РАВНОВЕСНОЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ [1]

А. С. Антипин

1 Постановка общей задачи

Рассмотрим задачу многокритериального равновесного программирования, в которой требуется выбрать вектор весов $\lambda = \lambda^*$ и и вектор-столбец правой части функциональных ограничений $p = p^*$ так, чтобы отвечающий им оптимум $w = w^*$ удовлетворял системе вариационных неравенств

$$\langle \lambda^*, f(w^*) \rangle \in \mathrm{Min}\{\langle \lambda^*, f(w) \rangle \mid g(w) \le p^*,\ w \in \Omega\}, \tag{1}$$

$$\langle f(w^*) - \lambda^*, \lambda - \lambda^* \rangle \le 0, \quad \lambda \ge 0, \tag{2}$$

$$\langle g(w^*) - p^*, p - p^* \rangle \le 0, \quad p \ge 0. \tag{3}$$

Здесь $f(w), g(w)$- векторные функции, каждая компонента которых выпуклая скалярная функция, $f(w) \in R^m, g(w) \in R^{m_1}$, $w \in \Omega \subset R^n$, $\lambda \in R^m_+$, $p \in R^{m_1}_+$.

Задачу (1) при фиксированном векторе $p \ge 0$ можно трактовать как скаляризацию (скалярную линейную свертку) задачи многокритериальной оптимизации, где требуется определить паретовское многообразие решений векторного критерия $f(w)$ на допустимом множестве $D(p) = \{w \in R^n \mid g(w) \le p,\ w \in \Omega\}$, другими словами решить задачу [1]

$$f(w^*_y) \in \mathrm{ParetoMin}\{f(w) \mid w \in D(p)\}. \tag{4}$$

Каждая точка Паретовского многообразия $f(w^*_p)$ характеризуется, тем что пересечение неположительного конуса (ортанта) $K(f(w^*_p))$ вершина которого перенесена в точку $f(w^*_p)$, где $w^*_p \in D(p)$, т.е. $K(f(w^*_p)) = \{f \in R^m \mid f \le f(w^*)\}$ и множество векторных оценок $f(D(p))$ содержит единственную точку $f(w^*_p)$, т.е. $K(f(w^*_p)) \cap f(D(p)) = f(w^*_p)$. В этом случае $f(w^*_p)$ называется оптимальной по Парето или эффективной точкой. Будем предполагать, что решение задачи (1)-(3) всегда существует, тогда точка $w^*_{p^*}$, которая является прообразом Парето-оптимальной точки $f(w^*_{p^*})$ и принадлежит непустому допустимому множеству задачи выпуклого программирования (при любом фиксированном $p \ge 0$).

Таким образом, если вектора $\lambda \ge 0$ и $p \ge 0$ зафиксированы, то мы имеем классическую задачу выпуклого программирования, которая порождает множество оптимальных решений $w^* \in D(p)$, а также множество эффективных решений $f^*(w^*) \in R^m_+$ и множество множителей Лагранжа $p^* \in R^{m_1}_+$. Фактически мы имеем точечно-множественное отображение седлового типа, когда каждой паре $\lambda \ge 0, p \ge 0$ ставится в соответствие пара оптимальных множеств $f^*(\lambda, p), p^*(\lambda, p)$. Если существует неподвижная точка этого многозначного отображения, то она является решением задачи (1)-(3).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00242) и по Программе поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ-2240.2006.1)

2 Равновесный выбор весов в задачах многокритериальной оптимизации

Сформулированная проблема включает в себя два важных частных случая, первый из них - это равновесных выбор весов в задачах многокритериальной оптимизации, а второй - это равновесный выбор ограничений в задачах скалярной оптимизации. Рассмотрим первый случай и будем предполагать, что в (1)-(3) вектор $p \geq 0$ фиксирован и тем самым допустимое множество задачи (1) жестко задано. Сама задача в этом случае принимает форму

$$\langle \lambda^*, f(w^*) \rangle \in \mathrm{Min}\{\langle \lambda^*, f(w) \rangle \mid g(w) \leq p, \ w \in \Omega\}, \tag{5}$$

$$\langle f(w^*) - \lambda^*, \lambda - \lambda^* \rangle \leq 0, \quad \lambda \geq 0. \tag{6}$$

