором многогранник $P(T,b)$ имеет вершины V с дробными координатами.

Максимальный из знаменателей дробных компонент вершин многогранников $P(T,b)$ при произвольном b – обозначим эту величину через $q(T)$ – не превосходит абсолютной величины $\Delta(T)$ базисного минора матрицы T. Для некоторых $T(k,s,n)$ - в основном при $s = 1, k-1$ - эти величины исследованы в [10]. Аналогично, абсолютная величина $\Delta_j(T)$ минора j-го порядка матрицы T играет ту же роль для многогранника $P(T_{\leq}, b)$. Ключ к исследованию $\Delta_j(T)$ дает следующий результат, полученный в [6] для s-арных задач. Рассмотрим матрицу n-го порядка

$$Q_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}$$

и ее j-й столбец $q(j,n)$. Положив $Q = Q_{n_1} \times \cdots \times Q_{n_k}$, обозначим через q_J, где $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, J-й столбец матрицы Q. Очевидно, что $q_J = q(j_1, n_1) \times \cdots \times q(j_k, n_k)$.

Теорема 1. Для любой матрицы $T = T(k; I_1, \dots, I_t; n_1, \dots, n_k)$ столбцы матрицы Q составляют базис из собственных векторов матрицы $T'T$, причем собственное число λ_J, соответствующее столбцу q_J, вычисляется по формуле

$$\lambda_J = \sum_{\tau \in [t]} \prod_{\mu \in [k]} \lambda(\mu, j_\mu, I_\tau), \tag{4}$$

где $\lambda(\mu, j_\mu, I_\tau) = 1$ при $\mu \notin I_\tau$, $\lambda(\mu, j_\mu, I_\tau) = 0$ при $\mu \in I_\tau$ и $j_\mu \neq 1$, $\lambda(\mu, j_\mu, I_\tau) = n_\mu$ при $\mu \in I_\tau$ и $j_\mu = 1$.

Этот результат позволяет находить характеристический многочлен

$$det(\lambda E_N - T'T) = \lambda^{N-r} \sum_{j=0}^{r} (-1)^j s_j(T) \lambda^{r-j}, \tag{5}$$

где $s_j(T)$ – сумма квадратов миноров j-го порядка матрицы T. Таким образом, появляется возможность исследовать асимптотику поведения величины $\delta_j(T)$ – среднего значения квадрата минора j-го порядка матрицы T, что и было сделано для различных симметричных s-арных *ТЗ* [11 - 14].

В частности, имеет место

Следствие 1. Пусть $T = T(k,s,n)$ и $j \sim \alpha n^{k-s}$. Тогда

$$\delta_j(T) \to \begin{cases} \infty\,, \text{ при } e < \alpha < \binom{k}{s}, \\ 0\,, \text{ при } 0 < \alpha < e/\binom{k-1}{s} \end{cases}$$

с экспоненциальной скоростью.

Множество $R_T = \{x \in \mathbf{Q}^N | Tx = 0\}$ назовем *правым нуль-пространством матрицы* T, а множество $R_T^{\mathbf{Z}} = R_T \cap \mathbf{Z}^N$ – *правым модулем матрицы* T. Будем считать, что базис пространства R_T задан матрицей $B \in \mathbf{Z}^{N \times (N-r)}$, где r-ранг матрицы T.

Ясно, что множество целочисленных комбинаций столбцов матрицы B содержится в $R_T^{\mathbf{Z}}$, но, вообще говоря, с ним не совпадает. Последнее выполняется тогда и только тогда, когда B – унимодулярна; в этом случае назовем ее базисом модуля $R_T^{\mathbf{Z}}$.

Следствие 2. Базис пространства R_T можно составить из столбцов q_J матрицы Q, соответствующих $\lambda_J = 0$. Множество таких J определяется условием:

$$\forall \tau \in [t]\ \exists \mu \in I_\tau |\ j_\mu \neq 1. \tag{6}$$

Матрицу, получающуюся из Q_n заменой ее первого столбца на e_1, обозначим через $\overline{Q_n}$ и положим $\overline{Q} = \overline{Q_{n_1}} \times \dots \times \overline{Q_{n_k}}$. Выбросим из $\overline{Q}$ все те ее столбцы $\overline{q_j}$, для которых J не удовлетворяет условию (6), и оставшуюся после этого матрицу обозначим через R_0.

Следствие 3 [15]. Если $T = T(k, s; n_1, \dots, n_k)$, то R_0 – базис модуля R_T^Z.

По-видимому, это верно для любых k-индексных *ТЗ*.

3. Подсчитав у матрицы T число строк

$$M = \sum_{\tau \in [t]} \prod_{i \in I_\tau} n_i,$$

из (5) легко получить формулу

$$det(\lambda E_M - TT') = \lambda^{M-r} \sum_{j=0}^{r} (-1)^j s_j(T) \lambda^{r-j}. \tag{7}$$

Теорема 1 позволяет находить и собственные векторы f_J матрицы TT', соответствующие $\lambda_J \neq 0$: так как $(TT')(Tq_J) = \lambda(Tq_J)$, то $f_J = Tq_J$.

