

ТРУДНО РЕШАЕМЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ГИПЕРСЕТЕЙ

В. К. Попков

Разнообразие задач и их сложность в теории гиперсетей объясняется, собственно говоря, одним обстоятельством — большими изобразительными возможностями этой теории для описания систем сетевой структуры. Даже такая простая по формулировке задача (Поиск простой s, t -цепи в гиперсети), является NP-полной. В докладе рассматриваются задачи представляющие не только академический интерес, но и имеющие большое практическое значение.

1. Основные определения

В первом разделе доклада рассматриваются основные понятия и определения теории гиперсетей. Приведены важные подклассы базовой структуры, названной «абстрактной гиперсетью» [1].

1.1. Абстрактные гиперсети

Абстрактную гиперсеть можно определить шестеркой $AS = (X, V, R; P, F, W)$, состоящей из следующих объектов:

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — множество вершин;

$V = (v_1, v_2, \dots, v_g)$ — множество ветвей;

$R = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ — множество ребер;

$P : V \rightarrow 2^X$ — отображение, сопоставляющее каждому элементу $v \in V$ множество $P(v) \subseteq X$ его вершин. Тем самым отображение определяет гиперграф $PS = (X, V; P)$;

$F : R \rightarrow 2_{PS}^V$ отображение, сопоставляющее каждому элементу $r \in R$ множество $F(r) \subseteq V$ его ветвей. Отображение F определяет гиперграф $FS = (V, R; F)$. Если семейство подмножеств ветвей 2_{PS}^V содержит только такие подмножества, ветви которых составляют связную часть гиперграфа PS , то такую абстрактную гиперсеть назовем непрерывной. В дальнейшем будем рассматривать именно такие гиперсети, опуская этот термин.

$\forall r \in R \quad W : r \rightarrow 2^{P(F(r))}$ отображение, сопоставляющее каждому элементу $r \in R$ подмножество $W(r) \subseteq P(F(r))$ его вершин, где $P(F(r))$ — множество вершин в PS , инцидентных ветвям $F(r) \subseteq V$. Таким образом, отображение W определяет гиперграф $WS = (X, R; W)$.

Гиперграф PS назовем первичной сетью гиперсети AS , а гиперграф WS — вторичной сетью гиперсети AS .

Если это не будет вызывать недоразумений, то гиперсеть будем обозначать $AS = (X, V, R)$, то есть, указывая явно только множество элементов гиперсети. Определим также обратные отображения:

$$P^{-1}(x) = \{v: x \in P(v)\}; \quad F^{-1}(v) = \{r: v \in F(r)\}; \quad W^{-1}(x) = \{r: x \in W(r)\};$$

Рассмотрим одно важное обобщение абстрактных гиперсетей, а затем перейдем к описанию некоторых основных понятий и терминов.

Пусть заданы гиперграфы $PS = (X, V; P) \equiv WS_0 = (X, R_0, W_0)$, $WS_1 = (Y_1, R_1; W_1)$, ..., $WS_k = (Y_k, R_k; W_k)$, тогда последовательность отображений

$$\{\Phi_i\} : WS_k \xrightarrow{\Phi_k} WS_{k-1} \xrightarrow{\Phi_{k-1}} \dots WS_1 \xrightarrow{\Phi_1} PS$$

определяет иерархическую абстрактную k -гиперсеть $AS = (PS, WS_1, \dots, WS_k; \Phi_1, \dots, \Phi_k)$, если $Y_k \subseteq Y_{k-1} \subseteq \dots Y_1 \subseteq X$ и $\forall i \in \overline{(1, k)} \forall r^i \in R_i \exists \{r^{i-1}\} \subseteq R_{i-1}, W_i(r^i) \subseteq W_{i-1}(\{r^{i-1}\}) \& \{r^{i-1}\}$ образует связную часть в гиперграфе W_{i-1} . Таким образом, имеем последовательность вкладываемых друг в друга гиперграфов WS_i . Иногда k -гиперсеть будет обозначаться $(X, V, R_1, \dots, R_k; F_1, F_2, \dots, F_k)$ или $(X, V, R_1, \dots, R_k)$.

