ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ПОГРУЖЕНИЕ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА В СИМПЛЕКСЫ

В. П. Булатов, Т. И. Белых, Э. Н. Яськова

В докладе рассматривается решение следующей задачи: найти

$$x^* = arg\min\{\varphi(x): \ x \in R\}, \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ — выпуклая функция $x \in E^n, \ R \subset E^n$ — выпуклое множество.

Идея метода состоит в следующем: множество R или часть его, содержащая решение x^* задачи (1), последовательно погружается в симплексы $\{S^k\}$ такие, что их объемы $|S^k| \to 0$ и $x^* \in S^k \quad \forall_k$. Для построения S^{k+1} находится центр тяжести или чебышевская точка x^k симплекса S^k, через которую проводится отсекающая плоскость. Усеченный симплекс погружается в симплекс меньшего объема. В зависимости от способов построения этих симплексов и выбора их центров получены различные оценки сокращения их объемов [1, 2], а именно:

1. $$\frac{(S^k)}{(S^{k-1})} \le \left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)^{n_1-1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1 \ \ - \tag{2}$$

для ортогональных симплексов S^k, где n_1 число ненулевых элементов в уравнении отсекающей плоскости. Метод наиболее эффективен, если R задано системой линейных неравенств $Ax \le b$ с разряженной или блочной матрицей A.

Если допустить, что число ненулевых компонент в отсекающей плоскости равновероятно при $1 \le n_1 \le n$, то средняя оценка (2) будет иметь вид:

$$\frac{|\bar{S}^k|}{|\bar{S}^{k-1}|} \le \frac{1}{n}\Big[\sum_{n_1-2}^{n}\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)^{n_1-1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n + \frac{1}{2}\Big] \sim 1 - \frac{\ln n}{n}.$$

2. $$\frac{|S^k|}{|S^{k-1}|} \le \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^k < 1 \ \ -$$

для произвольных симплексов S^k, где $k \ \ (1 \le k \le n)$ — число неотсеченных вершин S^k, принадлежащих усеченному симплексу. Если также допустить, что равновероятно отсечение одной, двух или n вершин, то средняя оценка будет иметь вид:

$$\frac{|\bar{S}^k|}{|\bar{S}^{k-1}|} \le \frac{1}{n}\Big[\sum_{k-2}^{n}\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^k + \frac{1}{2}\Big] \sim 1 - \frac{0.79}{n}.$$

3. Если x^k — чебышевские точки S^k и $\{S^k\}$ — последовательность правильных симплексов, то гарантированная оценка сокращения объема имеет вид:

$$\frac{|S^k|}{|S^{k-1}|} \le \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) < 1.$$

В докладе рассматривается также метод опорных симплексов, для которого гарантированная оценка сокращения объемов не зависит от размерности пространства.

Работа поддержана грантом РФФИ № 06-01-00465

ЛИТЕРАТУРА

1. Булатов В.П., Шепотько И.О. Метод ортогональных симплексов в выпуклом программировании. // Прикладная математика. Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1982.

2. Анциферов Е.Г., Булатов В.П. Алгоритм симплексных погружений в выпуклом программировании // ЖВМиМФ. – 1984. – Т. 27, № 3. – С. 348–385.

Булатов Валерьян Павлович, Яськова Эльвира Николаевна,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130 ИСЭМ СО РАН тел. 8(3952)42-84-40, e-mail: elv@isem.sei.irk.ru

Белых Татьяна Ивановна,
Байкальский государственный университет экономики и права, 664004, г. Иркутск, ул. Ленина, 14