Сложнее обстоит дело с собственными векторами, соответствующими нулевым собственным значениям или, что то же самое, с построением базиса *левого нуль-пространства* L_T матрицы T, то есть множества решений системы

$$yT = 0. \tag{8}$$

Проведем его построение для k-индексной s-арной *ТЗ*. Для $\nu \notin I$ положим $L(\nu, I) = L_1(\nu, I) \times \ldots \times L_k(\nu, I)$, где $L_\nu(\nu, I) = \mathbf{1}^{1 \times n_\nu}$, $L_\mu(\nu, I) = 1$ при $\mu \in I$ и $L_\mu(\nu, I) = E_{\nu\mu}$ в остальных случаях. Нетрудно проверить, что

$$L(\nu, I) T_I = T_{\overline{I}}, \tag{9}$$

где $T_{\overline{I}}$ – блок матрицы k-индексной $(s+1)$-арной *ТЗ*, соответствующей множеству $\overline{I} = I \cup \{s\}$. Для каждого $(s+1)$-элементного подмножества $\overline{I} = \{i_0, i_1, \dots, i_s\}$ и каждого $\mu = 0, 1, \dots, s$ образуем s-элементное подмножество $I_\mu = \overline{I} \backslash \{i_\mu\}$. Из (9) для каждого $\overline{I}$ получаем s равенств

$$L(i_0, I_0) T_{I_0} - L(i_\mu, I_\mu) T_{I_\mu} = 0,\ \mu \in [s], \tag{10}$$

дающих строки из пространства L_T. Отсюда следует, что для любой совместной системы (2) необходимо выполнение так называемых условий баланса

$$L(i_0, I_0) b_{I_0} = L(i_\mu, I_\mu) b_{I\mu}. \tag{11}$$

Этот факт отмечается многими исследователями для различных s и k (см., например [16, 17]). Оказывается имеет место и обратное, что было известно [5] лишь при $k = s-1$.

Теорема 2. Для любой матрицы $T = T(k, s; n_1, \dots, n_k)$ условия (11) необходимы и достаточны для совместности системы (2) над полем $\mathbf{Q}$. Если $b \in \mathbf{Z}^{\mu}$, то то же верно и над кольцом $\mathbf{Z}$.

Следствие 1. Для построения базиса пространства L_T достаточно удалить из системы (10) равенства, являющиеся линейными комбинациями остальных.

Как и в п.2 можно определить L_T^Z – *левый модуль матрицы* T как множество целочисленных решений системы (8) и его базис.

Следствие 2. Среди базисов пространства L_T, построенных в следствии 1, имеются базисы модуля L_T^Z.

4. Полученные результаты полезны при решении вопроса о непустоте $P(T, b)$, который можно поставить в двух вариантах: а) при данных b и T найти $x \in P(T, b)$ или доказать, что $P(T, b) = \emptyset$, б) при данной матрице T найти необходимые и достаточные условия (т.е. описать множество векторов b), при которых $P(T, b) \neq \emptyset$.

Поскольку, как хорошо известно [18], имеется полиномиальный алгоритм для решения общей задачи линейного программирования, то для ответа на первый из поставленных вопросов принципиальных препятствий нет. Тем не менее разработка алгоритмов, использующих специфику многоиндексных *ТЗ*, начатая с первых работ в этой области [16,19,3], заслуживает всяческого уважения.

Ввиду теоремы 2 для s-арной *ТЗ* во втором варианте вопрос можно поставить так: найти такую матрицу K_T, чтобы условия (11) и

$$K_T b \geq 0 \tag{12}$$

давали критерий непустоты многогранника $P(T, b)$. Теория линейных неравенств [20] дает алгоритм построения K_T, для оценки трудоемкости которого немаловажна информация о минорах $(r-1)$-го порядка матрицы T. Единственный случай, когда можно обойтись без нее, $s = k-1$ – при этом (12) обращается в $b \geq 0$.

По-видимому, в остальных случаях построение матрицы K_T является весьма сложной задачей. Даже при $k = 3$ многочисленные необходимые условия [4, 21] становятся необозримыми.

Эти трудности многократно усиливаются при изучении $P^{\mathbf{Z}} = P(T, b) \cap \mathbf{Z}^N$. Приятным исключением снова является аксиальная задача, когда для непустоты множества $P^{\mathbf{Z}}$ необходимо и достаточно к уже полученным условиям добавить целочисленность вектора b. При $s = k-1$ удается решить много вопросов, связанных с многогранником $P(T, \mathbf{1}^M)$ и его вершинами.

В общем случае ясно, что, даже имея матрицу K_T, вряд ли можно надеяться на получение критерия непустоты P^Z.