Нетрудно заметить, что отображения P, F, W являются отношениями инциденции в соответствующих гиперграфах PS, FS, WS и, следовательно, они определяют инцидентность элементов в абстрактной гиперсети AS .

Важными понятиями являются отношения слабой инциденции элементов абстрактной гиперсети. А именно, два элемента из различных множеств слабо инцидентны, если найдется элемент из третьего множества, инцидентный им обоим. Например, вершина $x \in X$ слабо инцидентна ребру $r \in R$, если и только если существует элемент $v \in V$, такой что $x \in P(v)$ и $v \in F(r)$, то есть $x \in P(F(r))$. Ясно, что слабо инцидентные элементы могут быть также инцидентными. Обратно неверно.

Таким образом, для элементов абстрактных гиперсетей можно определить шесть понятий их смежности. Действительно, по аналогии с графами и гиперграфами два элемента из одного множества смежны тогда и только тогда, когда найдется элемент из другого множества, инцидентный им обоим. Но так как в абстрактных гиперсетях для элемента из любого множества могут быть найдены инцидентные элементы из двух различных множеств, то соответственно имеем два понятия смежности. Например, вершины x_1 и x_2 из X V -смежны, если $\exists v \in V x_1 \in P(v)$ и $x_2 \in P(v)$, и эти вершины r -смежны, если $\exists r \in R x_1 \in W(r)$ и $x_2 \in W(r)$. Аналогичным образом определяется смежность других элементов AS .

Степень элементов AS также определяется двойкой, то есть вычисляется на соответствующих гиперграфах PS, FS и WS .

1.2. Гиперсети

Абстрактная гиперсеть $S = (X, V, R; P, F, W)$ называется гиперсетью, если

$$\forall v \in V |P(v)| = 2,$$

$$\forall r \in R |W(r)| = 2,$$

$$\forall r \in R \text{ множество } F(r) \subseteq V \text{ составляет маршрут в графе } PS = (X, V).$$

Таким образом, первичная PS и вторичная сети WS гиперсети S являются графами, а F отображает ребра $WS = (X, R)$ в маршруты графа $PS = (X, V)$.

Так как множество $F(r)$ является маршрутом, то отображение F единственным образом определяет отображение W . Действительно, концевые вершины маршрута $F(r)$ являются одновременно концами ребра r , то есть гиперсеть S можно задать пятеркой $(X, V, R; P, F)$.

Две гиперсети $S = (X, V, R)$ и $S' = (X', V', R')$ называются изоморфными, если между их вершинами, ребрами и ветвями можно установить взаимное однозначное соответствие $X \leftrightarrow X', V \leftrightarrow V', R \leftrightarrow R'$ сохраняющее отображение P и F , и эквивалентными, если сохраняются отображения P и W . Две гиперсети S и S' равносильны, если можно установить взаимно-однозначное соответствие $X \leftrightarrow X', R \leftrightarrow R'$, сохраняющее отображение W . Отношение равносильности несколько сильнее, чем отношение изоморфизма для вторичных сетей, так как множества вершин в первичных сетях PS и PS' могут быть различными. Две гиперсети равнозначные, если можно установить взаимно-однозначное соответствие $X \leftrightarrow X', V \leftrightarrow V'$, сохраняющее отображение P .

2. Задачи теории гиперсетей

2.1. Задача поиска кратчайшего циклического маршрута в гиперсетях.

Наибольший интерес, с точки зрения синтеза кольцевых сетей связи на этапе абонентского доступа, представляет следующая задача:

Пусть задана первичная сеть $PS = (X, V)$ гиперсети AS . Заданы места расположения станций (узлов) вторичной сети необходимые объединить в кольца (в частном случае такое кольцо вторичной сети может быть уже заданным), заданы веса (стоимости) $S(V_i)$ и длины $L(V_i)$ ветвей первичной сети PS , удельная стоимость любого ребра.