Допустимое множество $D = \{w \mid g(w) \leq p, \ w \in \Omega\}$ задачи (5) как уже отмечалось будем называть множеством альтернатив, а его образ $f \in f(D) = \{f = f(w), w \in D\}$ при отображении $f(w), w \in D$ - множеством векторных оценок. Расположение множества $f(D)$ в пространстве по отношению к нулевой точке сильно зависит от вектора $\hat{f}$, который назовем "абсолютным минимумом"или "идеальной точкой": $\hat{f}_i = f_i(w^*) = \min\{f_i(w) \mid w \in D\}, \ i = 1, ..., m$. Если векторы w_i^* различны, то не существует такой точки w образ которой $f(w)$ мог бы достичь "абсолютного минимума" $\hat{f}$. Интуиция нам подсказывает, что если $\hat{f} \geq 0$, то все компоненты вектора λ^* в (5) не равны нулю, т.е. $\lambda_i^* \neq 0$ и наоборот, если $\hat{f} < 0$, то все компоненты этого вектора равны нулю. При наличии смеси тех и других компонент у вектора $\hat{f}$ имеем случай, когда какие то $\lambda_i, i = 1, 2, ...m$ равны нулю, другие - нет. Чтобы исключить вырожденный случай введем условие регулярности, которое в каком то смысле аналогично условию регулярности Слейтера в выпуклом программировании.

Условие регулярности. Задачу (5),(6) назовем регулярной, если среди всех $f_i(x), i = 1, 2, ..., m$ существует по крайней мере одна функция $f_i(w)$ такая что

$$f_i(w) > 0 \ \forall w \in \Omega \tag{7}$$

По умолчанию всегда можно полагать, что индекс $i = 1$.

Задача (5) представляет собой многокритериальную задачу минимизации векторного критерия $f(w)$ на допустимом множеств D. Решение этой задачи есть обширное многообразие оптимальных по Парето (или эффективных) точек. Напомним, что если точка $f(w^*)$ является Парето-оптимальной, то линейный функционал $\langle \lambda^*, f \rangle$, где $f = f(w)$ для всех $w \in D$ является опорным в точке $f(w^*)$, так как $\langle \lambda^*, f^* \rangle \leq \langle \lambda^*, f \rangle$ для всех $f = f(w)$, $w \in D$, т.е. $\langle \lambda^*, f - f^* \rangle \geq 0$. Таким образом, задачу многокритериальной оптимизации можно интерпретировать как поиск опорного функционала с неотрицательными весами на множестве векторных оценок при этом прообраз опорной точки принадлежит допустимому множеству.

Вариационное неравенство (6) определено на положительном ортанте, следовательно оно расщепляется на два условия

$$\langle f(w^*) - \lambda^*, \lambda^* \rangle = 0, \tag{8}$$

и

$$f(w^*) - \lambda^* \leq 0. \tag{9}$$

Последнее означает, что если $\lambda^* \neq 0$, то из (8) имеем

$$\lambda^* = f(w^*). \tag{10}$$

Если в (8) какие то компоненты вектора $\lambda^* = 0$, то выполняется (9) и следовательно $f(w^*) \leq 0$. Нетрудно понять, что если все компоненты вектора $f(w)$ положительны, т.е. $f_i(w) \geq 0,\ i = 1, 2, ..., m$, то все $\lambda_i \neq 0,\ i = 1, 2, ..., m$. В общем случае, некоторые компоненты вектора λ могут быть равны нулю. Таким образом, в регулярном случае (7) вариационное неравенство (6) задачи векторной оптимизации расшифровывается как равенство векторов (10).

Задача векторной оптимизации (5) как правило описывает содержательные ситуации, связанные с выбором наилучшего по Парето решения при котором все участники (или факторы) имеют максимальную эффективность (в нашем случае минимальный расход ресурсов). Если выбрана стратегия w^*, то ей отвечает вектор максимальной эффективности $f(w^*)$ (решение по Парето). С другой стороны каждая компонента вектора λ^* характеризует вес или влияние каждого участника (фактора) в группе. В этой интерпретации можно сказать, что решение задачи векторной оптимизации (5),(6) обладает некоторым равновесным свойством при котором вес (влияние) участника согласован с его эффективностью в смысле (10). Такое условие придает паретовской точке определенную устойчивость.

