DOOR'07

Российская конференция

Дискретная оптимизация и исследование операций

Владивосток

7 – 14 сентября 2007

Материалы конференции

Сопредседатели программного комитета

д. ф.-м. н. Е. А. Нурминский (Владивосток)

д. ф.-м. н. В. Л. Береснев (Новосибирск)

Программный комитет

д. т. н. О. В. Абрамов (Владивосток)

д. ф.-м. н. А. С. Антипин (Москва)

д. ф.-м. н. Л. Т. Ащепков (Владивосток)

д. ф.-м. н. В. А. Васильев (Новосибирск)

д. ф.-м. н. Э. Х. Гимади (Новосибирск)

академик Ю. Г. Евтушенко(Москва)

академик И. И. Еремин (Екатеринбург)

д. т. н. В. И. Зоркальцев (Иркутск)

д. ф.-м. н. А. А. Колоколов (Омск)

к. ф.-м. н. Ю. А. Кочетов (Новосибирск)

д. ф.-м. н. Р. В. Намм (Хабаровск)

член корр. Ю. Н. Павловский (Москва)

д. ф.-м. н. В. К. Попков (Новосибирск)

д. ф.-м. н. Л. Д. Попов (Екатеринбург)

д. ф.-м. н. С. В. Севастьянов (Новосибирск)

д. ф.-м. н. А. С. Стрекаловский (Иркутск)

к. ф.-м. н. О. В. Хамисов (Иркутск)

д.ф.-м.н. М. Ю. Хачай (Екатеринбург)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л. СОБОЛЕВА СО РАН

Российская конференция

Дискретная оптимизация и исследование операций

Владивосток, 7 – 14 сентября 2007

Материалы конференции

Новосибирск
Издательство Института математики
2007

ББК 22.1
Д482

Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций»: Материалы конференции (Владивосток, 7 – 14 сентября 2007). — Новосибирск: Изд-во Института математики, 2007. — 192 с.

ISBN 978-5-86134-134-9.

Материалы содержат пленарные доклады и тезисы выступлений, представленные на Российскую конференцию «Дискретная оптимизация и исследование операций» (DOOR-07).

В редактировании выпуска принимали участие:
В. Л. Береснев, Э. Х. Гимади, В. И. Зоркальцев, А. А. Колоколов, Ю. А. Кочетов, Е. А. Нурминский. Л. Д. Попов, О. В. Хамисов.

Ответственный за выпуск Ю. А. Кочетов.

Спонсоры конференции:

Российский фонд фундаментальных исследований (проект 07-01-06052)

Сибирское отделение Российской академии наук

Дальневосточное отделение Российской академии наук

Американский благотворительный фонд поддержки информатизации образования и науки

Дальневосточный центр экономического развития

Д $\frac{1602100000-01}{Я82(03)-2007}$ Без объявл.

ISBN 978-5-86134-134-9

СОДЕРЖАНИЕ

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА

О. В. Абрамов

Бурное развитие вычислительной техники и информационных технологий оказывает все большее влияние на совершенствование методов решения многих теоретических и прикладных задач. Прежде всего, это касается методов решения задач высокой вычислительной сложности.

Широкое распространение технологии распределенных и параллельных вычислений и заставляет по-новому взглянуть на проблему разрешимости целого ряда задач, а также практической полезности методов и алгоритмов, казавшихся ранее бесперспективными из-за крайне высокой вычислительной трудоемкости получения решений.

К числу задач высокой вычислительной трудоемкости относятся задачи многомерной поисковой оптимизации, среди которых наиболее сложными считаются задачи оптимизации по стохастическим (вероятностным) критериям. В докладе анализируются пути и методы решения таких задач на основе современных технологий параллельных и распределенных вычислений.

Приведены параллельные алгоритмы вычисления стохастических целевых функций (параллельные модификации метода статистических испытаний), алгоритмы поиска глобального экстремума методом сканирования и направленного случайного поиска, реализованные в виде модели распределенных вычислений на ЛВС.

Разработанные алгоритмы ориентированы на решение задачи оптимального параметрического синтеза аналоговых технических систем с учетом случайных процессов изменения параметров их элементов [1, 2].

Задача оптимального параметрического синтеза состоит в выборе номинальных значений внутренних параметров исследуемой системы $\mathbf{x}_{\text{НОМ}} = (x_{1\text{НОМ}}, \cdots, x_{n\text{НОМ}})$, обеспечивающих максимум вероятности ее безотказной работы в течение заданного времени:

$$\mathbf{x}_{\text{НОМ}} = \arg\max P\{\mathbf{X}(\mathbf{x}_{\text{НОМ}}, \mathbf{t}) \in \mathbf{D}_{\boldsymbol{x}}, \forall t \in [0, T]\} \tag{1}$$

где $\mathbf{X}(\mathbf{x}_{\text{НОМ}}, \mathbf{t})$– случайный процесс изменения параметров; $\mathbf{D}_{\boldsymbol{x}}$ – область работоспособности; T – заданное время эксплуатации системы.

Область допустимых вариаций внутренних параметров $\mathbf{D}_{\boldsymbol{x}}$, как правило, неизвестна, а условия работоспособности задаются системой неравенств:

$$a_j \le y(x)_j \le b_j,\ j = 1, m$$

где $\mathbf{y} = \{y_j\}_{j=1}^{m}$ – вектор выходных параметров системы, причем $y_j = F_j(x_1, \cdots, x_n)$, а $F_j(\bullet)$ – известный оператор, зависящий от топологии исследуемой системы.

Основные трудности, возникающие при решении задачи параметрического синтеза технических систем с учетом случайных вариаций их параметров, связаны с высокой вычислительной трудоемкостью решения возникающих при этом задач многовариантного анализа и оптимизации по стохастическим критериям. На каждом шаге оптимизации возникает необходимость проведения статистического анализа для получения оценки критерия оптимальности. При этом на основе метода статистических испытаний (Монте-Карло) многократно рассчитывается исследуемая система (вычисляются выходные параметры и проверяется выполнение условий работоспособности) при различных значениях параметров элементов. Число расчетов N, равное числу реализаций случайного вектора параметров, определяется из условия обеспечения необходимой точности оценки критерия. Обычно для обеспечения требуемой точности оценки необходимо на каждом шаге поиска проводить полный расчет системы от нескольких сотен до тысячи раз.

Одним из путей снижения временных затрат на решение оптимизационных задач может быть, как отмечено выше, распараллеливание вычислительного процесса. При программной реализации параллельных алгоритмов представляется целесообразным использование возможностей как современных многопроцессорных вычислительных систем, так и распределенных многомашинных комплексов, связанных локальной сетью. Реализация подобных алгоритмов на многопроцессорных машинах, работающих под управлением операционных систем, поддерживающих многопоточность, не вызывает принципиальных затруднений. В то же время, в распределенных гетерогенных средах, необходимо самостоятельно реализовать механизмы загрузки данных, синхронизации процессов и балансировки вычислительной нагрузки между компонентами комплекса.

Главным критерием качества распараллеливания вычислений является сокращение общего времени решения задачи. Возможности для распараллеливания вычислений ограничиваются не только числом имеющихся процессоров, но и особенностями вычислительного алгоритма, который может оказаться принципиально последовательным. К задаче параметрической оптимизации по стохастическим критериям (1) применима так называемая главный- подчиненный (master-slave) парадигма параллельного программирования. Распараллеливание здесь базируется на декомпозиции алгоритма вычислений и в качестве единицы параллелизма выступает задача однократного расчета модели системы (моделирования системы), что является самым крупным и вычислительно емким блоком алгоритма статистического анализа и оптимизации.

Некоторые пути решения задач оптимального параметрического синтеза с использованием технологии параллельных и распределенных вычислений рассмотрены в докладе [3, 4]. В частности предложен параллельный аналог метода Монте-Карло и процедуры многовариантного анализа. Предлагаемые параллельные методы поиска оптимальных значений параметров основаны на использовании идей дискретизации пространства поиска решений, многомерного зондирования и дискретной оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. О.В. Абрамов. Параметрический синтез стохастических систем с учетом требований надежности. М. : Наука. 1992.
2. О.В. Абрамов. Методы и алгоритмы параметрического синтеза стохастических систем // Проблемы управления, №4, 2006. С. 3–8.
3. О.В. Абрамов, Я.В. Катуева. Параллельные алгоритмы анализа и оптимизации параметрической надежности. // Надежность, №4, 2005. С. 19–26.
4. О.В. Абрамов, Я.В. Катуева. Технология параллельных вычислений в задачах анализа и оптимизации. // Проблемы управления, №4, 2003. С. 11–15.

Абрамов Олег Васильевич,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, ул. Радио, 5, Владивосток, 690041, Россия, (8-4232) 31-02-02, E-mail:abramov@iacp.dvo.ru

РАВНОВЕСНОЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ [1]

А. С. Антипин

1 Постановка общей задачи

Рассмотрим задачу многокритериального равновесного программирования, в которой требуется выбрать вектор весов $\lambda = \lambda^*$ и и вектор-столбец правой части функциональных ограничений $p = p^*$ так, чтобы отвечающий им оптимум $w = w^*$ удовлетворял системе вариационных неравенств

$$\langle \lambda^*, f(w^*) \rangle \in \mathrm{Min}\{\langle \lambda^*, f(w) \rangle \mid g(w) \le p^*,\ w \in \Omega\}, \tag{1}$$

$$\langle f(w^*) - \lambda^*, \lambda - \lambda^* \rangle \le 0, \quad \lambda \ge 0, \tag{2}$$

$$\langle g(w^*) - p^*, p - p^* \rangle \le 0, \quad p \ge 0. \tag{3}$$

Здесь $f(w), g(w)$- векторные функции, каждая компонента которых выпуклая скалярная функция, $f(w) \in R^m, g(w) \in R^{m_1}$, $w \in \Omega \subset R^n$, $\lambda \in R^m_+$, $p \in R^{m_1}_+$.

Задачу (1) при фиксированном векторе $p \ge 0$ можно трактовать как скаляризацию (скалярную линейную свертку) задачи многокритериальной оптимизации, где требуется определить паретовское многообразие решений векторного критерия $f(w)$ на допустимом множестве $D(p) = \{w \in R^n \mid g(w) \le p,\ w \in \Omega\}$, другими словами решить задачу [1]

$$f(w^*_y) \in \mathrm{ParetoMin}\{f(w) \mid w \in D(p)\}. \tag{4}$$

Каждая точка Паретовского многообразия $f(w^*_p)$ характеризуется, тем что пересечение неположительного конуса (ортанта) $K(f(w^*_p))$ вершина которого перенесена в точку $f(w^*_p)$, где $w^*_p \in D(p)$, т.е. $K(f(w^*_p)) = \{f \in R^m \mid f \le f(w^*)\}$ и множество векторных оценок $f(D(p))$ содержит единственную точку $f(w^*_p)$, т.е. $K(f(w^*_p)) \cap f(D(p)) = f(w^*_p)$. В этом случае $f(w^*_p)$ называется оптимальной по Парето или эффективной точкой. Будем предполагать, что решение задачи (1)-(3) всегда существует, тогда точка $w^*_{p^*}$, которая является прообразом Парето-оптимальной точки $f(w^*_{p^*})$ и принадлежит непустому допустимому множеству задачи выпуклого программирования (при любом фиксированном $p \ge 0$).

Таким образом, если вектора $\lambda \ge 0$ и $p \ge 0$ зафиксированы, то мы имеем классическую задачу выпуклого программирования, которая порождает множество оптимальных решений $w^* \in D(p)$, а также множество эффективных решений $f^*(w^*) \in R^m_+$ и множество множителей Лагранжа $p^* \in R^{m_1}_+$. Фактически мы имеем точечно-множественное отображение седлового типа, когда каждой паре $\lambda \ge 0, p \ge 0$ ставится в соответствие пара оптимальных множеств $f^*(\lambda, p), p^*(\lambda, p)$. Если существует неподвижная точка этого многозначного отображения, то она является решением задачи (1)-(3).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00242) и по Программе поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ-2240.2006.1)

2 Равновесный выбор весов в задачах многокритериальной оптимизации

Сформулированная проблема включает в себя два важных частных случая, первый из них - это равновесных выбор весов в задачах многокритериальной оптимизации, а второй - это равновесный выбор ограничений в задачах скалярной оптимизации. Рассмотрим первый случай и будем предполагать, что в (1)-(3) вектор $p \geq 0$ фиксирован и тем самым допустимое множество задачи (1) жестко задано. Сама задача в этом случае принимает форму

$$\langle \lambda^*, f(w^*) \rangle \in \mathrm{Min}\{\langle \lambda^*, f(w) \rangle \mid g(w) \leq p,\ w \in \Omega\}, \tag{5}$$

$$\langle f(w^*) - \lambda^*, \lambda - \lambda^* \rangle \leq 0, \quad \lambda \geq 0. \tag{6}$$

Допустимое множество $D = \{w \mid g(w) \leq p,\ w \in \Omega\}$ задачи (5) как уже отмечалось будем называть множеством альтернатив, а его образ $f \in f(D) = \{f = f(w), w \in D\}$ при отображении $f(w), w \in D$ - множеством векторных оценок. Расположение множества $f(D)$ в пространстве по отношению к нулевой точке сильно зависит от вектора $\hat{f}$, который назовем "абсолютным минимумом"или "идеальной точкой": $\hat{f}_i = f_i(w^*) = \min\{f_i(w) \mid w \in D\},\ i = 1, ..., m$. Если векторы w_i^* различны, то не существует такой точки w образ которой $f(w)$ мог бы достичь "абсолютного минимума" $\hat{f}$. Интуиция нам подсказывает, что если $\hat{f} \geq 0$, то все компоненты вектора λ^* в (5) не равны нулю, т.е. $\lambda_i^* \neq 0$ и наоборот, если $\hat{f} < 0$, то все компоненты этого вектора равны нулю. При наличии смеси тех и других компонент у вектора $\hat{f}$ имеем случай, когда какие то $\lambda_i, i = 1, 2, ...m$ равны нулю, другие - нет. Чтобы исключить вырожденный случай введем условие регулярности, которое в каком то смысле аналогично условию регулярности Слейтера в выпуклом программировании.

Условие регулярности. Задачу (5),(6) назовем регулярной, если среди всех $f_i(x), i = 1, 2, ..., m$ существует по крайней мере одна функция $f_i(w)$ такая что

$$f_i(w) > 0\ \forall w \in \Omega \tag{7}$$

По умолчанию всегда можно полагать, что индекс $i = 1$.

Задача (5) представляет собой многокритериальную задачу минимизации векторного критерия $f(w)$ на допустимом множеств D. Решение этой задачи есть обширное многообразие оптимальных по Парето (или эффективных) точек. Напомним, что если точка $f(w^*)$ является Парето-оптимальной, то линейный функционал $\langle \lambda^*, f \rangle$, где $f = f(w)$ для всех $w \in D$ является опорным в точке $f(w^*)$, так как $\langle \lambda^*, f^* \rangle \leq \langle \lambda^*, f \rangle$ для всех $f = f(w)$, $w \in D$, т.е. $\langle \lambda^*, f - f^* \rangle \geq 0$. Таким образом, задачу многокритериальной оптимизации можно интерпретировать как поиск опорного функционала с неотрицательными весами на множестве векторных оценок при этом прообраз опорной точки принадлежит допустимому множеству.

Вариационное неравенство (6) определено на положительном ортанте, следовательно оно расщепляется на два условия

$$\langle f(w^*) - \lambda^*, \lambda^* \rangle = 0, \tag{8}$$

и

$$f(w^*) - \lambda^* \leq 0. \tag{9}$$

Последнее означает, что если $\lambda^* \neq 0$, то из (8) имеем

$$\lambda^* = f(w^*). \tag{10}$$

Если в (8) какие то компоненты вектора $\lambda^* = 0$, то выполняется (9) и следовательно $f(w^*) \leq 0$. Нетрудно понять, что если все компоненты вектора $f(w)$ положительны, т.е. $f_i(w) \geq 0,\ i = 1, 2, ..., m$, то все $\lambda_i \neq 0,\ i = 1, 2, ..., m$. В общем случае, некоторые компоненты вектора λ могут быть равны нулю. Таким образом, в регулярном случае (7) вариационное неравенство (6) задачи векторной оптимизации расшифровывается как равенство векторов (10).

Задача векторной оптимизации (5) как правило описывает содержательные ситуации, связанные с выбором наилучшего по Парето решения при котором все участники (или факторы) имеют максимальную эффективность (в нашем случае минимальный расход ресурсов). Если выбрана стратегия w^*, то ей отвечает вектор максимальной эффективности $f(w^*)$ (решение по Парето). С другой стороны каждая компонента вектора λ^* характеризует вес или влияние каждого участника (фактора) в группе. В этой интерпретации можно сказать, что решение задачи векторной оптимизации (5),(6) обладает некоторым равновесным свойством при котором вес (влияние) участника согласован с его эффективностью в смысле (10). Такое условие придает паретовской точке определенную устойчивость.

При внимательном рассмотрении вариационного неравенства (6) можно видеть, что оно является необходимым (а в выпуклом случае) достаточным условием максимума квадратичной задачи

$$\lambda^* \in \text{argmax}\{\langle \lambda, f(w^*) - \frac{1}{2}\lambda \rangle \mid \lambda \geq 0\}. \tag{11}$$

Учитывая этот факт исходную задачу (5),(6) можно представить как игру двух лиц с равновесием по Нэшу

$$\langle \lambda^*, f(w^*) \rangle \in \text{Min}\{\langle \lambda^*, f(w) \rangle \mid g(w) \leq p,\ w \in \Omega\}, \tag{12}$$

$$\lambda^* = \text{argmax}\{-\frac{1}{2}|\lambda - f(w^*)|^2 \mid \lambda \geq 0\}. \tag{13}$$

Последнее позволяет еще раз подчеркнуть, что решение рассматриваемой задачи обладает свойством устойчивости присущее всем равновесиям по Нэшу.

3 Равновесный выбор ограничений в задачах скалярной оптимизации

В этом параграфе будем предполагать, что вектор весов $\lambda \geq 0$ задачи (1)-(3) фиксирован и тем самым скалярная целевая функция задачи задана жестко. В этом случае обозначим ее как $\langle \lambda, f(w) \rangle = \varphi(w)$, тогда задача (1)-(3) принимает вид

$$w^* = \text{Argmin}\{\varphi(w) \mid\ g(w) \leq p^*,\ w \in \Omega\}, \tag{14}$$

$$\langle g(w^*) - p^*, p - p^* \rangle \leq 0, \quad p \geq 0. \tag{15}$$

где $\varphi(w) : R^n \to R,\ g(w) : R^n \to R^{m_1}$ - выпуклые функции, $\Omega \subset R^n$- выпуклое замкнутое множество, $p \in R^{m_1}_+$.

Допустимое множество этой задачи $D(p) = \{w \in \Omega \mid g(w) \leq p,\ w \in \Omega\}$ зависит от параметра $p \geq 0$. При фиксированном $p \geq 0$ имеем задачу выпуклого программирования. Изменение параметра в свою очередь порождает функцию чувствительности (оптимального значения) в качестве переменной для которой выступает вектор-столбец функциональных ограничений (параметр) $p \geq 0$

$$f(p) = \min\{\varphi(w) \mid\ g(w) \leq p,\ w \in \Omega\}, \tag{16}$$

Функция чувствительности $f(p),\ p \geq 0$ достаточно известна и многократно обсуждалась в научной литературе [2]. Основные свойства этой функции следующие:

1. $f(p)$ - выпуклая в области ее существования, ее сужение на любую переменную - монотонно убывающая вещественная функция.

2. $f(p)$ - субдифференцируемая, а ее субдифференциал $\partial f(p)$ - многозначное монотонное отображение в области его определения $p \in R^{m_1}_+$. Образ этого отображение при любом p есть выпуклое, замкнутое, а регулярном случае, ограниченное множество.

3. $\partial f(p)$ множество значений оператора при каждом p совпадает с множеством множителей Лагранжа задачи (14) при любом фиксированном p правой части функциональных ограничений этой задачи.

Другими словами для задачи (14) введем Функцию Лагранжа $\mathcal{L}(v,p) = \varphi(w) + \langle p, g(w) - p^*\rangle,\quad w \in \Omega, p \in R^{m_1}_+$ (здесь p^* трактуется как параметр). Предполагается, что при каждом значении $p^* \geq 0$ задача (14) имеет регулярный (в смысле условия Слейтера) характер и, следовательно, для каждого p^* существует непустое множество седловых точек w, p функции Лагранжа.

$$\mathcal{L}(w,p) = \varphi(w) + \langle p, g(w) - p^*\rangle \quad \forall w \in \Omega,\ p \in R^{m_1}_+. \tag{17}$$

Двойственная компонента множества седловых точек совпадает с $-\partial f(p)$ и является монотонно убывающей в смысле неравенства

$$\langle \partial f(p + \triangle p) - \partial f(p), \triangle p\rangle \geq 0 \quad \forall p \geq 0, \triangle p \geq 0.$$

Наряду с субдифференциалом $-\partial f(p)$ рассмотрим тождественное отображение положительного ортанта в себя, т.е. $p : R^{m_1}_+ \to R^{m_1}_+$. Это отображение можно рассматривать как монотонно возрастающее. Интуитивно ясно, что два отображения со свойствами убывания для одного и возрастания для другого обязательно пересекаются в некоторой точке $p^* \geq 0$, которая является неподвижной точкой двойственного отображения $-\partial f(p) : R^{m_1}_+ \to R^{m_1}_+$. Точка $p^* \geq 0$ одновременно является решением задачи (14),(15). Эти соображения являются интуитивным обоснованием факта существования решения рассматриваемой задачи. Таким образом, содержательный смысл задачи (14), (15) заключается в вычислении неподвижной точки двойственного отображения, которая является вектором множителей Лагранжа, отвечающих заданному $p \geq 0$.

Задача выпуклого программирования обычно интерпретируется как модель производства в которой требуется выбрать вектор интенсивности работы предприятия w так чтобы обеспечить выпуск продукции с минимальными расходами ресурсов, которые оцениваются величиной $f(p)$ из (14). Ясно, что если объемы ресурсов (компоненты вектора p) неограниченно растут, то их дефицитность (производственная нехватка) падает, соответственно, внутренние оценки обусловленности по Л.В. Канторовичу (множители Лагранжа) тоже падают, потребление ресурсов в этом случае ничто не ограничивает и поэтому расходы предприятия по выпуску продукции стремятся к нулю. Эта идеальная ситуация неограниченного объема ресурсов в реальности не встречается. Ресурсы - это, как правило, продукция некоторого производства или сырье стоимость которого определяется расходами на восстановление нарушенной Природы, причем чем больше требуется ресурсов для производства, тем выше их стоимость. Таким образом, наряду с функцией дефицитности ресурсов $f(p)$, убывающей с ростом p имеется другая функция стоимости ресурсов $r(p)$, возрастающей с увеличением p. Интуитивно ясно, что существует равновесный вектор ресурсов $p^* \geq 0$, такой что $f(p^*) = r(p^*)$. Это равенство означает, что дефицитность (нехватка) ресурсов для выпуска продукции согласована с их внешней (рыночной) стоимостью. Другими словами, нехватка ресурсов согласована с их наличием для нужд производства. Здесь равновесные объемы ресурсов (вектор p^*) определяются как точка пересечения скалярных "кривых"$f(p)$ и $r(p)$.

Однако мы будем рассматривать задачу о вычислении точки пересечения не скалярных кривых $f(p)$ и $r(p)$, а их (суб)градиентов, т.е. маргинальных цен [3]. Если градиент функции $r(p)$ обозначить как $\nabla r(p)$, то задачу о вычислении неподвижной точки маргинальных цен, т.е. отображения $-\partial f(p)$ можно сформулировать как $\nabla r(p^*) \in -\partial f(p^*)$. Это включение можно рассматривать как обобщение задачи (14), (15). Наряду с функцией Лагранжа $\mathcal{L}(w, p, y(s))$ введем функцию $\mathcal{M}(w, p, p)$

$$M(w, p, p) = \varphi(w) + \langle p, g(w) - (1/2)p \rangle \quad \forall w \in \Omega, \quad p \in R^m_+. \tag{18}$$

Введенная функция является выпуклой по $w \in \Omega$ и вогнутой (точнее сильно вогнутой) по переменной $p \in R^{m_1}_+$. Такая функция, как правило, всегда имеет седловую точку. Обозначим ее как $w^* \in \Omega$ и $p^* \in R^{m_1}_+$. По определению эта точка удовлетворяет системе неравенств

$$\varphi(w^*) + \langle p, g(w^*) - (1/2)p \rangle \leq \varphi(w^*) + \langle p^*, g(w^*) - (1/2)p^* \rangle \leq$$
$$\leq \varphi(w) + \langle p^*, g(w) - (1/2)p^* \rangle \quad \forall w \in \Omega, p \in R^{m_1}_+. \tag{19}$$

Левое неравенство системы представляет собой задачу оптимизации

$$p^* \in \operatorname{Argmax}\{\langle p, g(w^*) - (1/2)p \rangle \mid p \geq 0\}. \tag{20}$$

Не трудно увидеть, что из (19) и (20) следует - пара p^*, w^* является прямым и двойственным решением задачи

$$w^* \in \operatorname{Argmin}\{\varphi(w) \mid g(w) \leq p^*, \; w \in \Omega\}. \tag{21}$$

4 Экстрапроксимальный метод решения общей многокритериальной равновесной задачи

Рассмотрев частные случаи равновесной задачи (1)-(3), вернемся к ее общей постановке. Прежде всего с учетом представлений (11) и (20) запишем задачу (1)-(3) в форме

$$\langle \lambda^*, f(w^*)\rangle \in \mathrm{Min}\{\langle \lambda^*, f(w)\rangle \mid g(w) \le p^*,\ w \in \Omega\}, \qquad (22)$$

$$\lambda^* \in \mathrm{argmax}\{\lambda, f(w^*) - (1/2)\lambda\rangle \mid \lambda \ge 0\}, \qquad (23)$$

$$p^* \in \mathrm{argmax}\{\langle p, g(w^*) - (1/2)p\rangle \mid p \ge 0\}. \qquad (24)$$

Для решения системы экстремальных включений (22)-(24) предлагается использовать экстрапроксимальный итеративный процесс вида [4]:

первый полушаг (прогнозный)

$$\bar{w}^n = \mathrm{argmin}\{\frac{1}{2}|w - w^n|^2 + \alpha(\langle \lambda^n, f(w) - \lambda^n\rangle + \langle p^n, g(w) - p^n\rangle) \mid \ w \in \Omega\}, \qquad (25)$$

второй полушаг (основной)

$$\lambda^{n+1} = \mathrm{argmin}\{\frac{1}{2}|\lambda - \lambda^n|^2 - \alpha(\lambda, f(\bar{w}^n) - (1/2)\lambda\rangle \mid \lambda \ge 0\}, \qquad (26)$$

$$p^{n+1} = \mathrm{argmin}\{\frac{1}{2}|p - p^n|^2 - \alpha(\langle p, g(\bar{w}^n) - (1/2)p\rangle\rangle \mid p \ge 0\}. \qquad (27)$$

$$w^{n+1} = \mathrm{argmin}\{\frac{1}{2}|w - w^n|^2 + \alpha(\langle \lambda^{n+1}, f(w) - \lambda^n\rangle + \langle p^{n+1}, g(w) - p^n\rangle) \mid \ w \in \Omega\}. \quad (28)$$

Условия сходимости этого процесса сформулированы в теореме

Т е о р е м а 1 *Если решение равновесной задачи (1)-(3) существует, функции $f(w)$,$g(w)$ выпуклы, Ω -выпуклое замкнутое множество, то последовательность w^n, λ^n, p^n экстрапроксимального метода (25)-(28) с параметром $\alpha > 0$, сходится монотонно по норме к одному из решений задачи, т.е. $w^n, \lambda^n, p^n \to w^*, \lambda^*, p^*$ при $n \to \infty$ для всех w^0, λ^0, p^0.*

В этом методе управление идет по прямым переменным, в отличие от двойственного, где пересчет идет по двойственным переменным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.А. Дубов, С.И. Травкин, В.Н. Якимец. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М.: Наука, 1986.
2. S. Zlobec. Stable Parametric Programming. Dordrecht -London.: Kluwer Academic Publishers. 2001.
3. А.С. Антипин. О равновесной модели дефицита ресурсов. Нелинейная динамика и управление. Вып.5. М.: Физматлит, 2005. С. 148–156.
4. А.С. Антипин. О сходимости и оценках скорости сходимости проксимальных методов к неподвижным точкам экстремальных отображений// Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35, № 5. С. 688–704.

Антипин Анатолий Сергеевич, Вычислительный Центр им. А.А. Дородницына Российской Академии Наук, ул. Вавилова 40, Москва, 119991, Россия. tel: (7-495) 135-42-50, fax: (7-495) 135-61-59. E-mail: antipin@ccas.ru

ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ДВОЙСТВЕННОСТЬ, ПРИЛОЖЕНИЯ К БАЛАНСОВОЙ МОДЕЛИ

Н. Н. Астафьев

В аналитическом и количественном анализе задач математического программирования ключевую роль играет аппарат двойственности. Одним из главных источников возникновения и становления этого аппарата явилось линейное программирование (ЛП) (матричные игры) (см. например [1-3]). Двойственность в ЛП базируется на лемме Фаркаша ($\approx$ 1904г.) о неравенствах-следствиях, доказательство которой не порождает (не дает) конструктивных модулей для установления свойства быть неравенством-следствием. Отметим, эта лемма является простой редакцией, но не поверхностной, леммы Гордана (1874г.) об однородных двойственных системах [2,3,6]. Приведем некоторый подход к обоснованию леммы Фаркаша с начальным конструктитвным "модулем". Рассмотрим невырожденную квадратную систему $Ax \geq 0$, т.е. существует A^{-1}. Выпишем очевидную цепочку переходов:

$$Ax \geq 0 \Rightarrow Ax - y = 0, \;\; y \geq 0 \Rightarrow x = A^{-1}y = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{\bullet j} y_j, \;\; y \geq 0,$$

т.е. множество решений $Ax \geq 0$ является конусом порожденным $\{a_{\bullet j} \;\; j \in \overline{1,n}\}$ — колонками матрицы A^{-1}. Элементарно и конструктивно показывается, что $\{x = \sum\limits_{j}^{n} a_{\bullet j} y_j, \;\; y_j \geq 0\} = C$, где C — конус неравенств-следствий системы $Ax \leq 0$ — противоположный для $Ax \geq 0$. Очевидно, эти конусы пересекаются по $x \neq 0$. Для случая $m \geq n$ $Ax \leq 0$ достаточно применить теорему Хелли для систем линейных неравенств (см. например [4]).

Приведем подход "противоположности" для формулировок матричных игр. Пусть X и Y — единичные симплексы из R^m и R^n соответственно; $A = (a_{ij})_{m \times n}$ — матрица выигрышей для "игрока" X. Задача $v = \max\limits_{X} \min\limits_{Y} (x, Ay)$ — задача гарантированного выигрыша для X (никакого риска). Задача $v^* = \min\limits_{Y} \max\limits_{X} (x, Ay)$ — задача игрока Y гарантированного выигрыша с матрицей выигрыша для него $(-A)$. Задача для v^* получена сменой выполнения последовательности операции оптимизации (с сохранением переменных). Рассмотрим аналогичный подход для случая, когда A — матрица выигрышей для Y. Получаем для Y: $w^* = \max\limits_{Y} \min\limits_{X} \, (x, Ay)$ — гарантированный выигрыш для Y, аналогично $w = \min\limits_{X} \max\limits_{Y} \, (x, Ay)$ — для X. С другой стороны задача для w при матрице выигрышей A для X — это задача остороженного риска для X.

Отметим, что пара $\{v, v^*\}$ и $\{w, w^*\}$ связана переходом к противоположным операциям "max", "min" при сохранении переменных.

Как известно задача ЛП $v^+ = \max\{c, x \;\; | \; Ax \leq b\}$ в случае совместности ограничений сводится к $v^+ = \max\limits_{x} \min\limits_{u \geq 0} \{\Phi(xu) = (c, x) - (u, Ax - b)\}$. Перейдя в последней к противоположной (т.е. сменив операции на противоположные) получим задачу $v^- = \min\{(c, x) \mid Ax \geq b\}$ в случае совместности ее. Отметим, что если в задаче для v^+ выделить ограничение $x \geq 0$ в операцию "$\max\limits_{x \geq 0}$", то получим противоположную задачу для v^- с условием $x \geq 0$. В последнем случае $(x \geq 0)$ интерпретации следующие: найти v^+ наибольшую выгоду производства в рамках ресурсов b; найти минимальную выручку при использовании ресурсов не меньше, чем b. Двойственные задачи для них имеют вид соответственно: $\max\{(b,u) \mid uA = c, \quad u \geq 0\}$ $\min\{(b,u) \mid uA = c, \quad u \geq 0\}$. Их интерпретация, например, для транспортной задачи: найти перевозки с "max" и "min" стоимостями и оценить этим реальные перевозки. Очевидное утверждение.

Утверждение 1. Имеем место $v^- \geq v^+$ при их конечности.

Как отмечалось выше использование для задачи ЛП функции Лагранжа $\Phi(xu)$ предполагает совместность $Ax \leq b$. Приведем прием регуляризации. Положим $U_k = \{u \in R^m \mid \sum\limits_j^m u_j = k, \quad u_j \geq 0\}$ $(k > 0)$ и рассмотрим задачу: $\bar{v}^+ \min\limits_k \max\limits_x \min\limits_{U_k} \Phi(x,u)$. Нетрудно проверить, например, переходом к двойственной для внутренней задачи, что эта задача сводится

$$\bar{v} = \min_{k>0} \max\{(c,x) + kt \mid Ax + te^m \leq b\}.$$

где $e^m = (1 \ \ldots \ 1)^\Gamma \in R^m$.

Для $\bar{v}^+$ выпишем противоположную $\bar{v} = \max\limits_{k>0} \min\limits_x \max\limits_{U_k} \Phi(x,u) = \max\limits_{k>0} \min\{(c,x) + ht \mid Ax + te^m \geq b\}$ — противоположная задача для выписанной выше.

