ОБ f-ВЕКТОРАХ ПИРАМИДАЛЬНЫХ ТРИАНГУЛЯЦИЙ ТОЧЕЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

В. Н. Шевченко, Д. В. Груздев

Конечное множество точек $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathrm{R}^d$ называется *d-мерной точечной конфигурацией*, если его выпуклая оболочка $[A]$ есть d-мерный выпуклый многогранник (называемый также *политопом*). Для d-мерного политопа M через $\Gamma_i(M)$ обозначим множество его i-мерных граней, $i = -1, \dots, d$. При этом $\Gamma_{-1}(M) = \{\emptyset\}$ и $\Gamma_d(M) = \{M\}$. Для грани F политопа M через $\mathrm{relint}(F)$ обозначим множество внутренних точек грани F в ее аффинной оболочке.

Множество d-мерных симплексов $T = \{S_1, \dots, S_t\}$ назовем *триангуляцией* d-мерной точечной конфигурации A, если $[A] = \cup_{k=1}^t S_k$, $\Gamma_0(S_i) \subseteq A$ при $i = 1, \dots, t$ и $S_i \cap S_j = [\Gamma_0(S_i) \cap \Gamma_0(S_j)]$ при $i, j = 1, \dots, t$. Положим $\Gamma_i(T) = \cup_{j=1}^t \Gamma_i(S_j)$, $f_i^T = |\Gamma_i(T)|$, $i = -1, \dots, d$, и заметим, что $\Gamma_{-1}(T) = \{\emptyset\}$ и $f_{-1}^T = 1$. Вектор $f^T = (f_0^T, \dots, f_d^T)$ и полином $f^T(\lambda) = \sum_{i=-1}^d f_i^T \lambda^{i+1}$ назовем *f-вектором* и *f-полиномом* триангуляции T соответственно. Множество всех триангуляций d-мерных точечных конфигураций обозначим через $\mathcal{T}_d$. Известно, что для $T \in \mathcal{T}_d$ существуют, единственны и являются неотрицательными целые числа $\gamma_0^T, \dots, \gamma_{d+1}^T$ такие, что $f^T(\lambda) = \sum_{i=0}^{d+1} \gamma_i^T \lambda^i (1+\lambda)^{d+1-i}$, причем $\gamma_0^T = 1$ и $\gamma_{d+1}^T = 0$.

Триангуляцию $T = \{S_1, \dots, S_t\}$ d-мерной точечной конфигурации A назовем *пирамидальной*, если существует $a \in \Gamma_0(S_i)$ при $i = 1, \dots, d$; если $a \in \mathrm{relint}(F)$ — такая грань F политопа $[A]$ существует и единственна — и $F \in \Gamma_k([A])$, то триангуляцию T назовем *k-пирамидальной*. Заметим, что пирамидальными являются триангуляции, составляющие один из видов регулярных триангуляций (pulling triangulations), рассматриваемых в [1].

Теорема 1. Если триангуляция $T \in \mathcal{T}_d$ является k-пирамидальной, то $\gamma_d^T = 0$ при $k \in \{0, \dots, d-1\}$, $\gamma_d^T = 1$ при $k = d$, и $\sum_{i=0}^d \gamma_i^T \le \left(\sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} (\gamma_i^T - \gamma_{d+1-i}^T)(d+1-2i)\right) - (k+1)(d-k)$.

Существует предположение, что условия теоремы 1 достаточны.

Рассмотрим в R^d при $d \ge 3$ точки $a^d = (0, 0, \dots, 0, 0)$, $b^d = (1, 1, \dots, 1, 1)$, $e_1^d = (1, 0, \dots, 0, 0)$, $e_2^d = (0, 1, \dots, 0, 0)$, …, $e_d^d = (0, 0, \dots, 0, 1)$, $v^d = (2(d-1), -1, \dots, -1, 1)$ и пусть $A(d) = \{a^d, b^d, e_1^d, e_2^d, \dots, e_d^d, v^d\} \subset \mathrm{R}^d$. Положим $E_i = \{e_1, \dots, e_d\} \backslash \{e_i\}$, $i = 1, \dots, d$. Рассмотрим $T(d) = \{[a^d, b^d, E_i] \ : i = 1, \dots, d\} \bigcup \{[b^d, E_i, v^d] \ : i = 2, \dots, d\} \bigcup \{[a^d, E_i, v^d] \ : i = 2, \dots, d-1\}$.

Теорема 2. При $d \ge 3$ выполняются следующие утверждения:

1. $T(d)$ является триангуляцией d-мерной точечной конфигурации $A(d)$, причем $[A(d)]$ есть симплициальный политоп с множеством вершин $A(d)$.
2. $(\gamma_0^{T(d)}, \gamma_1^{T(d)}, \gamma_2^{T(d)}, \dots, \gamma_{d-1}^{T(d)}, \gamma_d^{T(d)}, \gamma_{d+1}^{T(d)}) = (1, 2, 3, \dots, 3, 0, 0)$ и вектор $f^{T(d)}$ не реализуется как f-вектор пирамидальной триангуляции точечной конфигурации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 05-01-00552-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lee C.W. Regular triangulations of convex polytopes // DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. 1991. V.4. P.443-456.

Шевченко Валерий Николаевич, Груздев Дмитрий Валентинович, Нижегородский государственный университет, пр. Гагарина, 23, Н.Новгород, 603950, Россия, тел. (8312) 65-78-81, E-mail: gruzdevdv@mail.ru, Nikolai.Zolotykh@gmail.com