

# РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ НАД ПОЛЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Н. Ю. Золотых

Пусть  $F$  — некоторое подполе поля действительных чисел. Хорошо известно, что произвольный выпуклый полиэдр  $P \subseteq F^d$  может быть представлен любым из следующих двух способов: как множество решений системы линейных неравенств  $P = \{x \in F^d : Ax \leq b\}$ , где  $A \in F^{m \times d}$ ,  $b \in F^m$ , и как сумма конической оболочки некоторой системы векторов  $u_1, \dots, u_s$  из  $F^d$  и выпуклой оболочки некоторой системы точек  $v_1, \dots, v_n$  из  $F^d$ . Метод двойного описания (double description method) [1], известный также как алгоритм Моцкина–Бургера, по одному из этих описаний строит другое. При этом метод всегда находит неприводимую систему векторов  $u_1, \dots, u_s$ ,  $v_1, \dots, v_n$  и неприводимую систему неравенств  $Ax \leq b$  соответственно. Существует несколько известных программ, реализующих различные модификации этого метода. Как правило, программы поддерживают точную рациональную арифметику (числа представлены как отношения двух целых чисел произвольной длины) или приближенную машинную арифметику с плавающей запятой (`float` или `double`). С другой стороны, известно, что поля рациональных чисел не достаточно, чтобы представить все комбинаторные типы полиэдров. Минимальным подполем поля вещественных чисел, на котором реализуются все комбинаторные типы выпуклых полиэдров, является поле алгебраических вещественных чисел [2]. Разработаны две модификации метода двойного описания, специально предназначенные для случаев, когда 1)  $F$  — простое расширение  $\mathbf{Q}(\alpha)$  поля рациональных чисел, 2)  $F$  — поле алгебраических чисел. В первом случае должен быть задан минимальный многочлен  $\varphi(x)$  алгебраического числа  $\alpha$  и рациональный локализирующий интервал  $(a, b)$ , содержащий  $\alpha$  и не содержащий других корней многочлена  $\varphi(x)$ . Чтобы задать число  $\beta$  из  $\mathbf{Q}(\alpha)$  достаточно указать многочлен  $f(x)$ , такой, что  $\beta = f(\alpha)$ . Во втором случае каждое число встречающееся в вычислениях, представлено парой: минимальный многочлен и локализирующий интервал. Программные реализации обеих модификаций встроены в систему SKELETON (см. <http://www.uic.nnov.ru/~zny/skeleton>). SKELETON использует библиотеку ARAGELI (см. <http://www.unn.ru/cs/arageli>), в которой арифметика алгебраических чисел реализована С.С. Лялиным.

Автору известно о другой модификации (и соответствующей программе) метода двойного описания над полем алгебраических чисел, предложенной Д.В. Груздевым.

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00552-а.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Моцкин Т.С., Райфа Х., Томпсон Дж.Л., Тролл Р.М. Метод двойного описания // Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С. 81–109.
2. Мнёв Н.Е. О реализуемости над полями комбинаторных схем выпуклых многогранников // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1983. Т. 123. С. 203–207.

---

Золотых Николай Юрьевич,  
Нижегородский гос. университет им. Н.И. Лобачевского, пр. Гагарина, 23, Нижний Новгород, 603950, Россия, тел. (8312) 65-78-81, E-mail: Nikolai.Zolotykh@gmail.com