ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ГРАДИЕНТНОГО АЛГОРИТМА МИНИМИЗАЦИИ СУПЕРМОДУЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ

С. Д. Иванова, В. П. Ильев

Пусть I — непустое множество; p — натуральное число, $p < n = |I|$; $f : 2^I \to R_+$ — невозрастающая *супермодулярная* функция, т.е. $f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \geq f(X) + f(Y)$ для любых $X, Y \subseteq I$; $f(I) = 0$. Рассмотрим следующую NP-трудную задачу:

$$\min \{f(X) : X \subseteq I,\ |X| = p\}. \tag{1}$$

Для $X \subseteq I$, $x \in X$ определим $d_x(X) = f(X \setminus \{x\}) - f(X) \geq 0$ и введем величины

$$s = \max_{\substack{x \in I, \\ d_x(\{x\})>0}} \frac{d_x(\{x\}) - d_x(I)}{d_x(\{x\})}, \quad \overline{s} = \max_{\substack{x \in I, \\ d_x(GR \cup \{x\})>0}} \frac{d_x(GR \cup \{x\}) - d_x(I)}{d_x(GR \cup \{x\})},$$

где GR — приближенное решение задачи (1), найденное следующим алгоритмом:

Алгоритм GR.

Шаг 0. Положим $A_0 \leftarrow I$. Переходим на шаг 1.

Шаг i ($i \geq 1$). Выберем $a_i \in A_{i-1}$ так, чтобы $f(A_{i-1} \setminus \{a_i\}) = \min\limits_{a \in A_{i-1}} f(A_{i-1} \setminus \{a\})$. Положим $A_i \leftarrow A_{i-1} \setminus \{a_i\}$. Если $i < n - p$, то переходим к шагу $i + 1$. В противном случае $GR \leftarrow A_{n-p}$. *Конец.*

Нетрудно показать, что $0 \leq \overline{s} \leq s \leq 1$. Для $s < 1$ положим $t = s/(1 - s)$. В работе [1] получена гарантированная оценка погрешности алгоритма **GR**:

$$\frac{f(GR)}{f(OPT)} \leq \frac{1}{t}\left[\left(\frac{q+t}{q}\right)^q - 1\right], \tag{2}$$

где OPT — оптимальное решение задачи (1), $q = n - p$.

В данном сообщении предложена следующая оценка:

$$\frac{f(GR)}{f(OPT)} \leq t + 1, \tag{3}$$

которая уже для $q = 3$ лучше оценки (2) при $t > 18$. Для $q = 6$ оценка (3) лучше (2) при $t \geq 3,88$, а для $q = 9$ — при $t \geq 2,89$.

При $\overline{s} < 1$ верна аналогичная апостериорная оценка $f(GR)/f(OPT) \leq \overline{t} + 1$, где $\overline{t} = \overline{s}/(1 - \overline{s})$, которая часто оказывается значительно более точной, чем (3).

Заметим, что полученные результаты справедливы и для задачи о p-медиане на минимум, являющейся частным случаем задачи (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. В.П. Ильев. Оценка точности алгоритма жадного спуска для задачи минимизации супермодулярной функции // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1998. Т. 5, N 4. С. 45–60.

Иванова Светлана Диадоровна, ООО "Омсктелеком", ул. 1-я Заводская, 23, Омск, 644065, Россия, тел. (3812) 53-21-68, E-mail: ivanovaSD@yandex.ru,

Ильев Виктор Петрович, Омский государственный университет, пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 56-70-88, E-mail: iljev@math.omsu.omskreg.ru