ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧАМ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

А. А. Колоколов, Н. А. Косарев

Введение

Задачи оптимального размещения предприятий имеют широкий круг приложений, возникающих при планировании и реконструкции производства, проектировании сетей обслуживания, в стандартизации и других областях [2, 4, 22, 23].Значительный интерес к таким задачам связан также с $\mathcal{NP}$-трудностью многих из них.

В настоящее время исследования задач размещения предприятий ведутся в следующих основных направлениях. Изучается структура и вычислительная сложность задач, выделяются полиномиально разрешимые случаи и семейства трудных задач, разрабатываются и анализируются методы их решения. Интенсивно развивается область, связанная с эволюционными алгоритмами, алгоритмами муравьиной колонии и другими метаэвристиками. Большое внимание уделяется исследованию простейшей задачи размещения (ПЗР), задач о p-медиане (на максимум и на минимум), двухуровневых задач размещения, задач размещения с ограничениями на объемы производства, многопродуктовым постановкам [2, 4, 6, 11–13, 16, 18, 24].

Рассматриваемые задачи естественным образом формулируются в терминах целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Во многих из них, в том числе в задачах о p-медиане и ПЗР, переменные соответствующей модели ЦЛП делятся на две группы: целочисленные и непрерывные. Ввиду этого, для решения таких задач разрабатываются и применяются алгоритмы, основанные на методе декомпозиции Бендерса [2, 10, 11, 13, 14, 20].

В данной работе приводится обзор некоторых результатов исследования указанных задач и алгоритмов. Рассмотрены вопросы получения оценок числа итераций, построения семейств "трудных" задач, разработки новых алгоритмов, устойчивости алгоритмов при малых колебаниях исходных данных.

1. Постановки задач

Приведем постановки рассматриваемых задач. Задача о p-медиане на минимум (обозначим ее $\mathcal{P}_{\min}$) формулируется следующим образом. Имеется множество пунктов возможного размещения предприятий с номерами из $I = \{1, \ldots, m\}$ и множество клиентов, которые должны быть ими обслужены, с номерами из $J = \{1, \ldots, n\}$. В каждом пункте размещается не более одного предприятия. Затраты на обслуживание i-м предприятием j-го клиента равны $c_{ij},\ i \in I,\ j \in J$. Требуется выбрать p пунктов, в которых будут размещены предприятия, и прикрепить каждого клиента к одному из открытых предприятий таким образом, чтобы минимизировать суммарные затраты.

Для построения модели ЦЛП введем переменные задачи: $z_i = 1$, если i-е предприятие входит в число выпускающих продукцию, в противном случае $z_i = 0$, $i \in I$; $x_{ij} = 1$, если j-й клиент обслуживается i-м предприятием, и $x_{ij} = 0$ в противном случае, $i \in I,\ j \in J$.

Модель ЦЛП для данной задачи имеет вид:

$$f(z,x) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} \;\to\; \min \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{i\in I} z_i = p, \tag{2}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \qquad\qquad j\in J, \tag{3}$$

$$x_{ij} \le z_i, \qquad\qquad i\in I,\; j\in J, \tag{4}$$

$$x_{ij},\; z_i \in \{0,1\}, \qquad i\in I,\; j\in J. \tag{5}$$

Вектор $z = (z_1,\ldots,z_m)$ будем называть *производственным планом* задачи (1)-(5), если он удовлетворяет ограничениям (2) и (5).

Пусть вместо коэффициентов затрат c_{ij} нам известен доход d_{ij} от обслуживания i-м предприятием j-го клиента. В этом случае рассматривается задача о p-медиане на максимум ($\mathcal{P}_{\max}$): требуется открыть p предприятий и прикрепить к ним клиентов так, чтобы суммарный доход от обслуживания всех клиентов был максимальным.

Простейшая задача размещения отличается от $\mathcal{P}_{\min}$ тем, что в ней можно открыть произвольное число предприятий, т.е. отсутствует ограничение (2), но для каждого предприятия задана стоимость его открытия $c_i^0,\; i\in I$, и целевая функция выглядит следующим образом:

$$\sum_{i\in I} c_i^0 z_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} \;\to\; \min\,.$$

Задача размещения предприятий с ограничениями на объемы производства является обобщением ПЗР. В ней предполагается, что каждое предприятие может производить продукцию только в ограниченных количествах, поэтому вместо задачи прикрепления клиентов приходится решать транспортную подзадачу [11].