Выпишем противоположные задачи

$$\max\{(c,x) \mid Ax \leq e^m\} = \underline{k} \quad \min\{(c,x) \mid Ax \geq e^m\} = \bar{k}.$$

Обозначим через $f(k)$ значение внутренней задачи (на "max") в задаче для $\bar{v}$. Тогда $\bar{v} = \min\limits_{k>0} f(k)$. Обозначим $v = \max\{(c,x) \mid Ax \leq b\}$.

Утверждение 2. Имеем место $\bar{k} \geq \underline{k}$ и $f(k)$ — конечно для $\underline{k} \leq k \leq \bar{k}$, при этом если v — конечно, то $\bar{v} = v = f(k)$ для $k = \sum\limits_{i=1}^n \bar{u}_i$, где $(\bar{u}_1 \ \ldots \ \bar{u}_m)$ — произвольное решение двойственной задачи к исходной задаче для v.

Рассмотрим совокупность аффинных функций $(a_{i\bullet,x}) - b_i, \quad i \in \overline{1,m}$ и для них сформулируем противоположные задачи

$$v^+ = \max_x \min_i \{(a_{i\bullet}, x) - b_i\}, \quad v^- = \min_x \max_i \{(a_{i\bullet}, x) - b_i\}$$

которые очевидно эквивалентны противоположным задачам ЛП вида

$$v^+ = \max\{t \mid Ax - b \geq te^m\}, \quad v^- = \min\{t \mid Ax - b \leq te^m\}$$

соответственно.

Конечные значения v^+ и v^- характеризуют глубину совместности $(v^+ > 0)$ и меру несовместности $(v^+ < 0)$ системы $Ax \geq b$. Аналогично для системы $Ax \leq b$. По теореме двойственности имеем

$$v^+ = -\max\{(b,u) \mid uA = 0, (u,e) = 1, \quad u \geq o\}$$

$$v^- = -\min\{(b,u) \mid uA = 0, (u,e) = 1, \quad u \geq o\}$$

или $v^- \geq v^+$. Условия совместности выписанных ограничений легко могут быть получены из леммы Гордана [2,3]. Заметим, что задачи для v^+ и v^- получены могут быть и через "функцию Лагранжа" $\Phi(x,u) = (u, Ax - b)$ $(ue) = 1$ $u \geq 0$ и соответсвующие противоположные задачи для нее.

Рассмотрим задачу ЛП с многокритериальной целевой функцией $c_{j\bullet}$ $(j \in \overline{1,s})$ и многовариантным вектором ресурсов $b_{\bullet j}$ $(j \in \overline{1,k})$, причем совместность по отдельно взятому варианта ресурсов не предполагается.

Рассмотрим задачу

$$L : v = \max_{\alpha} \min_{\lambda} \max_{x} \left\{ \left(\sum_{j}^{s} \lambda_j c_{j\bullet}, x \right) \middle| Ax \le \sum_{j}^{k} b_{\bullet j}, \alpha \right\}$$

здесь и ниже $\sum\limits_{j}^{k} \alpha_j = 1 = \sum\limits_{j}^{s} \lambda_j, \;\; \alpha_j \ge 0, \;\; \lambda_j \ge 0.$

Нетрудно проверить, что задача L сводится к задаче ЛП вида

$$v = \max \left\{ x_0 | \; Ax \le \sum_{j}^{k} b_{\bullet j}, \alpha_j, \; x_0 \le (c_{j\bullet}, x) \; (j \in \overline{1,s}), \; \sum_{j}^{k} \alpha_j = 1, \; \alpha_j \ge 0 \right\}.$$

Для задачи L противоположная задача на $\min\limits_{\alpha} \max\limits_{\lambda} \min\limits_{x} \{ \; \dots \; \}$ сводится к задаче ЛП противоположной для выписанной выше.

Предложим два подхода (матричные) для многокритериального задания вектора $c \to c_{j\bullet} \;\; j \in \overline{1,s}$ и $Ax \le b$:

1) Для допустимого вектора x вычисляются $(c_{1\bullet}, x), \; \dots, \; (c_{s\bullet}, x)$. Строится матрица относительных показателей $C(x) = ((c_{i\bullet}, x)/(c_{j\bullet}, x))_{s\times s}$ — технологическая матрица (типа балансовой матрицы) например она используется для анализа в теневой экономике. Далее оптимизируется, например, максимально-срочная норма. Аналогичная матрица строится и для решений системы $Ax \ge b$.

2) Допустимый вектор системы $Ax = b, \;\; x \ge 0$ разбивается на s комплектов $x = \sum\limits_{j=1}^{s} x_{\bullet j} \;\; x_{\bullet j} \ge 0$ и рассматривается задача: $(\sum\limits^{s} \lambda_j = 1 \;\; \lambda_j \ge 0)$.

$$C : \min_{\lambda_j} \max_{x_{\bullet j}} \left\{ \sum^{s} \lambda_j (c_{j\bullet}, x_{\bullet j}) \middle| \sum^{s} A x_{\bullet j} = b, \;\; x_{\bullet j} \ge 0 \right\}.$$

Выделим весьма частный случай такой постановки: $n = 1 \; \{x_1 = 1 \;\; x_1 \ge 0\} \;\; 1/c_1, \; \dots, 1/c_s$ — числа положительны. Задача C

$$\min_{\lambda_j} \max_{x_j} \left\{ \sum_{j}^{s} \frac{\lambda_j x_j}{c_j} \middle| \sum^{s} x_j \le 1 \;\; x_j \ge 0 \right\}.$$

Решение: переходим к двойственной по внутренней задачи и решением ее $\tilde{\lambda}_j = c_i / \sum\limits^{s} c_j$

Применим вышеизложенные подходы к балансовой модели Леонтьева "затраты-выпуск": $(E-A)x = c$, $x \ge 0$, здесь $A = (a_{ij}) \ge 0$, E единичная матрицы $n\times n$, $x, c \ge 0$ из R^n. Матрицу будем считать продуктивной в этой модели, если для некоторого вектора потребления $c > 0$ найдется решение $x \ge 0$ — вектор производства (a_{ij} — количество i-ого продукта затрачиваемые на производство единицы j-ого продукта). Приведем интерпретацию известного факта из теории матриц [5] для этой модели (считаем, что $A > 0$). Положим

$h_i(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ — затраты i-ого ресурса на вектор производства $x^T = (x_1, \ldots, x_n)$ $(i \in \overline{1,n})$;

$h_i(x)/x_i$ — удельные (относительные) затраты i-ого продукта на x;

$\max\limits_i\{h_i(x)/x_i\}$ — самый затратный продукт для x;

$\min\limits_i\{h_i(x)/x_i\}$ — наименее затратный продукт для x;

$\underline{h} = \min\limits_{x>0}\max\limits_i\{h_i(x)/x_i\}$ — производство с минимальным значением самого затратного продукта;

$\bar{h} = \max\limits_{x>0}\min\limits_i\{h_i(x)/x_i\}$ — аналогично.

Получили две противоположные задачи, решение которых реализуется на $x^0 > 0$ — правом собственном векторе Фробениуса ($Ax^0 = \lambda^0 x^0$, $0 < \lambda^0 < 1$). Итак $\underline{h} = \lambda^0 = \bar{h} = h_i(x^0)/x_i^0$, $i \in \overline{1,n}$.

Продолжим интерпретацию полученного. Положим $k_i = 1/x_i^0$, $i \in \overline{1,n}$ и K — диагональная матрица с элементами $k_i > 0$. Пусть $A(K) = (\tilde{a}_{ij}) = KAK^{-1}$; $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — система единиц измерения для $A = (a_{ij})$; $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ — новая система единиц измерения (той же продукции) и $e_i = k_i e'_i$.

Тогда $\tilde{a}_{ij} = a_{ij}k_i/k_j$ т.е. $A(K)$ — матрица удельных затрат в системе единиц e'. Таким образом для продуктивной матрицы A существуют такие единицы измерения с переходными коэффициентами $1/x_i^0$, в которых все суммы по строкам удельных затрат одинаковы и равны $\lambda^0 < 1$, причем совпадения сумм по всем строкам возможно только в этих единицах. Аналогичные противоположные задачи можно рассмотреть по колонкам, при этом интерпретация идет по ценам и левом собственном векторе.

Дальнейшее применение к балансовой модели свяжем с рассмотрением противоположных систем 1) $(E-A)x \le 0$ и 2). $(E-A)x \ge 0$ (A-продуктивна). По лемме Фаркаша конус неравенств-следствий для 1)задается $C = \{y = (E - A^T)u, \ u \ge 0\}$. Как отмечалось выше конус решений системы (2) задается $K^{\geq} = \{y = (E-A)^{-1}x, \ x \ge 0\}$.

Утверждение 3. Для продуктивной матрицы A справедливо $K^{\leq} \subset C$. Действительно, т.к. в данном случае $(E - A)^{-1} \ge 0$, то $K^{\leq} \subset R^n_+$, а система $(E - A^T)u = y$ $u \ge 0$ разрешима для $\forall y \in R^n$ (A^T-продуктивна).

Рассмотрим систему: $(E - A^T)u = (E - A)^{-1}x$ $u \ge 0$, $x \ge 0$, которая разрешима для любого $x \ge 0$. Отсюда $(E-A)(E-A^T)u = x$ $u \ge 0$ разрешима для любого $x \ge 0$.

Обозначим $\bar{A} = A + A^T - AA^T$ — симметричная матрица.

Утверждение 4 (аналог продуктивности для $\mathbb{A}$). Если A-продуктивна, то

1)$\forall x \ge 0$ совместна $(E - \bar{A})y = x$, $y \ge 0$;

2)$\exists(E\bar{A})^{-1} = B^T B > 0$;

3)если $\bar{A} \ge 0$, то $\bar{A}$ — продуктивна;

4)$E - \bar{A}$ — положительно определена.

Обозначим $\bar{B} = E + AA^T, \tilde{A} = A + A^T$ — симметричные матрицы.

Утверждение 5. Если A — продуктивна, то модель Неймана $\bar{B}x - \tilde{A}x \ge c$, $x \ge 0$ — продуктивна, т.е. разрешима для $\forall c \ge 0$; здесь $\bar{B} \ge 0$ — матрица производства, $\tilde{A}$ — матрица затрат.

Замечание. Пусть A — квадратная обратимая матрица. Тогда

1)система $A^T x - A^{-1}y = 0$, $x \ge 0$ $y > 0$ — совместна;

2)$AA^T x = y$, $x \ge 0$, $y > 0$ — совместна;

3)конус неравенств-следствий системы $Ax \le 0$ пересекается с конусом решений $Ax \ge 0$ по ненулевому вектору.

Они легко следуют из леммы Гордана.

Пункт 3) характеризует "обусловленность" систем неравенств.

Приведем еще один пример симметризации в модели Леонтьева. Отметим, что операции AA^T и $A + A^T$ предметно не интерпретируются и не сохраняют свойство продуктивности. Положим $\tilde{a}_{ij} = a_{ij}a_{ji}$ — относительный показатель затрат i-ого продукта на единицу i-ого продукта опосредованно через j. $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) = A \circ A^T$ где "$\circ$" адамово произведение матриц. $\tilde{A}$ — инвариантна относительно единиц измерения.

Утверждение 6. Если A — продуктивна, то $\tilde{A}$ — продуктивна и $(E - \tilde{A})$ положительно справедлива.

Действительно, нетрудно проверить,что сумма элементов в i-ой строке из $\tilde{A}$ равна i-ому диагональному элементу A^2, которые все строго меньше единицы: $(E - \tilde{A})$ — симметрична и все ее главные миноры положительны и потому $\tilde{A}$ — положительно определена.

Отметим, что в случае несовместности ограничений задачи ЛП, но наличия подзадач одинаково разрешимых с их противоположными, исходная задача (несобственная) корректируется этими подзадачами, причем в случае совместности ограничений происходит совпадения. Этот подход сводится к решению двойственной задачи перебором всех базисных решений, что исключает случай бесконечного значения (по симплекс-методу).

Работа поддержана грантами РФФИ (проект № 07-01-00399) и программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-5595.2006.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. И.И. Еремин. Теория линейной оптимизации. УНЦ РАН. Екатеринбург, 1998, 248 с.

2. Линейные неравенства и смежные вопросы. Сб.ред. Куна ИЛ Москва, 1959, 470 с.

3. С.Н. Черников. Линейные неравенства. Москва, 1968, 468 с.

4. Ронафеллао Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973, 470 с.

5. Хорн Р. Матричный анализ. М.: Мир, 1989, 656 с.

6. Н.Н. Астафьев. Линейные неравенства и выпуклость. М.: Наука, 1982, 152 с.

Астафьев Николай Николаевич, Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620219, Россия,
тел. (343)375-34-28, факс (343)374-25-81, E-mail: astnn@imm.uran.ru

ЗАДАЧА АЛЬТЕРНАТИВНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ С ПОРЯДКАМИ

В. Л. Береснев

Задача размещения предприятий (средств обслуживания) с неограниченными мощностями — хорошо известная задача дискретной оптимизации. Она формулируется как задача выбора из заданного множества возможных мест размещения предприятий некоторого подмножества, где размещаются (открываются) предприятия, удовлетворяющие потребности заданного множества потребителей. В задаче размещения на максимум для каждого места размещения предприятия заданы затраты на его открытие и доход, который получит это предприятие при обслуживании каждого потребителя. Требуется выбрать места открытия предприятий и прикрыть каждого потребителя к одному из открытых предприятий так, чтобы суммарный доход, получаемый всеми открытыми предприятиями за вычетом затрат на открытие предприятий был максимальным. Естественным обобщением этой задачи является задача размещения с порядками, где каждый потребитель выбирает обслуживающее его открытое предприятие, исходя из собственных предпочтений. В задаче с порядками предполагается, что предпочтения каждого потребителя могут быть формализованы посредством задания линейного порядка на множестве возможных мест размещения предприятий.

В предложенной задаче альтернативного размещения предприятий в отличие от классической задачи размещения рассматриваются два конкурирующих между собой производителя, открывающих свои предприятия в местах возможного размещения предприятий и стремящихся получить максимальную прибыль. Рассматриваемую ситуацию можно представить как следующий трехэтапный процесс:

1. Первый производитель открывает свои предприятия.

2. Второй производитель, зная размещение предприятий первого производителя, открывает свои предприятия.

3. Каждый потребитель, зная размещение предприятий обоих производителей и исходя из своих предпочтений, выбирает обслуживающее его предприятие и приносит доход первому или второму производителю.

Задача, формулируемая от лица первого производителя, состоит в том, чтобы выбрать размещение своих предприятий таким образом, чтобы получить максимальную прибыль при условии, что некоторые потребители будут обслуживаться предприятиями второго производителя, целью которого также является получение максимальной прибыли.

С использованием переменных классической задачи размещения предприятий задача альтернативного размещения предприятий с порядками записывается в виде задачи целочисленного линейного двухуровневого программирования следующим образом:

$$\max_{(x_i),(x_{ij})} \Big\{ -\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} d_j x_{ij} - \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} d_j \widetilde{z}_{ij} \Big\};$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} \le 1, \quad j \in J;$$

$$x_i \geq x_{ij}, \quad i \in I; j \in J;$$

$$x_i + \sum_{l \succ_j i} x_{lj} \leq 1, \quad i \in I; j \in J;$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I; j \in J;$$

$(\widetilde{z}_i), (\widetilde{z}_{ij})$ — оптимальное решение задачи:

$$\max_{(z_i),(z_{ij})} \Big\{ -\sum_{i \in I} g_i z_i + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} d_j z_{ij} \Big\};$$

$$\sum_{i \in I} z_{ij} \leq 1, \quad j \in J;$$

$$z_i \geq z_{ij}, \quad i \in I; j \in J;$$

$$x_i + z_i + \sum_{l \succ_j i} x_{lj} \leq 1, \quad i \in I; j \in J;$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I; j \in J.$$

Здесь

d_j — доход получаемый предприятием при обслуживании потребителя $j \in J$;

f_i — фиксированные затраты на открытие предприятия $i \in I$ первым производителем;

g_i — фиксированные затраты на открытие предприятия $i \in I$ вторым производителем;

$\prec_j$ — отношение линейного порядка на множестве I, реализующее предпочтения потребителя $j \in J$ при выборе им обслуживающего предприятия. Отношение $i \prec_j l$ означает, что для потребителя j предприятие i лучше чем предприятие l. Отношение $i \preccurlyeq_j l$ означает, что $i \prec_j l$ или $i = l$.

По аналогии с классической задачей размещения предприятий рассматриваемая задача может быть переписана в виде задачи двухуровневого псевдобулева программирования.

Для произвольного $(0,1)$– вектора $w = (w_i)(i \in I)$ положим $I_0(w) = \{i \in I | w_i = 0\}$. Для каждого $j \in J$ обозначим через $i_j(w)$ элемент $i_0 \in I_0(w)$, для которого $i_0 \preccurlyeq_j i$, при любом $i \in I_0(w)$. Если $I_0(w) = \emptyset$, то $i_j(w)$ есть элемент $i_0 \in I$, для которого $i_0 \succcurlyeq_j i, i \in I$.

Используя новые переменные

$$y_i = 1 - x_i, \quad i \in I;$$

$$u_i = 1 - z_i, \quad i \in I$$

перепишем задачу альтернативного размещения предприятий с порядками следующим образом:

$$\min_y \Big\{ f(y, \widetilde{u}) = -\sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{j \in J} d_j \prod_{i \preccurlyeq_j i_0(\widetilde{u})} y_i \Big\},$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad i \in I,$$

$\widetilde{u}$ — оптимальное решение задачи:

$$\min_u \Big\{ g(u,y) = -\sum_{i\in I} g_i u_i + \sum_{j\in J} d_j \prod_{i \prec_j i_0(y)} u_i \Big\};$$

$$u_i \in \{0,1\}, \quad i \in I.$$

Эта задача является двухуровневой и содержит в себе «внутреннюю» задачу отыскания по $(0,1)$–вектору y оптимального решения $\widetilde{u}$. Оптимальным решением приведенной задачи по определению считаем $(0,1)$–вектор y^*, если для него найдется оптимальное решение $\widetilde{u}^*$ внутренней задачи и если для любого $(0,1)$– вектора y найдется оптимальное решение $\widetilde{u}$ «внутренней» задачи такие, что $f(y^*,\widetilde{u}^*) \leq f(y,\widetilde{u})$.

Оптимальное решение рассматриваемой задачи может быть получено, например, в результате полного перебора (явного или неявного) всевозможных $(0,1)$–векторов y, определения для каждого вектора y некоторого оптимального решения $\widetilde{u}$ «внутренней» задачи и выбора пары $(y^*,\widetilde{u}^*)$ с наименьшим значением функции $f(y,\widetilde{u})$.

Идея предлагаемого эвристического алгоритма решения задачи альтернативного размещения предприятий с порядками состоит в замене процедуры перебора всевозможных $(0,1)$–векторов y на процедуру формирования конечной последовательности $(0,1)$–векторов $y^s, s = 1,\ldots,S$, задающих наилучшие размещения предприятий первого производителя с учетом «вероятных» размещений предприятий второго производителя. Для каждого вектора y^s вычисляется оптимальное решение $\widetilde{u}^s$ «внутренней» задачи и из множества пар $(y^s,\widetilde{u}^s), s = 1,\ldots,S$, выбирается пара $(y^0,\widetilde{u}^0)$ с наименьшим значением функции $f(y,\widetilde{u})$. Вектор y^0 является результатом работы алгоритма. «Вероятные» места размещения предприятий второго производителя при выборе решения y^s задаются $(0,1)$–вектором w^s, который строится с использованием найденных ранее оптимальных решений $\widetilde{u}^1,\ldots,\widetilde{u}^{s-1}$ «внутренней» задачи.

Работа алгоритма демонстрируется на числовом примере задачи. Приводятся результаты работы алгоритма на задачах большой размерности. В частности, приводятся результаты сравнительного анализа точности получаемых приближенных решений для некоторых классов задач альтернативного размещения предприятий с порядками, для которых возможно вычисление оптимального решения за полиномиальное время.

Работа поддержана грантом РФФИ 06–01–00075.

ЛИТЕРАТУРА

1. Береснев В.Л. Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. Новосибирск: Издательство Института математики, 2005.

Береснев Владимир Леонидович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 333-28-92, факс (383) 333-25-98, E-mail: beresnev@math.nsc.ru

НЕАДДИТИВНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И РЕШЕНИЯ РЕГУЛЯРНЫХ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР

В. А. Васильев

В докладе предлагаются и анализируются три схемы неаддитивного интегрирования, основанные на различных продолжениях интегрируемых функций и неаддитивных функций множества на соответствующие симметрические степени исходных измеримых пространств. Полученные результаты используются для интегральных представлений вектора Шепли и ядра - наиболее продвинутых классических решений теории кооперативных игр.

1. Приводимые ниже построения осуществимы, в большинстве своем, и для произвольного измеримого пространства (Q, Σ), где Q - непустое множество, а Σ - некоторая σ-алгебра его подмножеств (см. [1]). Однако, во избежание чисто технических сложностей, а также для уточнения и детализации некоторых результатов из [1] ограничимся случаем, когда Q - произвольный метрический компакт с метрикой d, а $\Sigma = B$, где B - борелевская σ-алгебра метрического пространства (Q, d). Из тех же соображений вместо произвольных игр ограниченной полиномиальной вариации в дальнейшем рассматриваются лишь так называемые регулярные игры (см. определение 3 ниже). Помимо традиционных понятий теории K-пространств [2], широко используется терминология и результаты работ [1,3,4].

Итак, пусть (Q, d) - произвольный непустой метрический компакт с метрикой d, а B - его борелевская σ-алгебра. Обозначим через $\mathcal{V}$ совокупность функций $v : B \to \mathbf{R}$, подчиненных требованию $v(\emptyset) = 0$. Согласно теоретико-игровой терминологии [4,5] тройку $\Gamma = (Q, B, v)$ будем называть кооперативной игрой, элементы множества Q - игроками, а подмножества $e \subseteq Q$, принадлежащие алгебре B - коалициями игроков. Напомним, что значение $v(e)$ интерпретируется как максимальный гарантированный доход коалиции e. В дальнейшем, как это принято, будем называть (кооперативными) играми и сами функции v.

Одной из главных задач теории кооперативных игр является изучение различных арбитражных схем, реализующих те или иные принципы справедливого распределения гарантированного дохода $v(Q)$ наибольшей коалиции Q между участниками игры Γ. К последним относится и схема, отвечающая вектору Шепли $\Phi(v)$, предложенному для случая конечного множества игроков еще в 1953 году. Бесконечномерный аналог этого решения изучался Р. Ауманом, Л. Шепли и рядом других авторов (см., например, [4]) преимущественно для специальных классов игр, порожденных суперпозициями вида $v = f \circ \mu$, где f - функция ограниченной вариации на отрезке $[0, 1]$, а μ - неатомическая вероятностная мера на борелевской σ-алгебре B.

Другое, не менее важное решение - ядро $C(v)$. Оно реализует принцип коалиционно-эффективного распределения величины $v(Q)$): ни один дележ из $C(v)$ не может быть улучшен ни одной из коалиций $e \in B$. Начиная с основополагающей работы О. Н. Бондаревой [6] здесь накоплен значительный объем информации, касающийся, в основном, сравнительного анализа и условий непустоты ядра как для конечных, так и для бесконечных игр. Вопросам строения множества $C(v)$ уделялось значительно меньше внимания.

2. Переходя к описанию изучаемых классов игр, введем необходимые понятия и обозначения. Пусть e - произвольный элемент алгебры B. Обозначим через $H(e)$ сово-

купность конечных B-измеримых разбиений множества e и положим $H = \cup_{e \in B} H(e)$. Далее, для каждого $\eta = \{e_i\}_1^m \in H$ и $v \in \mathcal{V}$ через $v(\eta) = v(\{e_i\}_1^m)$ будем обозначать полиномиальную разность функции v, определяемую формулой

$$v(\eta) = \sum_{\omega \subseteq \Omega_\eta} (-1)^{m-|\omega|} v(\cup_{i \in \omega} e_i),$$

где $\Omega_\eta = \{1, \ldots, m\}$, $\eta^\omega = \{e_i\}_{i \in \omega}$, а $|\omega|$ - число элементов множества $\omega \subseteq \Omega_\eta$. Число элементов в разбиении η будем называть порядком разности $v(\eta)$.

Определение 1 [3]. Величину $\|v\|_o = \sup \left\{ \sum_{\omega \subseteq \Omega_\eta} |v(\eta^\omega)| \;\middle|\; \eta \in H(Q) \right\}$ будем называть полиномиальной вариацией функции v. Будем говорить, что функция $v \in \mathcal{V}$ имеет ограниченную полиномиальную вариацию, если $\|v\|_o < \infty$.

Положим $V = \left\{ v \in \mathcal{V} \;\middle|\; \|v\|_o < \infty \right\}$ и опишем конус вполне положительных функций, наделяющий векторное пространство V с нормой $\| \cdot \|_o$ структурой KB-пространства [3].

Определение 2 [3]. Будем говорить, что функция $v \in \mathcal{V}$ вполне положительна, если все ее полиномиальные разности неотрицательны: $v(\eta) \geq 0, \;\eta \in H$.

Выпуклый конус вполне положительных функций $v \in \mathcal{V}$ обозначим через V_+. Нетрудно убедиться, что определяемый введённым конусом V_+ частичный порядок $u \;_o\!\geq v \Leftrightarrow u - v \in V_+$ вместе с нормой $\| \cdot \|_o$ и операциями поточечного сложения и умножения функций наделяет пространство V структурой нормированного полуупорядоченного кольца (в терминологии [2]). Более того, пространство V представляет собой KB-кольцо. В частности, оно является пространством Канторовича (и, тем самым, порядково полным относительно полуупорядоченности $_o\!\geq$).

Следуя стандартным обозначениям теории векторных решеток, для каждой функции $v \in V$ через $v^+, \; v^-$ и $|v|$ будем обозначать положительную, отрицательную и полную вариацию v , соответственно: $v^+ = v \vee 0, \;v^- = (-v) \vee 0, \;|v| = (-v) \vee v$, где, как обычно, через $u \vee w \;\; (u \wedge w)$ обозначается точная верхняя (нижняя) грань множества $\{u, w\}$ в полуупорядоченном пространстве $(V, \;\; _o\!\geq)$.

В пространстве V функций ограниченной полиномиальной вариации выделим интересующее нас подпространство регулярных функций множества. Обозначим через F семейство всех замкнутых подмножеств множества Q.

Определение 3 [3]. Функция $v \in V$ называется регулярной, если её полная вариация $|v|$ удовлетворяет условию:

$$|v|(\{e_i\}_1^m) = \sup \left\{ \, |v|(\{f_i\}_1^m) \;\middle|\; f_i \subseteq e_i, f_i \in F, \; i = 1, \ldots, m \right\}$$

для любого конечного разбиения $\eta = \{e_i\}_1^m \in H$. Совокупность регулярных функций множества обозначим через $rV = rV(B)$.

В работе [3] установлено, что полуупорядоченное нормированное векторное кольцо $(rV, \; _o\!\geq, \; \|\cdot\|_o)$, будучи замкнутым идеалом в банаховой решетке $(V, \; _o\!\geq, \; \|\cdot\|_o)$, является KB-кольцом и, в частности, всякая фундаментальная последовательность в rV имеет предел, являющийся регулярной функцией, а всякое ограниченное сверху или снизу (в смысле упорядоченности) множество элементов из rV имеет соответствующую точную грань, принадлежащую rV. Важной особенностью порядково полной банаховой решетки rV является тот факт, что норма $\|\cdot\|_o$ совместима с порядком $_o\geq$, т.е. монотонная (o)-сходимость влечет монотонную сходимость по норме полиномиальной вариации $\|\cdot\|_o$.

Основную роль в дальнейшем играют так называемые полиномиальные функции множества из rV, представляющие собой аналоги непрерывных полиномиальных функционалов в нормированных пространствах (см. [7]).

Определение 4 [3]. Функцию $v \in rV$ будем называть полиномиальной порядка n, если её полиномиальные разности порядка $n+1$ обращаются в нуль: для всех $\{e_i\}_1^{n+1} \in H$ выполняется равенство $v(\{e_i\}_1^{n+1}) = 0$. Совокупность всех таких функций обозначим через rV^n.

Определение 5 [3]. Положим $rpV = \cup_{n=1}^{\infty} rV^n$. Элементы семейства rpV будем называть (регулярными) полиномиальными функциями множества.

Определение 6 [3]. Будем говорить, что функция $v \in rV^n$ является однородной порядка n, если она дизъюнктна с пространством rV^{n-1} (т.е. $|v| \wedge |u| = 0$ для всех $u \in rV^{n-1}$). Совокупность всех однородных порядка n регулярных полиномиальных функций множества будем обозначать через $rV^{(n)}$.

В дальнейшем используются следующие свойства пространств rV^n, $rV^{(n)}$ и rpV.

Предложение 1. Кольцо rpV является нормальным подпространством (идеалом) пространства rV (т.е. $v \in rpV$ и $|v| \;\; _o\geq \;\; |u|$ влечет $u \in rpV$).

Предложение 2. Для всех $n \geq 1$ пространства rV^n и $rV^{(n)}$ являются замкнутыми компонентами (полосами) rV.

Из предложения 2 вытекает, в частности, что для каждой функции $v \in rV$ и для каждого $m \geq 1$ существует проекция $v_{(m)}$ на $rV^{(m)}$:

$$v_{(m)} = \sup\{u \in rV_+^{(m)} \mid v^+ \;\; _o\geq \;\; u\} - \sup\{w \in rV_+^{(m)} \mid v^- \;\; _o\geq \;\; w\};$$

при этом (по определению) справедлива импликация $v \in rV_+ \Rightarrow v_{(m)} \in rV_+^{(m)}$, где $rV_+^{(m)} = (rV^{(m)})_+$ - положительная часть[1] множества $rV^{(m)}$. Таким образом, для каждой функции $v \in rV$ определены её проекции $v_{(m)}$, $m = 1, \ldots$, на соответствующие пространства регулярных однородных полиномиальных функций. Выделим те функции $v \in rV$, для которых информация, заложенная в проекциях $v_{(m)}$, дает исчерпывающее описание v.

Определение 7 [3]. Функцию $v \in rV$ будем называть (регулярной) аналитической, если справедливо представление: $v = \sum_{m=1}^{\infty} v_{(m)}$, где сходимость ряда понимается в смысле сходимости соответствующих частных сумм по норме $\|\cdot\|_o$. Совокупность всех аналитических функций из rV будем обозначать через raV.

Особую роль в построении неаддитивного интегрирования играет следующее утверждение, установленное в [3] с использованием общей теории интегральных представлений, развитой Г.Шоке.

Теорема 1. Всякая регулярная функция множества, заданная на метрическом компакте, является аналитической.

[1] Здесь и далее для любого подмножества $W \subseteq V$ полагаем $rW_+ = W \cap rV_+$.

Согласно теореме 1 (представляющей и самостоятельный интерес), любая регулярная функция на метрическом компакте сколь угодно точно аппроксимируется (в норме $\|\cdot\|_o$) регулярными полиномиальными функциями множества. Поэтому для упрощения рассматриваемых в дальнейшем конструкций всюду ниже будем ограничиваться случаем регулярных полиномиальных функций.

3. Итак, пусть n-произвольное натуральное число. Зафиксируем $v \in rV^n$ и построим продолжение v на симметрическую степень $B^{[n]}$ алгебры B, определяемую следующим образом. Для каждого $e \in B$ положим $e^{[n]} = \{\tau \subseteq e \, \Big| |\tau| \leq n\}$, где, как и ранее, через $|\tau|$ обозначается мощность множества τ.

Определение 8 [3]. Наименьшую алгебру подмножеств множества $Q^{[n]}$, содержащую семейство $\{e^{[n]} \mid e \in B\}$, будем обозначать через $B^{[n]}$ и называть симметрической степенью (порядка n) алгебры B.

Распространим обозначения типа $e^{[n]}$ на элементы множества H: для каждого измеримого разбиения $\eta = \{e_1, \ldots, e_m\} \in H$ положим

$$\eta^{[n]} = \{\tau \in Q^{[n]} \, \Big| \, \tau \subseteq \cup_{i=1}^m e_i, \; \tau \cap e_i \neq \emptyset, \quad i = 1, \ldots, m\}.$$

В этих обозначениях строение алгебры $B^{[n]}$ принимает следующий вид.

Предложение 3 [1]. Алгебра $B^{[n]}$ состоит из всевозможных конечных объединений множеств вида $\eta^{[n]}$ ($\eta \in H$). При этом для каждого $E \in B^{[n]}$ существует разбиение $\eta \in H(Q)$ и семейство $\sigma(\eta, E)$ подмножеств множества Ω_η такое, что справедливо представление (называемое в дальнейшем каноническим):

$$E = \bigcup_{\omega \in \sigma(E,\eta)} (\eta^\omega)^{[n]}.$$

Сопоставим функции v конечно-аддитивную меру λ_v на $B^{[n]}$, определяемую формулой

$$\lambda_v(E) = \sum_{\omega \in \sigma(E,\eta)} v(\eta^\omega),$$

где η и $\sigma(E, \eta)$ задаются некоторым каноническим представлением E (корректность определения λ_v и её аддитивность вытекают из предложения 3). Учитывая регулярность v и компактность Q, нетрудно убедиться [3], что λ_v единственным образом продолжается до счетно-аддитивной меры μ_v на наименьшую σ-алгебру $\sigma B^{[n]}$, порождаемую алгеброй $B^{[n]}$ (здесь в качестве соответствующего компактного класса множеств можно взять всевозможные конечные объединения множеств вида $\{f_1, \ldots, f_m\}^{[n]}$ таких, что $\{f_i\}_1^m \in H, \; f_i \in F, \quad i = 1, \ldots, m$; см. [3] и имеющуюся там литературу). При этом оказывается [3], что $\sigma B^{[n]}$ допускает достаточно простое описание. Именно, полагая $d^{[n]}(\tau, \tau') = \min \; \{\epsilon \, \Big| \tau \subseteq \tau'_\epsilon, \tau' \subseteq \tau_\epsilon\}$, где τ_ϵ, τ'_ϵ - ϵ-окрестности множеств $\tau, \tau' \in Q^{[n]}$, видим, что функция $d^{[n]}$ является продолжением d на $Q^{[n]}$, совпадающим на $Q^{[n]}$ с известной метрикой Хаусдорфа, откуда вытекает, что пространство $(Q^{[n]}, d^{[n]})$ - метрический компакт. Более того, справедливо следующее утверждение.

