МЕТОД БАРЬЕРНЫХ ФУНКЦИЙ И АЛГОРИТМЫ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. Д. Скарин

Рассматривается задача

$$\min\{f_0(x) : x \in X\}, \tag{1}$$

где $X = \{x : f(x) \le 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — определенные на $\mathbb{R}^n$ выпуклые дифференцируемые функции ($i = 0, 1, \ldots, m$). При этом предполагается, что ограничения задачи (1) могут быть противоречивыми, т.е. возможен случай $X = \emptyset$. Тогда (1) будет несобственной задачей выпуклого программирования [1].

Для (1) строится аппроксимирующая задача

$$\min\{f_0(x) : x \in X_{\bar\sigma}\}, \tag{2}$$

где $X_\sigma = \{x : f_i(x) \le \sigma, \ i = 1, \ldots, m\}$, $\bar\sigma = \min\{\sigma : \sigma \ge 0, \ X_\sigma \ne \emptyset\}$. Если множество X_σ непусто и ограничено для некоторого $\sigma > 0$, то $\bar\sigma = \|f^+(\bar x)\|_\infty$, где $\bar x = \arg\min\limits_x \|f^+(x)\|^2_\infty$. Если $X \ne \emptyset$, то $\bar\sigma = 0$ и задачи (1) и (2) совпадают.

Целью исследования являются вопросы применения обратной барьерной функции для построения итерационных процедур нахождения решения задачи (2). Предлагаются две алгоритмические схемы оптимальной коррекции задачи (1), обосновывается их сходимость. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Опишем один из предлагаемых алгоритмов. Пусть задана произвольная точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\{\varepsilon_k\}$ и $\{\delta_k\}$ — последовательности положительных чисел такие, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$. Положим

$$\sigma_0 = \|f^+(x_0)\|_\infty, \qquad Y_0 = \{x : f_i(x) \le \sigma_0 + \varepsilon_0, \ i = \overline{1,m}\}.$$

Пусть известны точка $x_k \in \mathbb{R}^n$, параметры $\sigma_k > 0$, $\delta_k > 0$, $\varepsilon_k > 0$ и множество $Y_k^0 = \{x : f_i(x) < \sigma_k + \varepsilon_k, \ i = \overline{1,m}\}$. Построим функцию

$$B_k^0(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_0}{\sigma_k + \varepsilon_k - f_i(x)} \quad (\mu_0 = \mathrm{const}, \ \mu_0 > 0).$$

Выберем точку $x_{k+1} \in Y_k^0$ из условия $B_k^0(x_{k+1}) - B_k^0(\bar x_{k+1}) < \delta_k$, где $\bar x_{k+1} = \arg\min\{B_k^0(x) : x \in Y_k^0\}$. Положим $\sigma_{k+1} = \|f^+(x_{k+1})\|_\infty$.

Пусть задача (2) разрешима в единственной точке x^* и $f_0(x) > -\infty$ ($\forall\, x \in \mathbb{R}^n$). Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_k = \bar\sigma$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_k = x^*$.

Работа поддержана грантами РФФИ (проект № 07-01-00399) и программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-5595.2006.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983.

Скарин Владимир Дмитриевич,
Институт математики и механики УрО РАН, ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620219, Россия, тел. (343)375-34-23, факс (343)374-25-81. E-mail: skavd@imm.uran.ru