ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ И АППРОКСИМАЦИОННАЯ СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ, СВЯЗАННЫХ С ПРОБЛЕМОЙ КОМИТЕТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

М. Ю. Хачай

Введение

В работах [1,2] получены результаты по вычислительной сложности задачи MASC о минимальном аффинном разделяющем комитете для конечных множеств $A, B \subset \mathbb{Q}^n$. В частности, показано, что эта задача NP-трудна и не принадлежит классу Apx (если $P \neq NP$). В сообщении приведена оценка порога эффективной аппроксимируемости задачи MASC. Отдельно исследуется вопрос о вычислительной сложности задачи при дополнительных ограничениях, например, фиксированной размерности пространства. Показывается, что задача о комитетной отделимости остается труднорешаемой, даже будучи сформулированной на плоскости (т.е. в наиболее простом нетривиальном случае). Справедливость этого факта следует из полиномиальной сводимости к задаче о комитетной отделимости известной задачи PC о покрытии конечного множества точек на плоскости прямыми, труднорешаемость которой известна [3]. Методика сведения является модификацией методики, описанной в [4], использовавшейся в этой работе для обоснования труднорешаемости задачи о кусочно-линейной отделимости конечных множеств на плоскости.

Постановка и оценка порога аппроксимируемости задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете

Определение 1. Конечная последовательность функций $Q = (f_1, \ldots, f_q)$, $f_i(x) = \alpha_i^T x - \beta_i$ называется аффинным комитетом, разделяющим множества $A, B \subset \mathbb{R}^n$, если выполнено условие

$$|\{i \in \mathbb{N}_q \,|\, f_i(a) > 0\}| \;>\; \frac{q}{2} \quad (a \in A),$$
$$|\{i \in \mathbb{N}_q \,|\, f_i(b) < 0\}| \;>\; \frac{q}{2} \quad (b \in B).$$

Число q называется числом элементов (членов) комитета Q.

Задача о минимальном аффинном разделяющем комитете (MASC). Заданы множества $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$, $A, B \subset \mathbb{Q}^n$. Требуется указать аффинный комитет Q с наименьшим числом элементов, разделяющий множества A и B.

Теорема 1 ([2]). *Задача MASC NP-трудна.*

Задача MASC остается NP-трудной при дополнительном ограничении

$$A \cup B \subset \{z \in \{0,1,2\}^n \,:\, |z| \leq 2\}.$$

Теорема 2 ([2]). *Задача MASC не принадлежит классу Apx (при условии $P \neq NP$).*

Следующий результат является уточнением предыдущей теоремы и указывает нижний порог эффективной аппроксимируемости задачи MASC.

Теорема 3. *Если справедливо условие*

$$NP \not\subseteq TIME(2^{poly(\log n)}),$$

то для задачи MASC не существует приближенного алгоритма с точностью аппроксимации $O(\log\log\log m)$.

Задача о комитетной отделимости конечных множеств на плоскости

Остановимся далее на частном случае задачи о комитетной отделимости, в котором размерность пространства фиксирована. Известно [5], что при $n = 1$ задача о минимальном аффинном разделяющем комитете полиномиально разрешима. Ниже показывается, что при $n = 2$ (а, следовательно, при произвольном фиксированном $n > 1$) она NP-трудна.

Определение 2. Множество прямых $\mathcal{L} = \{l_1, \ldots, l_s\}$, $l_j = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, c_j^T x = d_j\}$, называется покрытием множества $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{R}^2$, если для каждой точки $p \in P$ найдется прямая $l = l(p) \in \mathcal{L}$ такая, что $p \in l$.

Всюду ниже, если это специально не будет оговорено, будем предполагать, что элементы множеств P, A и B, равно как и параметры, определяющие покрытия и разделяющие комитеты, являются рационально-значными векторами. Как обычно, перейдем к рассмотрению комбинаторных задач, сформулированных в виде задачи распознавания свойства.

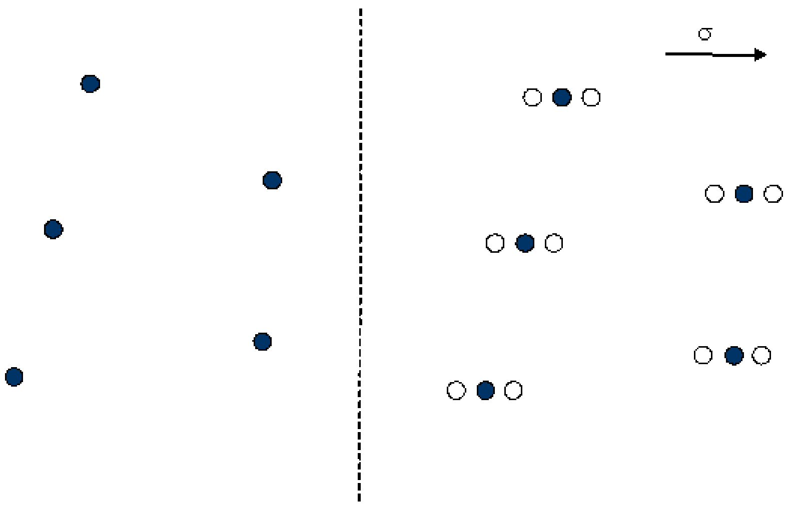

Рис. 1: пример сведения задачи PC к задаче PASC

Задача о покрытии прямыми конечного множества на плоскости (PC). Заданы множество $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{Z}^2$ и число $s \in \mathbb{N}$. Существует ли покрытие $\mathcal{L}$ множества P по мощности не превосходящее s?