Предложение 4 [3]. Алгебра $\sigma B^{[n]}$ совпадает с борелевской σ-алгеброй метрического компакта $(Q^{[n]}, d^{[n]})$.

Отметим сразу же, что для бесконечного Q множества $Q^{(n)} = \{\tau \in Q^{[n]} \big| \, |\tau| = n\}$ удовлетворяют соотношениям $Q^{(n)} \in \sigma B^{[n]} \setminus B^{[n]}, \; n = 2, \ldots$, удостоверяющим, что при каждом $n \geq 2$ алгебра $B^{[n]}$ является собственной подалгеброй алгебры $\sigma B^{[n]}$.

Пусть теперь f - произвольный элемент пространства $I(Q, B)$ всех ограниченных B-измеримых функций, а c - функция, заданная на вещественных кортежах[2] длины $m \leq n$, не зависящая от порядка расположения элементов в кортежах и такая, что $c(< x_1 >) = x_1$ для всех $x_1 \in \mathbf{R}$. Определим функцию $f_c^n : Q^{[n]} \to \mathbf{R}$ формулой

$$f_c^n(\tau) = c(< f(t_1), \ldots, f(t_m) >), \quad \tau = \{t_1, \ldots, t_m\} \in Q^{[n]}.$$

Функцию c назовем схемой продолжения (порядка n), а $f_c = f_c^n$ - c-продолжением функции f.

Введем, наконец, центральное понятие настоящего доклада.

Определение 9. Пусть $f \in I(Q, B)$, $v \in rV^n(B)$, а функция c является схемой продолжения порядка n. Будем говорить, что f является (v, c)-суммируемой, если интеграл $I_v^c(f) = \int f_c dv = \int_{Q^{[n]}} f_c^n d\mu_v$ существует и конечен; величину $\int f_c dv$ будем называть (v, c)-интегралом функции f.

Далее рассматриваются три варианта интегрирования по регулярным полиномиальным функциям множества, порождаемые следующими схемами продолжения:
1) $\sigma(< x_1, \ldots, x_m >) = \sum_{i=1}^m x_i/m$,
2) $\rho(< x_1, \ldots, x_m >) = \prod_{i=1}^m x_i$,
3) $s(< x_1, \ldots, x_m >) = \max\{x_i \big| \, i = 1, \ldots, m\}$.

4. Приведем определение одного из бесконечномерных аналогов вектора Шепли [3] (описание этого классического решения теории кооперативных игр, введенного для конечного числа игроков Л.Шепли в 1953г., можно найти, например, в [5]). Напомним [4], что подпространство $W \subseteq rV$ называется симметричным, если $\theta \circ v \in W$ для всех $\theta \in \mathcal{T}$ и $v \in W$, где $\mathcal{T}$ - группа автоморфизмов измеримого пространства (Q, B), а функции $\theta \circ v$ определяются по формуле $\theta \circ v \; (e) = v(\theta(e)), \; \theta \in \mathcal{T}, \;\; e \in B$. Отметим сразу же, что подпространства $rV^n, \; rV^{(n)}$, и rpV являются симметричными (как и в аддитивном случае, можно показать, что в рассматриваемой ситуации регулярность полиномиальных игр эквивалентна их теоретико-множественной непрерывности). Напомним ещё, что через Supp v обозначается совокупность всех носителей функции v : $\operatorname{Supp} v = \{R \in B \big| \, v(e \cap R) = v(e), \; e \in B\}$.

Определение 10. Вектором Шепли на симметричном подпространстве $W \subseteq rV$ будем называть линейный оператор $\Phi : W \to rV^1$, удовлетворяющий условиям:
$A1.$ $\Phi(v) \;\; {}_o\!\geq \; 0, \quad v \in W \cap rV_+$;
$A2.$ $\Phi(\theta \circ v) = \theta \circ \Phi(v), \quad \theta \in \mathcal{T}, \quad v \in W$;
$A3.$ $\Phi(v)(R) = v(Q), \quad R \in \operatorname{Supp} v, \quad v \in W$.

Если вектор Шепли формализует представление о справедливом распределении величины $v(Q)$ (см., например, [5]), то другой принцип оптимальности - ядро - описывает такие распределения $v(Q)$, которые не в состоянии улучшить своими силами ни одна из коалиций $e \in B$. Формальное описание ядра $C(v)$ игры v имеет следующий вид

$$C(v) = \{\nu \in rV^1 \big| \, \nu(Q) = v(Q), \; \nu(e) \geq v(e), \quad e \in B\}.$$

[2]Напомним, что вещественным кортежем длины m называется допускающая повторения конечная последовательность $< x_1, \ldots, x_m >$ элементов $x_i \in \mathbf{R}$.

Первый критерий непустоты ядра $C(v)$ для конечных игр был предложен в 1962 г. О.Н.Бондаревой [6]. Среди бесконечных игр, имеющих непустое ядро, следует отметить прежде всего так называемые выпуклые игры: игра $v \in \mathcal{V}$ называется выпуклой, если для любых $e, e' \in B$ выполняется неравенство $v(e \cup e') + v(e \cap e') \geq v(e) + v(e')$.

Переходя к основным результатам доклада, относящимся к интегральному представлению вектора Шепли и опорной функции H_v ядра игры v, определяемой формулой

$$H_v(f) = \sup \left\{ \int f d\nu \,\middle|\, \nu \in C(v) \right\}, \quad f \in I(Q, B),$$

сформулируем необходимые дополнительне определения.

Определение 11 [1]. Функционалом Шепли на произведении пространств rpV и B будем называть отображение $Sh : rpV \times B \to \mathbf{R}$, определяемое формулой

$$Sh(v, f) = \int f_\sigma dv, \quad v \in rpV, \quad f \in B.$$

Важную роль как в прикладных, так и в теоретических вопросах, связанных с исследованием вектора Шепли, играют так называемые полярные формы однородных полиномиальных игр, порождаемые ассоциированными с этими играми обобщенными расширениями Оуэна.

Определение 12 [3]. Обобщенным расширением Оуэна на произведении пространств rpV и B будем называть отображение $P : rpV \times B \to \mathbf{R}$, определяемое по формуле

$$P(v, f) = \int f_\rho dv, \quad v \in rpV, \quad f \in B.$$

Напомним [3], что через fV обозначается совокупность всех игр с конечным носителем: $fV = \{v \in V \mid \exists R \in \operatorname{Supp} v : \ (|R| < \infty)\}$, а через $rpNA$ - замыкание в норме $\|\cdot\|_o$ подпространства игр rpV, представимых в виде суперпозиции $v = f \circ \nu$, где ν - неатомическая вероятностная мера на B, а f - вещественная функция ограниченной вариации на отрезке $[0, 1]$, непрерывная в концах этого отрезка и принимающая нулевое значение в точке 0. Всюду далее, как обычно, через χ_e обозначается индикаторная функция множества $e \in B$.

Теорема 2. Линейный оператор Φ_*, определенный на rpV формулой

$$\Phi_*(v)(e) = Sh(v, \chi_e), \quad e \in B,$$

удовлетворяет условиям A1 - A3, характеризующим вектор Шепли. Более того, всякий линейный оператор $\Phi : rpV \to rV^1$, удовлетворяющий условиям A1 - A3, совпадает с Φ_* на подпространствах fV и $rpNA$.

Теорема 2 дает интегральное представление для вектора Шепли, справедливое для всех регулярных полиномиальных игр. Если ограничиться только однородными играми из rpV, удается получить важную дополнительную информацию, указывающую на тесную взаимосвязь между вектором Шепли и так называемой полярной формой [1] однородной игры v. Всюду далее для $v \in rV^{(n)}$ через P_v^* будем обозначать полярную форму однородного полиномиального функционала $P_v(\cdot) = P(v, \cdot)$, заданного на $I(Q, B)$. Напомним [1,7], что P_v^* является непрерывным полилинейным

симметрическим функционалом на пространстве $I(Q,B)^n$, удовлетворяющим условию
$$P_v^*(f,\ldots,f) = P_v(f), \quad f \in I(Q,B).$$

Теорема 3. Пусть v принадлежит $rV^{(n)}$. Тогда для каждой коалиции $e \in B$ справедливо равенство
$$\Phi_*(v)(e) = P_v^*(\chi_e, \chi_Q, \ldots, \chi_Q).$$

В заключение приведем формулу, дающую интегральное представление опорной функции ядра регулярной выпуклой игры в терминах неаддитивного интегрирования.

Теорема 4. Для любой выпуклой игры $v \in rpV$ справедлива формула
$$H_v(f) = \int f_s dv, \quad f \in I(Q,B).$$

В докладе обсуждается также ряд вопросов, связанных с применением полученных результатов при вычислении вектора Шепли для игр с бесконечным числом участников, а также при анализе других принципов оптимальности (множества Харшаньи, Вебера, Шепли и т.п.).

Работа поддержана грантами РГНФ 05-02-02005а и РФФИ 07-06-00363.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Васильев. Функционал Шепли и полярные формы однородных полиномиальных игр. // Математические труды. 1998. Т. 1, № 2. С. 24-67.

2. Б.З. Вулих. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: ГИФМЛ, 1961.

3. В.А. Васильев. Об одном пространстве неаддитивных функций множества. // Оптимизация. 1975. Вып. 16(33). С. 99-120.

4. Р. Ауман, Л. Шепли. Значения для неатомических игр. М.: Мир,1977.

5. И. Розенмюллер. Кооперативные игры и рынки. М.: Мир, 1974.

6. О.Н. Бондарева. Теория ядра в игре n лиц. // Вестник ЛГУ, сер. мат., мех., астрон. 1962. Вып. 13. С. 141-142.

7. Э. Хилле, Р. Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ,1962.

Васильев Валерий Александрович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр-т Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 333-26-83, факс (383) 333-25-98, E-mail: vasilev@math.nsc.ru

ЗАДАЧА ВЫБОРА ПОДМНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ С МАКСИМАЛЬНОЙ СУММОЙ

Э. Х. Гимади

1. Введение. В докладе рассматриваются дискретные оптимизационные задачи, связанные с выбором из конечного семейства векторов в евклидовом пространстве R^k подмножества векторов с максимальной нормой суммы. В общем случае эти задачи NP-трудны, что стимулирует выделение таких подклассов этих задач, для которых оказывается возможным построение точных, либо приближенных алгоритмов полиномиальной или псевдополиномиальной временной сложности.

Полученные результаты могут быть использованы для решения задачи выбора фиксированного числа фрагментов в числовой последовательности квазипериодически повторяющегося фрагмента при заданном числе повторов. Подобная ситуация типична для таких приложений, как электронная разведка, радиолокация, телекоммуникация, геофизика, обработка речевых сигналов, медицинская и техническая диагностика и др. [2,4]

Далее под нормой будем понимать евклидову норму в k-мерном пространстве R^k, т. е. $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2}$.

В качестве основных задач рассматриваем следующие две:

Задача 1: *Задано конечное семейство векторов $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ в евклидовом пространстве R^k и натуральное число $m < n$. Требуется найти подсемейство векторов из V мощности m, обладающее максимальной нормой суммы.*

Запишем задачу 1 в терминах целочисленного программирования:

$$\sum_{i=1}^{k}\Big(\sum_{j=1}^{n} v_{ij}x_j\Big)^2 \to \max; \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = m; \tag{2}$$

$$x_j \in \{0,1\},\ 1 \le j \le n. \tag{3}$$

Задача 2: *Задано конечное семейство векторов $V = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ в евклидовом пространстве R^k и натуральные числа m и l, удовлетворяющие условию $lm < n$. Требуется выделить в V подсемейство векторов $X = \{\vec{v}_{a_1}, \vec{v}_{a_2}, \ldots, \vec{v}_{a_m}\}$, обладающее максимальной нормой суммы при условии $a_{i+1} - a_i \ge l$ для $i = 1, 2, \ldots, m-1$.*

В случае $k \le l$ вторая задача связана с целесообразным поиском сигналов в импульсной последовательности, зашумленной аддитивным шумом [2, 4].

2. Известные факты о сложности и алгоритмах решения задач 1 и 2.

Теорема 1. [1] *Задачи 1 и 2 NP-трудны.*

Теорема 2. [1] *Задача 1 решается с гарантированной относительной погрешностью, не превышающей величины $\frac{k-1}{8L^2}$ за время*

$$O\Big(nk^2(2L+1)^{k-1}\Big),$$

где L — параметр алгоритма.

Теорема 3. [1] *При фиксированной размерности k пространства R^k задача 1 решается асимптотически точно при выборе параметра $L = L(n)$, где $L(n)$ — произвольная неограниченно растущая функция от n.*

Тем самым для случая фиксированной размерности k пространства R^k установлено построение полиномиальной аппроксимационной схемы. Действительно, положим относительную погрешность равной $\varepsilon = \frac{k-1}{8L^2}$. Тогда $L = (\frac{k-1}{8\varepsilon})^{1/2}$ и для времени решения получим оценку

$$O\Big(nk^2\Big(\sqrt{\frac{k-1}{2\varepsilon}}+1\Big)^{k-1}\Big).$$

Теорема 4. [1] *Задача 2 решается с гарантированной относительной погрешностью, не превышающей $\frac{k-1}{8L^2}$, за время*

$$O\Big(nk(k+m)(2L+1)^{k-1}\Big).$$

Пусть b — максимальная по абсолютной величине координата векторов из семейства V.

Теорема 5. [1] *Если размерность k пространства R^k фиксирована, то задача 1 с целочисленными координатами входных векторов решается точно алгоритмом с параметром $L = 0,5kmb$ за псевдополиномиальное время $O(nk^2(kmb)^{k-1})$.*

3. Алгоритмы в духе динамического программирования для решения задачи 1 с целочисленными координатами векторов.

3.1. Случай неотрицательных целочисленных координат векторов.

Рассмотрим сначала случай векторов в положительном ортанте.

Обозначим через $\vec{B} \in Z_+^{k-1}$ вектор с компонентами $B_i = \sum_{r=1}^{m} v_{i,\sigma_r(i)},\ 1 \le i < k$, где $\sigma(i)$ — перестановка, упорядочивающая элементы $(v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$ i-й строки матрицы (v_{ij}) по невозрастанию; $\mathcal{B} = \{\vec{\beta} \in Z_+^{k-1} \mid 0 \le \vec{\beta} \le \vec{B}\}$.

Теорема 6. *Пусть $f_{mn}(\vec{\beta})$ — максимум функции*

$$\Big\{\sum_{j=1}^{n} v_{kj}x_j \;\Big|\; \sum_{j=1}^{n} v_{ij}x_j = \beta_i,\ 1 \le i < k;\ \sum_{j=1}^{n} x_j = m;\ x_j \in \{0,1\},\ 1 \le j \le n\Big\}.$$

Тогда оптимум задачи 1 с целочисленными неотрицательными координатами векторов равен

$$S^* = \max\Big\{\sum_{i=1}^{k-1}\beta_i^2 + f_{mn}^2(\vec{\beta}) \;\Big|\; \vec{\beta} \in \mathcal{B}\Big\}.$$

Доказательство. Задачу 1 в форме (1)-(3) запишем в эквивалентном виде

$$\sum_{i=1}^{k-1}\beta_i^2 + \Big(\sum_{j=1}^{n} v_{kj}x_j\Big)^2 \to \max; \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_{ij}x_j = \beta_i,\ 1 \le i < k; \tag{5}$$

$$\vec{\beta} \in \mathcal{B}; \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = m; \tag{7}$$

$$x_j \in \{0,1\},\ 1 \le j \le n, \tag{8}$$

откуда непосредственно следует справедливость требуемого равенства.

Алгоритм $\widetilde{A}$ вычисления оптимумов $\{f_{mn}(\vec{\beta}) \;\Big|\; \vec{\beta} \in \mathcal{B}\}$.

Введем обозначение $< m, n;\ \vec{\beta} >$ для задачи отыскания оптимума $f_{mn}(\vec{\beta})$ и пусть $\{< \mu, j;\ \vec{\beta} > \Big| \ 1 \le \mu \le j \le n;\ 0 \le \vec{\beta} \le \vec{B}\}$ — семейство подзадач с соответствующими оптимумами $f_{\mu,j}(\vec{\beta})$.

Через $\widetilde{f}_{\mu,j}(\vec{\beta})$ обозначим оптимум в такой подзадаче $< \mu, j;\ \vec{\beta} >$, в которой выбирается μ векторов среди $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j$ с предписанным выбором последнего вектора $\vec{v}_j$.

Описание алгоритма $\widetilde{A}$.

Предварительный шаг:

a) $f_{1,j}(\vec{\beta}) := \infty;\ \widetilde{f}_{1,j}(\vec{\beta}) := \infty$ для всяких $j = 1, \ldots, n$ и $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$.
b) $\widetilde{f}_{1,j}(\vec{v_j}) := v_{kj}$ для всякого $j = 1, \ldots, n$.
c) $f_{1,j}(\vec{\beta}) := \max\{\widetilde{f}_{1,j}(\vec{\beta});\ f_{1,j-1}(\vec{\beta})\}$ для всяких $j = 1, \ldots, n$ и $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$.

Общий шаг $\mu = 2, \ldots, m$:

a) $\widetilde{f}_{\mu,j}(\vec{\beta}) := \infty$ для всяких $j = \mu, \ldots, n$ и $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$.
b) Для всяких $\vec{\beta} \in \mathcal{B}$ положить

$$\widetilde{f}_{\mu,j}(\vec{\beta}) = \begin{cases} f_{\mu,\mu}(\vec{\beta}) & \text{при } j = \mu, \\ v_{k,j} + f_{\mu,j-1}(\vec{\beta} - \vec{v_j}), & \text{если } \mu < j \le n; \end{cases}$$

$$f_{\mu,j}(\vec{\beta}) = \begin{cases} \widetilde{f}_{\mu,\mu}(\vec{\beta}) & \text{при } j = \mu, \\ \max\{f_{\mu,j}(\vec{\beta});\ \widetilde{f}_{\mu,j-1}(\vec{\beta})\}, & \text{если } \mu < j \le n. \end{cases}$$

Из описания алгоритма $\widetilde{A}$ следует

Теорема 7. *Если размерность k пространства R^k фиксирована, то задача 1 с целочисленными неотрицательными координатами векторов решается точно за псевдополиномиальное время $O\Big(mn \prod_{i=1}^{k-1} B_i\Big)$.*

3.2. Случай входных векторов $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ с целочисленными координатами произвольного знака.

Модифицируем алгоритм $\widetilde{A}$ решения задачи 1 на случай входных векторов $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ с целочисленными координатами произвольного знака.

Пусть теперь $B_i = \sum_{r=1}^{m} \big(v_{i,\sigma_r(i)} - v_{i,\sigma_r(n-i+1)}\big),\ 1 \le i < k$, являются компонентами вектора $\vec{B} \in Z_+^{k-1}$; $\mathcal{B} = \{\vec{\beta} \in Z_+^{k-1} \mid 0 \le \vec{\beta} \le \vec{B}\}$; $b'_i = \min\{v_{ij} \mid 1 \le j \le n\}$ $1 \le i \le k$.

Положив $v'_{ij} = v_{ij} - b'_i$, имеем матрицу (v'_{ij}) с неотрицательными целочисленными элементами. Применив алгоритм $\widetilde{A}$ к задаче 1 с модифицированной входной матрицей (v'_{ij}), получим оптимум исходной задачи со входом $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$:

$$S^* = \max\Big\{\sum_{i=1}^{k-1}(\beta_i - mb'_i)^2 + \Big(f_{mn}(\vec{\beta}) - mb'_k\Big)^2 \;\Big|\; \vec{\beta} \in \mathcal{B}\Big\}.$$

Заметим, что утверждение теоремы 6 в случае координат произвольного знака остается в силе. Однако есть отличие в оценке временной сложности, если оценить компоненты вектора $\vec{B}$ в терминах величины b (максимального абсолютного значения среди координат входных векторов в семействе V):

Теорема 8. *Если размерность k пространства R^k фиксирована, то задача 1 с целочисленными координатами векторов решается точно за псевдополиномиальное время $O\Big(mn(mb)^{k-1}\Big)$ (в случае неотрицательных координат) и $O\Big(mn(2mb)^{k-1}\Big)$ (в случае координат произвольного знака).*

Заключительные замечания.

1) Аналогичные алгоритмические построения в духе динамического рограммирования применимы также для решения задачи 2.

2) Остается открытым вопрос о сложностном статусе основных задач 1 и 2 при фиксированной размерности пространства R^k.

3) Представленные в докладе результаты получены в ходе совместной работы по грантам РФФИ и ИНТАС (проект 04-77-7173) с моими коллегами — А.Е. Бабуриным, Н.И. Глебовым и А.В. Пяткиным [1].

4) Наше внимание к рассмотрению данного класса задач дискретной оптимизации было инициировано А.А. Кельмановым [4].

Работа поддержана грантами РФФИ (коды проектов 05-01-00395, 07-07-00022, 07-07-00168).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Бабурин, Э. Х. Гимади, Н. И. Глебов, А. В. Пяткин. Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом // Дискрет. анализ и исслед. операций, Серия 2, 2007, Т. 14, N 1.

2. Э.Х. Гимади, А.В. Кельманов, М.А. Кельманова, С.А. Хамидуллин. Апостериорное обнаружение в числовой последовательности квазипериодически повторяющегося фрагмента при заданном числе повторов // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. IX, N(25). С. 55–74.

3. М. Гэри, Д. Джонсон. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи М.: Мир. 1982.

4. А.В. Кельманов, М.А. Кельманова, С.А. Хамидуллин. Апостериорное обнаружение одинаковых подпоследовательностей-фрагментов в квазипериодической последовательности // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. V, N 2(10). С. 94-108.

Гимади Эдуард Хайрутдинович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383-3) 33-21-89, факс (8-383-3) 33-25-98, E-mail:gimadi@math.nsc.ru

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА НЬЮТОНА

Ю. Г. Евтушенко, А. И. Голиков

Большие задачи линейного программирования (ЛП), как правило, имеют неединственное решение. Различные методы решения задач ЛП (симплекс-метод, метод внутренних точек, метод квадратичной штрафной функции) дают возможность получать различные решения в случае неединственности. Так симплекс-метод дает решение, которое принадлежит вершине многогранного множества. Методы внутренней точки сходятся к решению, в котором выполнено условие строгой дополняющей нежесткости. Метод внешней квадратичной функции дает возможность найти точное нормальное решение. Предлагается метод решения задач ЛП, использующий новые вспомогательные функции типа модифицированной функции Лагранжа. Его применение к двойственной задаче ЛП дает возможность получить точную проекцию заданной точки на множество решений прямой задачи ЛП в результате однократной безусловной минимизации вспомогательной кусочно квадратичной функции, начиная с некоторого значения коэффициента штрафа. Подставляя найденную проекцию во вспомогательную функцию и вновь минимизируя ее, находим некоторое точное решение двойственной задачи линейного программирования. Аналогично показано как, применяя вспомогательную квадратичную функцию к прямой задаче ЛП, при конечном значении коэффициента штрафа получить точную проекцию заданной точки на множество решений двойственной задачи ЛП. Предложен простой итеративный процесс, в котором, начиная с произвольного коэффициента штрафа, получаются точные решения прямой и двойственной задачи за конечное число шагов. Применение обобщенного метода Ньютона для минимизации введенных вспомогательных функций дает возможность находить решения для задач ЛП с очень большим числом неизвестных при умеренном числе ограничений. Метод был реализован в системе MATLAB. Вычислительные эксперименты показали высокую эффективность метода при решении задач ЛП с большим числом неизвестных (несколько десятков миллионов) и средним числом ограничений (несколько тысяч). Время решения таких задач на компьютере P-IV с тактовой частотой 2.6 ГГц составляло от несколько десятков сек. до полутора часов. Сравнение с некоторыми известными коммерческими (например, CPLEX) и исследовательскими программами показали полное преимущество программной реализации нового метода в системе MATLAB при решении задач большой размерности и близкие результаты по времени решения задач малой размерности. Метод хорошо поддается распараллеливанию. Как показали эксперименты число ограничений в задаче ЛП при использовании 8 процессоров можно увеличить до 30 тысяч.

Работа поддержана грантом РФФИ 06-01-00547 и Программой поддержки ведущих научных школ НШ-2240.2006.1.

Евтушенко Юрий Гаврилович, Вычислительный центр им А.А.Дородницына РАН, ул. Вавилова 40, Москва, 119991, Россия, тел. (495) 135-00-20. E-mail: evt@ccas.ru

Голиков Александр Ильич, Вычислительный центр им А.А.Дородницына РАН, ул. Вавилова 40, Москва, 119991, Россия, тел. (495) 135-61-61. E-mail: gol@ccas.ru

ЗАДАЧА ГЛОБАЛЬНОЙ ТРАССИРОВКИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СБИС

А. И. Ерзин, В. В. Залюбовский, Ю. В. Шамардин

Задача глобальной трассировки является одним из важнейших этапов проектирования сверхбольших интегральных схем (СБИС), на котором для каждой сети определяется множество используемых областей трассировки в условиях ограничений на трассировочные ресурсы и время передачи сигнала [1].

Постановка задачи

Задан неориентированный граф $G = (V, E)$ с множеством вершин V и множеством ребер E. Каждому ребру $(i, j) \in E$ поставлены в соответствие длина l_{ij}, емкостное сопротивление (емкость) c_{ij}, сопротивление r_{ij} и трассировочный ресурс Q_{ij}. Трассировке подлежит множество сетей общим числом S. Каждая *сеть* $s = 1, \ldots, S$ задается множеством терминалов $V^s \subseteq V$. Некоторые терминалы соответствуют *основным входам* с заданными временами поступления сигнала или *основным выходам* с заданными директивными временами получения сигнала. Для терминала $i \in V^s$ задана его емкость c_i^s. В каждой сети есть корневой терминал 0^s, имеющий сопротивление r_0^s.

Задержка сигнала в модели Эльмора вычисляется следующим образом [2]. Пусть имеется дерево T с корнем в вершине 0. Обозначим P_k — путь из вершины 0 в вершину k в дереве T, T_j — поддерево T с корнем в вершине j, $C_j = \sum_{(i,j)\in T_j} c_{ij} + \sum_{i\in T_j} c_i$ — суммарная емкость поддерева T_j. Время прохождения сигнала по ребру $(i, j) \in T$ вычисляется по формуле

$$d_{ij} = r_{ij}\left(\frac{c_{ij}}{2} + C_j\right). \tag{1}$$

Время прохождения сигнала от корневой вершины 0 до вершины k в дереве T равно $t_k = r_0 C_0 + \sum_{(i,j)\in P_k} d_{ij}$.

Рассматриваемая задача глобальной трассировки заключается в отыскании для каждой сети s такого дерева Штейнера T^s, связывающего вершины V^s, что каждое ребро $(i, j) \in E$ входило бы не более чем в Q_{ij} различных деревьев, и время прихода сигнала на основные выходы не превосходило требуемых значений. Эта задача является NP-трудной [3].

Метод решения

Для решения задачи предлагается итеративная процедура. Вначале с помощью алгоритма MAD для каждой сети s строится множество Q^s деревьев-кандидатов. Затем осуществляется выбор по одному дереву из каждого множества Q^s, $s = 1, \ldots, S$, путем рассмотрения нелинейной задачи целочисленного программирования, минимизирующей сумму штрафов за превышение трассировочных ресурсов. Градиентным алгоритмом находится решение ее релаксации и с помошью нескольких эвристик строится приближенное целочисленное решение.

После этого вычисляются времена прихода сигнала в каждый терминал. Если времена прихода сигнала в основные выходы превышают директивные, то находятся критические пути, сети и терминалы, после чего критические сети помещаются в начало общего списка сетей и повторяются описанные выше шаги. Деревья-кандидаты для критических сетей строятся с учетом задержек в критические терминалы. В результате может получиться другое решение и другие критические сети. Итерации повторяются до тех пор, пока не будет найдено допустимое решение исходной задачи, либо число итераций не превысит заданный лимит.

Алгоритм MAD строит дерево для каждой сети в некотором связном подграфе $G' = (V', E')$, где V' содержит все терминалы этой сети. Для всех ребер $(i,j) \in E'$ вычисляются значения d_{ij} по формуле (1), после чего из G' удаляются те ребра, остаточный трассировочный ресурс которых меньше целого q, являющегося параметром алгоритма MAD.

Приведем описание алгоритма MAD.

Алгоритм MAD

Шаг 0. Положим дерево $T = (0, \emptyset)$, и задержку в корневой вершине $t_0 = 0$.

Шаг 1. Найдем $(i,j) = \arg \min\limits_{(u,v)\in E';\ u\in T,\ v\notin T} \{t_u(T \cup \{(u,v)\}) + d_{uv}\}$, где

$$t_u(T \cup \{(u,v)\}) = t_u(T) + r_0(c_{uv} + c_v) + \sum_{e\in P_u} r_e(c_{uv} + c_v).$$

Положим $T = T \cup \{(i,j)\}$ и пересчитаем задержки $t_k,\ k \in T$.

Если вершина $j \in T$ не является терминалом, то полагаем $t_j = t_i + d_{ij}$, а задержки t_k во все остальные вершины дерева T оставляем неизменными.

Если вершина j – терминал, то начиная с каждой висячей вершины $k \in T$, удаляем ребра в пути из k до первой вершины дерева T, принадлежащей некоторому ранее построенному пути в какой-либо терминал. Затем пересчитываем задержки в вершинах полученного дерева.

Если не все терминалы сети включены в дерево T, то возвращаемся в начало Шага 1.

Алгоритм MAD является модификацией алгоритма Дейкстры, но не гарантирует нахождение оптимального решения в силу специфики задержек Эльмора.

Вид строящегося дерева зависит от графа G', параметра q и значений d_{ij}. В качестве G' можно использовать граф Ханана, минимальную прямоугольную решетку, содержащую множество терминалов сети, или весь граф G и др. Величины d_{ij} зависят от общей емкости C_j дерева T_j. Если для вычисления задержек используется текущее дерево, значения d_{ij} могут измениться, и последующее применение алгоритма MAD может дать другое дерево.

Алгоритм MAD применяется итеративно, используя текущее дерево для вычисления задержек d_{ij} и последующей перестройки дерева. Варьируя параметр q, можно увеличивать число различных деревьев.

Рассмотрим более детально задачу оптимального распределения трассировочных ресурсов, т. е. задачу выбора деревьев из множеств Q^s. Пусть для каждой сети s найдено множество деревьев-кандидатов Q^s. Будем использовать индекс $i \in I = E$ для ребер графа G и индекс $j \in J = \cup_{s=1}^{S} Q^s$ для деревьев. Положим $a_{ij} = 1$, если $i \in j$, и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Переменная x_j выбора дерева j принимает значение $x_j = 1$, если дерево j выбрано, и $x_j = 0$ в противном случае.

В принятых обозначениях рассматривается задача:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in I}\Big(\max\Big\{0, \sum\limits_{j\in J} a_{ij}x_j - q_i\Big\}\Big)^2 \to \min\limits_{x_j\in\{0,1\}}; \\ \sum\limits_{j\in Q^s} x_j = 1, \quad s = 1,\ldots,S. \end{cases} \tag{2}$$

Целевая функция равна сумме штрафов за превышение трассировочных ресурсов $q_i,\ i \in I$.

Заменяя условие целочисленности переменных условием их неотрицательности, получаем непрерывную релаксацию задачи (2). Гладкость и выпуклость функционала позволяет применить для ее решения следующий градиентный алгоритм.

Градиентный алгоритм

Обозначим $f(y) = \sum_{i \in I}(\max\{0, y_i - q_i\})^2$, где $y_i = \sum_{j \in J} a_{ij}x_j$.

Шаг 0. Задаем начальную точку, например, $\tilde{x}_j = 1/|Q^s|,\ j \in Q^s,\ s = 1, \ldots, S$. Вычисляем $\tilde{y}_i = \sum_{j \in J} a_{ij}\tilde{x}_j,\ i \in I$, и полагаем нижнюю оценку L оптимума задачи равной нулю.

Шаг 1. Вычисляем $g_i = \max\{0, \tilde{y}_i - q_i\},\ i \in I$ и $f(\tilde{y}) = \sum_{i \in I}(g_i)^2$. В силу выпуклости функции $f(y)$, имеем

$$f(y) \geq f(\tilde{y}) + \nabla f(\tilde{y})(y - \tilde{y}) = f(\tilde{y}) + \sum_{i \in I} 2g_i(y_i - \tilde{y}_i),$$

где y — произвольная допустимая точка. Найдем минимум последнего выражения, решая задачу

$$\sum_{i \in I} g_i y_i = \sum_{i \in I} g_i \sum_{j \in J} a_{ij}x_j = \sum_{j \in J}\Big(\sum_{i \in I} g_i a_{ij}\Big)x_j \to \min_x .$$

Последняя распадается на независимые подзадачи для каждой сети s. В результате получаем

$$\min_x \sum_{j \in J}\Big(\sum_{i \in I} g_i a_{ij}\Big)x_j = \sum_{s=1}^{S} \min_{j \in Q^s}\Big(\sum_{i \in I} g_i a_{ij}\Big).$$

Обозначим $GY = \sum_{i \in I} g_i\tilde{y}_i$; $GA_j = \sum_{i \in I} g_i a_{ij}$, $j_s = \arg\min_{j \in Q^s} GA_j$ и $GZ = \sum_{s=1}^{S} GA_{j_s} - GY$. Тогда $f(y) \geq f(\tilde{y}) + 2GZ$. Теперь мы можем пересчитать нижнюю оценку $L = \max\{L, f(\tilde{y}) + 2GZ\}$.

Если $f(\tilde{y}) - L \leq \varepsilon \max\{1, L\}$, где $\varepsilon > 0$ — требуемая точность, то вычисления заканчиваются.

В противном случае находим направление спуска $\delta = (\delta_j)$ с компонентами

$$\delta_j = \begin{cases} 1 - \tilde{x}_j, & \text{при } j = j_s; \\ -\tilde{x}_j, & \text{при } j \neq j_s; \end{cases} \qquad j \in Q_s,\ s = 1, \ldots, S;$$

и вектор $z = (z_i)$ с компонентами $z_i = \sum_{j \in J} a_{ij}\delta_j,\ i \in I$. Отметим, что направление спуска δ ведет из текущей точки $\tilde{x}$ в целочисленную точку $x = (x_j)$, где $x_j = 1$, если $j \in \{j_1, \ldots, j_S\}$, и $x_j = 0$ в противном случае.

