НЕВЫПУКЛЫЕ СТРУКТУРЫ И ИЕРАРХИЯ УПРАВЛЕНИЯ

А. С. Стрекаловский

Как известно [1], иерархичность управления вызвана невозможностью своевременной обработки большого объема поступающей одновременно информации. Децентрализация же управления в свою очередь приводит к неопределённости, обусловленной самостоятельными действиями подсистем. Анализ подобного рода неопределённости приводит к невыпуклым структурам. Так, например, известно [2], что поиск оптимистического решения в линейной двухуровневой задаче

$$\left.\begin{array}{c} \langle c, x\rangle + \langle d, y\rangle \uparrow \max\limits_{(x,y)}, \\ x \geqslant 0, \ \ Ax + By \leqslant b, \\ y \in Y_*(x) \triangleq \mathrm{Sol}(2), \end{array}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{c} \langle c^1, x\rangle + \langle d^1, y\rangle \uparrow \max\limits_{y}, \\ y \geqslant 0, \ \ A_1x + B_1y \leqslant b^1, \end{array}\right\} \tag{2}$$

с применением ККТ-условий или соотношений двойственности для задачи (2) приводит к задаче математического программирования с дополнительным ограничением типа равенства вида (один из вариантов)

$$\begin{array}{c} \langle d^1 + vB_1, y\rangle - \langle v, b^1 - A_1x - B_1y\rangle = 0, \\ x, y, v \geqslant 0. \end{array}$$

Это ограничение очевидно нелинейно, точнее билинейно, и потому является d.c. функцией, т.е. представимо в виде разности двух выпуклых функций.

Нетрудно заметить, что такой же характер носит известная задача линейной дополнительности, заключающаяся в поиске такого x, что

$$\left.\begin{array}{c} x \geqslant 0, \ \ Mx + q \geqslant 0, \\ \langle x, Mx + q\rangle = 0. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Известно также, что задачи дополнительности (возможно нелинейные) тесным образом связаны с другим популярным объектом современной математики — с вариационными неравенствами, имеющими широкое приложение, например, в математической физике, теории ценового и транспортного равновесия и т.д.

Напомним, в случае однозначного отображения $P : X \to \mathbb{R}^m, \ X \subset \mathbb{R}^n$, решение вариационного неравенства состоит в поиске $x_* \in X$, для которого

$$\langle P(x_*), x - x_*\rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in X. \tag{4}$$

Легко видеть равносильность задач (3) и (4) при $P(x) = Mx + q, \ X = \mathbb{R}^m_+$. Также можно показать эквивалентность некоторых нелинейных обобщений (3) и (4).

Таким образом можно сказать, что решение задач с нелинейными (в частности с билинейными) ограничениями типа равенства обладает большим практическим весом (вызывая при этом не менее весомый теоретический интерес).

С другой стороны, задачи с нелинейными ограничениями-равенствами являются, как известно, едва ли не самыми трудными как с теоретической точки зрения, так и, главное, при численном решении подобных задач.

Известно, например, что ККТ-условия оптимальности для задачи

$$f_0 \downarrow \min, \quad f_i(x) = 0, \;\; i = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

где $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, нелинейные функции характеризуют лишь стационарные точки (т.е. удовлетворяющие равенству

$$\lambda_0 \nabla f_0(x_*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x_*) = 0; \tag{6}$$

$\lambda_i \in I\!R$, $i = 1, \ldots, m$, $\lambda_0 \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} |\lambda_i| + \lambda_0 > 0$), которых может быть достаточно много. В прикладных же задачах, например, в задачах (1)-(2), (3) и (4) требуется отыскать именно глобальное решение, для поиска которого условие (6) практически ничего не дает.

В настоящее время среди специалистов доминирует мнение, что подобные задачи решаются методом штрафов или путем редукции к серии задач ($\alpha \to \infty$)

$$\varphi_\alpha(x) = f_0(x) + \alpha \Phi(x) \downarrow \min_x \tag{7}$$

где $\Phi(x) = \Phi_0(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ может быть, например, следующего вида:

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i |f_i(x)|, \;\; \Phi_2(x) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i [f_i(x)]^2, \;\; \Phi_p(x) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i [f_i(x)]^p, \;\; 1 < p < +\infty.$$

Можно заметить, что в случае нелинейности функций $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ функция $\Phi(x)$, а вместе с ней и φ_α необязательно являются выпуклыми. Поэтому поиск именно глобального решения вспомогательной задачи (7) (что и требуется в методе штрафов) представляет собой непреодолимую (для стандартных методов нелинейной оптимизации) трудность. Следовательно, и поиск глобального решения задачи (5) оказывается необоснованным Здесь предлагается другой подход, основанный на условиях глобальной оптимальности для задачи с одним d. c. ограничением типа равенства:

$$(\mathcal{P}) \qquad \left. \begin{array}{c} f(x) \downarrow \min, \quad x \in S, \\ F(x) \triangleq g(x) - h(x) = 0, \end{array} \right\} \tag{8}$$

где f, g, h — выпуклые функции, а S — выпуклое множество из $I\!R^n$.