Двухуровневая задача размещения состоит в следующем. Производитель некоторого продукта стремится разместить свои предприятия в ряде пунктов таким образом, чтобы минимизировать суммарные затраты, складывающиеся из затрат c_i^0 на размещение предприятия в i-м пункте, а также затрат c_{ij} на обслуживание j-го клиента предприятием, расположенным в i-м пункте, $i\in I, j\in J$. В свою очередь каждый клиент j этого производителя выбирает один из предложенных пунктов i, в котором величина d_{ij} его затрат на обслуживание минимальна.

При некоторых достаточно общих условиях двухуровневая задача размещения сводится к одноуровневой. Модель ЦЛП этой задачи получается из модели ПЗР путем присоединения некоторых дополнительных ограничений [6].Изучаются также двухэтапные задачи размещения, в которых имеются потребители и два типа предприятий, выпускающих продукцию [3]. Ведутся исследования задач размещения с учетом конкуренции [15].

Отметим, что все рассматриваемые задачи являются $\mathcal{NP}$-трудными.

2. Схема декомпозиции

Приведем схему декомпозиционного процесса для решения задачи $\mathcal{P}_{\min}$. С некоторыми изменениями данный процесс может быть использован для решения ПЗР и других указанных выше задач.

Пусть Ω – множество всех производственных планов задачи, $F^{(k)}$ – рекордное значение целевой функции на k-ой итерации, $F^{(0)} = \infty$.

Процесс $\mathcal{D}$

Положим $\Omega^{(1)} = \Omega$.

Итерация k ($k \geq 1$)

Шаг 1. Находим некоторый производственный план $z^{(k)} \in \Omega^{(k)}$. Если такой точки не существует, то процесс завершается: решение, на котором достигается рекорд $F^{(k-1)}$, является оптимальным.

Шаг 2. Формулируем задачу прикрепления клиентов $T(z^{(k)})$ для производственного плана $z^{(k)}$:

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

при условиях

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \qquad j \in J,$$

$$0 \leq x_{ij} \leq z_i^{(k)}, \qquad i \in I,\ j \in J.$$

Отметим, что для данной задачи всегда существует оптимальное целочисленное решение, которое будем обозначать через $x^{(k)}$, поэтому от условия булевости переменных x_{ij} можно отказаться. Находим $\hat{f}(z^{(k)})$ – оптимальное значение целевой функции задачи $T(z^{(k)})$. Вычисляем $F^{(k)} = \min\{\hat{f}(z^{(k)}), F^{(k-1)}\}$ – рекорд для уже просмотренных точек.

Шаг 3. Строим по некоторому правилу отсечение (линейное неравенство):

$$\gamma_1^{(k)} z_1 + \ldots + \gamma_m^{(k)} z_m \geq \gamma_0^{(k)}. \tag{6}$$

Обозначим через $\Omega^{(k+1)}$ множество производственных планов из $\Omega^{(k)}$, удовлетворяющих ограничению (6). Переходим к началу следующей итерации.

Правила построения неравенства (6) должны гарантировать, что:
a) ему не удовлетворяет точка $z^{(k)}$;
b) оно не исключает никакую точку $z' \in \Omega^{(k)}$, для которой $\hat{f}(z') < F^{(k)}$.

Свойство "a" позволяет гарантировать конечность процесса $\mathcal{D}$, а свойство "b" — оптимальность найденного им решения. В некоторых алгоритмах можно отказаться от требования "a", а конечность процесса обеспечить другими способами, например, перебором производственных планов в лексикографическом порядке.

Примером отсечений, удовлетворяющих условиям "a" и "b", могут служить неравенства вида

$$\sum_{i\in I_0^k} z_i \geq 1, \tag{7}$$

где $I_0^k = \{i \in I : z_i^{(k)} = 0\}$. По своей форме они напоминают вполне регулярные отсечения для задач булева программирования [9]. Легко заметить, что неравенство (7) исключает из $\Omega^{(k)}$ только точку $z^{(k)}$. Следовательно, число итераций процесса $\mathcal{D}$ с такими простыми отсечениями равняется C_m^p.

В качестве неравенств (6) могут быть использованы отсечения Бендерса [17], которые строятся следующим образом. Для полученной на шаге 1 точки $z^{(k)}$ формулируется задача прикрепления клиентов $T(z^{(k)})$. Двойственной к ней является задача

$$
\begin{array}{c}
\sum\limits_{j\in J} u_j - \sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} w_{ij} z_i^{(k)} \to \max \\
\text{при условиях} \\
u_j - w_{ij} \le c_{ij},\ w_{ij} \ge 0, \qquad i \in I,\ j \in J.
\end{array} \tag{8}
$$