Для вычисления длины шага $t \in (0, 1]$ можно искать минимум функции $h(t) = f(\tilde{y} + zt) = \sum_{i \in I}(\max\{0, \tilde{y}_i - q_i + z_i t\})^2$, но мы воспользуемся более простой функцией $r(t) = \sum_{i \in I}(g_i + z_i t)^2$. Легко проверить, что $h(0) = r(0)$, $h'(0) = r'(0)$ и $h(t) \leq r(t)$ при всех $t \in [0, 1]$. Пусть $\tilde{t} = \arg\min\{r(t) | t \in [0, 1]\} = \min\{1, -GZ/ZZ\}$, где $GZ = \sum_{i \in I} g_i z_i$ и $ZZ = \sum_{i \in I}(z_i)^2$. Если текущая точка $\tilde{y}$ не оптимальна, то $h'(0) < 0$ и, следовательно, $r'(0) < 0$. Поэтому $\tilde{t} > 0$. Неравенство $h(0) > h(\tilde{t})$ следует из соотношений $h(0) = r(0) > r(\tilde{t}) \geq h(\tilde{t})$, т. е. $\tilde{t}$ действительно понижающий шаг.

Переходим в новую точку, полагая $\tilde{x}_j = \tilde{x}_j + \delta_j\tilde{t},\ j \in J$; $\tilde{y}_i = \tilde{y}_i + z_i\tilde{t},\ i \in I$, и возвращаемся в начало Шага 1.

Описанный градиентный алгоритм является достаточно эффективным. Временная сложность каждой итерации составляет $O(|I| \cdot |J|)$, а общее число итераций не превосходит $O(\varepsilon^{-1} \ln \varepsilon^{-1})$.

Эффективность предлагаемого метода решения задачи глобальной трассировки подтверждается результатами вычислительных экспериментов на тестовых примерах, содержащих от 1900 до 3500 сетей. Число альтернативных деревьев в каждой сети было от 2 до 20. Число ребер графа G изменялось от 4100 до 7400. Время счета одного примера колебалось от нескольких секунд до нескольких минут.

Работа поддержана грантом Интел “Модели и методы трассировки при проектировании СБИС” и грантом РФФИ 05-01-00395.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Hu, S. S. Sapatnekar. A Survey on Multi-net Global Routing for Integrated Circuits. // Integration, the VLSI Journal. 2002. V. 31. P. 1–49.

2. J. Rubinstein, P. Penfield, M. A. Horowitz. Signal Delay in RC Tree Networks. // IEEE Trans. on CAD. 1983. V. 2. P. 201–211.

3. M.R. Kramer, J. van Leenwen. Wire-Routing is NP-Complete. // Technical Report RUU-CS-84-4, Department of Computer Science, Rijksuniversiteit Utrecht. 1982.

Ерзин Адиль Ильясович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Россия, тел. (8-383) 333-37-88, факс (8-383) 333-25-98, E-mail: adil@math.nsc.ru

Залюбовский Вячеслав Валерьевич, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Россия, тел. (8-383) 333-21-89, факс (8-383) 333-25-98, E-mail: slava@math.nsc.ru

Шамардин Юрий Владиславович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Россия, тел. (383) 333-37-88, факс (8-383) 333-25-98, E-mail: orlab@math.nsc.ru

ТЕОРЕМЫ О НЕВОЗМОЖНОСТИ КОРРЕКТНОГО АГРЕГИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СУБЪЕКТОВ И ПОКАЗАТЕЛЕЙ В РАМКАХ СОВРЕМЕННОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

В.И.Зоркальцев

Экономика может считаться наукой в той мере, в какой она базируется на четко определенных показателях. Без этого она останется на уровне преднаучных рассуждений о неоднозначно воспринимаемых категориях [1]. Есть основания считать, что многие экономические дискуссиии и разногласия, особенно по макроэкономическим проблемам, порождены неоднозначностью в определениях агрегированных экономических параметров [2].

В данном докладе представлены результаты теоретических исследований процедур агрегирования экономических субъектов и экономических показателей. Обе процедуры агрегирования будем рассматривать на классической (для современной экономической теории) модели выбора покупателя. Полученные результаты несложно распространить на экономические модели выбора продавцов и производителей.

Пусть $j = 1, \dots, n$ – номера рассматриваемых товаров при $n \geq 2$. Обозначим R^n_+, R^n_{++} – множества номеров векторов с неотрицательными и положительными всеми компонентами.

Агрегирование покупателей. Пусть приобретаемые данным покупателем блага составляют вектор

$$Q(P, v, U) = argmax \left\{ U(Q) : Q \in R^n_+, \sum_{j=1}^{n} P_j Q_j = v \right\}, \quad (1)$$

зависящий от вектора цен $P \in R^n_{++}$, располагаемых доходов $v \geq 0$ и от функции полезности U. Обозначим Ψ – множество функций U от векторов R^n_+ таких, что вектор-функция $Q(P, v, U)$ однозначно определяется условием (1) и дифференцируема по v. Например, Ψ принадлежат псевдовыпуклые на R^n_+ функции, часто рассматривамые в качестве функций полезности [3].

Функцию полезности $U \in \Psi$ назовем **квазиоднородной**, если при любых $P \in R^n_{++}, v \geq 0, \lambda \geq 0$

$$Q(P, \lambda v, U) = \lambda Q(P, v, U).$$

Функции полезности $U, \tilde{U}$ из Ψ назовем **квазиэквивалентными**, если при любых $P \in R^n_{++}, v \geq 0$

$$Q(P, v, U) = Q(P, v, \tilde{U}).$$

Пусть U^i – функции полезности с номерами $i = 0, \dots, k$ при $k \geq 2$. Функции полезности с номерами $i = 1, \dots, k$ будем называть **индивидуальными**, с номером $i = 0$ – **коллективной**. Индивидуалные и коллективную функции полезности будем называть **согласованными**, если при любых $P \in R^n_{++}, v^i \geq 0, i = 1, \dots, k$

$$Q(P, \sum_{i=1}^{k} v^i, U^i) = \sum_{i=1}^{k} (Q(P, v^i, U^i).$$

Зоркальцев Валерий Иванович, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (8-3952) 42-88-27, факс (8-3952) 42-67-96, E-mail:zork@isem.sei.irk.ru

То есть постулируется, что сумма объемов выбираемых индивидуально благ должна составлять объем благ, который выбирает агрегированный покупатель. В [4, 5] анонсирована и в [6] доказана

Теорема 1. *Требование согласованности индивидуальных и коллективной функций полезности из класса Ψ выполняется в том и только том случае, если все индивидуальные и коллективная функция полезности квазиэквивалентные и квазиоднородные.*

Свойства квазиэквивалентности и квазиоднородности функций полезности находятся в противоречии с исходными положениями экономической теории и с элементарной житейской практикой. Эти свойства означают, что все покупатели в одних и тех же ценовых условиях должны иметь одинаковую структуру объемов приобретаемых благ. Конечно, в реальной жизни так не бывает и одним из основных мотивов введения в экономическую теорию функций полезности было стремление отразить в ней объективно существующие различия потребностей и вкусов разных людей и их групп. Причем общеизвестно, что с изменениями уровня доходов соотношение объемов потребляемых разных благ отдельными „домашними хозяйствами“ и социальными группами меняется.

Агрегирование показателей. Эту проблему рассмотрим применительно к задаче построения агрегированных индексов цен и объемов товаров. Обозначим $I_p^{\tau t}, I_q^{\tau t}$ – искомые индексы цен и объемов рассмариваемых товаров с номерами $j = 1, \ldots, n$, сопоставляющими период t с периодом τ, $t > \tau$. Существует большое количество методов расчета этих индексов, нередко приводящих к существено разным результатам [7-10]. Различные, предназначенные для статистической практики методы расчета индексов можно представить как функции четырех векторов из R^n_{++}:

$$I_p^{\tau t} = f(P^\tau, Q^\tau, P^t, Q^t), \quad I_q^{\tau t} = \varphi(Q^\tau, P^\tau, Q^t, P^t).$$

Здесь P^τ, Q^τ, P^t, Q^t – векторы цен и объемов товаров периода τ, с которым производится сравнение, и периода t, который сравнивается. Обозначим Φ – множество отображений четырех векторов из R^n_{++} в R^1_+.

Аксиоматический анализ методов расчета индексов дает доказательство невозможности построения идеальных методов, удовлетворяющих всем необходимым требованиям. Приводимые ниже требования к функциям f и φ, сформулированные на основе тестов Фишера [8], являются общепризнанными условиями „правильности“ построения индексов.

1. **Мультипликативность** (тест стоимости) – произведение индексов цен и объмов товаров должно дать темп роста стоимости товаров

$$I_p^{\tau t} \times I_q^{\tau t} = \sum_{j=1}^{n} P_j^t Q_j^t / \sum_{j=1}^{n} P_j^\tau Q_j^\tau. \tag{2}$$

2. **Требования о среднем** – индексы цен (объемов) должны быть средней величиной темпов роста цен (объемов) отдельных товаров

$$max_{j=1,\ldots,n} P_j^t / P_j^\tau \geq I_p^{\tau t} \geq min_{j=1,\ldots,n} P_j^t / P_j^\tau, \tag{3}$$

$$max_{j=1,\ldots,n} Q_j^t / Q_j^\tau \geq I_q^{\tau t} \geq min_{j=1,\ldots,n} Q_j^t / Q_j^\tau. \tag{4}$$

3. **Транзитивность** – для трех периодов времени τ, t, l

$$I_p^{\tau t} \times I_p^{tl} = I_p^{\tau l}, \tag{5}$$

$$I_q^{\tau t} \times I_q^{tl} = I_q^{\tau l}. \tag{6}$$

В [11, 12] доказана

Теорема 2. Требования (2) – (6) являются противоречивыми. В множестве Φ не существует отображений f и φ, для которых выполняются все эти требования.

В связи с выявившейся неразрешимостью проблемы построения индексов в рамках статистического подхода полезно рассмотреть возможность формирования хотя бы теоретических (пусть не пригодных в явном виде для практики) непротиворечивых концепций формирования индексов. На эту роль претендуют индексы в непрерывном времени Ф. Дивизиа [13] и аналитические индексы, введенные А. Конюсом [14].

Пусть $P(s), Q(s)$ – дифференцируемые вектор-функции времени s из R^n_{++}, компоненты которых соответствуют ценам и потокам объема товаров $j = 1, \dots, n$. Индексами цен и объемов Дивизиа, сопоставляющими момент времени t с моментом времени τ будут величины

$$D_p^{\tau t} = exp \int_\tau^t \sum_{j=1}^n \frac{Q_j(s)}{V(s)} dP_j(s), \quad D_q^{\tau t} = exp \int_\tau^t \sum_{j=1}^n \frac{P_j(s)}{V(s)} dQ_j(s),$$

где

$$V(s) = \sum_{j=1}^n P_j(s) Q_j(s)$$

– поток стоимости все товаров в момент времени t.

Индексы Дивизия удовлетворяют требованию мультипликативности

$$D_p^{\tau t} \times D_q^{\tau t} = V(t)/V(\tau)$$

и требованиям транзитивности. Вместе с тем эти индексы могут приводить к странным с экономических позиций результататм. Так, возможна такая траектория изменения цен и объемов товаров [15], у которой конечное состояние совпадает с исходным

$$P(t) = P(\tau), \quad Q(t) = Q(\tau)$$

и при этом индексы Дивизиа показывают возрастание цен и снижение объемов

$$D_p^{\tau t} > 1, \quad D_q^{\tau t} < 1.$$

Это, в частности, означает нарушение требования о среднем значении – темпы роста за период $[\tau, t]$ всех цен и объемов в этом случае равны 1. Главной "странностью" индексов Дивизиа, иллюстрируемой указанным примером, является их зависимость от траектории. Если бы в течение всего периода $[\tau, t]$ векторы цен и объемов оставались неизменными, то оба индекса Дивизиа имели бы равное единице значение.

Аналитическая концепция индексов [10, 15, 16] исходит из того, что цены и объемы товаров формируются не произвольно, а взаимосвязанно, например, из модели выбора покупателя (1). Причем, как показано в [15], аналитические индексы, дабы избежать неоднозначности в их определении, следует рассматривать в рамках индексов непрерывного времени Дивизиа.

Пусть $U \in \Psi, P(s)$ – дифференцируемая вектор-функция со значениями в $R^n_{++}, v(s)$ – дифференцируемая функция с положительными значениями от времени $s \in [\tau, t]$. Тогда дифференцируемой при $s \in [\tau, t]$ будет вектор-функция

$$Q(s) = argmin\left\{U(Q) : \sum_{j=1}^{n} P_j(s)Q_j = v(s), Q \in R^n_+\right\}. \tag{7}$$

Траекторию изменения цен и объемов $P(s), Q(s)$ при $s \in [\tau, t]$ будем называть **порожденной функцией полезности** $U \in \Psi$, если $Q(s)$ выражается в виде (7) при некоторой функции потока располагаемых доходов $v(s) > 0$ для $s \in [\tau, t]$. Функцию полезности $U \in \Psi$ будем называть **порождающей инвариантные к траекториям индексы Дивизиа**, если для любых двух траекторий, порожденных данной функцией полезности, $P(s)$, $Q(s)$ и $\widetilde{P}(s), \widetilde{Q}(s)$, $s \in [\tau, t]$ при одинаковых начальных и конечных состояниях, т.е. когда

$$P(\tau) = \widetilde{P}(\tau), \quad Q(\tau) = \widetilde{Q}(\tau), \quad P(t) = \widetilde{P}(t), \quad Q(t) = \widetilde{Q}(t),$$

индексы Дивизиа совпадают

$$D^{\tau t}_p = \widetilde{D}^{\tau t}_p, \quad D^{\tau t}_q = \widetilde{D}^{\tau t}_q.$$

Здесь: $D^{\tau t}_p, D^{\tau t}_q$ – индексы цен и объемов Дивизиа для траектории $P(s), Q(s)$; $\widetilde{D}^{\tau t}_p, \widetilde{D}^{\tau t}_q$ – индексы цен и объемов для траектории $\widetilde{P}(s), \widetilde{Q}(s)$.

Справедлива

Теорема 3. *Функция полезности $U \in \Psi$ будет порождающей инвариантные к траекториям индексы Дивизиа в том и только том случае, если эта функция квазиоднородная.*

Работа поддержана грантом РГНФ 06-02-00266а .

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. М. Кейнс. Общая теория занятости, процента и денег. М.: Ил, 1948.
2. Э. Фельс, Г. Тинтнер. Методы экономического анализа. М.: Прогресс, 1971.
3. И. Экланд. Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983.
4. В.И. Зоркальцев. Проблемы агрегирования в экономике: есть ли логическая совместимость микроэкономики и макроэкономики? Иркутск.: Препринт ИСЭМ СО РАН, 1997.
5. В.И. Зоркальцев. Корректное агрегирование покупателей в рамках современной экономической теории невозможно // Информационный бюллетень ассоциации математического программирования. Научное издание. Екатеринбург.: УрО РАН, 1994.
6. В.И. Зоркальцев. Агрегирование экономических субъектов. Иркутск.: Препринт ИСЭМ СО РАН, 2000.
7. Л.С. Казинец. Теория индексов. М.: Госстатиздат, 1963.
8. И. Фишер. Построение индексов. М.: ЦСУ СССР, 1928.
9.В.И. Зоркальцев. Измерители ценности денег(проблемы и методы расчета индексов цен). Иркутск.: СЭИ СО РАН, 1992.
10. Р. Аллен. Экономичсекие индексы. М.: Статистика, 1980.
11. В.И. Зоркальцев. Индексы цен. Сыктывкар.: Препринт Коми НЦ УрО АН СССР,

1991.
12. В.И. Зоркальцев. Аксиоматический анализ методов расчета индексов цен // Экономика и математические методы, 1993. №2.
13. Devisia. Economic rationelec. Paris, 1928.
14. А.А. Конюс. Проблема истинности индекса стоимости жизни // Экономический бюллетень Конъюнктурного института, 1929. №9-10.
15. В.И. Зоркальцев Индексы цен и инфляционные процессы. Новосибирск: Наука, 1996.
16. В.Н. Горбунов. Математические модели потребительского спроса. М.: Экономика, 2004.

ЗАДАЧИ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА НАСЛЕДСТВЕННЫХ СИСТЕМАХ

В. П. Ильев

1. Наследственные системы и жадные алгоритмы

Пусть U — конечное множество и $\mathcal{A} \subseteq 2^U$ — непустое семейство его подмножеств, удовлетворяющее следующей *аксиоме наследственности*: $A \in \mathcal{A},\ A' \subseteq A \Rightarrow A' \in \mathcal{A}$. Пара $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ называется *системой независимости* или *наследственной системой* на U. Множества семейства $\mathcal{A}$ называются *независимыми*, все остальные подмножества U — *зависимыми*. Семейство всех зависимых множеств обозначим $\mathcal{D}$. Очевидно, что $\mathcal{D}$ обладает свойством *наследственности "вверх"*: $D \in \mathcal{D},\ D \subseteq D' \Rightarrow D' \in \mathcal{D}$. Поскольку каждое из семейств $\mathcal{A}, \mathcal{D}$ однозначно определяет наследственную систему $\mathcal{S}$, будем записывать $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ или $\mathcal{S} = (U, \mathcal{D})$ в зависимости от того, какая сторона наследственной системы будет нас интересовать.

Базами системы $\mathcal{S}$ называются максимальные по включению независимые множества, а *циклами* — минимальные по включению зависимые множества.

Объектом нашего исследования будут оптимизационные задачи вида:

$$\max\{f(X) : X \in \mathcal{B}\}, \tag{1}$$

$$\min\{f(X) : X \in \mathcal{C}\}, \tag{2}$$

где $\mathcal{B}$ — семейство всех баз, $\mathcal{C}$ — семейство всех циклов некоторой наследственной системы $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A}) = (U, \mathcal{D})$, а $f : 2^U \to R_+$ — неотрицательная функция множеств.

Задачи комбинаторной оптимизации на наследственных системах и их частных случаях — матроидах и коматроидах являются обобщениями очень многих сложных в вычислительном отношении практически важных задач, таких как задача о рюкзаке, задача о максимальном независимом множестве вершин графа, задача о p-медиане, задача о покрытии множества, задача о минимальном k-связном остовном подграфе и другие. Как правило, оптимизационные задачи на наследственных системах являются NP-трудными.

В большинстве задач, математическими моделями которых являются задачи (1) и (2), целевые функции являются аддитивными, субмодулярными или супермодулярными. Напомним, что функция множеств $f : 2^U \to R_+$ называется *субмодулярной*, если для любых $X, Y \subseteq U$ выполняется неравенство $f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \le f(X) + f(Y)$, и *супермодулярной*, если имеет место обратное неравенство. В случае равенства функцию f будем называть *модулярной*. Несложно показать, что неубывающая функция множеств с условием $f(\emptyset) = 0$ модулярна тогда и только тогда, когда она аддитивна.

В качестве приближенного метода решения задачи (1) рассмотрим следующий

Алгоритм GA (*жадный алгоритм*).

Шаг 0. $X_0 \leftarrow \emptyset$, перейти на шаг 1.

Шаг i $(i \ge 1)$. Выбрать такой $x_i \notin X_{i-1}$, что $f(X_{i-1} \cup \{x_i\}) = \max\limits_{\substack{x \notin X_{i-1},\\ X_{i-1} \cup \{x\} \in \mathcal{A}}} f(X_{i-1} \cup \{x\})$.

$X_i \leftarrow X_{i-1} \cup \{x_i\}$, перейти на шаг $i+1$. Если такого $x_i \notin X_{i-1}$ нет, то $GA \leftarrow X_{i-1}$.

Конец.

Для приближенного решения задачи (2) будем применять следующий "обратный" аналог жадного алгоритма.

Алгоритм GR.
Шаг 0. $X_0 \leftarrow U$, перейти на шаг 1.
Шаг i ($i \geq 1$). Выбрать такой $x_i \in X_{i-1}$, что $f(X_{i-1} \setminus \{x_i\}) = \min\limits_{\substack{x \in X_{i-1},\\ X_{i-1}\setminus\{x\}\in\mathcal{D}}} f(X_{i-1} \setminus \{x\})$. $X_i \leftarrow X_{i-1} \setminus \{x_i\}$, перейти на шаг $i+1$. Если такого $x_i \in X_{i-1}$ нет, то $GR \leftarrow X_{i-1}$.
Конец.

Заметим, что алгоритм **GA** всегда находит базу, а алгоритм **GR** — цикл наследственной системы, т. е. множество GA является допустимым решением задачи (1), а GR — допустимым решением задачи (2).

2. Задачи с аддитивными и модулярными целевыми функциями

Рассмотрим два важных частных случая наследственных систем.

Пусть $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A}) = (U, \mathcal{D})$ — произвольная наследственная система и $W \subseteq U$. *Базой множества* W называется любое максимальное по включению независимое множество, содержащееся в W. *Циклом множества* W назовем любое минимальное по включению зависимое множество, содержащее W. Определим величины

$$c_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}) = \min_{\substack{W\subseteq U,\\ W\notin\mathcal{A}}} \frac{r_{\min}(W)}{r_{\max}(W)}, \quad c_{\mathcal{D}}(\mathcal{S}) = \max_{\substack{W\subseteq U,\\ W\notin\mathcal{D}}} \frac{g_{\max}(W) - |W|}{g_{\min}(W) - |W|},$$

где $r_{\min}(W)$ и $r_{\max}(W)$ — минимальная и максимальная мощности баз множества W, а $g_{\min}(W)$ и $g_{\max}(W)$ — минимальная и максимальная мощности циклов множества W, соответственно. Очевидно, что $c_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}) \leq 1 \leq c_{\mathcal{D}}(\mathcal{S}) \leq n-1$ для любой системы $\mathcal{S}$.

Наследственная система $\mathcal{S}$ называется *матроидом*, если $c_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}) = 1$, и *коматроидом*, если $c_{\mathcal{D}}(\mathcal{S}) = 1$. Число $r_{\max}(U)$ называются *рангом* матроида, а $g_{\max}(\emptyset)$ — *обхватом* коматроида. Примерами могут служить *p-униформный* матроид $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ и *p-униформный* коматроид $\mathcal{S}' = (U, \mathcal{D}')$, где $\mathcal{A} = \{A \subseteq U : |A| \leq p\}$, $\mathcal{D}' = \{D \subseteq U : |D| \geq p\}$, p — натуральное число, $p < |U|$.

Следующая теорема — один из центральных результатов теории матроидов.

Теорема 1 (Радо-Эдмондс) [5, 12]. *Пусть $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ — наследственная система на конечном множестве U. Алгоритм* **GA** *находит оптимальное решение задачи (1) на системе $\mathcal{S}$ для любой аддитивной целевой функции $f : U \to R_+$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}$ — матроид.*

Этот результат может быть обобщен на случай произвольной модулярной функции. Для задачи (2) справедлива теорема, аналогичная теореме Радо-Эдмондса.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{S} = (U, \mathcal{D})$ — наследственная система. Алгоритм* **GR** *находит оптимальное решение задачи (2) на системе $\mathcal{S}$ для любой модулярной целевой функции тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}$ — коматроид.*

Для задачи минимизации аддитивной функции подобный результат доказан в [6].

Как следует из теоремы 1, если наследственная система отлична от матроида, то жадный алгоритм может не найти оптимальное решение задачи (1) с аддитивной целевой функцией. В работах [8, 9] получена оценка погрешности алгоритма **GA** для задачи максимизации аддитивной функции на наследственной системе:

$$\frac{f(GA)}{f(OPT)} \geq c_{\mathcal{A}}(\mathcal{S}), \tag{3}$$

где OPT — оптимальное решение задачи (1).

В работе [6] доказана аналогичная оценка погрешности алгоритма **GR** для задачи (2) минимизации аддитивной функции на наследственной системе:

$$\frac{f(GR)}{f(OPT)} \leq c_{\mathcal{D}}(\mathcal{S}). \tag{4}$$

Привлечение дополнительной информации о целевой функции позволяет получить более точные, чем (3) и (4), оценки погрешности алгоритмов **GA** и **GR** для задач (1) и (2) с аддитивными целевыми функциями.

Кроме того, в работе [2] доказано, что задача (2) с аддитивной целевой функцией эквивалентна задаче о покрытии множества, что дает возможность применять известные результаты для задачи о покрытии к конкретным оптимизационным задачам, являющимся частными случаями (2).

3. Задачи с последовательными целевыми функциями

Если целевая функция задачи (1) на матроиде не является модулярной, то жадный алгоритм может не найти оптимальное решение. В то же время существуют задачи на матроидах с немодулярными целевыми функциями, в которых жадный алгоритм гарантированно находит оптимальное решение. В этом разделе охарактеризован класс целевых функций задач (1) на матроидах, разрешимых жадным алгоритмом, и приведено обобщение теоремы Радо-Эдмондса.

Пусть U конечное множество, $f : 2^U \to R_+$. Рассмотрим множество $V \subseteq U$ мощности $|V| \geq 3$ и натуральное число $k \leq |V| - 2$. Упорядоченное множество $X = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset V$ будем называть *GA-подмножеством* множества V, если

$f(\{x_1\}) \geq f(\{x\})$ для любого $x \in V$,

$f(\{x_1, x_2\}) \geq f(\{x_1, x\})$ для любого $x \in V \setminus x_1$,

....

$f(X) \geq f(\{x_1, \ldots, x_{k-1}, x\})$ для любого $x \in V \setminus \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$.

Функция множеств $f : 2^U \to R_+$ называется *GA-последовательной*, если для любого множества $V \subseteq U$ мощности $|V| \geq 3$ и любого его GA-подмножества $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ имеют место неравенства $f(V \setminus x_k) \leq f(V \setminus x)$ для всех $x \in V \setminus X$.

Заметим, что любая аддитивная функция является GA-последовательной.

Доказано следующее обобщение теоремы Радо-Эдмондса для задачи (1).

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ — наследственная система. Алгоритм* **GA** *находит оптимальное решение задачи (1) на системе $\mathcal{S}$ для любой GA-последовательной функции множеств $f : 2^U \to R_+$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{S}$ матроид.*

Справедлив также следующий критерий разрешимости жадным алгоритмом задачи (1) на матроиде.

Теорема 4. *Пусть $f : 2^U \to R_+$ — неотрицательная функция множеств. Алгоритм* **GA** *находит оптимальное решение задачи (1) с целевой функцией f на произвольном матроиде $\mathcal{S} = (U, \mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда функция f является GA-последовательной.*

Аналогичные результаты получены для задачи (2): охарактеризован класс целевых функций задач (2) на коматроидах, разрешимых алгоритмом **GR** (класс *GR-последовательных* функций), и доказано обобщение теоремы 2 для задачи (2) на наследственной системе с целевой функцией из этого класса.

4. Задачи с субмодулярными и супермодулярными целевыми функциями

Рассмотрим задачу (1), в которой $\mathcal{B}$ — семейство баз матроида ранга p, а $f : 2^U \to R_+$ — неубывающая субмодулярная функция множеств, $f(\emptyset) = 0$. Частным случаем задачи (1) является известная *задача о p-медиане на максимум* с целевой функцией $f(X) = \sum\limits_{j\in J} \max\limits_{i\in X} c_{ij}$, где (c_{ij}) — неотрицательная матрица размера $n \times m$ с множеством индексов строк U и множеством индексов столбцов J.

В работе [4] получена оценка погрешности алгоритма **GA** для задачи о p-медиане на максимум:

$$\frac{f(GA)}{f(OPT)} \geq 1 - \left(\frac{p-1}{p}\right)^p \geq \frac{e-1}{e} \approx 0,63. \quad (5)$$

В [10] оценка (5) была обобщена для задачи максимизации неубывающей субмодулярной функции на p-униформном матроиде. В статье [3] эта оценка была уточнена с учетом дополнительной информации о целевой функции:

$$\frac{f(GA)}{f(OPT)} \geq \frac{1}{c}\left(1 - \left(\frac{p-c}{p}\right)^p\right),$$

где $c \in [0, 1]$ — характеристика неубывающей субмодулярной функции f, описывающая замедление ее роста. Величина c определяется следующим образом:

$$c = \max_{\substack{x\in U,\\ f(\{x\})>f(\emptyset)}} \frac{f(\{x\}) - f(\emptyset) - (f(U) - f(U\setminus\{x\}))}{f(\{x\}) - f(\emptyset)},$$

причем $c = 0$ тогда и только тогда, когда f аддитивна (при условии $f(\emptyset) = 0$).

Рассмотрим теперь вариант задачи (2), в котором $\mathcal{C}$ — семейство циклов коматроида обхвата p, а $f : 2^U \to R_+$ — невозрастающая супермодулярная функция множеств, $f(U) = 0$. Эта задача является обобщением *задачи о p-медиане на минимум* с целевой функцией $f(X) = \sum\limits_{j\in J} \min\limits_{i\in X} c_{ij}$, где (c_{ij}) — неотрицательная матрица размера $n\times m$ с множеством индексов строк U и множеством индексов столбцов J. Легко видеть, что после доопределения $f(\emptyset) = \max\limits_{\substack{X,Y\subseteq U,\\ X\cap Y=\emptyset}} \{f(X) + f(Y) - f(X\cup Y)\}$ невозрастающая целевая функция задачи о p-медиане на минимум становится супермодулярной.

К сожалению, алгоритм **GR** может давать сколь угодно плохое решение задачи минимизации супермодулярной функции. Кроме того, известно, что существование полиномиального алгоритма, который бы решал задачу о p-медиане на минимум с гарантированной оценкой погрешности, не превосходящей константы, означало бы, что $P = NP$ [11].

Однако, привлечение дополнительной информации о целевой функции задачи (2) делает возможным получение гарантированных оценок погрешности алгоритма **GR**.

Определим *крутизну* невозрастающей супермодулярной функции f как

$$s = \max_{\substack{x\in U,\\ f(\{x\})<f(\emptyset)}} \frac{f(\emptyset) - f(\{x\}) - (f(U\setminus\{x\}) - f(U))}{f(\emptyset) - f(\{x\})}.$$

Параметр s характеризует замедление убывания функции f. Нетрудно показать, что $s \in [0, 1]$, и что $s = 0$ тогда и только тогда, когда f — модулярная функция.

В работе [1] для функций крутизны $s < 1$ получены следующие оценки погрешности алгоритма **GR** минимизации невозрастающей супермодулярной функции на p-униформном коматроиде:

$$\frac{f(GR)}{f(OPT)} \leq \frac{1}{t}\left(\left(\frac{q+t}{q}\right)^q - 1\right) \leq \frac{e^t - 1}{t},$$

где $q = n - p$, а $t = s/(1-s)$. В статье [7] этот результат обобщен для задачи (2) минимизации невозрастающей супермодулярной функции на произвольном коматроиде обхвата p.

Как следствие получены оценки погрешности алгоритма **GR** для общей задачи о p-медиане на минимум в терминах матрицы (c_{ij}).

ЛИТЕРАТУРА

1. В.П. Ильев. Оценка точности алгоритма жадного спуска для задачи минимизации супермодулярной функции // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1998. Т. 5, N 4. С. 45-60.
2. В.П. Ильев, А.С. Талевнин. Две задачи на наследственных системах // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т. 10, N 3. С. 54-66.
3. M. Conforti, G. Cornuejols. Submodular set functions, matroids and the greedy algorithm: Tight worst-case bounds and some generalizations of the Rado-Edmonds theorem // Discrete Appl. Math. 1984. V. 7, N 3. P. 251-274.
4. G. Cornuejols, M.L. Fisher, G.L. Nemhauser. Location of bank accounts to optimize float: An analytic study of exact and approximate algorithms // Management Science. 1977. V. 23. P. 789-810.
5. J. Edmonds. Matroids and the greedy algorithm // Math. Programming. 1971, V. 1, N 2. P. 127-136.
6. V. Il'ev. Hereditary systems and greedy-type algorithms // Discrete Appl. Math. 2003. V. 132, N 1-3. P. 137-148.
7. V. Il'ev, N. Linker. Performance guarantees of a greedy algorithm for minimizing a supermodular set function // European J. Oper. Res. 2006. V. 171, N 2. P. 648-660.
8. Th.A. Jenkyns. The efficacy of the "greedy" algorithm // Proc. 7th S-E Conf. Combinatorics, Graph Theory and Computing. 1976. P 341-350.
9. B. Korte, D. Hausmann. An analysis of the greedy heuristic for independence systems // Annals of Discrete Mathematics. 1978. V. 2. P. 65-74.
10. G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey, M.L. Fisher. An analysis of approximations for maximizing submodular set functions – I // Math. Programming. 1978. V. 14. P. 265-294.
11. G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey. Integer and combinatorial optimization. New York.: John Wiley & Sons, Inc., 1988.
12. R. Rado. Note on independence functions // Proc. London. Math. Soc. 1957. V. 7, N 3. P. 300-320.

Ильев Виктор Петрович,
Омский государственный университет, пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96. E-mail: iljev@math.omsu.omskreg.ru

ПОЛИНОМИАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЕ И NP-ТРУДНЫЕ ВАРИАНТЫ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ОБНАРУЖЕНИЯ В ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПОВТОРЯЮЩЕГОСЯ ФРАГМЕНТА

А. В. Кельманов

Изложены некоторые результаты по исследованию сложности, решению и систематизации дискретных экстремальных задач, к которым сводятся различные варианты обобщенной проблемы оптимального обнаружения в числовой последовательности повторяющегося фрагмента. Анализируется нетрадиционный слабо изученный подход к проблеме, состоящий в формализации содержательного варианта задачи как задачи принятия решения (проверки гипотез) при апостериором (off-line) способе компьютерной обработки последовательности. Рассматриваемые задачи возникают в приложениях, связанных с анализом и распознаванием потоков (массивов) зашумленных структурированных данных — результатов измерения характеристик изучаемых объектов различной природы, — включающих квазипериодически чередующиеся информационные блоки (фрагменты); см. [1-3] и цитированные там работы.