Задача о комитетной отделимости конечных множеств на плоскости (PASC).

Заданы множества $A = \{a_1, \dots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \dots, b_{m_2}\}$, $A, B \subset \mathbb{Q}^2$, и число $t \in \mathbb{N}$. Существует ли аффинный комитет Q, разделяющий множества A и B и состоящий из не более чем t элементов?

Известно [3], что задача PC NP-полна. Задача PASC является частным случаем задачи ASC [2], полученным фиксацией размерности пространства. Легко убедиться в том, что задача PASC (как и ASC) принадлежит классу NP. Ниже описывается полиномиальная сводимость задачи PC к задаче PASC, влекущая принадлежность последней классу NP-полных задач.

Пусть условие частной задачи PC задается множеством $P = \{p_1, \dots, p_k\} \subset \mathbb{Z}^2$ и числом $s \in \mathbb{N}$. Вычислим $\rho = \max\{|p_i| \, : \, i \in \mathbb{N}_k\}$ и положим $\varepsilon = \frac{1}{6(2\rho+1)+1}$. Зафиксируем вектор σ, $|\sigma| = 1$ так, чтобы для любого $\{i, j\} \subset \mathbb{N}_k$ отрезки $[p_i - \varepsilon\sigma, p_i + \varepsilon\sigma]$ и $[p_j - \varepsilon\sigma, p_j + \varepsilon\sigma]$ не лежали на одной прямой. Сопоставим исходной задаче PC частную задачу PASC с условием: $A = P$, $B = (P - \varepsilon\sigma) \cup (P + \varepsilon\sigma)$ и $t = 2s + 1$ (Рис. 1).

Легко убедиться в том, что описанные выше действия могут быть произведены за время, ограниченное сверху полиномом от длины записи условия задачи PC. Для завершения обоснования полиномиальной сводимости достаточно показать, что задача PC и поставленная ей в соответствие задача PASC имеют положительный или отрицательный ответ одновременно. Другими словами, множество P обладает покрытием из не более чем s прямых тогда и только тогда, когда соответствующие ему множества A и B отделимы аффинным комитетом, число элементов которого не превосходит $2s + 1$.

Теорема 4. *Множество $P = \{p_1, \dots, p_k\} \subset \mathbb{Z}^2$ обладает покрытием из s прямых тогда и только тогда, когда множества $A = P$ и $B = (P - \varepsilon\sigma) \cup (P + \varepsilon\sigma)$ отделимы аффинным комитетом из $2s + 1$ элемента.*

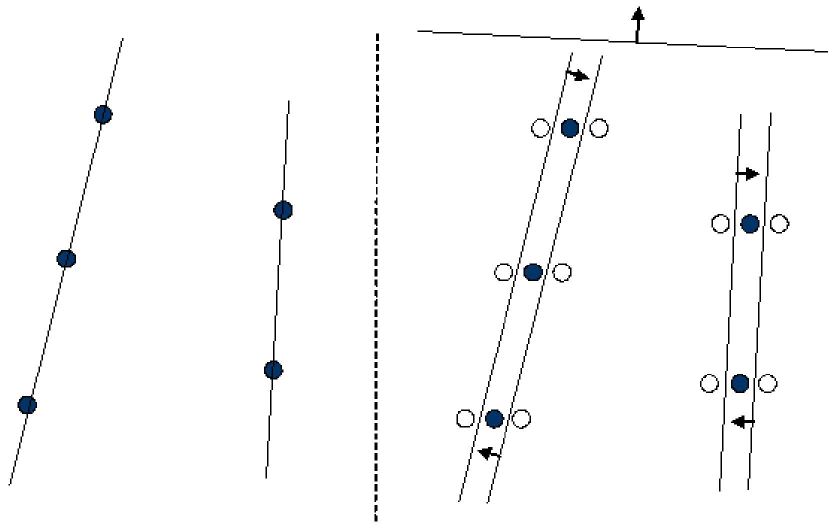

Рис. 2: пример построения разделяющего комитета по известному покрытию

Доказательство теоремы в большей степени конструктивно и представляет собой, по сути, обоснование корректности алгоритма сопоставления известному покрытию множества P аффинного комитета, разделяющего соответствующие множества A и B, иллюстрация которого приведена на Рис. 2.

Следствие 1. *Задача PASC NP-полна. Задача ASC в пространстве фиксированной размерности $n > 1$ также NP-полна.*

Следствие 2. *Задача MASC при фиксированном $n > 1$ NP-трудна.*

Работа выполнена при поддержке Президента РФ, гранты МД-6768.2006.1 и НШ-5595.2006.1 и РФФИ, № 07-07-00168.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.Ю. Хачай. О вычислительной сложности задачи о минимальном комитете и смежных задач // ДАН, 2006, 406, №6, С. 742–745.
2. М.Ю. Хачай. О вычислительной и аппроксимационной сложности задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете. // Таврический вестник информатики и математики. 2006, №1, С. 34–43.
3. N. Megiddo, A. Tamir. On the complexity of locating linear facilities in the plane // Operations research letters. 1982, vol. 1, no. 5, p. 194–197.
4. N. Megiddo. On the complexity of polyhedral separability // Discrete and Computational Geometry. 1988, 3, p. 325–337.
5. Вл.Д. Мазуров. Комитеты систем неравенств и задача распознавания // Кибернетика. 1971. №3. С. 140–146.

Хачай Михаил Юрьевич, Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620219, Россия,
тел. (343) 375-35-05, факс (343) 374-25-81, E-mail: mkhachay@imm.uran.ru