Требуется найти циклическую структуру вторичной сети $WS = (X, R)$ и её реализацию в $PS = (X, V)$ такую, чтобы

$$\sum_{v_i \in F^{-1}\{r_j\}} S(v_i) + \sum_{r_i \in R \equiv \{\mu(x, y)\}} l(r_i) c \rightarrow \min, \quad (1)$$

где $\{\mu(x, y)\}$ — множество маршрутов в первичной сети соединяющих пары x, y в WS . Каждому маршруту μ_i сопоставляется ребро r_i вторичной сети, и длина $l(r_i)$ будет равна сумме длин ветвей входящих в данный маршрут. Очевидно, что даже при заданной структуре WS , найти значение (1) — не простая задача.

Также очевидно, что данная задача NP-полная и поэтому далее предлагается приближенный алгоритм решения.

2.2 Построение минимальных остовных частей гиперсетей с заданной связностью.

Пусть задана K -связная гиперсеть $S = (X, V, R)$, $s(r_i)$ и $s(v_i)$ — вес рёбер и ветвей соответственно, таких что $\sum_{r_i: v_i \in F(r_i)} s(r_i)$. Требуется найти минимальную (по весу) остовную часть гиперсети с требуемой связностью P , $P < K$.

$$\sum_{i=1}^n c_i s(r_i) + \sum_{i: v_i \in \bigcup_{k=1}^n F(r_k)} d_i s(v_i) \rightarrow \min_{c_i, d_i \in \{0,1\}}.$$

Данная задача является обобщением для целого ряда задач поиска подсетей с заданными характеристиками и при различных исходных данных. В частности, здесь лежат задачи поиска различных деревьев в гиперсетях, кратчайшее остовное дерево, дерево Штейнера и др.

2.3. Упаковки и покрытия в гиперсетях.

Класс задач, рассмотренных здесь, достаточно хорошо изложен в литературе [3–5]. Однако в нашем случае имеются некоторые особенности связанные с тем, что в качестве объектов рассматриваются гиперсети.

О минимальном покрытиях в гиперсетях.

Постановка задачи минимального покрытия вершин ребрами гиперсети.

Пусть задана взвешенная гиперсеть $AS = (X, V, R; P, F, W)$, в которой $X = (x_1, \dots, x_n)$, $V = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, $R = (r_1, \dots, r_n)$, $V(r_i)$ — вес ребра r_i .

Требуется найти подмножество ребер $R' \subset R$ такое, чтобы:

$$\forall x \in X, I(x) \subset R', \sum_{r_i \in R'} v(r_i) \rightarrow \min, \bigcup_{r \in R'} I(r) = x.$$

Здесь под $I(x)$ понимается множество всех ребер инцидентных (или слабо инцидентных) вершине x , а $I(r)$ — множество вершин инцидентных (или слабо инцидентных) ребру r . Отсюда следует, что задача покрытия вершин ребрами в точности совпадает с аналогичной задачей для графов. Задача поиска слабого покрытия вершин ребрами, как и в других случаях, имеет две модификации. Одна формулируется для полностью определенной гиперсети, а вторая для взаимно-однозначных гиперсетей.

Очевидно, что простых гиперсетей можно сформулировать не менее 18 задач о покрытиях. Действительно, каждый элемент гиперсети может быть покрыт элементом из двух других типов. Покрытие может быть простым или слабым. Причем исходная гиперсеть может быть полностью определена (задачи анализа) или определена только первичной и вторичной сетями, т.е. для класса взаимно-однозначных гиперсетей.

О максимальных упаковках в гиперсерсетях

Рассмотрим на примере вершин всевозможные задачи упаковок в гиперсерсетях.

Подмножество вершин X называют V -упаковкой (R -упаковкой), если произвольные различные вершины из X не V -смежны (R -смежны). Максимальное число вершин в упаковке гиперсети определяется в задаче о максимальной упаковке. Как и в предыдущем случае, таких задач также может быть не менее 18-ти. Все задачи из этого раздела NP-полные.

2.4. Медианы в гиперсерсетях.