Числовая последовательность, включающая квазипериодически чередующиеся ненулевые информационные фрагменты размерности q, задается следующей формулой общего члена:

$$x_n = \sum_{m\in\mathbb{M}} u_{n-n_m}(m), \quad n = 0, \dots, N-1,$$

где $u_{n-n_m}(m) = 0$, если $n - n_m \neq 0, \dots, q-1$; $(u_0(m), \dots, u_{q-1}(m)) \in \mathbb{R}^q$, $0 < \|(u_0(m), \dots, u_{q-1}(m))\| < \infty$ при каждом $m \in \mathbb{M} = \{1, \dots, M\}$, а $(n_1, \dots, n_M) \in \Omega$, причем

$$\Omega = \bigcup_{M=M_{min}}^{M_{max}} \Omega_M,$$

где

$$\Omega_M = \{(n_1, \dots, n_M)\colon 0 \le n_1 \le N^+ \le N-q; 0 \le N^- \le n_M \le N-q;$$
$$0 < q \le T_{\min} \le n_m - n_{m-1} \le T_{\max} \le N-q, m = 2, \dots, M\},$$

а M_{min} и M_{max} находятся из решения системы неравенств, входящих в определение множества Ω_M, в которой, N^-, N^+, T_{min} и T_{max} — целые числа. Термин ?квазипериодическая последовательность? (т.е. последовательность, квазипериодически изменяющая свои свойства) обусловлен спецификой ограничений, входящих в определение множества Ω_M.

Положим $U_m = (u_0(m), \dots, u_{q-1}(m))$ и назовем U_m, $m \in \mathbb{M}$, — информационным вектором, последовательность его компонент — информационной последовательностью. Фрагмент $(x_{n_m}, \dots, x_{n_m+q-1})$, $m \in \mathbb{M}$, последовательности x_n, $n = 0, \dots, N-1$, совпадающий с вектором U_m, будем называть информационным фрагментом.

Предполагается, что вектор $X = (x_0, \dots, x_{N-1})$, последовательность компонент которого содержит чередующиеся информационные фрагменты, недоступен для непосредственной обработки из-за вектора помехи $E = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{N-1}) \in \Phi_{0,\sigma^2 I}$, где $\Phi_{0,\sigma^2 I}$ — нормальное распределение. Доступным для обработки считается вектор $Y = X + E$.

При этом вектор X рассматривается как функция $X(n_1, \ldots, n_M, U_1, \ldots, U_M)$, совокупность аргументов которой уточняется далее при детализации вариантов задачи оптимального обнаружения.

Все рассмотренные ниже экстремальные задачи выявлены (возникают) в результате формализации содержательных вариантов проблемы обнаружения как задачи принятия решения (о среднем $X(\cdot)$ случайного гауссовского вектора $Y \in \Phi_{X(\cdot),\sigma^2 I}$), доставляющего максимум функционалу правдоподобия. К идентичным формулировкам экстремальных задач приводит минимизация функционала $\|Y - X(\cdot)\|^2$ суммы квадратов уклонений.

Положим $Y_n = (y_n, \ldots, y_{n+q-1})$, $n = 0, \ldots, N - q + 1$.

1. Задача обнаружения повторяющегося фрагмента. В этой задаче предполагается, что $U_m = U = (u_0, \ldots, u_{q-1})$, $m \in \mathbb{M}$, т.е. последовательность включает единственный повторяющийся информационный фрагмент, так что формула общего члена принимает вид:

$$x_n = \sum_{m \in \mathbb{M}} u_{n-n_m}, \quad n = 0, \ldots, N - 1.$$

При этом $X = X(n_1, \ldots, n_M, U)$ и возможны следующие варианты задачи.

1.1. Информационный вектор задан как образец; число повторов известно.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, вектор $U \in \mathbb{R}^q$ и натуральное число M. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega_M$ такой, что

$$\sum_{m \in \mathbb{M}} (Y_{n_m}, U) \to \max .$$

Задача разрешима за полиномиальное время. Алгоритм, имеющий временную сложность $O[M(T_{max} - T_{min} + q)(N - q + 1)] = O(MN^2)$, обоснован в [4].

1.2. Информационный вектор задан; число повторов неизвестно.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$ и вектор $U \in \mathbb{R}^q$. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega$ такой, что

$$\sum_{m \in \mathbb{M}} \{2(Y_{n_m}, U) - \|U\|^2\} \to \max .$$

Точный полиномиальный алгоритм решения задачи, трудоемкость которого $O[(T_{max} - T_{min} + q)(N - q + 1)] = O(N^2)$, обоснован в [5].

1.3. Информационный вектор не задан; число повторов известно.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, натуральные числа M и q. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega_M$ такой, что

$$\| \sum_{m \in \mathbb{M}} Y_{n_m} \| \to \max .$$

Задача в общем случае NP-трудна. Приближенный алгоритм, имеющий временную сложность $O[M(T_{max} - T_{min} + q)(N - q + 1)] = O(MN^2)$, предложен в [6].

1.4. Информационный вектор не задан; число повторов неизвестно.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, натуральное число q. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega$ такой, что

$$\frac{1}{M} \| \sum_{m \in \mathbb{M}} Y_{n_m} \|^2 \to \max .$$

Статус сложности этой задачи пока не выяснен. Скорее всего, она NP-трудна.

2. Задача обнаружения повторяющегося фрагмента при наличии фрагментов-вставок. В этой задаче имеем следующую формулу общего члена последовательности:

$$x_n = \sum_{m \in \mathbb{L}} u_{n-n_m} + \sum_{m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}} u_{n-n_m}(m), \quad n = 0, \ldots, N-1,$$

где $\mathbb{L} \subset \mathbb{M}$, $|\mathbb{L}| = L$. Вектор U соответствует повторяющемуся образцу, а вектор U_m, $m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}$, — вставке. При этом $X = X(n_1, \ldots, n_M, U, \mathbb{L}, \{U_m, m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}\})$ и возможны следующие варианты задачи обнаружения.

2.1. Образец повторяющегося фрагмента задан.

2.1.1. Множество допустимых вставок не ограничено. В четырех нижеследующих вариантах задачи предполагается, что $U_m \in \{U \colon U \in \mathbb{R}^q, 0 < \|U\| < \infty\}$, $m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}$. Статус сложности этих вариантов задачи не выяснен.

2.1.1.1. Число повторов и число фрагментов в последовательности известны.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, вектор $U \in \mathbb{R}^q$, натуральные числа M и L. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega_M$ и множество $\mathbb{L}$ такие, что

$$\sum_{m \in \mathbb{L}} 2(Y_{n_m}, U) + \sum_{m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}} \|Y_{n_m}\|^2 \to \max .$$

2.1.1.2. Число повторов известно, число фрагментов неизвестно.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, вектор $U \in \mathbb{R}^q$, натуральное число L. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega$ и множество $\mathbb{L}$ максимизирующие целевую функцию для предыдущего варианта задачи при условии, что $\mathbf{E} Y_{n_m} \neq 0$ (здесь и далее $\mathbf{E}$ — символ математического ожидания), $m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}$.

2.1.1.3. Число повторов неизвестно, число фрагментов известно.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, вектор $U \in \mathbb{R}^q$, натуральное число M. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega_M$ и множество $\mathbb{L}$ такие, что

$$\sum_{m \in \mathbb{L}} \{2(Y_{n_m}, U) - \|U\|^2\} + \sum_{m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}} \|Y_{n_m}\|^2 \to \max .$$

2.1.1.4. Число повторов и число фрагментов неизвестны.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$ и вектор $U \in \mathbb{R}^q$. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega$ и множество $\mathbb{L}$, которые максимизируют целевую функцию для предыдущего варианта задачи, при условии, что $\mathbf{E} Y_{n_m} \neq 0$, $m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}$.

2.1.2. Множество допустимых вставок конечно. В следующих четырех вариантах задачи предполагается, что $U \in \mathbb{A}$ и $U_m \in \mathbb{A}$, $m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}$, где $\mathbb{A} \subset \{U \colon U \in \mathbb{R}^q, 0 < \|U\| < \infty\}$, $|\mathbb{A}| = K$, т.е. образец и вставки принадлежат конечному множеству (алфавиту) $\mathbb{A}$ допустимых информационных векторов. Сложность этих вариантов задачи также не выяснена.

2.1.2.1. Число повторов и число фрагментов известны.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, алфавит $\mathbb{A}$ мощности K, натуральные числа M и L. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega_M$, множество $\mathbb{L}$ и совокупность $\{U_m \in \mathbb{A} \setminus \{U\}, m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}\}$ такие, что

$$\sum_{m \in \mathbb{L}} 2(Y_{n_m}, U) + \sum_{m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}} \{2(Y_{n_m}, U_m) - \|U_m\|^2\} \to \max .$$

2.1.2.2. Число повторов известно, число фрагментов неизвестно.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, алфавит $\mathbb{A}$ мощности K, натуральное число L. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega$, множество $\mathbb{L}$ и совокупность $\{U_m \in \mathbb{A} \setminus \{U\}, m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}\}$, доставляющие максимум целевой функции из предыдущей задачи.

2.1.2.3. Число повторов неизвестно, число фрагментов известно.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, алфавит $\mathbb{A}$ мощности K, натуральное число M. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega_M$, множество $\mathbb{L}$ и совокупность $\{U_m \in \mathbb{A} \setminus \{U\}, m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}\}$ такие, что

$$\sum_{m \in \mathbb{L}} \{2(Y_{n_m}, U) - \|U\|^2\} + \sum_{m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}} \{2(Y_{n_m}, U_m) - \|U_m\|^2\} \to \max .$$

2.1.2.4. Число повторов и число фрагментов неизвестны.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, алфавит $\mathbb{A}$ мощности K. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega$, множество $\mathbb{L}$ и совокупность $\{U_m \in \mathbb{A} \setminus \{U\}, m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}\}$ такие, что имеет место максимум целевой функции для предыдущей задачи.

2.2. Образец повторяющегося фрагмента не задан.

2.2.1. Множество допустимых вставок конечно. Четыре следующих варианта сводятся к вариациям экстремальной задачи

$$\frac{1}{L} \| \sum_{m \in \mathbb{L}} Y_{n_m} \|^2 + \sum_{m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}} \{2(Y_{n_m}, U_m) - \|U_m\|^2\} \to \max,$$

которые отличаются ограничениями. Следующие два варианта задачи NP-трудны (как обобщения NP-трудной задачи 1.3).

2.2.1.1. Число повторов и число фрагментов в последовательности известны.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, алфавит $\mathbb{A}$ мощности K, натуральные числа M и L. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega_M$, множество $\mathbb{L}$ и совокупность $\{U_m \in \mathbb{A}, m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}\}$.

2.2.1.2. Число повторов известно, число фрагментов неизвестно.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, алфавит $\mathbb{A}$ мощности K, натуральное число L. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega$, множество $\mathbb{L}$ и совокупность $\{U_m \in \mathbb{A}, m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}\}$.

Статус сложности двух следующих вариантов задачи не выяснен. Скорее всего, они NP-трудны (как обобщения задачи 1.4).

2.2.1.3. Число повторов неизвестно, число фрагментов известно.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, алфавит $\mathbb{A}$ мощности K, натуральное число M. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega_M$, множество $\mathbb{L}$ и совокупность $\{U_m \in \mathbb{A}, m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}\}$.

2.2.1.4. Число повторов и число фрагментов неизвестны.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, алфавит $\mathbb{A}$ мощности K. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega$, множество $\mathbb{L}$ и совокупность $\{U_m \in \mathbb{A}, m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}\}$.

2.2.2. Множество допустимых вставок не ограничено. Следующие варианты сводятся к вариациям экстремальной задачи

$$\frac{1}{L} \| \sum_{m \in \mathbb{L}} Y_{n_m} \|^2 + \sum_{m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}} \|Y_{n_m}\|^2 \to \max,$$

отличающимся по ограничениям.

2.2.2.1. Число повторов и число фрагментов известны.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, натуральные числа M и L. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega_M$ и множество $\mathbb{L}$.

2.2.2.2. Число повторов известно, число фрагментов неизвестно.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, натуральное число L. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega$ и множество $\mathbb{L}$ при условии, что $\mathbf{E}Y_{n_m} \neq 0$, $m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}$.

Оба приведенных варианта задачи NP-трудны (как обобщения NP-трудной задачи 1.3). Статус сложности двух следующих вариантов задачи не выяснен. Скорее всего, они NP-трудны (как обобщения задачи 1.4).

2.2.2.3. Число повторов неизвестно, число фрагментов известно.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$, натуральное число M. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega_M$ и множество $\mathbb{L}$.

2.2.2.4. Число повторов и число фрагментов неизвестны.

Дано: вектор $Y \in \mathbb{R}^N$. Найти: набор $(n_1, \ldots, n_M) \in \Omega$ и множество $\mathbb{L}$ при условии, что $\mathbf{E}Y_{n_m} \neq 0$, $m \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{L}$.

Приведенный список охватывает простейшие из возможных задач оптимального обнаружения в зашумленной числовой последовательности каких-либо структур над информационными фрагментами. Некоторые задачи из этого списка полиномиально разрешимы, другие — NP-трудны, статус сложности части задач пока не выяснен. Установление статуса комбинаторной сложности этой части задач представляется важным делом ближайшей перспективы, поскольку они являются специальными случаями задач обработки последовательностей с более сложной структурой.

Работа поддержана грантами РФФИ 06-01-00058 и 07-07-00022.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kel'manov A.V., Jeon B. A Posteriori Joint Detection and Discrimination of Pulses in a Quasiperiodic Pulse Train // IEEE Trans. on Signal Proc. 2004. Vol. 52, No. 3 P. 1-12.
2. Кельманов А.В. Апостериорный подход к решению типовых задач анализа и распознавания числовых квазипериодических последовательностей: обзор результатов // Доклады XII Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов» (ММРО-12). Москва, 2005. С. 125-128.
3. Кельманов А.В. Проблемы оптимизации в типовых задачах помехоустойчивой апостериорной обработки числовых последовательностей с квазипериодической структурой // Материалы 3-й Всероссийской конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Омск, 2006. С. 37-41.
4. Кельманов А.В., Хамидуллин С.А. Апостериорное обнаружение заданного числа одинаковых подпоследовательностей в квазипериодической последовательности // ЖВМиМФ. 2001. Т.41, № 5 С. 807-820.
5. Kel'manov A.V., Khamidullin S.A., Okol'nishnikova L.V. A Posteriori Detection of Identical Subsequences in a Quasiperiodic Sequence // Pattern Recognition and Image Analysis. 2002. Vol. 12, No. 4. P. 438-447.
6. Гимади Э.Х., Кельманов А.В., Кельманова М.А., Хамидуллин С.А. Апостериорное обнаружение в числовой последовательности квазипериодического фрагмента при заданном числе повторов // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т.9, №1(25). С. 55-75.

Кельманов Александр Васильевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел.: (8383) 333-3291, факс: (8383) 333-2598, e-mail: kelm@math.nsc.ru

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧАМ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

А. А. Колоколов, Н. А. Косарев

Введение

Задачи оптимального размещения предприятий имеют широкий круг приложений, возникающих при планировании и реконструкции производства, проектировании сетей обслуживания, в стандартизации и других областях [2, 4, 22, 23].Значительный интерес к таким задачам связан также с $\mathcal{NP}$-трудностью многих из них.

В настоящее время исследования задач размещения предприятий ведутся в следующих основных направлениях. Изучается структура и вычислительная сложность задач, выделяются полиномиально разрешимые случаи и семейства трудных задач, разрабатываются и анализируются методы их решения. Интенсивно развивается область, связанная с эволюционными алгоритмами, алгоритмами муравьиной колонии и другими метаэвристиками. Большое внимание уделяется исследованию простейшей задачи размещения (ПЗР), задач о p-медиане (на максимум и на минимум), двухуровневых задач размещения, задач размещения с ограничениями на объемы производства, многопродуктовым постановкам [2, 4, 6, 11–13, 16, 18, 24].

Рассматриваемые задачи естественным образом формулируются в терминах целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Во многих из них, в том числе в задачах о p-медиане и ПЗР, переменные соответствующей модели ЦЛП делятся на две группы: целочисленные и непрерывные. Ввиду этого, для решения таких задач разрабатываются и применяются алгоритмы, основанные на методе декомпозиции Бендерса [2, 10, 11, 13, 14, 20].

В данной работе приводится обзор некоторых результатов исследования указанных задач и алгоритмов. Рассмотрены вопросы получения оценок числа итераций, построения семейств "трудных" задач, разработки новых алгоритмов, устойчивости алгоритмов при малых колебаниях исходных данных.

1. Постановки задач

Приведем постановки рассматриваемых задач. Задача о p-медиане на минимум (обозначим ее $\mathcal{P}_{\min}$) формулируется следующим образом. Имеется множество пунктов возможного размещения предприятий с номерами из $I = \{1, \ldots, m\}$ и множество клиентов, которые должны быть ими обслужены, с номерами из $J = \{1, \ldots, n\}$. В каждом пункте размещается не более одного предприятия. Затраты на обслуживание i-м предприятием j-го клиента равны $c_{ij},\ i \in I,\ j \in J$. Требуется выбрать p пунктов, в которых будут размещены предприятия, и прикрепить каждого клиента к одному из открытых предприятий таким образом, чтобы минимизировать суммарные затраты.

Для построения модели ЦЛП введем переменные задачи: $z_i = 1$, если i-е предприятие входит в число выпускающих продукцию, в противном случае $z_i = 0$, $i \in I$; $x_{ij} = 1$, если j-й клиент обслуживается i-м предприятием, и $x_{ij} = 0$ в противном случае, $i \in I,\ j \in J$.

Модель ЦЛП для данной задачи имеет вид:

$$f(z,x) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{i\in I} z_i = p, \tag{2}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \qquad j \in J, \tag{3}$$

$$x_{ij} \le z_i, \qquad i \in I,\ j \in J, \tag{4}$$

$$x_{ij},\ z_i \in \{0,1\}, \quad i \in I,\ j \in J. \tag{5}$$

Вектор $z = (z_1,\dots,z_m)$ будем называть *производственным планом* задачи (1)-(5), если он удовлетворяет ограничениям (2) и (5).

Пусть вместо коэффициентов затрат c_{ij} нам известен доход d_{ij} от обслуживания i-м предприятием j-го клиента. В этом случае рассматривается задача о p-медиане на максимум ($\mathcal{P}_{\max}$): требуется открыть p предприятий и прикрепить к ним клиентов так, чтобы суммарный доход от обслуживания всех клиентов был максимальным.

Простейшая задача размещения отличается от $\mathcal{P}_{\min}$ тем, что в ней можно открыть произвольное число предприятий, т.е. отсутствует ограничение (2), но для каждого предприятия задана стоимость его открытия $c_i^0,\ i \in I$, и целевая функция выглядит следующим образом:

$$\sum_{i\in I} c_i^0 z_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} \to \min .$$

Задача размещения предприятий с ограничениями на объемы производства является обобщением ПЗР. В ней предполагается, что каждое предприятие может производить продукцию только в ограниченных количествах, поэтому вместо задачи прикрепления клиентов приходится решать транспортную подзадачу [11].

Двухуровневая задача размещения состоит в следующем. Производитель некоторого продукта стремится разместить свои предприятия в ряде пунктов таким образом, чтобы минимизировать суммарные затраты, складывающиеся из затрат c_i^0 на размещение предприятия в i-м пункте, а также затрат c_{ij} на обслуживание j-го клиента предприятием, расположенным в i-м пункте, $i \in I, j \in J$. В свою очередь каждый клиент j этого производителя выбирает один из предложенных пунктов i, в котором величина d_{ij} его затрат на обслуживание минимальна.

При некоторых достаточно общих условиях двухуровневая задача размещения сводится к одноуровневой. Модель ЦЛП этой задачи получается из модели ПЗР путем присоединения некоторых дополнительных ограничений [6].Изучаются также двухэтапные задачи размещения, в которых имеются потребители и два типа предприятий, выпускающих продукцию [3]. Ведутся исследования задач размещения с учетом конкуренции [15].

Отметим, что все рассматриваемые задачи являются $\mathcal{NP}$-трудными.

2. Схема декомпозиции

Приведем схему декомпозиционного процесса для решения задачи $\mathcal{P}_{\min}$. С некоторыми изменениями данный процесс может быть использован для решения ПЗР и других указанных выше задач.

Пусть Ω – множество всех производственных планов задачи, $F^{(k)}$ – рекордное значение целевой функции на k-ой итерации, $F^{(0)} = \infty$.

Процесс $\mathcal{D}$

Положим $\Omega^{(1)} = \Omega$.

Итерация k ($k \geq 1$)

Шаг 1. Находим некоторый производственный план $z^{(k)} \in \Omega^{(k)}$. Если такой точки не существует, то процесс завершается: решение, на котором достигается рекорд $F^{(k-1)}$, является оптимальным.

Шаг 2. Формулируем задачу прикрепления клиентов $T(z^{(k)})$ для производственного плана $z^{(k)}$:

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

при условиях

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \qquad j \in J,$$

$$0 \leq x_{ij} \leq z_i^{(k)}, \qquad i \in I,\ j \in J.$$

Отметим, что для данной задачи всегда существует оптимальное целочисленное решение, которое будем обозначать через $x^{(k)}$, поэтому от условия булевости переменных x_{ij} можно отказаться. Находим $\hat{f}(z^{(k)})$ – оптимальное значение целевой функции задачи $T(z^{(k)})$. Вычисляем $F^{(k)} = \min\{\hat{f}(z^{(k)}), F^{(k-1)}\}$ – рекорд для уже просмотренных точек.

Шаг 3. Строим по некоторому правилу отсечение (линейное неравенство):

$$\gamma_1^{(k)}z_1 + \ldots + \gamma_m^{(k)}z_m \geq \gamma_0^{(k)}. \tag{6}$$

Обозначим через $\Omega^{(k+1)}$ множество производственных планов из $\Omega^{(k)}$, удовлетворяющих ограничению (6). Переходим к началу следующей итерации.

Правила построения неравенства (6) должны гарантировать, что:
a) ему не удовлетворяет точка $z^{(k)}$;
b) оно не исключает никакую точку $z' \in \Omega^{(k)}$, для которой $\hat{f}(z') < F^{(k)}$.

Свойство "a" позволяет гарантировать конечность процесса $\mathcal{D}$, а свойство "b" — оптимальность найденного им решения. В некоторых алгоритмах можно отказаться от требования "a", а конечность процесса обеспечить другими способами, например, перебором производственных планов в лексикографическом порядке.

Примером отсечений, удовлетворяющих условиям "a" и "b", могут служить неравенства вида

$$\sum_{i\in I_0^k} z_i \geq 1, \tag{7}$$

где $I_0^k = \{i \in I : z_i^{(k)} = 0\}$. По своей форме они напоминают вполне регулярные отсечения для задач булева программирования [9]. Легко заметить, что неравенство (7) исключает из $\Omega^{(k)}$ только точку $z^{(k)}$. Следовательно, число итераций процесса $\mathcal{D}$ с такими простыми отсечениями равняется C_m^p.

В качестве неравенств (6) могут быть использованы отсечения Бендерса [17], которые строятся следующим образом. Для полученной на шаге 1 точки $z^{(k)}$ формулируется задача прикрепления клиентов $T(z^{(k)})$. Двойственной к ней является задача

$$\begin{gathered}\sum_{j\in J} u_j - \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} w_{ij} z_i^{(k)} \to \max \\ \text{при условиях} \\ u_j - w_{ij} \le c_{ij},\ w_{ij} \ge 0, \qquad i \in I,\ j \in J.\end{gathered} \tag{8}$$

Решая ее, находим оптимальные значения двойственных переменных (двойственных оценок) $u_j^{(k)}, w_{ij}^{(k)}$, $i \in I$, $j \in J$. Отсечение Бендерса, построенное по точке $z^{(k)}$ и указанным значениям оценок, имеет вид:

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} w_{ij}^{(k)} z_i > \sum_{j\in J} u_j^{(k)} - F^{(k)}. \tag{9}$$

В общем случае решение задачи (8) не является единственным, поэтому по точке $z^{(k)}$ могут быть построены разные отсечения Бендерса. От значений двойственных оценок существенно зависит *глубина* порождаемого отсечения, т.е. количество целочисленных точек, исключаемых им из множества $\Omega^{(k)}$. В [14] изучается поведение декомпозиционных алгоритмов для задачи о p-медиане в зависимости от используемых правил вычисления двойственных переменных. Предлагаются эвристические способы выбора наилучших отсечений в зависимости от структуры задачи.

3. Разработка и исследование декомпозиционных алгоритмов

Рассмотрим семейство задач $\mathcal{P}_{\min}$ с квадратной матрицей коэффициентов целевой функции, у которой элементы, стоящие на главной диагонали, равны 1, а все остальные равны M ($M \ge 2$). Обозначим такую матрицу через $\bar{C}$.

Нами показано, что глубина отсечений Бендерса (9) для таких задач при использовании некоторых естественных правил вычисления двойственных оценок равна 1. Это означает, что для решения построенной задачи процессом $\mathcal{D}$ с такими отсечениями потребуется полный перебор производственных планов. В данном случае неравенства Бендерса совпадают с (7).

Установлено также, что при использовании других способов вычисления двойственных оценок отсечение, построенное по любой точке $z \in \Omega$, исключает все производственные планы [10].

На основе предложенного семейства получен широкий класс задач о p-медиане, являющихся сложными для процесса $\mathcal{D}$ с отсечениями Бендерса. Рассмотрим задачу $\bar{\mathcal{P}}_{\min}$ с $(m \times m)$-матрицей целевой функции, у которой элементы главной диагонали равны 0, а остальные коэффициенты находятся в интервале $(\alpha, \dfrac{m-p+1}{m-p}\alpha)$ для некоторого $\alpha > 0$. Доказано, что для решения задачи $\bar{\mathcal{P}}_{\min}$ потребуется C_m^p итераций процесса $\mathcal{D}$ при использовании некоторых способов вычисления двойственных оценок. Проведен анализ вычислительной сложности задачи $\bar{\mathcal{P}}_{\min}$ и установлено, что она является $\mathcal{NP}$-трудной. Аналогичные результаты имеют место и для задачи $\mathcal{P}_{\max}$ [10, 24].

Рассмотрим простейшую задачу размещения, у которой затраты на обслуживание клиентов заданы введенной выше матрицей $\bar{C}$, а стоимости открытия предприятий

$c_i^0 = 1,\ i \in I$. Если отсечение Бендерса строится по плану $\hat{z}^{(k)}$, на котором достигается рекордное значение целевой функции, то его глубина равна 1 [10].

Важное место в дискретной оптимизации занимают вопросы устойчивости задач и алгоритмов ЦП [8, 21, 25]. В частности, в [7, 21] доказана устойчивость алгоритма перебора L-классов и ряда алгоритмов отсечения при малых колебаниях релаксационного множества задачи. Установлено, что алгоритм ветвей и границ (схема Лэнд и Дойг) не обладает свойством устойчивости. В работе [25] показано, что процесс $\mathcal{D}$ не является устойчивым (возможен экспоненциальный рост числа итераций при сколь угодно малых колебаниях коэффициентов целевой функции), и предложена модификация алгоритма, для которой построенная последовательность производственных планов $z^{(1)}, \ldots, z^{(K)}$ остается прежней.

В [11, 13, 14] описываются алгоритмы, разработанные с использованием декомпозиции Бендерса для ПЗР, задач о p-медиане и двухуровневой задачи размещения. В этих алгоритмах для нахождения очередного производственного плана применяются перебор L-классов и булевых векторов, различные эвристики, метод релаксации Лагранжа. Проведены экспериментальные исследования на тестовых задачах из электронных библиотек OR-Library [19], TSPLIB [26], ИМ СО РАН [5], а также на задачах со случайными исходными данными. Полученные результаты указывают на перспективность разработки алгоритмов на основе рассматриваемого декомпозиционного подхода.

Литература

1. Агеев А.А. *Точные и приближенные алгоритмы для задач размещения: обзор последних достижений* //Труды междунар. конференции "Сибирская конференция по исследованию операций", Новосибирск, 1998. – С. 4–10.

2. Бахтин А.Е., Колоколов А.А., Коробкова З.В. *Дискретные задачи производственно-транспортного типа.* Новосибирск: Наука, 1978. 160 с.

3. Береснев В.Л. *Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных.* Новосибирск: Изд-во Института математики, 2005. 408 с.

4. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. *Экстремальные задачи стандартизации.* Новосибирск, 1978. 333 с.

5. Гончаров Е.Н., Иваненко Д.А., Кочетов Ю.А., Кочетова Н.А. *Электронная библиотека "Дискретные задачи размещения"* //Труды XII Байкальской междунар. конференции, Иркутск, 2001. – Т. 1. – С. 132–137. http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/

6. Горбачевская Л.Е., Дементьев В.Т., Шамардин Ю.В. *Двухуровневая экстремальная задача выбора номенклатуры изделий.* Препринт. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1997. 26 с.

7. Девятерикова М.В., Колоколов А.А. *Анализ устойчивости некоторых алгоритмов дискретной оптимизации* //Автоматика и телемеханика. – 2004. № 3. – С. 48–54.

8. Емеличев В.А, Кузьмин К.Г., Леонович А.М. *Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации* //Автоматика и телемеханика. – 2004. – №2. – С. 79–92.

9. Колоколов А.А. *Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании* //Сибирский журнал исследования операций. – 1994. – № 2. – С. 18–39.

10. Колоколов А.А., Косарев Н.А., Рубанова Н.А. *Исследование отсечений Бендерса*

в декомпозиционных алгоритмах решения некоторых задач размещения //Омский научный вестник. – 2005. – № 2(31). – С. 76–80.
11. Колоколов А.А., Леванова Т.В. *Задачи оптимального размещения предприятий и метод декомпозиции Бендерса*: Учебно-метод. пособие. Омск: ОмГУ, 2004. 40 с.
12. Колоколов А.А., Леванова Т.В., Лореш М.А. *Алгоритмы муравьиной колонии для задач оптимального размещения предприятий* //Омский научный вестник.– 2006. – № 4(38). – С. 62-67.
13. Колоколов А.А., Рубанова Н.А. *Об одном декомпозиционном алгоритме решения двухуровневой задачи размещения* //Труды XII международной Байкальской конференции "Методы оптимизации и их приложения". – Иркутск, Байкал, 2001.– Т. 1.– С. 207-210.
14. Косарев Н.А. *Разработка и экспериментальные исследования декомпозиционных алгоритмов для задачи о p-медиане.* Препринт. Омск: ОмГУ, 2006. 23 с.
15. Кочетов Ю.А., Кочетова Н.А., Плясунов А.В. *Модели размещения, учитывающие конкуренцию* //Труды III Всероссийской коференции "Проблемы оптимизации и экономические приложения". – Омск, 2006. – С. 105.
16. Леванова Т.В., Лореш М.А. *Алгоритмы муравьиной колонии и имитации отжига для задачи о p-медиане* //Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 3.– С. 80–88.
17. Схрейвер А. *Теория линейного и целочисленного программирования: в 2-х т.* М.: Мир, 1991. 702 с.
18. Avella P., Sassano A., Vasil'ev I. *Computational study of large scale p-median problems* //Mathematical Programming. – 2006. – Vol. 109. – № 1. – P. 89–114.
19. Beasley J.E. *A note on solving large p-median problems* //European Journal of Operational Research. – 1985. – № 21. – P. 270–273.
20. Benders J. F. *Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems* //Numerische Mathematik. – 1962. – Vol. 4. – №.3.– P. 238–252.
21. Devyaterikova M.V., Kolokolov A.A. *On the stability of some integer programming algorithms* //Operations Research Letters. – 2006. – № 34(2). – P. 149–154.
22. *Discrete Location Theory* (Ed. by Pitu B. Mirchandani and Richard L. Franscis), by John Wiley and Sons, Inc., 1990. 576 p.
23. *Facility Location. Applications and Theory* (Ed. by Zvi Drezner and Horst W. Hamacher), Springer, 1990. 457 p.
24. Kolokolov A.A., Kosarev N.A. *Analysis of decomposition algorithms with Benders cuts for p-median problem* //Journal of Mathematical Modelling and Algorithms. – 2006. – № 5. – P. 189–199.
25. Kosarev N.A., Kolokolov A.A. *On stability of some benders decomposition algorithms for p-median problem* //Proceedings of European Chapter on Combinatorial Optimization XVIII. – Minsk, 2005. – P. 26.
26. Reinelt G. *TSPLIB: A traveling salesman problem library* //ORSA Journal on Computing. – № 1991. – № 3. – P. 376–384.
http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/.

Колоколов Александр Александрович, Косарев Николай Александрович,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru, nkosarev@mail.ru

ОНЛАЙНОВЫЕ АЛГОРИТМЫ УПАКОВКИ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ В ПОЛОСЫ

Н. Н. Кузюрин

В докладе представлены некоторые результаты по задаче об упаковке прямоугольников в полосы. При этом рассматривается анализ как по худшему случаю, так и в среднем, когда исходные данные случайны. Задача упаковки прямоугольников в несколько полос заключается в следующем. Входом является конечная последовательность открытых прямоугольников $T = \{T_1, \ldots, T_n\}$, где $h(T_j)$ и $w(T_j)$ – соответственно высота и ширина прямоугольника T_j, и $C = \{C_1, \ldots, C_m\}$ – множество полубесконечных вертикальных полос, где w_i – ширина i-й полосы.

Требуется найти ортогональное размещение последовательности прямоугольников T по этим полосам (без вращений и пересечений, стороны прямоугольников параллельны сторонам полос), минимизирующее полную высоту этого размещения, то есть максимум по всем прямоугольникам и по всем полосам расстояния от дна полосы до верхней границы прямоугольника.

Даже для случая одной полосы, рассматриваемая задача является NP-трудной, поскольку ее частными случаями являются задача об упаковке в контейнеры и задача о расписании для m машин [1]. Поэтому изучают приближённые алгоритмы для этой задачи и для оценки их точности используют следующие характеристики. Пусть $H_O(T, C)$ и $H_A(T, C)$ – высота оптимального размещения прямоугольников и высота размещения, полученная с помощью алгоритма A. Всюду далее мы предполагаем, что высота каждого прямоугольника не превосходит 1. Тогда мультипликативная ошибка приближенного алгоритма A определяется как

$$R_A = \sup_{T,C}\{H_A(T, C)/H_O(T, C)\},$$

а асимптотическая мультипликативная ошибка как

$$R_A^\infty = \lim_{k\to\infty} \sup_{T,C}\{H_A(T, C)/H_O(T, C) \mid H_O(T, C) \geq k\}.$$

Особый интерес представляют так называемые онлайновые алгоритмы. Это означает, что множество T рассматривается как последовательность, члены которой подаются на вход алгоритма один за другим, причем размещение очередного прямоугольника из T в полосах из C производится без какой-либо информации о последующих членах последовательности.