Решая ее, находим оптимальные значения двойственных переменных (двойственных оценок) $u_j^{(k)}, w_{ij}^{(k)},\ i \in I,\ j \in J$. Отсечение Бендерса, построенное по точке $z^{(k)}$ и указанным значениям оценок, имеет вид:

$$
\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} w_{ij}^{(k)} z_i > \sum_{j\in J} u_j^{(k)} - F^{(k)}. \tag{9}
$$

В общем случае решение задачи (8) не является единственным, поэтому по точке $z^{(k)}$ могут быть построены разные отсечения Бендерса. От значений двойственных оценок существенно зависит *глубина* порождаемого отсечения, т.е. количество целочисленных точек, исключаемых им из множества $\Omega^{(k)}$. В [14] изучается поведение декомпозиционных алгоритмов для задачи о p-медиане в зависимости от используемых правил вычисления двойственных переменных. Предлагаются эвристические способы выбора наилучших отсечений в зависимости от структуры задачи.

3. Разработка и исследование декомпозиционных алгоритмов

Рассмотрим семейство задач $\mathcal{P}_{\min}$ с квадратной матрицей коэффициентов целевой функции, у которой элементы, стоящие на главной диагонали, равны 1, а все остальные равны M $(M \ge 2)$. Обозначим такую матрицу через $\bar{C}$.

Нами показано, что глубина отсечений Бендерса (9) для таких задач при использовании некоторых естественных правил вычисления двойственных оценок равна 1. Это означает, что для решения построенной задачи процессом $\mathcal{D}$ с такими отсечениями потребуется полный перебор производственных планов. В данном случае неравенства Бендерса совпадают с (7).

Установлено также, что при использовании других способов вычисления двойственных оценок отсечение, построенное по любой точке $z \in \Omega$, исключает все производственные планы [10].

На основе предложенного семейства получен широкий класс задач о p-медиане, являющихся сложными для процесса $\mathcal{D}$ с отсечениями Бендерса. Рассмотрим задачу $\bar{\mathcal{P}}_{\min}$ с $(m \times m)$-матрицей целевой функции, у которой элементы главной диагонали равны 0, а остальные коэффициенты находятся в интервале $(\alpha, \dfrac{m-p+1}{m-p}\alpha)$ для некоторого $\alpha > 0$. Доказано, что для решения задачи $\bar{\mathcal{P}}_{\min}$ потребуется C_m^p итераций процесса $\mathcal{D}$ при использовании некоторых способов вычисления двойственных оценок. Проведен анализ вычислительной сложности задачи $\bar{\mathcal{P}}_{\min}$ и установлено, что она является $\mathcal{NP}$-трудной. Аналогичные результаты имеют место и для задачи $\mathcal{P}_{\max}$ [10, 24].

Рассмотрим простейшую задачу размещения, у которой затраты на обслуживание клиентов заданы введенной выше матрицей $\bar{C}$, а стоимости открытия предприятий

$c_i^0 = 1,\ i \in I$. Если отсечение Бендерса строится по плану $\hat{z}^{(k)}$, на котором достигается рекордное значение целевой функции, то его глубина равна 1 [10].

Важное место в дискретной оптимизации занимают вопросы устойчивости задач и алгоритмов ЦП [8, 21, 25]. В частности, в [7, 21] доказана устойчивость алгоритма перебора L-классов и ряда алгоритмов отсечения при малых колебаниях релаксационного множества задачи. Установлено, что алгоритм ветвей и границ (схема Лэнд и Дойг) не обладает свойством устойчивости. В работе [25] показано, что процесс $\mathcal{D}$ не является устойчивым (возможен экспоненциальный рост числа итераций при сколь угодно малых колебаниях коэффициентов целевой функции), и предложена модификация алгоритма, для которой построенная последовательность производственных планов $z^{(1)}, \ldots, z^{(K)}$ остается прежней.

В [11, 13, 14] описываются алгоритмы, разработанные с использованием декомпозиции Бендерса для ПЗР, задач о p-медиане и двухуровневой задачи размещения. В этих алгоритмах для нахождения очередного производственного плана применяются перебор L-классов и булевых векторов, различные эвристики, метод релаксации Лагранжа. Проведены экспериментальные исследования на тестовых задачах из электронных библиотек OR-Library [19], TSPLIB [26], ИМ СО РАН [5], а также на задачах со случайными исходными данными. Полученные результаты указывают на перспективность разработки алгоритмов на основе рассматриваемого декомпозиционного подхода.