При внимательном рассмотрении вариационного неравенства (6) можно видеть, что оно является необходимым (а в выпуклом случае) достаточным условием максимума квадратичной задачи

$$\lambda^* \in \text{argmax}\{\langle \lambda, f(w^*) - \frac{1}{2}\lambda \rangle \mid \lambda \geq 0\}. \tag{11}$$

Учитывая этот факт исходную задачу (5),(6) можно представить как игру двух лиц с равновесием по Нэшу

$$\langle \lambda^*, f(w^*) \rangle \in \text{Min}\{\langle \lambda^*, f(w) \rangle \mid g(w) \leq p,\ w \in \Omega\}, \tag{12}$$

$$\lambda^* = \text{argmax}\{-\frac{1}{2}|\lambda - f(w^*)|^2 \mid \lambda \geq 0\}. \tag{13}$$

Последнее позволяет еще раз подчеркнуть, что решение рассматриваемой задачи обладает свойством устойчивости присущее всем равновесиям по Нэшу.

3 Равновесный выбор ограничений в задачах скалярной оптимизации

В этом параграфе будем предполагать, что вектор весов $\lambda \geq 0$ задачи (1)-(3) фиксирован и тем самым скалярная целевая функция задачи задана жестко. В этом случае обозначим ее как $\langle \lambda, f(w) \rangle = \varphi(w)$, тогда задача (1)-(3) принимает вид

$$w^* = \text{Argmin}\{\varphi(w) \mid\ g(w) \leq p^*,\ w \in \Omega\}, \tag{14}$$

$$\langle g(w^*) - p^*, p - p^* \rangle \leq 0, \quad p \geq 0. \tag{15}$$

где $\varphi(w) : R^n \to R$, $g(w) : R^n \to R^{m_1}$ - выпуклые функции, $\Omega \subset R^n$- выпуклое замкнутое множество, $p \in R^{m_1}_+$.

Допустимое множество этой задачи $D(p) = \{w \in \Omega \mid g(w) \leq p, \ w \in \Omega\}$ зависит от параметра $p \geq 0$. При фиксированном $p \geq 0$ имеем задачу выпуклого программирования. Изменение параметра в свою очередь порождает функцию чувствительности (оптимального значения) в качестве переменной для которой выступает вектор-столбец функциональных ограничений (параметр) $p \geq 0$

$$f(p) = \min\{\varphi(w) \mid \ g(w) \leq p, \ w \in \Omega\}, \tag{16}$$

Функция чувствительности $f(p), \ p \geq 0$ достаточно известна и многократно обсуждалась в научной литературе [2]. Основные свойства этой функции следующие:

1. $f(p)$ - выпуклая в области ее существования, ее сужение на любую переменную - монотонно убывающая вещественная функция.

2. $f(p)$ - субдифференцируемая, а ее субдифференциал $\partial f(p)$ - многозначное монотонное отображение в области его определения $p \in R^{m_1}_+$. Образ этого отображение при любом p есть выпуклое, замкнутое, а регулярном случае, ограниченное множество.

3. $\partial f(p)$ множество значений оператора при каждом p совпадает с множеством множителей Лагранжа задачи (14) при любом фиксированном p правой части функциональных ограничений этой задачи.

Другими словами для задачи (14) введем Функцию Лагранжа $\mathcal{L}(v,p) = \varphi(w) + \langle p, g(w) - p^*\rangle, \ \ w \in \Omega, p \in R^{m_1}_+$ (здесь p^* трактуется как параметр). Предполагается, что при каждом значении $p^* \geq 0$ задача (14) имеет регулярный (в смысле условия Слейтера) характер и, следовательно, для каждого p^* существует непустое множество седловых точек w, p функции Лагранжа.

$$\mathcal{L}(w,p) = \varphi(w) + \langle p, g(w) - p^*\rangle \ \ \forall w \in \Omega, \ p \in R^{m_1}_+. \tag{17}$$