Наиболее исследованы онлайновые алгоритмы для частных случаев рассматриваемой задачи. Для случая одной полосы она впервые была рассмотрена в [2]. В [3] был введен класс шельфовых алгоритмов и в этом классе предложен онлайновый алгоритм, имеющий асимптотическую мультипликативную ошибку 1.7. В [4] было доказано, что никакой шельфовый алгоритм не может иметь асимптотическую мультипликативную ошибку меньше, чем 1.69103, и построен шельфовый алгоритм, позволяющий сколь угодно близко подойти к данному значению. В [5] было показано, что никакой онлайновый алгоритм упаковки прямоугольников в одну полосу не позволяет добиться асимптотической мультипликативной ошибки меньшей, чем 1.5401. В [21] построен онлайновый алгоритм A и получена верхняя оценка $R_A^\infty \leq 1.5889$.

Еще один важный частный случай задачи упаковки в несколько полос – это задача о составлении расписания для m машин, которая получается, если имеется m одинаковых полос ширины 1 и все прямоугольники также имеют ширину равную 1. В [6] для нее был предложен простой онлайновый алгоритм, который размещает каждую новую задачу на наименее загруженную машину. Мультипликативная ошибка этого алгоритма не превосходит $2 - 1/m$, для m машин. В [8] был предложен онлайновый алгоритм с мультипликативной ошибкой не более 1.986 для всех $m > 70$. Это значение было улучшено до 1.945, а затем и до 1.923 в работах [10] и [7]. В [11] было показано, что ни один детерминированный онлайновый алгоритм не может иметь мультипликативной ошибку меньше, чем 1.837 для достаточно больших m. Этот результат был улучшен в [7] до 1.852.

Задача об упаковке прямоугольников в несколько полос до сих пор оставалась в значительной степени не исследованной. В [12] был предложен алгоритм, размещающий прямоугольники по полосам в онлайновом режиме (но для размещения в полосе использовались не онлайновые алгоритмы), и имеющий мультипликативную ошибку 10.

Далее e обозначает основание натурального логарифма. Следующие два результата получены недавно С.Н.Жуком.

1. Для любого онлайнового алгоритма A выполнено: $R_A^\infty \geq e$.

Пусть r – произвольная константа, такая что $0 < r < 1$.

2. Построен онлайновый алгоритм A_r и доказано, что $R_{A_r}^\infty \leq \frac{2e}{r}$.

Отметим, что вероятностному анализу различных эвристик одно и двумерной упаковки посвящено много работ [13-21]. Целевой функцией в таком анализе обычно является величина незаполненной площади от дна полосы до до верхней грани прямоугольника. Шельфовые алгоритмы были рассмотрены в [4] для случая одной полосы. Пусть задана некоторая константа $r \in (0, 1)$. Шельф – это прямоугольная часть полосы, с шириной равной ширине полосы. Как только приходит новый прямоугольник R, шельфовый алгоритм определяет целое число k, такое что $r^{k+1} < h(R) \leq r^k$ и после этого он размещает данный прямоугольник в шельфе высотой r^k. Прямоугольник может быть размещен в один из существующих шельфов, или сверху может быть создан новый шельф высоты r^k. Прямоугольники внутри каждого шельфа размещаются по горизонтали в ряд. Таким образом, упаковка прямоугольников, попавших в один класс по высоте (которым соответствует одно значение k), производится с помощью некоторой эвристики, осуществляющей одномерную упаковку в контейнеры. Мы будем называть алгоритмом $\mathbf{A(E)}$ шельфовый алгоритм упаковки, который на втором этапе использует некоторую произвольную эвристику $\mathbf{E}$.

Пусть $\mathrm{U}([0,1])$ — равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Всюду в дальнейшем будем считать, что для каждого прямоугольника высота h_i и ширина w_i имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Будем предполагать, что все случайные величины w_i, h_i — независимы в совокупности. Будем обозначать через Σ математическое ожидание площади, не заполненной прямоугольниками, между основанием полосы и верхней границей самого верхнего шельфа. Будем предполагать, что число прямоугольников N – бесконечно большая величина ($N \to \infty$).

Пусть для одномерной эвристики $\mathbf{E}$ выполнено соотношение

$$E\left(L - \sum_{i=1}^{N} w_i\right) = O\left(f(N)\right),$$

где L - число шельфов, в которые эвристика $\mathbf{E}$ упаковывает набор отрезков $\{w_i\}$.

Теорема. [20] Пусть для $\mathbf{E}$ $f(N) = N^\alpha \log^\beta N$, где $0 < \alpha < 1$, $\beta \geq 0$. Тогда для алгоритма $\mathbf{A(E)}$ справедлива следующая оценка:

$$\Sigma = O\left(N^\alpha\left(\frac{\log^\beta N}{\delta^{1-\alpha}} + \delta N^{1-\alpha}\right)\right).$$

Выбирая $\delta = N^{(\alpha-1)/(2-\alpha)} \log^{(\beta/(2-\alpha))} N$, получаем оценку

$$\Sigma = O\left(N^{1/(2-\alpha)} \log^{(\beta/(2-\alpha))} N\right).$$

Отметим, в частности, что для трех важных эвристик упаковки в контейнеры известно, что для FF (first fit): $f(N) = N^{2/3}$, для BF (best fit): $f(N) = N^{1/2}(\log N)^{3/4}$, и для наилучшей онлайновой эвристики (best on-line) BO: $f(N) = (N \log N)^{1/2}$ [16]. Поэтому из теоремы сразу вытекает, что для шельфового алгоритма $\mathbf{A(FF)}$ $\Sigma = O(N^{3/4})$, для $\mathbf{A(BF)}$ $\Sigma = O(N^{2/3}(\log N)^{1/2})$ [19], для $\mathbf{A(BO)}$ $\Sigma = O(N^{2/3}(\log N)^{1/3})$. Первые два соотношения дают ответ на вопрос из [17].

Известно, что если отказаться от требования, чтобы алгоритм работал в режиме on-line, то, как показано в [14], можно достичь оценки средней величины незаполненной площади $\Sigma = O\left(N^{1/2} \log N\right)$. Открытым вопросом является достижимость подобной оценки в классе on-line алгоритмов. Мы показываем, что в классе шельфовых алгоритмов (которые образуют важный подкласс онлайновых алгоритмов) такой оценки достичь невозможно. Более того в этом классе справедлива следующая оценка: $\Sigma = \Omega\left(N^{2/3}\right)$. Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00798.

ЛИТЕРАТУРА

1. Garey M.R., Johnson D.S., Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness, Freeman, San Francisco, 1979.
2. Baker B.S., Coffman E.J., Rivest R.L. Orthogonal packings in two dimensions// SIAM J. Computing, 1980, V. 9, P. 846-855.
3. Baker B.S., Schwarz J.S. Shelf algorithms for two dimensional packing problems// SIAM J. Computing, 1983, V. 12, P. 508-525.
4. Csirik J., Woeginger G.J., Shelf Algorithms for On-Line Strip Packing// Inf. Process. Lett., 1997, V. 63, N 4, P. 171-175.
5. Van Vliet A. An improved lower bound for on-line bin packing algorithms// Inf. Process. Lett., 1992, V. 43, P. 277–284.
6. Graham R. L. Bounds for certain multiprocessing anomalies // Bell System Technical Journal, 1966, V. 45, P. 1563–1581.
7. Albers S. Better bounds for online scheduling// Proc. of the 29th ACM Symp. on Theory of Computing, 1997, P. 130-139.
8. Bartal Y., Fiat A., Karloff H., Vohra R. New algorithms for an ancient scheduling problem // J. Comput. Syst. Sci., 1995, V. 51, N 3, P. 359-366.
9. Faigle U., Kern W., Turan G. On the performance of on-line algorithms for partition problems //Acta Cybernetica, 1989, V. 9, P. 107-119.
10. Karger D. R., Phillips S. J., Torng E. A better algorithm for an ancient scheduling problem // Proc. of the 5th Annu. ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms, 1994, P.

132–140.
11. Bartal Y., Karloff H., Rabani Y. A better lower bound for on-line scheduling // Inf. Proces. Letters, 1994, V. 50, P. 113–116.
12. Жук С.Н. Приближенные алгоритмы упаковки прямоугольников в несколько полос // Дискретная математика, 2006, т. 18, N 1 С. 91–105.
13. E.G. Coffman, Jr., C. Courcoubetis, M.R. Garey, D.S. Johnson, P.W. Shor, R.R. Weber, M. Yannakakis, Perfect packing theorems and the average-case bahavior of optimal and online bin packing // SIAM Review, 2002, V. 44, N 1, P. 95–108.
14. R.M. Karp, M. Luby, A. Marchetti-Spaccamela, A probabilistic analysis of multidimensional bin packing problems // Proc. Annu. ACM Symp. on Theorty of Computing, 1984, P. 289–298.
15. P. W. Shor, The average-case analysis of some on-line algorithms for bin packing// Combinatorica, 1986, V. 6, P. 179-200.
16. P. W. Shor, How to pack better than Best Fit: Tight bounds for average-case on-line bin packing // Proc. 32nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1991, P. 752-759.
17. E. G. Coffman, Jr., D. S. Johnson, P. W. Shor and G. S. Lueker. Probabilistic analysis of packing and related partitioning problems // Statistical Science, 1993, V. 8, P. 40-47.
18. E. G. Coffman, Jr., P. W. Shor. Packings in two dimensions: Asymptotic average-case analysis of algorithms// Algorithmica, 1993, V. 9, P. 253-277.
19. Кузюрин Н.Н., Поспелов А.И., Вероятностный анализ шельфовых алгоритмов упаковки прямоугольников в полосу// Дискретная математика, 2006, т. 18, N 1, С. 76–90.
20. Кузюрин Н.Н., Поспелов А.И., Вероятностный анализ различных шельфовых алгоритмов упаковки прямоугольников в полосу // Труды ИСП РАН, 2006, т. 12, С. 17–26.
21. Han X., Iwama K., Ye D., Zhang G. Strip packing vs. bin packing// Electronic Colloquium on Cpmputational Complexity, 2006, Report N 112.

Кузюрин Николай Николаевич,
ИСП РАН, Б. Коммунистическая, 25, Москва, 109004, Россия, тел. (8-495) 912-56-59, факс (8-495) 912-15-24, e-mail: nnkuz@ispras.ru

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ МЕТАЭВРИСТИК

А.В. Плясунов

Введение

Метаэвристики являются одним из наиболее наглядных и естественных подходов к решению задач комбинаторной оптимизации. Высокая эффективность при решении NP-трудных задач и гибкость в адаптации к сложным математическим моделям открыли для них широкую дорогу к практическому использованию [4]. Однако достаточно даже беглого взгляда на теорию машинных вычислений (вольный перевод theoretical computer science), на одном конце которой современная теория сложности, а на другом прикладные исследования, где собственно и применяются алгоритмы для решения реальных задач, чтобы констатировать наличие огромного разрыва между ними.

Одна из целей этой работы – показать, что теория сложности и метаэвристики связаны глубже, чем это принято считать. Более точно, здесь проводится мысль, что метаэвристики приобрели тот вид, который следовал бы из теории сложности, если некоторые известные гипотезы сформулировать в виде запретов. Сама идея использовать ту или иную гипотезу в форме запрета для теории сложности является общепринятой. Формулировки утверждений типа "Если $P \neq NP$, то ..."давно уже воспринимаются привычно и естественно [1-3, 6]. Предшествующие попытки, использовать теорию сложности для анализа метаэвристик, основывались на сопоставлении метаэвристике некоторой комбинаторной оптимизационной проблемы [9] или даже сложностного класса [14], последующего анализа сложности задачи или свойств и положения сложностного класса в существующей иерархии классов [2]. Здесь используется более простая идея. Напомним, что по сути метаэвристика это алгоритмическая схема [4], а не алгоритм. Поэтому процесс её адаптации для решения какой – либо задачи означает выбор и фиксацию основных её алгоритмических параметров и, следовательно, превращает её в детерминированный или вероятностный алгоритм. Таким образом, анализ возможностей метаэвристик может быть основан на использовании гипотез вида $P \neq NP$ без привлечения всякого рода вспомогательных задач и инструментов. Однако выбирая ту или иную гипотезу нам нужны основания для этого выбора, а также дополнительные соглашения упрощающие последующий анализ. С этой целью вспомним, что метаэвристики реализуются в виде конечных программ на компьютерах. В свою очередь эти программы используются для вычислений на конкретных исходных данных. Поэтому будем считать, что все вычисления происходят за конечное время и с затратами конечного объёма ресурсов. Такое соглашение позволяет отсечь все спекуляции на тему "супертьюринговых"вычислений [7], которые используются при объяснении – почему же метаэвристики неплохо справляются с решением NP-трудных задач.

Естественно считать, что исходные данные не требуют для их построения слишком больших ресурсов. Если это оптимизационная задача, то для вычисления значения целевой функции или построения допустимого решения достаточно времени полиномиально ограниченного длиной исходных данных. Такое соглашение не сильно сужает рамки исследования, т.к. обычно рассматриваются комбинаторные задачи удовлетворяющие этим условиям (см. [2, 3, 17]). Это соглашение приводит к тому, что для объяснения поведения метаэвристик нельзя использовать результаты вытекающие из теорем типа "No free lunch"[21]. Так как результаты такого типа основаны на рассмотрении всех возможных функций, которые минимизируются в комбинаторной задаче, что в нашей ситуации оказывается невозможным.

Другая цель работы – разобраться, как далеко продвинулась теория в исследованиях сложности вычислений в среднем, и что это даёт для анализа метаэвристик.

Далее везде, где это будет возможно, изложение будет вестись в терминах задач распознавания, с тем, чтобы упростить формулировки и обозначения. В большинстве случаев перенос сложностных результатов с задач распознавания на оптимизационные задачи не представляет больших проблем [2, 3, 17]. В дальнейшем в качестве модели вычислений используются детерминированные и вероятностные машины Тьюринга [2].

В разделе 1 рассматривается сложность в худшем случае, во втором – сложность в среднем. В третьем разделе рассматриваются результаты, которые могут в ближайшем будущем повлиять на наши представления о возможностях метаэвристик и быть может привести к созданию более основательной теоретической базы для их исследования.

1. Сложность в худшем случае

С момента появления гипотезы $P \neq NP$ и по настоящее время большинство специалистов принимает это утверждение как истинное [1, 17]. Причина такого решения базируется на интуитивном убеждении, что найти доказательство (сертификат) значительно труднее, чем проверить его истинность. Такая трактовка гипотезы $P \neq NP$ связана с определением класса NP, как класса языков полиномиально сбалансированных и полиномиально ограниченных [17]. Другой мотив принятия именно запрета связан с неполнотой математики [15]. Нельзя исключить, что эта гипотеза верна, но недоказуема. В этом случае её, как и пятый постулат Евклида о параллельных прямых, можно принять в качестве аксиомы. Подобные настроения особенно усилились после появления работы [18] о натуральных доказательствах. Естественно, подобная логика, основанная на неполноте математики требует рассмотрения варианта с аксиомой $P = NP$. Тогда возникает совершенно неудовлетворительная теория, т.к. подобная аксиома не даёт возможности построить эффективный алгоритм. Заметим, что в теории с аксиомой $P \neq NP$ подобной проблемы не существует. Есть ещё один момент, связанный с анализом попыток доказать или опровергнуть одну из этих гипотез. Он связан с тем, что по мнению большинства сторонников гипотезы $P = NP$ её доказательство возможно, но оно будет носить принципиально неконструктивный характер. Сомнительно, что удастся получить информацию о степени и членах полинома, ограничивающих сложность задач из класса NP. Ситуация очень близка к рассмотренной ранее теории с аксиомой $P = NP$. Однако самое важное наблюдение заключается в том, что какой бы подход не использовался для анализа гипотезы $P = NP$, возникает основная трудность – не известно ни одной идеи, используя которую мы могли бы хотя бы гипотетически описать класс алгоритмов, могущий содержать эффективные алгоритмы для NP-полных задач. Проведём аналогию с ситуацией вокруг тезиса Чёрча – Тьюринга [2], в котором предлагается считать, что ряд теоретических конструкций удовлетворительно описывает неформальное понятие алгоритма. Если ещё раз вглядеться в миры, в которых принята одна из двух гипотез, то наиболее удовлетворительно выглядит мир, в котором $P \neq NP$. Действительно, всмотримся в мир, где P = NP. В [10] этот мир назван Алгоритмика. В нём существует способ решения любой задачи, если имеется метод, позволяющий распознать по предъявленному входу является ли он решением задачи или нет? Поэтому в нём нет метаэвристик, т.к. мы можем найти оптимальное решение большей части экстремальных задач просто обращаясь к соответствующему методу распознавания. В языках программирования больше нет инструкций, которые указывают как должно выполняться вычисление. Вместо этого указываются свойства, которыми должен обладать искомый результат соответствующий конкретным исходным данным. Ещё более углублённый анализ приведённый в [10] показывает, что компьютер в этом мире способен решить любую задачу решаемую человеком и доказать любую теорему за время пропорциональное длине доказательства. В этом мире невозможна криптография.

Но реальный мир, в котором мы живём, совсем не похож на мир Алгоритмики. В настоящем мире всё чаще и всё больше не хватает ресурсов. Да, время от времени, удаётся взломать тот или иной шифр. Но это происходит за счёт прогресса вычислительной техники, что позволяет использовать переборные алгоритмы с этой целью. Таким образом, как и в случае с тезисом Чёрча – Тьюринга, если последовательно придерживаться соглашений и исходить из приведённых выше наблюдений, то наиболее естественно принять гипотезу P ≠ NP. Содержательно это означает, что NP-полные задачи не являются эффективно разрешимыми. Таким образом отсюда следовало бы, что не может существовать детерминированных эффективных реализаций метаэвристик.

Неформально под вероятностной машиной Тьюринга можно понимать детерминированную машину Тьюринга, которая снабжена устройством, позволяющим подбрасывать симметрическую монету для того, чтобы выбрать свой следующий шаг. На каждом шаге машина может выбрать ровно из двух возможностей. Выбор производится независимо с вероятностью 1/2. Пусть $p_M(x)$ – вероятность, с которой машина M принимает вход x. По определению эта величина есть сумма вероятностей всех принимающих вход x вычислений. Вероятностная машина распознаёт язык A [2]:

1. С односторонней ошибкой, если $p_M(x) > 1/2$, для всех $x \in A$, и $p_M(x) = 0$, для всех $x \notin A$.

2. С ограниченной двухсторонней ошибкой, если $p_M(x) > 1/2 + \varepsilon$, для всех $x \in A$, и $p_M(x) < 1/2 - \varepsilon 0$, для всех $x \notin A$, для некоторого $\varepsilon > 0$.

Пусть RP — класс языков, распознаваемых за полиномиальное время вероятностными алгоритмами с односторонней ошибкой. Аналогично определяется класс BPP языков, распознаваемых за полиномиальное время вероятностными алгоритмами с ограниченной ошибкой. Эти классы можно рассматривать как вероятностные аналоги класса P. Из определений следует, что $P \subseteq RP \subseteq BPP$. Известно, что если RP = NP или BPP = NP, то P = NP, что противоречило бы базовой гипотезе [2]. Поэтому примем, что RP ≠ NP или BPP ≠ NP. Содержательно это означает, что NP-полные задачи не являются эффективно разрешимыми в вероятностном смысле.

Теорема 1. *Если* P ≠ NP, *то несуществует детерминированных и вероятностных эффективных реализаций метаэвристик в худшем случае.*

Таким образом, если принять гипотезу P ≠ NP, то теория сложности в худшем случае запрещает существование детерминированных и вероятностных реализаций метаэвристик с полиномиально ограниченным временем работы.

2. Сложность в среднем случае

Понятие NP-полноты, рассмотренное выше, оказывается плодотворным лишь в рамках рассмотрения сложности в худшем случае. Известны примеры задач распознавания, которые являются NP-полными, но для них известны алгоритмы полиномиальные для почти всех входов. В этих задачах трудные входы возникают сравнительно редко и они эффективно разрешимы в среднем. Такие быстрые в среднем алгоритмы были разработаны для задачи о k-раскраске графа [19], а также для задачи о гамильтоновом цикле [19]. Эти алгоритмы используют стандартные для теории случайных графов распределения [5]. Таким образом сложность в среднем для задач распознавания может оказаться более осмысленной мерой сложности чем сложность в худшем случае.

Основы теории сложности в среднем для задач распознавания были заложены в [12], где введены аналоги классов P и NP и понятие сводимости. В отличии от теории в худшем случае теория среднего случая имеет дело не только с задачей L, но и с распределением μ на её входах. Такая пара (L, μ) называется распределительной или рандомизированной задачей [6,8,12]. Входное распределение μ назначает каждой индивидуальной задаче вероятность её появления как входа L. Приведём основные определения [6,8,12,13,19,20]. Пусть $B = \{0, 1\}$. Обозначим через B^* множество всех конечных бинарных слов, отличных от пустого слова.

Определение 1. Отображение μ называется вероятностной функцией, если $\mu : B^* \to [0, 1]$, $\mu(x) \geq 0$ для всех $x \in B^*$ и

$$\sum_{x \in B^*} \mu(x) = 1.$$

Определение 2. Функция $f : B^* \to N$ является полиномиальной в среднем относительно вероятностной функции μ, если существуют константы $k, c > 0$ такие, что

$$\sum_{x \in B^*} \frac{f^{1/k}(x)}{|x|} \mu(x) \leq c.$$

Определение 3. Пусть L – задача распознавания, μ – вероятностная функция (входное распределение). Тогда пара (L, μ) называется распределительной задачей распознавания.

Определение 4. Распределительная задача (L, μ) принадлежит классу $AvgP$, если язык L распознается детерминированным алгоритмом за время полиномиальное в среднем относительно μ.

Сложностной класс $AvgP$ является аналогом класса P и он формализует содержательное понятие эффективных в среднем вычислений.

Определение 5. Вероятностная функция μ называется P-вычислимой, если существует такой полиномиальный алгоритм M, что $\forall x \in B^*$ и $k \geq 1$

$$\|M(x, 1^k) - \mu(x)\| \leq 2^{-k}.$$

Определение 6. Распределительная задача (L, μ) принадлежит классу DistNP, если $L \in$ NP и входное распределение μ является P-вычислимым.

Класс DistNP формализует понятие трудных в среднем вычислений и является аналогом класса NP. Базовой гипотезе P $\neq$ NP соответствует гипотеза DistNP$\not\subseteq$ AvgP. Введём понятие сводимости для распределительных задач.

Определение 7. Распределительная задача (L, μ) полиномиально сводится к распределительной задаче (L', ν), если существует полиномиально вычислимая функция f такая, что $x \in L \Leftrightarrow f(x) \in L'$ и существует полином q такой, что для любого $y \in B^*$,

$$\nu(y) \geq \frac{1}{q(|y|)} \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mu(x).$$

Соотношение, связывающее входные распределения μ и ν гарантирует, что если распределительная задача (L', ν) принадлежит классу AvgP, то и задача (L, μ) также будет полиномиально разрешимой в среднем. Если функция f является однозначной, то получим, что для любого $x \in B^*$ справедливо неравенство

$$\nu(x) \geq \frac{\mu(x)}{q(|x|)}.$$

Из определения следует, что задача L полиномиально сводима к задаче L' в обычном смысле [1].

Определение 8. Распределительная задача (L, μ) называется DistNP-полной, если она принадлежит классу DistNP и любая задача из этого класса полиномиально сводится к ней.

Известно [6,8,12,20], что DistNP-полные задачи существуют. Если расширить класс входных распределений в определении 6, то это свойство может исчезнуть [6]. Одним из первых примеров DistNP-полной задачи была распределительная задача об останове (K, μ_K) [8,12,20]:

Вход: $(i, x, 1^n)$, $x \in B^*$, $i, n \in N$

Вопрос: машина Тьюринга M_i принимает вход x за n шагов?

Входное распределение μ_K: равномерно и независимо выбрать i, x и n

$$\mu_K(i, x, 1^n) = \frac{2^{-|i|}}{|i|^2} \times \frac{2^{-|x|}}{|x|^2} \times \frac{1}{n^2}.$$

До недавнего времени было известно не более десятка таких задач [20]. В [13] был предложен подход, который кардинально изменил ситуацию. Появилась возможность для любой известной NP-полной задачи найти подходящее распределение, с которым задача оказывается DistNP-полной. Основываясь на работах о известной проблеме об изоморфизме NP-полных задач [17], был разработан способ построения P-вычислимых вероятностных распределений для ряда известных классических NP-полных задач, с которыми последние оказываются DistNP-полными.

Определение 9 [13]. Задача распознавания L является регулярно-расширяемой, если существуют строго возрастающая функция q и расширяющая функция $S : 1^* \times B^* \mapsto B^*$ такие, что

1. S является полиномиально вычислимой функцией.

2. Для любого x и для любого n выполняется условие $S(1^n, x) \in L \Longleftrightarrow x \in L$.

3. Для любого x и для любого n такого, что $n > |x|$ выполняется равенство $|S(1^n, x)| = q(n)$.

Функция q называется мерой растяжения функции S. Первый аргумент S определяет величину, на которую растягивается слово.

Определение 10 [13]. Задача распознавания L является монотонно-расширяемой, если существуют расширяющая функция $E : B^* \times B^* \mapsto B^*$ и декодирующая функция $D : N \times B^* \mapsto B^*$ такие, что

1. Функции S и D является полиномиально вычислимыми.

2. Для любых $x, p \in B^*$ выполняется условие $E(p, x) \in L \Longleftrightarrow x \in L$.

3. Если $|x_1| = |x_2|$, $|p_1| = |p_2|$ и p_1 лексикографически строго меньше p_2, тогда $E(p_1, x_1)$ лексикографически строго меньше $E(p_2, x_2)$.

4. Если $|x_1| = |x_2|$ и $|p_1| = |p_2|$, то $|E(p_1, x_1)| = |E(p_2, x_2)|$ и если $|x_1| < |x_2|$ и $|p_1| < |p_2|$, то $|E(p_1, x_1)| < |E(p_2, x_2)|$.

5. Для любых $x, p \in B^*$ выполняется условие $D(|p|, E(p, x)) = p$ и $D(k, w)$ – пустое слово, если не существует x и p таких, что $|p| = k$ и $E(p, x) = w$.

Первый аргумент функции D выделяет ту часть слова, которая расширяется.

Теорема 2 [13]. *Пусть L является* NP-*полной задачей распознавания, которая регулярно- и монотонно-расширяема. Тогда существует P-вычислимое вероятностное распределение, с которым L является* DistNP-*полной задачей.*

В настоящее время в качестве основной рассматривается гипотеза DistNP$\not\subseteq$ AvgP? Это означает, например, что любой детерминированный алгоритм, используемый для решения распределительной задачи об останове (K, μ_K) не может иметь полиномиальной в среднем оценки относительно равномерного распределения μ_K.

Теорема 3. *Если* DistNP$\not\subseteq$ AvgP, *то не существует детерминированных эффективных реализаций метаэвристик в среднем случае.*

3. Направление дальнейших исследований

Известно, что из гипотезы DTime($2^{O(n)}$) $\neq$ NTime($2^{O(n)}$) следуют утверждения P $\neq$ NP, RP $\neq$ NP и DistNP$\not\subseteq$ AvgP [2,6]. Поэтому теоремы 1 и 3 можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 4. *Если* DTime($2^{O(n)}$) $\neq$ NTime($2^{O(n)}$), *то несуществует детерминированных и вероятностных эффективных реализаций метаэвристик в худшем случае и детерминированных эффективных реализаций метаэвристик в среднем случае.*

Из теоремы следует, что если ограничиться рамками существующей теории сложности, то эффективные реализации метаэвристик могут существовать только в классе вероятностных алгоритмов с полиномиальным временем работы относительно P-вычислимых распределений. Эта часть теории в настоящее время слабо развита. Только будущие исследования могут дать нужные аргументы. Но сам вывод достаточно хорошо коррелирует с известными фактами о метаэвристиках.

Если обратиться к описанию основных свойств метаэвристик, то обычно среди них выделяют недетерминированность [4]. Далее существует практика оценки эффективности метаэвристик на множестве случайных данных, которые обычно генерируются с помощью равномерного распределения, являющегося P-вычислимым распределением. А это уже близко к идее оценки трудоёмкости вероятностного алгоритма относительно P-вычислимого распределения. Также сама идея использовать в тестах равномерные распределения коррелирует с исследованиями теории сложности. В одной из ранних работ по теории среднего случая отмечалось, что самый лучший способ порождать "трудные"входы задач из класса NP это использовать равномерное распределение [11]. Косвенно это также подтверждается теоремой 2, так как распределения, которые в ней возникают очень близки к равномерному распределению [13].

Остановимся теперь на некоторых обстоятельствах, возникающих при исследовании метаэвристик, без учёта которых невозможно построить соответствующую теорию. Прежде всего напомним, что многие теоретические результаты носят асимптотический характер. В тоже время основное назначение метаэвристик – решение задач для входов ограниченной длины. Т.е. необходимо создание теорий худшего и среднего случая, в которых сложность задач оценивается на начальном отрезке входов.

В большинстве исследований и теоретических, и экспериментальных упорно игнорируется тот факт, что метаэвристики реализуются в виде программ, которые выполняются компьютерами. Это существенно при оценке эффективности любых алгоритмов, используемых для решения задач, содержащих числа, так как числа в компьютере не могут быть произвольными.

Рассмотрим модель с L битовой точностью представления чисел [16]. В этой модели числа имеют вид $a2^t$, где a и t целые неотрицательные числа, $a < 2^L$. Из [16] следует, что несколько известных NP-трудных оптимизационных задач полиномиально разрешимы, если рассматривать числа с L битовой точностью представления, где L – некоторая заданная константа. Поэтому необходима новая модель полиномиальной вычислимости, учитывающая это обстоятельство.

Работа поддержана грантом РФФИ 06-01-00075.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Гэри, Д. Джонсон. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. M. Atallah. Algorithms and theory of computation handbook. Boca Raton; FL: CRC Press, 1999.
3. G. Ausiello, P. Crescenzi, G. Gambosi, V. Kann, A. Marchetti-Spaccamela, M. Protasi. Complexity and approximation: combinatorial optimization problems and their approximability properties. Berlin: Springer, 1999.
4. C. Blum, A. Roli. Metaheuristics in combinatorial optimization: overview and conceptual comparison.// ACM Computing Surveys. 2003. Vol. 35, No. 3. P. 268-308.
5. B. Bollobas. Random Graphs. Academic Press, 1985.
6. S. Ben-David, B. Chor, O. Goldreich, M. Luby. On the theory of average case complexity.// J. Comput. System Sci. 1992. V. 44. P. 193-219.
7. E. Eberbach. Toward a theory of evolutionary computation.// BioSystems. 2005. V.

82. P. 1-19.
8. Y. Gurevich. Average case completeness.// J. Comput. System Sci. 1991. V. 42. P.346-398.
9. W. E. Hart, R. K. Belew. Optimizing an arbitrary function is hard for the genetic algorithm.//Proceedings of the Fourth International Conference on Genetic Algorithms. 1991. P. 190-195
10. R. Impagliazzo. A personal view of average-case complexity.// In Proceedings of the 10th Conference on Structure in Complexity Theory. 1995. P. 134-147.
11. R. Impagliazzo, L. A. Levin. No better ways to generate hard NP instances than picking uniformly at random.// In Proc. of the 31st IEEE Symp. on Foundation of Computer Science. 1990. P. 812-821.
12. L. Levin. Average case complete problems.// SIAM Journal on Computing. 1986. V. 15, N. 1. P. 285-286.
13. N. Livne. All natural NPC problems have average-case complete versions.// Electronic Colloquium on Computational Complexity, Revision 1 of Report No. 122 (2006). P. 1-17.
14. P. Moscato. Memetic algorithms: a short introduction// D. Corne, F. Glover, M. Dorigo (eds.) New Ideas in Optimization. McGraw-Hill. 1999.
15. E. Nagel, J. R. Newman, D. R. Hofstadter. Godel's proof. New York University Press, 2002.
16. J. Orlin, A. Schulz, S. Sengupta. ε-optimization schemes and L-bit precision: alternative perspectives in combinatorial optimization.// Proceedings of the Thirty-Second Annual ACM Symposium on Theory of Computing. 2000. P. 565-572.
17. C. H. Papadimitriou. Computational complexity. Addison Wesley. 1994.
18. A. A. Razborov, S. Rudich. Natural proofs.// J. Comput. System Sci. 1997. V. 55, N. 1. P. 24-35.
19. J. Wang. Average-case computational complexity theory. //L. Hemaspaandra, A. Selman (eds.) Complexity Theory Retrospective II. Springer Verlag. 1997. P. 295-328.
20. J. Wang. Average case intractable NP-problems.// D.-Z. Du, K. Ko (eds.) Advances in Complexity and Algorithms. Kluwer Academic Publishers. 1997. P. 313-378.
21. D. Whitley, J. P. Watson. Complexity theory and the no free lunch theorem.// E. K. Burke, G. Kendall (eds.) Search Methodologies: Introductory Tutorials in Optimization and Decision Support Techniques. New York: Springer. 2005.

Плясунов Александр Владимирович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 333-20-86, факс (383) 333-25-98. E-mail:apljas@math.nsc.ru

ТРУДНО РЕШАЕМЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ГИПЕРСЕТЕЙ

В. К. Попков

Разнообразие задач и их сложность в теории гиперсетей объясняется, собственно говоря, одним обстоятельством — большими изобразительными возможностями этой теории для описания систем сетевой структуры. Даже такая простая по формулировке задача (Поиск простой s, t–цепи в гиперсети), является NP–полной. В докладе рассматриваются задачи представляющие не только академический интерес, но и имеющие большое практическое значение.

1. Основные определения

В первом разделе доклада рассматриваются основные понятия и определения теории гиперсетей. Приведены важные подклассы базовой структуры, названной «абстрактной гиперсетью» [1].