Литература

1. Агеев А.А. *Точные и приближенные алгоритмы для задач размещения: обзор последних достижений* //Труды междунар. конференции "Сибирская конференция по исследованию операций", Новосибирск, 1998. – С. 4–10.
2. Бахтин А.Е., Колоколов А.А., Коробкова З.В. *Дискретные задачи производственно-транспортного типа.* Новосибирск: Наука, 1978. 160 с.
3. Береснев В.Л. *Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных.* Новосибирск: Изд-во Института математики, 2005. 408 с.
4. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. *Экстремальные задачи стандартизации.* Новосибирск, 1978. 333 с.
5. Гончаров Е.Н., Иваненко Д.А., Кочетов Ю.А., Кочетова Н.А. *Электронная библиотека "Дискретные задачи размещения"* //Труды XII Байкальской междунар. конференции, Иркутск, 2001. – Т. 1. – С. 132–137. http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/
6. Горбачевская Л.Е., Дементьев В.Т., Шамардин Ю.В. *Двухуровневая экстремальная задача выбора номенклатуры изделий.* Препринт. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1997. 26 с.
7. Девятерикова М.В., Колоколов А.А. *Анализ устойчивости некоторых алгоритмов дискретной оптимизации* //Автоматика и телемеханика. – 2004. № 3. – С. 48–54.
8. Емеличев В.А, Кузьмин К.Г., Леонович А.М. *Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации* //Автоматика и телемеханика. – 2004. – №2. – С. 79–92.
9. Колоколов А.А. *Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании* //Сибирский журнал исследования операций. – 1994. – № 2. – С. 18–39.
10. Колоколов А.А., Косарев Н.А., Рубанова Н.А. *Исследование отсечений Бендерса*

в декомпозиционных алгоритмах решения некоторых задач размещения //Омский научный вестник. – 2005. – № 2(31). – С. 76–80.
11. Колоколов А.А., Леванова Т.В. *Задачи оптимального размещения предприятий и метод декомпозиции Бендерса*: Учебно-метод. пособие. Омск: ОмГУ, 2004. 40 с.
12. Колоколов А.А., Леванова Т.В., Лореш М.А. *Алгоритмы муравьиной колонии для задач оптимального размещения предприятий* //Омский научный вестник.– 2006. – № 4(38). – С. 62-67.
13. Колоколов А.А., Рубанова Н.А. *Об одном декомпозиционном алгоритме решения двухуровневой задачи размещения* //Труды XII международной Байкальской конференции "Методы оптимизации и их приложения". – Иркутск, Байкал, 2001.– Т. 1.– С. 207-210.
14. Косарев Н.А. *Разработка и экспериментальные исследования декомпозиционных алгоритмов для задачи о p-медиане.* Препринт. Омск: ОмГУ, 2006. 23 с.
15. Кочетов Ю.А., Кочетова Н.А., Плясунов А.В. *Модели размещения, учитывающие конкуренцию* //Труды III Всероссийской коференции "Проблемы оптимизации и экономические приложения". – Омск, 2006. – С. 105.
16. Леванова Т.В., Лореш М.А. *Алгоритмы муравьиной колонии и имитации отжига для задачи о p-медиане* //Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 3.– С. 80–88.
17. Схрейвер А. *Теория линейного и целочисленного программирования: в 2-х т.* М.: Мир, 1991. 702 с.
18. Avella P., Sassano A., Vasil'ev I. *Computational study of large scale p-median problems* //Mathematical Programming. – 2006. – Vol. 109. – № 1. – P. 89–114.
19. Beasley J.E. *A note on solving large p-median problems* //European Journal of Operational Research. – 1985. – № 21. – P. 270–273.
20. Benders J. F. *Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems* //Numerische Mathematik. – 1962. – Vol. 4. – №.3.– P. 238–252.
21. Devyaterikova M.V., Kolokolov A.A. *On the stability of some integer programming algorithms* //Operations Research Letters. – 2006. – № 34(2). – P. 149–154.
22. *Discrete Location Theory* (Ed. by Pitu B. Mirchandani and Richard L. Franscis), by John Wiley and Sons, Inc., 1990. 576 p.
23. *Facility Location. Applications and Theory* (Ed. by Zvi Drezner and Horst W. Hamacher), Springer, 1990. 457 p.
24. Kolokolov A.A., Kosarev N.A. *Analysis of decomposition algorithms with Benders cuts for p-median problem* //Journal of Mathematical Modelling and Algorithms. – 2006. – № 5. – P. 189–199.
25. Kosarev N.A., Kolokolov A.A. *On stability of some benders decomposition algorithms for p-median problem* //Proceedings of European Chapter on Combinatorial Optimization XVIII. – Minsk, 2005. – P. 26.
26. Reinelt G. *TSPLIB: A traveling salesman problem library* //ORSA Journal on Computing. – № 1991. – № 3. – P. 376–384.
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/.

Колоколов Александр Александрович, Косарев Николай Александрович,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru, nkosarev@mail.ru