Двойственная компонента множества седловых точек совпадает с $-\partial f(p)$ и является монотонно убывающей в смысле неравенства

$$\langle \partial f(p + \triangle p) - \partial f(p), \triangle p\rangle \geq 0 \quad \forall p \geq 0, \triangle p \geq 0.$$

Наряду с субдифференциалом $-\partial f(p)$ рассмотрим тождественное отображение положительного ортанта в себя, т.е. $p : R^{m_1}_+ \to R^{m_1}_+$. Это отображение можно рассматривать как монотонно возрастающее. Интуитивно ясно, что два отображения со свойствами убывания для одного и возрастания для другого обязательно пересекаются в некоторой точке $p^* \geq 0$, которая является неподвижной точкой двойственного отображения $-\partial f(p) : R^{m_1}_+ \to R^{m_1}_+$. Точка $p^* \geq 0$ одновременно является решением задачи (14),(15). Эти соображения являются интуитивным обоснованием факта существования решения рассматриваемой задачи. Таким образом, содержательный смысл задачи (14), (15) заключается в вычислении неподвижной точки двойственного отображения, которая является вектором множителей Лагранжа, отвечающих заданному $p \geq 0$.

Задача выпуклого программирования обычно интерпретируется как модель производства в которой требуется выбрать вектор интенсивности работы предприятия w так чтобы обеспечить выпуск продукции с минимальными расходами ресурсов, которые оцениваются величиной $f(p)$ из (14). Ясно, что если объемы ресурсов (компоненты вектора p) неограниченно растут, то их дефицитность (производственная нехватка) падает, соответственно, внутренние оценки обусловленности по Л.В. Канторовичу (множители Лагранжа) тоже падают, потребление ресурсов в этом случае ничто не ограничивает и поэтому расходы предприятия по выпуску продукции стремятся к нулю. Эта идеальная ситуация неограниченного объема ресурсов в реальности не встречается. Ресурсы - это, как правило, продукция некоторого производства или сырье стоимость которого определяется расходами на восстановление нарушенной Природы, причем чем больше требуется ресурсов для производства, тем выше их стоимость. Таким образом, наряду с функцией дефицитности ресурсов $f(p)$, убывающей с ростом p имеется другая функция стоимости ресурсов $r(p)$, возрастающей с увеличением p. Интуитивно ясно, что существует равновесный вектор ресурсов $p^* \geq 0$, такой что $f(p^*) = r(p^*)$. Это равенство означает, что дефицитность (нехватка) ресурсов для выпуска продукции согласована с их внешней (рыночной) стоимостью. Другими словами, нехватка ресурсов согласована с их наличием для нужд производства. Здесь равновесные объемы ресурсов (вектор p^*) определяются как точка пересечения скалярных "кривых"$f(p)$ и $r(p)$.

Однако мы будем рассматривать задачу о вычислении точки пересечения не скалярных кривых $f(p)$ и $r(p)$, а их (суб)градиентов, т.е. маргинальных цен [3]. Если градиент функции $r(p)$ обозначить как $\nabla r(p)$, то задачу о вычислении неподвижной точки маргинальных цен, т.е. отображения $-\partial f(p)$ можно сформулировать как $\nabla r(p^*) \in -\partial f(p^*)$. Это включение можно рассматривать как обобщение задачи (14), (15). Наряду с функцией Лагранжа $\mathcal{L}(w, p, y(s))$ введем функцию $\mathcal{M}(w, p, p)$

$$M(w, p, p) = \varphi(w) + \langle p, g(w) - (1/2)p\rangle \quad \forall w \in \Omega, \quad p \in R^m_+. \tag{18}$$

Введенная функция является выпуклой по $w \in \Omega$ и вогнутой (точнее сильно вогнутой) по переменной $p \in R^{m_1}_+$. Такая функция, как правило, всегда имеет седловую точку. Обозначим ее как $w^* \in \Omega$ и $p^* \in R^{m_1}_+$. По определению эта точка удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{gathered}\varphi(w^*) + \langle p, g(w^*) - (1/2)p\rangle \leq \varphi(w^*) + \langle p^*, g(w^*) - (1/2)p^*\rangle \leq \\ \leq \varphi(w) + \langle p^*, g(w) - (1/2)p^*\rangle \quad \forall w \in \Omega, p \in R^{m_1}_+.\end{gathered} \tag{19}$$