Нетрудно видеть, что задача $(\mathcal{P})$–(8) является частным случаем известной задачи с d. c. ограничением типа неравенства:

$$\left. \begin{array}{c} f(x) \downarrow \min, \quad x \in S, \\ F(x) \triangleq g(x) - h(x) \geqslant 0. \end{array} \right\} \tag{9}$$

Для задачи (9) нами предложены специальные методы локального поиска [6], условия глобальной оптимальности [4],[5], разработана стратегия глобального поиска и доказана ее сходимость [3],[5]. Кроме того, проведено тестирование теории глобального поиска для (9) на серии достаточно трудных задач.

Поэтому можно использовать эти результаты исследования задачи (9) для решения задачи (8).

Начнем прежде всего с условий оптимальности. Предположим, что в задаче $(\mathcal{P})$–(8) выполнены следующие предположения:

$$\exists\, v \in S: \quad F(v) < 0, \tag{10}$$

$$(\mathcal{H}) \qquad \left.\begin{array}{c} \forall\, y \in S: \quad F(y) = 0 \quad \text{т. е.} \quad g(y) = h(y), \quad \exists\, p = p(y) \in S: \\ h(p) - h(y) < \langle \nabla g(y), p - y \rangle. \end{array}\right\} \tag{11}$$

тогда также как это сделано в [3],[4] можно доказать следующие условия оптимальности (УО).

Теорема 1 (достаточное условие оптимальности)[3],[4]. Пусть выполнены условия (10) и $(\mathcal{H})$–(11). Тогда, если справедливо условие

$$(\mathcal{E}) \qquad \left.\begin{array}{c} \forall\, (y, \beta): \quad g(y) = \beta,\ y \in S, \\ h(y) \leqslant \beta \leqslant \sup(h, S), \\ h(x) - \beta \geqslant \langle \nabla g(y), x - y \rangle, \\ \forall\, x \in S, \quad f(x) \leqslant f(z); \end{array}\right\} \tag{12}$$

то точка z оказывается глобальным решением задачи $(\mathcal{P})$–(8). #

Однако для необходимости условия $(\mathcal{E})$–(12) для задачи $(\mathcal{P})$–(8) нужно потребовать иных предположений, нежели в задаче (9). Рассмотрим следующее предположение, которое легко проверяемо, как и (10):

$$\exists \hat{v} \in S:\ f(\hat{v}) < f(z), F(\hat{v}) < 0. \tag{13}$$

Теорема 2 (необходимое условие оптимальности). Пусть в задаче $(\mathcal{P})$-(8) выполнено предположение (13).

Тогда, если $z \in Sol(\mathcal{P})$, то

$$(\mathcal{E}_1) \qquad \left.\begin{array}{c} \forall (y, \beta):\ g(y) = \beta,\ y \in S, \\ h(y) - \beta \geqslant \langle \nabla g(y), x - y \rangle \\ \forall x \in S,\ f(x) \leqslant f(z). \end{array}\right\} \tag{14}$$

Доказательство. Если $(\mathcal{E}_1)$-(14) нарушено, то

$$\exists (y, \beta):\ g(y) = \beta, y \in S,\ \exists u \in S, f(u) \leqslant f(z),$$

$$h(u) - \beta < \langle \nabla g(y), u - y \rangle.$$

Тогда из выпуклости $g(\cdot)$ следует

$$0 < \beta - h(u) + g(u) - g(y) = F(u),$$

так что

$$u \in S,\ f(u) \leqslant f(z),\ F(u) > 0.$$

В силу (13), $\exists \lambda \in]0, 1[:\ F(x(\lambda)) = 0,$

$$x(\lambda) = \lambda u + (1 - \lambda)\hat{v} \in S.$$

Кроме того, благодаря выпуклости $f(\cdot)$,

$$f(x(\lambda)) \leqslant \lambda f(u) + (1 - \lambda) f(\hat{v}) < f(z),$$

что противоречит оптимальности z. #

На основе условий оптимальности $(\mathcal{E})$-(12) и $(\mathcal{E}_1)$-(14) для задач (1)-(2) и (3) разработаны методы локального и глобального поиска, посредством которых решены задачи достаточно большой размерности.

Результаты численного эксперимента выглядят достаточно убедительно как для задач линейной дополнительности, так и для задач двухуровневого управления (1)-(2), и позволяют сделать заключение об эффективности разработанного подхода для данных классов задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
2. Dempe S. Foundations of bilievel programming. Dordrecht/ Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2002.
3. Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации, Новосибирск: Наука, 2003.
4. Стрекаловский А.С.Об экстремальных задачах с d.c. ограничениями.// Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 2001, т.41, № 12, с. 1833-1843.
5. Стрекаловский А.С. Минимизирующие последовательности в задачах с d.c. ограничениями.// Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 2005, т.45, № 3, с. 435-447.
6. Стрекаловский А.С., Груздева Т.В. Локальный поиск в задачах с невыпуклы-ми ограничениями// Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2007, т.47, № 3, с. 397-413.

Стрекаловский Александр Сергеевич
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова 134, Иркутск, 644033, Россия, тел. (3952)511398.
E-mail: strekal@icc.ru