В заключение приведу еще один результат общего характера, связывающий базисные миноры матрицы T с соответствующими минорами базисов ее правого и левого модулей.

Теорема 3. Пусть T – матрица k-индексной s-арной *ТЗ*, L и R – базисы ее левого и правого модулей соответственно, $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ – подматрица матрицы T со строками из множества $\mathcal{A}$ и столбцами из множества $\mathcal{B}$, $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = r$, $L_{\overline{\mathcal{A}}}$ – подматрица матрицы L со столбцами из множества $\overline{\mathcal{A}}$, дополнительного к множеству $\mathcal{A}$, $R_{\overline{\mathcal{B}}}$ –

подматрица матрицы R со строками из множества $\overline{\mathcal{B}}$, дополнительного к множеству $\mathcal{B}$. Тогда $|detT_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}| = |detL_{\overline{\mathcal{A}}}detR_{\overline{\mathcal{B}}}|$.

Следствие 1. Матрица планарной *ТЗ* унимодулярна при $n_3 = \ldots = n_k$ [16] и неунимодулярна при $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 3$.

Следствие 2 [10]. Если $T = T(3,1;n_1,n_2,n_3)$, $|\mathcal{A}_1| = |\mathcal{A}_2| = |\mathcal{B}| = r$, то $|detT_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}_1}| = |detT_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}_2}|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А., *СМБ. Матрицы и вычисления.* Наука, Москва, 1984.

2. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б., *Задачи линейного программирования транспортного типа.* Москва: Наука, 1969. – 384с.

3. Раскин Л. Г., Кириченко И. О., *Многоиндексные задачи линейного программирования.* Москва: Радио и связь, 1982. – 240 с.

4. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К., *Многогранники, графы, оптимизация.* Наука, Москва, 1981.

5. Верховский Б. С., *Многомерные задачи линейного программирования типа транспортной.* //ДАН СССР, т.151, N 3, 1963. – с. 515-518.

6. Шевченко В. Н., *Характеристические многочлены многоиндексных транспортных задач.*// Дискретная математика, т. 15, вып. 2, 2003 - с.83-88.

7. Even S., Itai A., Shamir A. *On the complexity of timetable and multicommodity flow problems.*//SIAM J. Comput. 1976, v.5, N 4, p. 691-703.

8. Чирков А. Ю., Шевченко В. Н., *О нахождении последовательных минимумов целочисленной решетки и вектора решетки, ближайшего к данному .*// Кибернетика, 1987, N 4, с. 46-49.

9. Шевченко В. Н., *Качественные вопросы целочисленного программирования.* — М.: Наука. 1995.

10. Ильичёв А. П. *Исследование многогранников многоиндексных транспортных задач: Автореферат дис. канд. физ.-мат. наук. — Горький, 1988.*

11. Шевченко В. Н., Титова Е. Б., *Средняя величина миноров многоиндексной транспортной задачи.* // Материалы XIII Международной школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем". Часть 1. —Москва: Изд-во ЦПИ при мех-мате МГУ. 2002. С.205 – 208.

12. Шевченко В. Н., Титова Е. Б., *Средняя величина миноров k-индексной s-валентной транспортной задачи.* // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования. №10. —Екатеринбург: УрО РАН, 2003. С.248.

13. Титова Е. Б., Шевченко В. Н., *Среднее значение квадрата минора любого порядка матрицы ограничений многоиндексной транспортной задачи.* // Материалы XIV Международной школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем". Часть 1. —Москва: Изд-во ЦПИ при мех-мате МГУ. 2003. С.81 – 83.

14. Титова Е. Б., Шевченко В. Н., *Среднее значение квадрата минора матрицы ограничений аксиальной транспортной задачи.* //Автоматика и телемеханика, № 2, 2004. С.113 – 117.

15. Титова Е. Б., Шевченко В. Н., *Базис правого модуля матрицы ограничений многоиндексной транспортной задачи.*// Математика и кибернетика 2003: Сб. науч. ст. юб. науч.-техн. конф. ф. ВМК ННГУ и НИИ ПМК. - Н.Новгород, 2003 - с.264-265.

16. Motzkin T. *Multi-index transport problem.*//Bull.Am.Math.Soc.,1952,58,4.

17. Верховский Б. С., *О существовании решения многоиндексной задачи линейного программирования.*// ДАН СССР, 1964, т.158, N 4. – с. 763-766.

18. Хачиян Л. Г., *Полиномиальный алгоритм в линейном программировании.*// ДАН СССР, 1979, т.244, N 5. – с. 1093-1096.

19. Haley K. B., *The solid transportation problem.*// Operations Research. 1962, v 1, n 4. – p. 448-463.

20. Черников С. Н., *Линейные неравенства.*// Москва: Наука, 1968. – с. 763-766.

21. Smith G., *A procedure for determining necessary and sufficient conditions for the existence of a solution to the multi-index problem.*// Apl. Math., 1974, v 19, N 3. – p. 177-183.