1.1. Абстрактные гиперсети

Абстрактную гиперсеть можно определить шестеркой $AS = (X, V, R;\ P, F, W)$, состоящей из следующих объектов:

$X = (x_1, x_2,..., x_n)$ — множество вершин;

$V = (v_1, v_2, ..., v_g)$ — множество ветвей;

$R = (r_1, r_2, ..., r_m)$ — множество ребер;

$P : \mathrm{V} \to 2^X$ — отображение, сопоставляющее каждому элементу $v\in V$ множество $P(v) \subseteq X$ его вершин. Тем самым отображение определяет гиперграф $PS = (X,V; P)$;

$F : R \to 2^V_{PS}$ отображение, сопоставляющее каждому элементу $r\in R$ множество $F(r) \subseteq V$ его ветвей. Отображение F определяет гиперграф $FS = (V, R; F)$. Если семейство подмножеств ветвей 2^V_{PS} содержит только такие подмножества, ветви которых составляют связную часть гиперграфа PS, то такую абстрактную гиперсеть назовем непрерывной. В дальнейшем будем рассматривать именно такие гиперсети, опуская этот термин.

$\forall r\in R\ \ W : r \to 2^{P(F(r))}$ отображение, сопоставляющее каждому элементу $r\in\mathrm{R}$ подмножество $W(r) \subseteq P(F(r))$ его вершин, где $P(F(r))$ — множество вершин в PS, инцидентных ветвям $F(r) \subseteq V$. Таким образом, отображение W определяет гиперграф $WS = (X, R; W)$.

Гиперграф PS назовем первичной сетью гиперсети AS, а гиперграф WS — вторичной сетью гиперсети AS.

Если это не будет вызывать недоразумений, то гиперсеть будем обозначать $AS = (X, V, R)$, то есть, указывая явно только множество элементов гиперсети. Определим также обратные отображения:

$$P^{-1}(x) = \{v\colon x\in P(v)\};\quad F^{-1}(v) = \{r\colon v\in F(r)\};\quad W^{-1}(x) = \{r\colon x\in W(r)\};$$

Рассмотрим одно важное обобщение абстрактных гиперсетей, а затем перейдем к описанию некоторых основных понятий и терминов.

Пусть заданы гиперграфы $PS = (X, V; P) \equiv WS_0 = (X, R_0, W_0)$, $WS_1 = (Y_1, R_1; W_1)$, ... , $WS_k = (Y_k, R_k; W_k)$, тогда последовательность отображений

$$\{\Phi_i\} : WS_k \xrightarrow{\Phi_k} WS_{k-1} \xrightarrow{\Phi_k-1} \ldots WS_1 \xrightarrow{\Phi_1} PS$$

определяет иерархическую абстрактную k–гиперсеть $AS = (PS, WS_1, ..., WS_k; \Phi_1, ..., \Phi_k)$, если $Y_k \subseteq Y_{k-1} \subseteq ... Y_1 \subseteq X$ и $\forall i \in \overline{(1,k)}\ \forall r^i \in R_i\ \exists \{r^{i-1}\} \subseteq R_{i-1}$, $W_i(r^i) \subseteq W_{i-1}(\{r^{i-1}\})\ \&\{r^{i-1}\}$ образует связную часть в гиперграфе W_{i-1}. Таким образом, имеем последовательность вкладываемых друг в друга гиперграфов WS_i. Иногда k–гиперсеть будет обозначаться $(X,V, R_1, ..., R_k; F_1, F_2, ..., F_k)$ или $(X, V, R_1, ..., R_k)$.

Нетрудно заметить, что отображения P, F, W являются отношениями инциденции в соответствующих гиперграфах PS, FS, WS и, следовательно, они определяют инцидентность элементов в абстрактной гиперсети AS.

Важными понятиями являются отношения слабой инциденции элементов абстрактной гиперсети. А именно, два элемента из различных множеств слабо инцидентны, если найдется элемент из третьего множества, инцидентный им обоим. Например, вершина $x \in X$ слабо инцидентна ребру $r \in R$, если и только если существует элемент $v \in V$, такой что $x \in P(v)$ и $v \in F(r)$, то есть $x \in P(F(r))$. Ясно, что слабо инцидентные элементы могут быть также инцидентными. Обратно неверно.

Таким образом, для элементов абстрактных гиперсетей можно определить шесть понятий их смежности. Действительно, по аналогии с графами и гиперграфами два элемента из одного множества смежны тогда и только тогда, когда найдется элемент из другого множества, инцидентный им обоим. Но так как в абстрактных гиперсетях для элемента из любого множества могут быть найдены инцидентные элементы из двух различных множеств, то соответственно имеем два понятия смежности. Например, вершины x_1 и x_2 из X V–смежны, если $\exists v \in V\ x_1 \in P(v)$ и $x_2 \in P(v)$, и эти вершины r–смежны, если $\exists r \in R\ x_1 \in W(r)$ и $x_2 \in W(r)$. Аналогичным образом определяется смежность других элементов AS.

Степень элементов AS также определяется двояко, то есть вычисляется на соответствующих гиперграфах PS, FS и WS.

1.2. Гиперсети

Абстрактная гиперсеть $S = (X, V, R; P, F, W)$ называется гиперсетью, если

$\forall v \in V\ |P(v)| = 2$,

$\forall r \in R\ |W(r)| = 2$,

$\forall r \in R$ множество $F(r) \subseteq V$ составляет маршрут в графе $PS = (X, V)$.

Таким образом, первичная PS и вторичная сети WS гиперсети S являются графами, а F отображает ребра $WS = (X, R)$ в маршруты графа $PS = (X, V)$.

Так как множество $F(r)$ является маршрутом, то отображение F единственным образом определяет отображение W. Действительно, концевые вершины маршрута $F(r)$ являются одновременно концами ребра r, то есть гиперсеть S можно задать пятеркой $(X, V, R; P, F)$.

Две гиперсети $S = (X, V, R)$ и $S' = (X', V', R')$ называются изоморфными, если между их вершинами, ребрами и ветвями можно установить взаимное однозначное соответствие $X \leftrightarrow X'$, $V \leftrightarrow V'$, $R \leftrightarrow R'$ сохраняющее отображение P и F, и эквивалентными, если сохраняются отображения P и W. Две гиперсети S и S' равносильны, если можно установить взаимно–однозначное соответствие $X \leftrightarrow X'$, $R \leftrightarrow R'$, сохраняющее отображение W. Отношение равносильности несколько сильнее, чем отношение изоморфизма для вторичных сетей, так как множества вершин в первичных сетях PS и PS' могут быть различными. Две гиперсети равнозначные, если можно установить взаимно–однозначное соответствие $X \leftrightarrow X'$, $V \leftrightarrow V'$, сохраняющее отображение P.

2. Задачи теории гиперсетей

2.1. Задача поиска кратчайшего циклического маршрута в гиперсетях.

Наибольший интерес, с точки зрения синтеза кольцевых сетей связи на этапе абонентского доступа, представляет следующая задача:

Пусть задана первичная сеть $PS = (X, V)$ гиперсети AS. Заданы места расположения станций (узлов) вторичной сети необходимые объединить в кольца (в частном случае такое кольцо вторичной сети может быть уже заданным), заданы веса (стоимости) $S(V_i)$ и длины $L(V_i)$ ветвей первичной сети PS, удельная стоимость любого ребра.

Требуется найти циклическую структуру вторичной сети $WS = (X, R)$ и её реализацию в $PS = (X, V)$ такую, чтобы

$$\sum_{v_i \in F^{-1}\{r_j\}} S(v_i) + \sum_{r_i \in R \equiv \{\mu(x,y)\}} l(r_i)\, c \to \min\,, \tag{1}$$

где $\{\mu(x, y)\}$— множество маршрутов в первичной сети соединяющих пары x, y в WS. Каждому маршруту μ_i сопоставляется ребро r_i вторичной сети, и длина $l(r_i)$ будет ровна сумме длин ветвей входящих в данный маршрут. Очевидно, что даже при заданной структуре WS, найти значение (1) — не простая задача.

Также очевидно, что данная задача NP-полная и поэтому далее предлагается приближенный алгоритм решения.

2.2 Построение минимальных остовных частей гиперсетей с заданной связностью.

Пусть задана K-связная гиперсеть $S = (X, V, R)$, $s(r_i)$ и $s(v_i)$ — вес рёбер и ветвей соответственно, таких что $\sum_{r_i : v_i \in F(r_i)} s(r_i)$. Требуется найти минимальную (по весу) остовную часть гиперсети с требуемой связностью P, $P < K$.

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\, s(r_i) + \sum_{i: v_i \in \bigcup_{k=1}^{n} F(r_k)} d_i\, s(v_i) \to \min_{c_i, d_i \in \{0,1\}}\,.$$

Данная задача является обобщением для целого ряда задач поиска подсетей с заданными характеристиками и при различных исходных данных. В частности, здесь лежат задачи поиска различных деревьев в гиперсетях, кратчайшее остовное дерево, дерево Штейнера и др.

2.3. Упаковки и покрытия в гиперсетях.

Класс задач, рассмотренных здесь, достаточно хорошо изложен в литературе [3–5]. Однако в нашем случае имеются некоторые особенности связанные с тем, что в качестве объектов рассматриваются гиперсети.

О минимальном покрытиях в гиперсетях.

Постановка задачи минимального покрытия вершин ребрами гиперсети.

Пусть задана взвешенная гиперсеть $AS = (X, V, R; P, F, W)$, в которой $X = (x_1,\ldots x_n)$, $V = (v_1, v_2,\ldots, v_m)$, $R = (r_1, \ldots, r_n)$, $V(r_i)$ — вес ребра r_i.

Требуется найти подмножество ребер $R' \subset R$ такое, чтобы:

$$\forall x \in X,\ I(x) \subset R',\ \sum_{r_i \in R'} v(r_i) \to \min,\ \bigcup_{r \in R'} I(r) = x.$$

Здесь под $I(x)$ понимается множество всех ребер инцидентных (или слабо инцидентных) вершине x, а $I(r)$ — множество вершин инцидентных (или слабо инцидентных) ребру r. Отсюда следует, что задача покрытия вершин ребрами в точности совпадает с аналогичной задачей для графов. Задача поиска слабого покрытия вершин ребрами, как и в других случаях, имеет две модификации. Одна формулируется для полностью определенной гиперсети, а вторая для взаимно–однозначных гиперсетей.

Очевидно, что простых гиперсетей можно сформулировать не менее 18 задач о покрытиях. Действительно, каждый элемент гиперсети может быть покрыт элементом из двух других типов. Покрытие может быть простым или слабым. Причем исходная гиперсеть может быть полностью определена (задачи анализа) или определена только первичной и вторичной сетями, т.е. для класса взаимно–однозначных гиперсетей.

О максимальных упаковках в гиперсерсетях

Рассмотрим на примере вершин всевозможные задачи упаковок в гиперсетях.

Подмножество вершин X называют V-упаковкой (R-упаковкой), если произвольные различные вершины из X не V-смежны (R-смежны). Максимальное число вершин в упаковке гиперсети определяется в задаче о максимальной упаковке. Как и в предыдущем случае, таких задач также может быть не менее 18-ти. Все задачи из этого раздела NP-полные.

2.4. Медианы в гиперсетях.

Пусть задана гиперсеть $AS = (X, V, R; P, F, W)$, где $Z(x_i)$ — вес вершины $x_i \in X$, $l(v_j)$ — длина ветви $v_j \in V$, $c(v_j)$ — цена ветви v_j. $l(r_k) = \sum_{V_j \subset F'(r_k)} l(v_j)$ —длина ребра r_i.

Передаточной функцией вершины x_i гиперсети AC назовем:

$$\Pi\{(x_i), \mu(x_i, x_j)\} = \sum_{x_j \in X} \rho(x_i, x_j) Z(x_j) + \sum_{v_j \in F^{-1}(\{r_i\})} c(v_j),$$

где $\{z_i\}$— множество ребер гиперсети, по которым прошли цепи m_i от x_i до всех вершин x_j, $\rho(x_i, x_j) = \sum l(z_k)$, $z_k \in \mu(x_i, x_j)$, где $\mu(x_i, x_j)$ — цепь из вершин x_i в вершины x_j.

Передаточным числом $\Pi(x_0)$ для вершины x_0 назовем наименьшее значение функции $\Pi\{(x_i) \mid (x_i, x_j)\}$ если реализация цепей $\mu(x_0, x_j)$ такова, что

$$\Pi((x_i), \mu(x_i, x_j)) \to \min \tag{2}$$

Следовательно, от трассировки маршрутов в гиперсети AC из корня x_0 зависит его передаточное число. Очевидно, что

$$\Pi_{WS}(x_i) + |T^{PS}_{ocm}| \le \Pi(x_i) \le \Pi_{WS}(x_i) + |T^{PS}_{x_i}|,$$

где $\Pi_{WS}(x_i)$ — передаточное число в графе $WS = (X, R)$, T^{PS}_{ocm}— минимальное остовное дерево в графе $PS = (X,V)$, а $|T^{PS}_{ocm}|$— вес этого дерева. $|T^{PS}_{x_i}|$ — дерево (часть графа) в PS полученного после реализации минимального растущего дерева $|T^{WS}_{x_i}|$ в графе PS. Если WS и PS совпадают, то $|T^{WS}_{x_i}| = |T^{PS}_{x_i}|$.

Из данных оценок легко следует идея алгоритма решения следующей задачи.

Пусть задана взвешенная гиперсеть $AS = (X, V, R, P, F, W)$, требуется найти вершину x_0 гиперсети AS такую, чтобы $\Pi(x_0)$-min Очевидно, что если WS не связан, то данная задача не имеет решения.

Вершину x_0 гиперсети AS, для которой выполняется (2) назовем медианой гиперсети AS.

2.5. Задачи синтеза оптимальных структур гиперсетей.

Пусть, как и прежде, известны графы первичной сети $PS = (X, V)$, вторичной сети $WS = (Y, R)$. Обозначим

$\rho(v_{ij})$ или $\rho_{PS}(v_{ij})$ — длина ветви $v_{ij} \in$V;

$\rho(r_{ij})$ или $\rho_{WS}(r_{ij})$ — длина ребра $r_{ij} \in$R;

$\partial(v_{ij})$ — пропускная способность (емкость) ветви $v_{ij} \in$V;

$\partial(r_{ij})$ — емкость ребра $r_{ij} \in$R;

$\omega(S)$ — вершинную связность гиперсети S.

Требуется построить гиперсеть $S = (PS, WS; \Phi)$, для которой выполняются условия

$$\omega(\mathrm{S}) \geq k$$

$$\forall v \in V \quad \sum_{r \in \Phi} \partial(r) \leq \partial(x)$$

и которая минимизирует некоторый функционал $\varphi(S)$ — стоимость гиперсети S. Относительно вида функционала $\varphi(S)$ не формулируется никаких ограничений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попков В.К. Гиперсети и структурные модели сложных ситем. СМ–6. Новосибирск,1981. С. 26–48.

2. Попков В.К. Математические модели связности. Новосибирск. ИВМ и МГ СО РАН. 2006.

3. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978.

4. Фрэнк Г., Фриш И. Сети, связи и потоки. М.: Связь, 1978.

5. Зыков А.А. Основы теории графов. М.: Наука, 1987.

Попков Владимир Константинович,
Институт вычислительной математики и математической геофизики, просп. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 330-96-43. E-mail: popkov@sscc.ru.

РЕШЕНИЕ БОЛЬШИХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ И ОБЩЕЙ ПАМЯТЬЮ

Л. Д. Попов, А. В. Некрасов

В различных алгоритмических подходах и вычислительных схемах линейного программирования часто встречаются операции положительной срезки векторов и конструкции, основанные на обычных или расширенных штрафных функциях, в состав которых эти операции входят существенным образом. Простейшим примером таких конструкций может служить функция квадратичной невязки $F(x) = \frac{1}{2}||(Ax-b)^+||^2$, поставленная в соответствие (не обязательно совместной) системе линейных неравенств $Ax \leq b$, где $A_{m\times n}$ — некоторая заданная матрица, $b = (b_1, \ldots, b_m)$ — вектор правых частей и $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор ее неизвестных. Здесь и далее используется обозначение $x^+ = \max(0, x)$ для числа x и $p^+ = (p_1^+, \ldots, p_n^+)$ для вектора $p = (p_1, \ldots, p_n)$.

Функция квадратичной невязки лежит в основе многих методов линейного программирования [1–9]. Это, в частности, классический метод штрафных функций (с добавлением к обычной квадратичной невязке дополнительного линейного слагаемого), метод фейеровских приближений (при переходе от задачи линейного программирования к симметрической системе линейных неравенств), метод модифицированных функций Лагранжа (со сдвигом вектора правых частей системы на вектор двойственных оценок), метод нагруженного функционала (с добавлением к системе ограничений задачи еще одного неравенства-ограничения с переменной правой частью, лимитирующего искомое значение целевой функции) и другие. В той или иной своей части все они нуждаются в блоке безусловной минимизации функции обычной или расширенной квадратичной невязки, либо в блоке ее минимизации при наличии ограничений простейшего вида.

Функция квадратичной невязки $F(x)$ дифференцируема, а ее градиент удовлетворяет условию Липшица. Вместе с тем ее гессиан, т. е. матрица ее вторых производных $H(x) = (\partial^2 F/\partial x_i \partial x_j)_{n\times n}$ разрывна, что не позволяет в прямом виде применять к ней методы минимизации второго порядка. Тем не менее недавние работы О.Мангасарьяна и Р.Канзоу [10, 11] показали эффективность применения для этих целей ее квадратичных аппроксимаций вида

$$\hat{F}(x, x_0) = \frac{1}{2}\,(Ax-b)^T D_0 (Ax-b) + \frac{\delta}{2}\,||x-x_0||^2,$$

где x_0 — точка, в окрестности которой происходит аппроксимация, $\delta > 0$ — параметр регуляризации, D_0 — диагональная $m \times m$-матрица знаков невязок системы $Ax \leq b$ в точке x_0, т. е. такая матрица, i-й диагональный элемент которой равен 1, если i-е неравенство этой системы нарушается в точке x_0, и 0 в противном случае. Очередной шаг минимизации функции $F(x)$ состоит в пересчете текущего приближения по классической формуле $x_{k+1} = x_k + \alpha_k \Delta x_k$ с использованием направления спуска

$$\Delta x_k = -\big(A^T D_k A + \delta E\big)^{-1} \nabla F(x_k) = \hat{x}_k - x_k,$$

где E — единичная $m \times m$-матрица, D_k — диагональная $m \times m$-матрица знаков невязок системы $Ax \leq b$ в точке x_k, $\hat{x}_k$ — точка минимума гладкой функции $\hat{F}(\cdot, x_k)$ по первому аргументу, величина шага α_k либо постоянна (равна 1), либо лежит в интервале $(0, 1)$ и в ходе вычислений дробится в духе Армийо, либо определяется обычным для таких алгоритмов линейным поиском (заметим, что $\nabla F(x_k) = \nabla_1 \hat{F}(x_k, x_k)$).

Впрочем, при определении направления спуска можно обойтись и без явного вычисления и последующего обращения матрицы $H(x_k) = A^T D_k A + \delta E$. Систему линейных уравнений $H(x_k)\Delta x = -\nabla F(x_k)$, которой удовлетворяет искомое направление Δx_k, можно решить, например, методом сопряженных градиентов, где достаточно уметь находить произведение обращаемой матрицы на серию промежуточных векторов. Для этих целей можно вполне ограничиться тем мультипликативным представлением матрицы $H(x_k)$, которое нам доступно. Более того, для разреженных матриц, т. е. матриц, большая часть элементов которых равна нулю, такой подход может оказаться даже менее затратным в вычислительном отношении.

Несмотря на сделанное замечание о методе сопряженных градиентов и разреженных матрицах, наибольший успех методов квадратичной аппроксимации все же связывают с тем, насколько эффективно срабатывают классические методы линейной алгебры при вычислении и факторизации обобщенной матрицы вторых производных $H = A^T DA + \delta E$ (см., например, работы [12–15]). В этом отношении особенный интерес представляют разреженные матрицы, имеющие специальную структуру расположения своих ненулевых элементов и сохраняющие эту структуру целиком или частично при своем преобразовании в матрицу H. В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим блочно-диагональную матрицу с вертикальным окаймлением

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
A_{11} & & & & A_{1,n} \\ \hline
 & A_{22} & & & A_{2,n} \\ \hline
 & & \ddots & & \vdots \\ \hline
 & & & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n}
\end{array}\right).$$

Непосредственно проверяется, что матрица H также имеет блочно-диагональную структуру (правда, уже с двойным окаймлением)

$$H = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
H_{11} & & & & H_{1,n} \\ \hline
 & H_{22} & & & H_{2,n} \\ \hline
 & & \ddots & & \vdots \\ \hline
 & & & H_{n-1,n-1} & H_{n-1,n} \\ \hline
H_{n,1} & H_{n,2} & \dots & H_{n,n-1} & H_{n,n}
\end{array}\right),$$

причем последняя не меняется при ее факторизации по Холецкому. Более того, факторизация всей матрицы в этом случае сводится к последовательной факторизации ее диагональных блоков [15], размерность которых несопоставима с размерностью всей матрицы. Прочие блоки результирующей матрицы получаются из исходных и факторизованных диагональных блоков простыми операциями.

В противовес предыдущему рассмотрим блочно-диагональную матрицу с горизонтальным окаймлением

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c}
A_{11} & & & \\ \hline
 & A_{22} & & \\ \hline
 & & \ddots & \\ \hline
 & & & A_{n-1,n-1} \\ \hline
A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n-1}
\end{array}\right).$$

Для нее матрица $H = A^TDA+\delta E$, скорее всего, окажется полностью заполнена ненулевыми элементами, т. е. потеряет важное для нас свойство разреженности. Напротив, матрица вида $\bar{H} = A\bar{D}^TA^T + \delta E$, в которой основные множители переставлены местами, очевидно сохраняет разреженную структуру исходного образца. Назовем эту форму гессиана (вообще говоря некоторой другой штрафной функции) двойственной к форме $H = A^TDA + \delta E$.

Очевидно, структура первой матрицы переходит в структуру второй матрицы при транспонировании последней. Это наталкивает нас на простую идею замены исходной задачи линейного программирования двойственной задачей и наоборот с тем, чтобы получить наиболее предпочтительную структуру расположения ненулевых элементов матрицы ее ограничений. Впрочем, это не единственный прием, позволяющий достичь поставленных выше целей, а именно — обеспечить условия, при которых применение стандартного матричного аппарата и многопроцессорной вычислительной техники для решения задач линейного программирования большой размерности было бы эффективно.

Доклад организован следующим образом. Вначале обсуждаются варианты квадратичной аппроксимации функции квадратичной невязки. Затем описываются различные алгоритмы и вычислительные схемы, в том числе параллельные, предназначенные для задач линейного программирования канонического формата с двусторонними границами на переменные. При этом, ориентируясь на блочно-диагональные матрицы с горизонтальным окаймлением, как наиболее характерные для прямых задач, будет делаться упор на алгоритмы, в которых основное ядро вычислений состоит в факторизации матриц типа $H = ADA^T$, хотя противоположный тип $H = A^TDA$ также будет рассмотрен. Последующее обсуждение связано с аналогичными алгоритмами и вычислительными схемами для стандартного формата записи задачи линейного программирования. Кроме того обсуждаются близкие схемы для симметрических систем линейных неравенств и уравнений, возникающих в линейном программировании. По всем алгоритмам приводятся результаты численных экспериментов. В заключение делается попытка выработать некоторые общие выводы и рекомендации по теме доклада.

В качестве иллюстрации приведем авторский вариант классического метода нагруженного функционала в применении к канонической задаче линейного программирования с блочно-диагональной структурой ограничений вида

$$\min\,(c,x): \quad B_ix_i = b_i \ (i = 1,\ldots,r), \quad Ax = b_0, \quad x = [x_1,\ldots,x_r] \geq 0.$$

Здесь разбиение вектора неизвестных на подвекторы инициирует соответствующее разбиение на блоки вектора $c = [c_1,\ldots,c_r]$ и матрицы $A = [A_1,\ldots,A_r]$, где $c_i \in R^{n_i}$, B_i и A_i — $m_i \times n_i$- и $m_0 \times n_i$-матрицы соответственно, $m = \sum_{i=0}^r m_i$, $n = \sum_{i=1}^r n_i$. Ограничения $Ax = b_0$ назовем связывающими.

Соотнесем с выписанной задачей штрафную функцию

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^r(||B_ix_i - b_i||^2 + ||x_i^-||^2)$$

и рассмотрим двухуровневый итерационный процесс

$$\begin{cases} x^k \ \in \ \mathrm{Arg}\ \min\{\Phi(x): \ Ax = b_0, \ (c,x) = \gamma_k\}, \\ \gamma_{k+1} \ = \ \gamma_k + 2\lambda_k^{-1}\,\Phi(x^k), \quad k = 0,1,2,\ldots. \end{cases}$$

Здесь на каждом шаге вначале ищется минимум штрафной функции при связывающих ограничениях и единственном дополнительном линейном ограничении на значение целевой функции, а затем это значение уточняется при помощи соответствующего множителя Лагранжа λ_k ($\lambda_k > 0$). Для запуска процесса необходимо знать нижнюю границу оптимального значения исходной задачи γ_0. В предположении, что все вычисления производятся точно, метод является конечным, т. е. при некотором K имеет место включение вектора x_K в оптимальное множество прямой задачи.

Для минимизации функции $\Phi(x)$, организуем стандартный внутренний итерационный процесс вида $x^{s+1} = x^s + \alpha_s \Delta x^s \quad (s = 0, 1, \dots)$, где $\alpha_s = 1$ (для повышения надежности можно подключать процедуру дробления шагового параметра по Армийо или линейный поиск), а направление корректировки текущего приближения определяется как $\Delta x^s = \hat{x}^s - x^s$. Вектор $\hat{x}^s$ представляет собой точку минимума гладкой функции

$$\hat{\Phi}(x, x^s) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \left(||B_i x_i - b_i||^2 + x_i^T D_s^{(i)} x_i \right) + \frac{\delta}{2} ||x - x^s||^2$$

при линейных ограничениях-равенствах $Ax = b_0$, $(c, x) = \gamma_k$ и может быть получен из классической системы ККТ-условий

$$\begin{cases} (B_i^T B_i + D_s^{(i)} + \delta E_{n_i \times n_i})\, \hat{x}_i^s + A_i^T \hat{y} + \lambda_s c = B_i^T b_i + \delta x_i^s \quad (i = 1, \dots, r), \\ A_1\, \hat{x}_1^s + \dots + A_r\, \hat{x}_r^s = b_0, \\ (c_1, \hat{x}_1^s) + \dots + (c_r, \hat{x}_r^s) = \gamma_k, \end{cases}$$

где $D_s^{(i)} = \mathrm{diag}(\,\mathrm{sign}((-x_i^s)_1^+), \dots, \mathrm{sign}((-x_i^s)_{n_i}^-+)\,)$, E — единичные матрицы соответствующих размеров, λ_s — уже упоминавшийся множитель Лагранжа, $\delta > 0$ — малый параметр (может не стремиться к нулю). Матрица коэффициентов этой системы имеет блочно-диагональный вид с симметричным горизонтальным и вертикальным окаймлением. Применяя матричный вариант метода Гаусса, получаем

Утверждение. Формулы решения выписанной ККТ-системы имеют вид

$$\hat{y} = H_0^{-1} \Big[\sum_{i=1}^{r} A_i H_i^{-1} \left(p_i - \hat{\lambda}^s c_i \right) - b_0 \Big], \quad \hat{x}_i^s = H_i^{-1}(p_i - A_i^T \hat{y} - \hat{\lambda}^s c_i), \quad i = 1, \dots, r,$$

где $H_0 = \sum_{i=1}^{r} A_i H_i^{-1} A_i^T$, $H_i = B_i^T B_i + D_s^{(i)} + \delta E_{n_i \times n_i}$, $p_i = B_i^T b_i + \delta x_i^s$, $i = 1, \dots, r$,

$$\hat{\lambda}^s = \frac{\gamma_k + (\sum_{i=1}^{r} c_i^T H_i^{-1} A_i^T) H_0^{-1} (\sum_{i=1}^{r} A_i H_i^{-1} p_i - b_0) - \sum_{i=1}^{r} c_i^T H_i^{-1} p_i}{(\sum_{i=1}^{r} c_i^T H_i^{-1} A_i^T) H_0^{-1} (\sum_{i=1}^{r} A_i H_i^{-1} c_i) - \sum_{i=1}^{r} c_i^T H_i^{-1} c_i}.$$

Таким образом, наиболее трудоемкая часть алгоритма заключается в обращении r матриц H_i размера $n_i \times n_i$ и одной матрицы H_0 размера $m_0 \times m_0$, причем обращение матриц H_i, $i = 1, \dots, r$, можно выполнять параллельно.

Более подробно тема освещена в работе автора [16].

Работа поддержана РФФИ, проект 07-01-00399.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eremin I.I. Theory of Linear Optimization. Inverse and Ill-Posed Problems Series. VSP. Utrecht, Boston, Keln, Tokyo, 2002.
2. Еремин И.И., Мазуров Вл.Д. Нестационарные процессы математического программирования. –М.: Наука, 1979.
3. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982.
4. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. –М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат.лит., 1988.
5. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. М.: Факториал, 2003.
6. Антипин А.С. Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа.- М.: ВНИИСИ (препринт), 1979.
7. Лебедев В.Ю. Приближенный алгоритм решения задачи ЛП // ЖФМиМФ, 1974, т.14, №4, 1052—1058.
8. Разумихин Б.С. Метод касательных для стохастических и динамических задач оптимизации // Автоматика и телемеханика. 1977, N 1, с.5-15.
9. Поляк Б.Т., Третьяков Н.В. Об одном итерационном методе линейного программирования и его экономической интерпретации // Экономика и матем. методы. 1972. т.8. вып.5. с.740–751.
10. Mangasarian O.L. A finite Newton method for classification // Optimizat. Meth. Software. 2002. Vol.17, p.913—930.
11. Kanzow C., Qi H., Qi L. On the minimum norm solution of linear program // J. Optimizat. Theory and Appl. 2003. Vol.116. p. 333–345.
12. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Моллаверди Н. Применение метода Ньютона к решению задач линейного программирования большой размерности // Журн. вычисл. мат. и матем. физики, 2004, том 44, №9, с. 1564–1573.
13. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. —М.: Мир, 1999.
14. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем / Пер. с англ. – М.: Мир, 1991.
15. Gondzio J., Sarkissian R. Parallel interior-point solver for structured linear programs // Math. Progam., Ser. A. 2003, Vol. 96, p. 561–584.
16. Попов Л.Д. Квадратичная аппроксимация штрафных функций при решении задач линейного программирования большой размерности // Журн. вычислит. математ. и мат. физики. 2007. том 47, N2, с.206-221.

Попов Леонид Денисович, Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 6200219, Россия,
тел. (8-343-3)75-34-23, факс (8-343-3)74-25-81, e-mail:popld@imm.uran.ru

Некрасов Антон Владимирович, Уральский государственный университет

НЕВЫПУКЛЫЕ СТРУКТУРЫ И ИЕРАРХИЯ УПРАВЛЕНИЯ

А. С. Стрекаловский

Как известно [1], иерархичность управления вызвана невозможностью своевременной обработки большого объема поступающей одновременно информации. Децентрализация же управления в свою очередь приводит к неопределённости, обусловленной самостоятельными действиями подсистем. Анализ подобного рода неопределённости приводит к невыпуклым структурам. Так, например, известно [2], что поиск оптимистического решения в линейной двухуровневой задаче

$$\left.\begin{array}{c} \langle c, x\rangle + \langle d, y\rangle \uparrow \max\limits_{(x,y)}, \\ x \geqslant 0, \;\; Ax + By \leqslant b, \\ y \in Y_*(x) \triangleq \mathrm{Sol}(2), \end{array}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{array}{c} \langle c^1, x\rangle + \langle d^1, y\rangle \uparrow \max\limits_{y}, \\ y \geqslant 0, \;\; A_1x + B_1y \leqslant b^1, \end{array}\right\} \tag{2}$$

с применением ККТ-условий или соотношений двойственности для задачи (2) приводит к задаче математического программирования с дополнительным ограничением типа равенства вида (один из вариантов)

$$\begin{array}{c} \langle d^1 + vB_1, y\rangle - \langle v, b^1 - A_1x - B_1y\rangle = 0, \\ x, y, v \geqslant 0. \end{array}$$

Это ограничение очевидно нелинейно, точнее билинейно, и потому является d.c. функцией, т.е. представимо в виде разности двух выпуклых функций.

Нетрудно заметить, что такой же характер носит известная задача линейной дополнительности, заключающаяся в поиске такого x, что

$$\left.\begin{array}{c} x \geqslant 0, \;\; Mx + q \geqslant 0, \\ \langle x, Mx + q\rangle = 0. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Известно также, что задачи дополнительности (возможно нелинейные) тесным образом связаны с другим популярным объектом современной математики — с вариационными неравенствами, имеющими широкое приложение, например, в математической физике, теории ценового и транспортного равновесия и т.д.

Напомним, в случае однозначного отображения $P : X \to \mathbb{R}^m, \;\; X \subset \mathbb{R}^n$, решение вариационного неравенства состоит в поиске $x_* \in X$, для которого

$$\langle P(x_*), x - x_*\rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in X. \tag{4}$$

Легко видеть равносильность задач (3) и (4) при $P(x) = Mx + q, \;\; X = \mathbb{R}^m_+$. Также можно показать эквивалентность некоторых нелинейных обобщений (3) и (4).

Таким образом можно сказать, что решение задач с нелинейными (в частности с билинейными) ограничениями типа равенства обладает большим практическим весом (вызывая при этом не менее весомый теоретический интерес).

С другой стороны, задачи с нелинейными ограничениями-равенствами являются, как известно, едва ли не самыми трудными как с теоретической точки зрения, так и, главное, при численном решении подобных задач.

Известно, например, что ККТ-условия оптимальности для задачи

$$f_0 \downarrow \min, \quad f_i(x) = 0, \;\; i = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

где $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, нелинейные функции характеризуют лишь стационарные точки (т.е. удовлетворяющие равенству

$$\lambda_0 \nabla f_0(x_*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x_*) = 0; \tag{6}$$

$\lambda_i \in I\!R$, $i = 1, \ldots, m$, $\lambda_0 \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} |\lambda_i| + \lambda_0 > 0$), которых может быть достаточно много. В прикладных же задачах, например, в задачах (1)-(2), (3) и (4) требуется отыскать именно глобальное решение, для поиска которого условие (6) практически ничего не дает.