Пусть задана гиперсеть $AS = (X, V, R; P, F, W)$, где $Z(x_i)$ — вес вершины $x_i \in X$, $l(v_j)$ — длина ветви $v_j \in V$, $c(v_j)$ — цена ветви v_j . $l(r_k) = \sum_{V_j \subset F'(r_k)} l(v_j)$ — длина ребра r_k .

Передаточной функцией вершины x_i гиперсети AS назовем:

$$\Pi\{(x_i), \mu(x_i, x_j)\} = \sum_{x_j \in X} \rho(x_i, x_j) Z(x_j) + \sum_{v_j \in F^{-1}(\{r_i\})} c(v_j),$$

где $\{z_i\}$ — множество ребер гиперсети, по которым прошли цепи m_i от x_i до всех вершин x_j , $\rho(x_i, x_j) = \sum l(z_k)$, $z_k \in \mu(x_i, x_j)$, где $\mu(x_i, x_j)$ — цепь из вершин x_i в вершины x_j .

Передачным числом $\Pi(x_0)$ для вершины x_0 назовем наименьшее значение функции $\Pi\{(x_i) | (x_i, x_j)\}$ если реализация цепей $\mu(x_0, x_j)$ такова, что

$$\Pi((x_i), \mu(x_i, x_j)) \rightarrow \min \quad (2)$$

Следовательно, от трассировки маршрутов в гиперсети AS из корня x_0 зависит его передачное число. Очевидно, что

$$\Pi_{WS}(x_i) + |T_{ocm}^{PS}| \leq \Pi(x_i) \leq \Pi_{WS}(x_i) + |T_{x_i}^{PS}|,$$

где $\Pi_{WS}(x_i)$ — передачное число в графе $WS = (X, R)$, T_{ocm}^{PS} — минимальное остовное дерево в графе $PS = (X, V)$, а $|T_{ocm}^{PS}|$ — вес этого дерева. $|T_{x_i}^{PS}|$ — дерево (часть графа) в PS полученного после реализации минимального растущего дерева $|T_{x_i}^{WS}|$ в графе PS . Если WS и PS совпадают, то $|T_{x_i}^{WS}| = |T_{x_i}^{PS}|$.

Из данных оценок легко следует идея алгоритма решения следующей задачи.

Пусть задана взвешенная гиперсеть $AS = (X, V, R, P, F, W)$, требуется найти вершину x_0 гиперсети AS такую, чтобы $\Pi(x_0)$ -min. Очевидно, что если WS не связан, то данная задача не имеет решения.

Вершину x_0 гиперсети AS , для которой выполняется (2) назовем медианой гиперсети AS .

2.5. Задачи синтеза оптимальных структур гиперсетей.

Пусть, как и прежде, известны графы первичной сети $PS = (X, V)$, вторичной сети $WS = (Y, R)$. Обозначим

$\rho(v_{ij})$ или $\rho_{PS}(v_{ij})$ — длина ветви $v_{ij} \in V$;

$\rho(r_{ij})$ или $\rho_{WS}(r_{ij})$ — длина ребра $r_{ij} \in R$;

$\partial(v_{ij})$ — пропускная способность (емкость) ветви $v_{ij} \in V$;

$\partial(r_{ij})$ — емкость ребра $r_{ij} \in R$;

$\omega(S)$ — вершинную связность гиперсети S .

Требуется построить гиперсеть $S = (PS, WS; \Phi)$, для которой выполняются условия

$$\begin{aligned} \omega(S) &\geq k \\ \forall v \in V \quad \sum_{r \in \Phi} \partial(r) &\leq \partial(v) \end{aligned}$$

и которая минимизирует некоторый функционал $\varphi(S)$ — стоимость гиперсети S . Относительно вида функционала $\varphi(S)$ не формулируется никаких ограничений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попков В.К. Гиперсети и структурные модели сложных систем. СМ-6. Новосибирск, 1981. С. 26–48.
2. Попков В.К. Математические модели связности. Новосибирск. ИВМ и МГ СО РАН. 2006.
3. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.
4. Фрэнк Г., Фриш И. Сети, связи и потоки. М.: Связь, 1978.
5. Зыков А.А. Основы теории графов. М.: Наука, 1987.