

# АЛГОРИТМЫ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК С ПРИБЛИЖЕННЫМ РЕШЕНИЕМ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

С. М. Пержабинский, А. Ю. Филатов

Одним из направлений методов решения пары взаимно-двойственных задач линейного программирования

$$c^T x \rightarrow \min_{x \in X}, \quad X = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0\}, \quad (1)$$

$$b^T u \rightarrow \max_{u \in U}, \quad U = \{u \in R^m : g(u) \equiv c - A^T u \geq 0\}, \quad (2)$$

где  $c \in R^n, b \in R^m, A$  – матрица размерности  $m \times n, \text{rank } A = m$ , являются алгоритмы внутренних точек. Ключевая их идея состоит в исключении из задачи ограничений-неравенств путем введения в целевую функцию квадратичного или логарифмического штрафа за приближение к границам допустимой области.

Итеративный переход осуществляется по правилу  $x^{k+1} = x^k + \lambda^k \Delta x^k$ , где направление корректировки  $\Delta x^k$  находится как решение вспомогательной задачи

$$c^T \Delta x + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\Delta x_j^2}{d_j^k} \rightarrow \min_{\Delta x \in R^n}, \quad A \Delta x = b - Ax^k. \quad (3)$$

Решение задачи (3) осуществляется по формулам

$$u^k = (AD_k A^T)^{-1}(AD_k c + r^k), \quad \Delta x_j^k = -d_j^k g_j(u^k). \quad (4)$$

Таким образом, наиболее сложным в вычислительном отношении на каждой итерации алгоритма внутренних точек является обращение симметричной положительно определенной матрицы  $AD_k A^T$ , где  $D_k$  – меняющаяся по итерациям диагональная матрица весовых коэффициентов. Традиционно оно осуществляется точными методами, в частности, методом квадратного корня, для чего требуется порядка  $m^3$  вычислительных операций. Альтернативный подход связан с использованием итеративных методов, одним из которых является метод сопряженных направлений. Специфика алгоритмов внутренних точек позволяет решать задачу (4) приближенно. Действительно, на первых итерациях достаточно искать направление корректировки  $\Delta x^k$ , используя вектор  $\tilde{u}^k$ , для которого  $AD_k A^T \tilde{u}^k \neq AD_k c + r^k$ , а в финальной стадии вычислительного процесса, где важна высокая точность, диагональная матрица весовых коэффициентов  $D_k$  изменяется по итерациям крайне незначительно. Таким образом, в методе сопряженных направлений имеется хорошее стартовое приближение  $u^{k-1}$ , полученное как решение задачи (4) на предыдущей итерации алгоритма внутренних точек.

Проведен численный эксперимент, результаты которого приводятся в докладе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 05-01-00587а.

---

Пержабинский Сергей Михайлович, Филатов Александр Юрьевич,  
Институт систем энергетики им. Мелентьева СО РАН, Россия, 664033, Иркутск,  
ул. Лермонтова, 130, тел. (8-395-2) 42-97-64, 8-914-88-21-888, факс (8-395-2) 42-67-96.  
E-mail: sergey\_per85@mail.ru, fial@irlan.ru