Левое неравенство системы представляет собой задачу оптимизации

$$p^* \in \mathrm{Argmax}\{\langle p, g(w^*) - (1/2)p\rangle \mid p \geq 0\}. \tag{20}$$

Не трудно увидеть, что из (19) и (20) следует - пара p^*, w^* является прямым и двойственным решением задачи

$$w^* \in \mathrm{Argmin}\{\varphi(w) \mid g(w) \leq p^*, \ w \in \Omega\}. \tag{21}$$

4 Экстрапроксимальный метод решения общей многокритериальной равновесной задачи

Рассмотрев частные случаи равновесной задачи (1)-(3), вернемся к ее общей постановке. Прежде всего с учетом представлений (11) и (20) запишем задачу (1)-(3) в форме

$$\langle \lambda^*, f(w^*)\rangle \in \mathrm{Min}\{\langle \lambda^*, f(w)\rangle \mid g(w) \le p^*,\ w \in \Omega\}, \tag{22}$$

$$\lambda^* \in \mathrm{argmax}\{\lambda, f(w^*) - (1/2)\lambda\rangle \mid \lambda \ge 0\}, \tag{23}$$

$$p^* \in \mathrm{argmax}\{\langle p, g(w^*) - (1/2)p\rangle \mid p \ge 0\}. \tag{24}$$

Для решения системы экстремальных включений (22)-(24) предлагается использовать экстрапроксимальный итеративный процесс вида [4]:

первый полушаг (прогнозный)

$$\bar{w}^n = \mathrm{argmin}\{\frac{1}{2}|w - w^n|^2 + \alpha(\langle \lambda^n, f(w) - \lambda^n\rangle + \langle p^n, g(w) - p^n\rangle) \mid\ w \in \Omega\}, \tag{25}$$

второй полушаг (основной)

$$\lambda^{n+1} = \mathrm{argmin}\{\frac{1}{2}|\lambda - \lambda^n|^2 - \alpha(\lambda, f(\bar{w}^n) - (1/2)\lambda\rangle \mid \lambda \ge 0\}, \tag{26}$$

$$p^{n+1} = \mathrm{argmin}\{\frac{1}{2}|p - p^n|^2 - \alpha(\langle p, g(\bar{w}^n) - (1/2)p\rangle\rangle \mid p \ge 0\}. \tag{27}$$

$$w^{n+1} = \mathrm{argmin}\{\frac{1}{2}|w - w^n|^2 + \alpha(\langle \lambda^{n+1}, f(w) - \lambda^n\rangle + \langle p^{n+1}, g(w) - p^n\rangle) \mid\ w \in \Omega\}. \tag{28}$$

Условия сходимости этого процесса сформулированы в теореме

Т е о р е м а 1 *Если решение равновесной задачи (1)-(3) существует, функции $f(w)$,$g(w)$ выпуклы, Ω -выпуклое замкнутое множество, то последовательность w^n, λ^n, p^n экстрапроксимального метода (25)-(28) с параметром $\alpha > 0$, сходится монотонно по норме к одному из решений задачи, т.е. $w^n, \lambda^n, p^n \to w^*, \lambda^*, p^*$ при $n \to \infty$ для всех w^0, λ^0, p^0.*

В этом методе управление идет по прямым переменным, в отличие от двойственного, где пересчет идет по двойственным переменным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.А. Дубов, С.И. Травкин, В.Н. Якимец. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М.: Наука, 1986.
2. S. Zlobec. Stable Parametric Programming. Dordrecht -London.: Kluwer Academic Publishers. 2001.
3. А.С. Антипин. О равновесной модели дефицита ресурсов. Нелинейная динамика и управление. Вып.5. М.: Физматлит, 2005. С. 148–156.
4. А.С. Антипин. О сходимости и оценках скорости сходимости проксимальных методов к неподвижным точкам экстремальных отображений// Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35, № 5. С. 688–704.

Антипин Анатолий Сергеевич, Вычислительный Центр им. А.А. Дородницына Российской Академии Наук, ул. Вавилова 40, Москва, 119991, Россия. tel: (7-495) 135-42-50, fax: (7-495) 135-61-59. E-mail: antipin@ccas.ru