В настоящее время среди специалистов доминирует мнение, что подобные задачи решаются методом штрафов или путем редукции к серии задач ($\alpha \to \infty$)

$$\varphi_\alpha(x) = f_0(x) + \alpha \Phi(x) \downarrow \min_x \tag{7}$$

где $\Phi(x) = \Phi_0(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ может быть, например, следующего вида:

$$\Phi_1(x) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i |f_i(x)|, \;\; \Phi_2(x) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i [f_i(x)]^2, \;\; \Phi_p(x) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i [f_i(x)]^p, \;\; 1 < p < +\infty.$$

Можно заметить, что в случае нелинейности функций $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$ функция $\Phi(x)$, а вместе с ней и φ_α необязательно являются выпуклыми. Поэтому поиск именно глобального решения вспомогательной задачи (7) (что и требуется в методе штрафов) представляет собой непреодолимую (для стандартных методов нелинейной оптимизации) трудность. Следовательно, и поиск глобального решения задачи (5) оказывается необоснованным Здесь предлагается другой подход, основанный на условиях глобальной оптимальности для задачи с одним d. c. ограничением типа равенства:

$$(\mathcal{P}) \qquad \left.\begin{array}{r} f(x) \downarrow \min, \quad x \in S, \\ F(x) \triangleq g(x) - h(x) = 0, \end{array}\right\} \tag{8}$$

где f, g, h — выпуклые функции, а S — выпуклое множество из $I\!R^n$.

Нетрудно видеть, что задача $(\mathcal{P})$–(8) является частным случаем известной задачи с d. c. ограничением типа неравенства:

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \downarrow \min, \quad x \in S, \\ F(x) \triangleq g(x) - h(x) \geqslant 0. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Для задачи (9) нами предложены специальные методы локального поиска [6], условия глобальной оптимальности [4],[5], разработана стратегия глобального поиска и доказана ее сходимость [3],[5]. Кроме того, проведено тестирование теории глобального поиска для (9) на серии достаточно трудных задач.

Поэтому можно использовать эти результаты исследования задачи (9) для решения задачи (8).

Начнем прежде всего с условий оптимальности. Предположим, что в задаче $(\mathcal{P})$–(8) выполнены следующие предположения:

$$\exists\, v \in S: \quad F(v) < 0, \tag{10}$$

$$(\mathcal{H}) \qquad \left.\begin{array}{c} \forall\, y \in S: \quad F(y) = 0 \quad \text{т.е.} \quad g(y) = h(y), \quad \exists\, p = p(y) \in S: \\ h(p) - h(y) < \langle \nabla g(y), p - y \rangle. \end{array}\right\} \tag{11}$$

тогда также как это сделано в [3],[4] можно доказать следующие условия оптимальности (УО).

Теорема 1 (достаточное условие оптимальности)[3],[4]. Пусть выполнены условия (10) и $(\mathcal{H})$–(11). Тогда, если справедливо условие

$$(\mathcal{E}) \qquad \left.\begin{array}{c} \forall\,(y, \beta): \quad g(y) = \beta,\ y \in S, \\ h(y) \leqslant \beta \leqslant \sup(h, S), \\ h(x) - \beta \geqslant \langle \nabla g(y), x - y \rangle, \\ \forall\, x \in S, \quad f(x) \leqslant f(z); \end{array}\right\} \tag{12}$$

то точка z оказывается глобальным решением задачи $(\mathcal{P})$–(8). #

Однако для необходимости условия $(\mathcal{E})$–(12) для задачи $(\mathcal{P})$–(8) нужно потребовать иных предположений, нежели в задаче (9). Рассмотрим следующее предположение, которое легко проверяемо, как и (10):

$$\exists \hat{v} \in S:\ f(\hat{v}) < f(z), F(\hat{v}) < 0. \tag{13}$$

Теорема 2 (необходимое условие оптимальности). Пусть в задаче $(\mathcal{P})$-(8) выполнено предположение (13).

Тогда, если $z \in Sol(\mathcal{P})$, то

$$(\mathcal{E}_1) \qquad \left.\begin{array}{c} \forall(y, \beta):\ g(y) = \beta,\ y \in S, \\ h(y) - \beta \geqslant \langle \nabla g(y), x - y \rangle \\ \forall x \in S,\ f(x) \leqslant f(z). \end{array}\right\} \tag{14}$$

Доказательство. Если $(\mathcal{E}_1)$-(14) нарушено, то

$$\exists(y, \beta):\ g(y) = \beta, y \in S,\ \exists u \in S, f(u) \leqslant f(z),$$

$$h(u) - \beta < \langle \nabla g(y), u - y \rangle.$$

Тогда из выпуклости $g(\cdot)$ следует

$$0 < \beta - h(u) + g(u) - g(y) = F(u),$$

так что

$$u \in S,\ f(u) \leqslant f(z),\ F(u) > 0.$$

В силу (13), $\exists \lambda \in]0, 1[:\ F(x(\lambda)) = 0,$

$$x(\lambda) = \lambda u + (1 - \lambda)\hat{v} \in S.$$

Кроме того, благодаря выпуклости $f(\cdot)$,

$$f(x(\lambda)) \leqslant \lambda f(u) + (1 - \lambda) f(\hat{v}) < f(z),$$

что противоречит оптимальности z. #

На основе условий оптимальности $(\mathcal{E})$-(12) и $(\mathcal{E}_1)$-(14) для задач (1)-(2) и (3) разработаны методы локального и глобального поиска, посредством которых решены задачи достаточно большой размерности.

Результаты численного эксперимента выглядят достаточно убедительно как для задач линейной дополнительности, так и для задач двухуровневого управления (1)-(2), и позволяют сделать заключение об эффективности разработанного подхода для данных классов задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
2. Dempe S. Foundations of bilievel programming. Dordrecht/ Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2002.
3. Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации, Новосибирск: Наука, 2003.
4. Стрекаловский А.С.Об экстремальных задачах с d.c. ограничениями.// Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 2001, т.41, № 12, с. 1833-1843.
5. Стрекаловский А.С. Минимизирующие последовательности в задачах с d.c. ограничениями.// Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 2005, т.45, № 3, с. 435-447.
6. Стрекаловский А.С., Груздева Т.В. Локальный поиск в задачах с невыпуклы-ми ограничениями// Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2007, т.47, № 3, с. 397-413.

Стрекаловский Александр Сергеевич
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова 134, Иркутск, 644033, Россия, тел. (3952)511398.
E-mail: strekal@icc.ru

МЕТОДЫ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ С ОТСЕЧЕНИЯМИ В ЗАДАЧАХ ГЛОБАЛЬНОЙ И ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

О. В. Хамисов

Методику, предлагаемую в докладе, поясним на примере следующей задачи.

Задача F. *Задано компактное множество $X \subset \mathbb{R}^n$. Требуется найти точку $x^* \in X$ или установить, что $X = \emptyset$.*

Сделаем основные предположения, конкретизирующие постановку задачи F. Во-первых, будем считать, что множество X представимо в виде

$$X = \Pi \bigcap D, \tag{1}$$

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : -\infty < \underline{x}_j \le x_j \le \overline{x}_j < \infty, j = 1, \ldots, n\}, \tag{2}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \le 0, i = 1, \ldots, m, h_r(x) = 0, r = 1, \ldots, l\}. \tag{3}$$

Во-вторых, функции $g_i(x), i = 1, \ldots, m$ и $h_r(x), r = 1, \ldots, l$ удовлетворяют следующим требованиям. Каждая функция $g_i(x)$ имеет опорную функцию-миноранту $\varphi_i(x, y), \varphi_i : \mathbb{R}^n \times \Pi \to \mathbb{R}$ такую, что

1. $\varphi_i(x, y)$ непрерывна и вогнута по x при любом фиксированном y;

2. $g_i(x) \ge \varphi_i(x, y)\ \forall x \in X$ при любом фиксированном y;

3. $g_i(y) = \varphi_i(y, y)\ \forall y \in X$.

Каждая функция $h_r(x)$ имеет опорную функцию-мажоранту $\psi_r^+(x, y), \psi_r^+ : \mathbb{R}^n \times \Pi \to \mathbb{R}$ и опорную функцию-миноранту $\psi_r^-(x, y), \psi_r^- : \mathbb{R}^n \times \Pi \to \mathbb{R}$ такие, что

1. $\psi_r^+(x, y)$ непрерывна и выпукла по x при любом фиксированном y;

2. $\psi_r^-(x, y)$ непрерывна и вогнута по x при любом фиксированном y;

3. $\psi_r^-(x, y) \le h_r(x) \le \psi_r^+(x, y)\ \forall x \in X$ при любом фиксированном y;

4. $\psi_r^-(y, y) = h_r(y) = \psi_r^+(y, y)\ \forall y \in X$.

В [4] показано, что при выполнении данных требований функции $g_i(x)$ будут полунепрерывными снизу, а функции $h_r(x)$ - непрерывными. Следовательно, множество D будет замкнутым, множество X - компактным. Класс функций, имеющих опорную вогнутую функцию-миноранту, достаточно широк. Он включает в себя липшицевые функции, функции, представимые в виде разности двух (полунепрерывных снизу) выпуклых функций (так называемые d.c. функции[1]), функции из класов C^1, C^2.

Конструктивные правила автоматического построения выпуклых опорных функций-мажорант и вогнутых опорных функций минорант описаны в [1]. В [2] разработан язык описания моделей системы автоматической глобальной оптимизации. Если некоторая функция (не обязательно дифференцируемая) получена из элементарных функций ($\sin(x), \cos(x), e^x, \ln(x)$,...) при помощий операций сложения, деления, умножения, вычитания, взятия дискретного максимума и/или минимума и композиции,

[1] Термин, введенный вьетнамским математиком Х. Туем.

то определение опорных функций может быть сделано компьтером, т.е. автоматически, подобно тому, как компьютер может вычислять производные аналитически, например, в система компьютерной алгебры MAPLE или при помощи средств автоматического дифференцирования [3]. Аналогичный подход к задачам нелинейного программирования ранее рассматривался в [6].

Пример. Пусть заданы функция двух переменных $g(x, y) = \sin(xy) + 0.1(x-1)^2 + 0.2y^2$, множество $X = \Pi = \{x \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x_j \leq 3, j = 1, 2\}$ и опорная точка $y = (0, 0)$. Автоматически построенная опорная в точке y вогнутая функция-миноранта имеет вид

$$\varphi(x, y) = \min\left(0, -\frac{(x-y)^2}{2}\right) + 0.1 - 0.2\,x.$$

При помощи ограничений (2)-(3) можно определять и дискретные множества. Хорошо известный пример на эту тему представляет задание множеств Π и D в виде

$$\Pi = \Pi_B = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, \ldots, n\},$$

$$D = D_B = \{x \in \mathbb{R}^n : h_B(x) = x^T(x - e) = 0\},$$

где $e = (1, \ldots, 1)^T$. В этом случае множество $X_B = \Pi_B \cap D_B$ состоит из вершин куба Π_B. Если множество D определяется следующим образом

$$D = D_I = \{x \in \mathbb{R}^n : h_I(x) = \sum_{j=1}^{n} |\sin(\pi x_j)| = 0\},$$

то включение $x \in D_I$ равносильно условию $x \in \mathbb{Z}^n$, в котором множество $\mathbb{Z}^n$ есть множество n-мерных векторов с целочисленными компонентами, т.е. в данном случае $D_I = \mathbb{Z}^n$.

Предположим теперь, что компоненты вектора x должны принимать некоторые произвольные дискретные значения

$$x_j \in Z_j = \{z_{j1}, \ldots, z_{jk_j}\}, j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Рассмотрим один из возможных способов учета ограничений (4). Введем функции

$$\zeta_j(x_j) = \prod_{s=1}^{k_j}(x - z_{js}).$$

Тогда условие (4) можно записать в виде $x \in D_Z$, где

$$D_Z = \{x \in \mathbb{R}^n : h_Z(x) = \sum_{j=1}^{n} |\zeta_j(x_j)| = 0\}.$$

Функция $h_B(x)$ вогнута, а для функций $h_I(x)$ и $h_Z(x)$ нетрудно построить соответствующие вогнутые опорные функции.

Множество D в (3) можно определить и следующим стандартным образом

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \leq 0\},$$

$$F(x) = \max\{g_1(x), \ldots, g_m(x), |h_1(x)|, \ldots, |h_l(x)|\}.$$

Функция $F(x)$ имеет вогнутую опорную функцию-миноранту $\varphi_F(x, y)$. Пусть $x^0 \in \Pi$ - произвольная точка. Если $F(x^0) \leq 0$, то $x^0 \in X$ и допустимая точка найдена. В противном случае

$$x^0 \notin X \tag{5}$$

и $F(x^0) > 0$. Поскольку по определению $\varphi_F(x^0, x^0) = F(x^0)$, то

$$\varphi_F(x^0, x^0) > 0. \tag{6}$$

С другой стороны, $\varphi_F(x, x^0) \leq F(x)\ \forall x \in X$. Поэтому

$$\varphi_F(x, x^0) \leq 0\ \forall x \in X. \tag{7}$$

Из (5)-(7) следует, что поверхность $\varphi_F(x, x^0) = 0$ отделяет или отсекает точку x^0 от множества X. Основная трудность состоит в том, что данное отсечение нелинейно и использовать его напрямую достаточно трудно. Основываясь на стандартной технике построения отсечений в целочисленном программировании, покажем как можно построить линейное[2] отсечение с помощью опорной функции $\varphi_F(x, y)$.

Прежде всего необходимо, чтобы точка x^0 была вершиной Π. Определим множество

$$U(x^0) = \{x \in \Pi : \varphi_F(x, x^0) > 0\},$$

не содержащее точек из X. Пусть C^0 - конус с вершиной в точке x^0, образованный активными гранями Π. Найдем точки пересечения ребер конуса C^0 с поверхностью $\varphi_F(x, x^0) = 0$ и проведем через них плоскость

$$(p^0)^T x = s^0. \tag{8}$$

В силу построения и выпуклости $U(x^0)$ плоскость (8) будет отсекающей, т.е.

$$(p^0)^T x^0 > s^0 \ \text{ и } (p^0)^T x \leq s^0 \ \ \forall x \in X.$$

Определим многогранник

$$P^0 = \{x \in \Pi : (p^0)^T x \leq s^0\}.$$

Очевидно, что $x^0 \notin P^0$ и $P^0 \supset X$. Выбрав новую (невырожденную) вершину $x^1 \in P^0$ и повторив процедуру отсечения для x^1, получим многоранник P^1 такой, что

$$P^0 \supset P^1 \supset X.$$

После многократного повторения процедуры отсечения получим последовательность многогранников

$$P^0 \supset P^1 \supset \dots P^k \supset X$$

и точек $x^k, k = 0, 1, \dots, k$. В докладе обсуждаются различные способы конкретизации приведенной выше схемы, при которых либо $P^k = \emptyset$ при некотором k, что соответствует случаю $X = \emptyset$, либо $\lim_{k\to\infty} x^k = x^* \in X$.

С вычислительной точки зрения отсечения могут оказаться малоэффективными, что означает, что расстояние от отсекаемой точки до отсекающей плоскости может

[2] Т.е. отсечение, определяемое плоскостью.

оказаться пренебрежительно малым. В этом случае предлагается текущий конус C^k разбить на несколько конусов C^{k_i} так, чтобы

$$C^k = \bigcup_i C^{k_i} \text{ и } int(C^{k_j}) \bigcap int(C^{k_i}) = \emptyset \text{ при } i \neq j.$$

Принцип комбинирования ветвлений с отсечениями состоит в том, чтобы производить отсечения до тех пор, пока отсечения не станут малоэффективными, после чего произвести разбиение конуса. Таким образом удается увеличить эффективность отсечений при не столь быстром росте числа конусов. В докладе обсуждаются вычислительные схемы с различными правилами разбиения конусов и условия сходимости получившихся методов ветвлений с отсечениями к допустимой точке множества X.

В заключительной части доклада рассматривается задача глобальной минимизации функции, имеющей вогнутую опорную функцию-миноранту, на множестве, заданном условиями (1)-(3). Используется выше приведенная методика. Предлагаемый метод является модификацией метода, ранее предложенного в [5]. Приводятся результаты численного эксперимента.

Работа поддержана грантом РФФИ 06-01-00465-а

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Р. Ершов, О.В. Хамисов. Автоматическая глобальная оптимизация. // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. 2004. Т. 44. N9. с. 45-68.
2. А.Р. Ершов. Язык описания моделей системы автоматической глобальной оптимизации. // Труды XIII Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения", т.1 "Математическое программирование", Иркутск, ИСЭМ СО РАН. 2005. с. 621-626.
3. А.Н. Горбань. Быстрое дифференцирование, двойственность и обратное распространение ошибок. // В кн.: Нейроинформатика, Новосибирск, Наука. 1998. с. 73-100.
4. О.В. Хамисов. Глобальная оптимизация функций с вогнутой опорной минорантой. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. т. 44. N9. с. 1552-1563.
5. V.P. Bulatov, O.V. Khamisov. The branch and bound method with cuts in E^{n+1} for solving concave programming problem. // Lecture Notes in Control and Computer Sciences, 180, Springer-Verlag. 1991. P. 273-282.
6. G.P. McCormik. Nonlinear programming: Theory, Algorithms and Applications. // John Wiley and Sons. New York. 1988. 267 p.

Хамисов Олег Валерьевич, ИСЭМ СО РАН, ул. Лермонтова 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-84-39, факс (3952) 42-67-96, E-mail: khamisov@isem.sei.irk.ru

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ И АППРОКСИМАЦИОННАЯ СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ, СВЯЗАННЫХ С ПРОБЛЕМОЙ КОМИТЕТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ КОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

М. Ю. Хачай

Введение

В работах [1,2] получены результаты по вычислительной сложности задачи MASC о минимальном аффинном разделяющем комитете для конечных множеств $A, B \subset \mathbb{Q}^n$. В частности, показано, что эта задача NP-трудна и не принадлежит классу Apx (если $P \neq NP$). В сообщении приведена оценка порога эффективной аппроксимируемости задачи MASC. Отдельно исследуется вопрос о вычислительной сложности задачи при дополнительных ограничениях, например, фиксированной размерности пространства. Показывается, что задача о комитетной отделимости остается труднорешаемой, даже будучи сформулированной на плоскости (т.е. в наиболее простом нетривиальном случае). Справедливость этого факта следует из полиномиальной сводимости к задаче о комитетной отделимости известной задачи PC о покрытии конечного множества точек на плоскости прямыми, труднорешаемость которой известна [3]. Методика сведения является модификацией методики, описанной в [4], использовавшейся в этой работе для обоснования труднорешаемости задачи о кусочно-линейной отделимости конечных множеств на плоскости.

Постановка и оценка порога аппроксимируемости задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете

Определение 1. Конечная последовательность функций $Q = (f_1, \ldots, f_q)$, $f_i(x) = \alpha_i^T x - \beta_i$ называется аффинным комитетом, разделяющим множества $A, B \subset \mathbb{R}^n$, если выполнено условие

$$
\begin{aligned}
|\{i \in \mathbb{N}_q \mid f_i(a) > 0\}| \quad &> \quad \frac{q}{2} \quad (a \in A),\\
|\{i \in \mathbb{N}_q \mid f_i(b) < 0\}| \quad &> \quad \frac{q}{2} \quad (b \in B).
\end{aligned}
$$

Число q называется числом элементов (членов) комитета Q.

Задача о минимальном аффинном разделяющем комитете (MASC). Заданы множества $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$, $A, B \subset \mathbb{Q}^n$. Требуется указать аффинный комитет Q с наименьшим числом элементов, разделяющий множества A и B.

Теорема 1 ([2]). *Задача MASC NP-трудна.*

Задача MASC остается NP-трудной при дополнительном ограничении

$$A \cup B \subset \{z \in \{0,1,2\}^n \, : \, |z| \leq 2\}.$$

Теорема 2 ([2]). *Задача MASC не принадлежит классу Apx (при условии $P \neq NP$).*

Следующий результат является уточнением предыдущей теоремы и указывает нижний порог эффективной аппроксимируемости задачи MASC.

Теорема 3. *Если справедливо условие*

$$NP \not\subseteq TIME(2^{poly(\log n)}),$$

то для задачи MASC не существует приближенного алгоритма с точностью аппроксимации $O(\log\log\log m)$.

Задача о комитетной отделимости конечных множеств на плоскости

Остановимся далее на частном случае задачи о комитетной отделимости, в котором размерность пространства фиксирована. Известно [5], что при $n = 1$ задача о минимальном аффинном разделяющем комитете полиномиально разрешима. Ниже показывается, что при $n = 2$ (а, следовательно, при произвольном фиксированном $n > 1$) она NP-трудна.

Определение 2. Множество прямых $\mathcal{L} = \{l_1, \ldots, l_s\}$, $l_j = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, c_j^T x = d_j\}$, называется покрытием множества $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{R}^2$, если для каждой точки $p \in P$ найдется прямая $l = l(p) \in \mathcal{L}$ такая, что $p \in l$.

Всюду ниже, если это специально не будет оговорено, будем предполагать, что элементы множеств P, A и B, равно как и параметры, определяющие покрытия и разделяющие комитеты, являются рационально-значными векторами. Как обычно, перейдем к рассмотрению комбинаторных задач, сформулированных в виде задачи распознавания свойства.

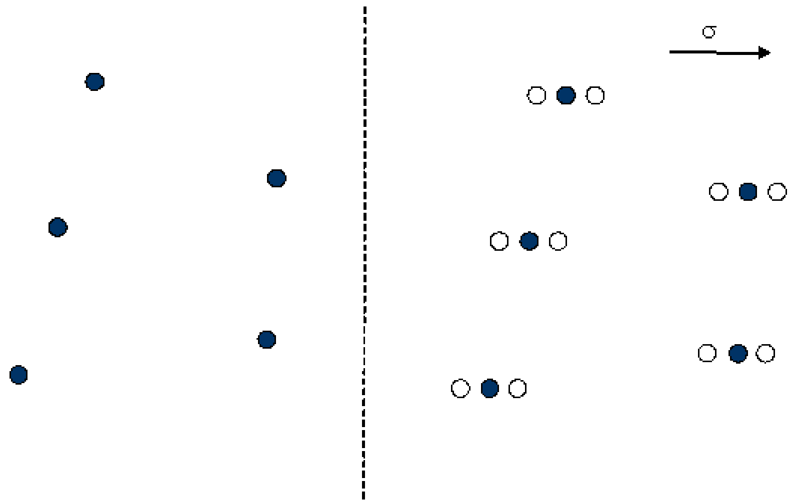

Рис. 1: пример сведения задачи PC к задаче PASC

Задача о покрытии прямыми конечного множества на плоскости (PC). Заданы множество $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{Z}^2$ и число $s \in \mathbb{N}$. Существует ли покрытие $\mathcal{L}$ множества P по мощности не превосходящее s?

Задача о комитетной отделимости конечных множеств на плоскости (PASC).

Заданы множества $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$, $A, B \subset \mathbb{Q}^2$, и число $t \in \mathbb{N}$. Существует ли аффинный комитет Q, разделяющий множества A и B и состоящий из не более чем t элементов?

Известно [3], что задача PC NP-полна. Задача PASC является частным случаем задачи ASC [2], полученным фиксацией размерности пространства. Легко убедиться в том, что задача PASC (как и ASC) принадлежит классу NP. Ниже описывается полиномиальная сводимость задачи PC к задаче PASC, влекущая принадлежность последней классу NP-полных задач.

Пусть условие частной задачи PC задается множеством $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{Z}^2$ и числом $s \in \mathbb{N}$. Вычислим $\rho = \max\{|p_i| \ : \ i \in \mathbb{N}_k\}$ и положим $\varepsilon = \frac{1}{6(2\rho+1)+1}$. Зафиксируем вектор σ, $|\sigma| = 1$ так, чтобы для любого $\{i, j\} \subset \mathbb{N}_k$ отрезки $[p_i - \varepsilon\sigma, p_i + \varepsilon\sigma]$ и $[p_j - \varepsilon\sigma, p_j + \varepsilon\sigma]$ не лежали на одной прямой. Сопоставим исходной задаче PC частную задачу PASC с условием: $A = P$, $B = (P - \varepsilon\sigma) \cup (P + \varepsilon\sigma)$ и $t = 2s + 1$ (Рис. 1).

Легко убедиться в том, что описанные выше действия могут быть произведены за время, ограниченное сверху полиномом от длины записи условия задачи PC. Для завершения обоснования полиномиальной сводимости достаточно показать, что задача PC и поставленная ей в соответствие задача PASC имеют положительный или отрицательный ответ одновременно. Другими словами, множество P обладает покрытием из не более чем s прямых тогда и только тогда, когда соответствующие ему множества A и B отделимы аффинным комитетом, число элементов которого не превосходит $2s + 1$.

Теорема 4. *Множество $P = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset \mathbb{Z}^2$ обладает покрытием из s прямых тогда и только тогда, когда множества $A = P$ и $B = (P - \varepsilon\sigma) \cup (P + \varepsilon\sigma)$ отделимы аффинным комитетом из $2s + 1$ элемента.*

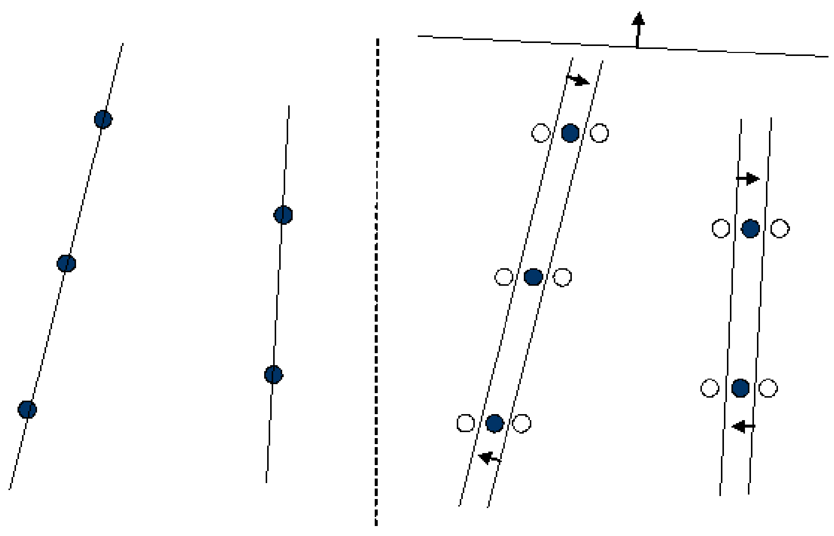

Рис. 2: пример построения разделяющего комитета по известному покрытию

Доказательство теоремы в большей степени конструктивно и представляет собой, по сути, обоснование корректности алгоритма сопоставления известному покрытию множества P аффинного комитета, разделяющего соответствующие множества A и B, иллюстрация которого приведена на Рис. 2.

Следствие 1. *Задача PASC NP-полна. Задача ASC в пространстве фиксированной размерности* $n > 1$ *также NP-полна.*

Следствие 2. *Задача MASC при фиксированном* $n > 1$ *NP-трудна.*

Работа выполнена при поддержке Президента РФ, гранты МД-6768.2006.1 и НШ-5595.2006.1 и РФФИ, № 07-07-00168.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.Ю. Хачай. О вычислительной сложности задачи о минимальном комитете и смежных задач // ДАН, 2006, 406, №6, С. 742–745.
2. М.Ю. Хачай. О вычислительной и аппроксимационной сложности задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете. // Таврический вестник информатики и математики. 2006, №1, С. 34–43.
3. N. Megiddo, A. Tamir. On the complexity of locating linear facilities in the plane // Operations research letters. 1982, vol. 1, no. 5, p. 194–197.
4. N. Megiddo. On the complexity of polyhedral separability // Discrete and Computational Geometry. 1988, 3, p. 325–337.
5. Вл.Д. Мазуров. Комитеты систем неравенств и задача распознавания // Кибернетика. 1971. №3. С. 140–146.

Хачай Михаил Юрьевич, Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620219, Россия,
тел. (343) 375-35-05, факс (343) 374-25-81, E-mail: mkhachay@imm.uran.ru

ТРИАНГУЛЯЦИИ ТОЧЕЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ И ИХ f–ВЕКТОРЫ.

В. Н. Шевченко

Пусть $A = \{a_1, ..., a_n\}$ множество таких точек $a_j \in R^d$, что их выпуклая оболочка (обозначаемая далее $[A]$) есть d-мерный выпуклый политоп. *Триангуляцией точечной конфигурации с узлами из множества* A назовем множество $T_A = \{S_1, S_2, ..., S_t\}$ таких $S_i \subseteq A$, что $[S_i]$ – d-мерный симплекс, $|S_i| = d + 1$, $\bigcup\limits_{i=1}^{t} [S_i] = [A]$ и при $i \neq k$ $[S_i \cap S_k] = [S_i] \cap [S_k]$. При $j = 0, 1, 2, ..., d$ назовем $(j + 1)$-элементное подмножество $F \subset A$ *j-гранью* T_A, если существует i такое, что $F \subset S_i$. Обозначим через $f_j(T_A)$ число j-граней и положим $f(\lambda, T_A) = \sum\limits_{j=0}^{d+1} f_{j-1}(T_A)\lambda^j$, где $f_{-1}(T_A) = 1$. Рассмотрим множество всевозможных триангуляций T_A со всевозможными матрицами A и обозначим множество соответствующих многочленов $f(\lambda, T_A)$ через $F(d, n)$. В докладе предлагается обзор существующих методов триангуляции и условий (как необходимых, так и достаточных) реализуемости многочлена $f(\lambda)$ (то есть принадлежности его множеству $F(d, n)$).

Шевченко Валерий Николаевич, Нижегородский госуниверситет им. Н. И. Лобачевского, пр. Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603950, Россия, тел. (8-8312) 65-78-81, E-mail:shev@uic.nnov.ru

CONTINUOUS COVERING PROBLEMS

P. Hansen

Covering problems are frequently encountered in Operations Research, Location Theory, Telecommunications and Geometry. The most studied are the discrete ones, such as the p-center problem. However, continuous problems are of interest also. They are of two types:

(i) discrete-continuous ones, in which a discrete set of demand points is given, together with a continuous set wherein facilities are to be located, the objective being to minimize the maximum distance from a demand point to its closest facility;

(ii) fully continuous ones which differ from the former only in that the set of demand points is continuous; this last category comprizes well-known geometric problems such as covering disks, squares or tringles by a minimum number of disks of given radius (or with a given number n of disks with minimum radius).

We review work on these problems and provide new heuristic and exact algorithms for both of them.

Pierre Hansen,
GERAD and Department of Quantitative Methods in Management, HEC Montréal, Canada, phone: (1-514) 340-6052, fax: (1-514) 340-5665. E-mail: Pierre.Hansen@gerad.ca

THE VARIABLE NEIGHBORHOOD SIMPLEX SEARCH FOR CONTINUOUS OPTIMIZATION

Q. Zhao, D. Urosevic and N. Mladenovic

We first suggest a modified version of the well-known Nelder-Mead (or simplex) method, originally designed for solving continuous convex minimization problems. Then we propose a natural and simple extension that allows us to solve non convex nor concave problems as well. It fits into the variable neighborhood search scheme. Extensive computational analysis shows the capability of our method. It appears that, in solving convex problems, our modified simplex outperforms in average the original version as well as some other recent modifications. In solving unconstrained global optimization, it is comparable with the state-of-the-art heuristics, but easier to implement and more user-friendly.

Nenad Mladenović
School of Mathematics, University of Birmingham Edgbaston, Birmingham B15 2TT, United Kingdom, e-mail: Nenad.Mladenovic@brunel.ac.uk.

ПОИСК ПРЕДЕЛЬНЫХ И РАВНОВЕСНЫХ СОСТОЯНИЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ

С. Н. Астраков, А. И. Ерзин, И. И. Тахонов

Исследуется n-элементная модель динамической системы, представляемая взвешенным графом. Все элементы этой системы наделены некоторым ресурсом, который они распределяют по инцидентным дугам. Назовем совокупность распределений ресурсов всех элементов модели *состоянием системы.* В каждый момент времени произвольный элемент i оценивает взаимоотношения с каждым соседом j согласно значениям заданных функционалов $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji})$ (где x_{ij}, x_{ji} – количества ресурсов, выделяемых элементами i и j на дуги (i, j) и (j, i)) и принимает решение об изменении значений параметров x_{ij} с целью "улучшения" взаимодействия с соседями. Элементы принимают решения независимо друг от друга, поэтому состояние, в которое попадает система, вообще говоря, отличается от ожидаемого каждым элементом, что вынуждает элементы снова менять значения своих параметров.

В работе [1] приведены достаточные условия существования предельных и равновесных состояний для системы с функционалами вида $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = ax_{ij} + bx_{ji}$, а также указаны формулы для их вычисления.

В данной работе найдены достаточные условия сходимости процесса изменения состояний системы с функционалами более общего вида:

1. $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = a_i x_{ij} + \varepsilon a_j x_{ji}$;
2. $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = a_{ij}(x_{ij} + x_{ji})$;
3. $c_{ij}(x_{ij}, x_{ji}) = a_i x_{ij} + b_{ij} x_{ji}$.

Для систем с функционалами вида 1 и 2 найдены формулы для вычисления предельных и равновесных состояний с трудоемкостью вычислений $O(n^3)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерзин А.И., Тахонов И.И. Равновесное распределение ресурсов сетевой модели // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. 8, № 3(23). С. 58–68.

Астраков Сергей Николаевич, Кемеровский институт (филиал) Российского государственного торгово-экономического университета, ул. Мичурина, д.55-А, кв.130, 650055, Кемерово, Россия, тел. (8-3842) 25-33-34, факс (8-3842) 25-07-21. E-mail: astrakov@yandex.ru

Ерзин Адиль Ильясович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Россия, тел. (8-383) 333-37-88, факс (8-383) 333-25-98. E-mail: adil@math.nsc.ru

Тахонов Иван Иванович, Новосибирский Государственный Университет, ул. Пирогова, 2, 630090, Новосибирск, Россия. E-mail: takhonov@gmail.com

ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ПОГРУЖЕНИЕ ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА В СИМПЛЕКСЫ

В. П. Булатов, Т. И. Белых, Э. Н. Яськова

В докладе рассматривается решение следующей задачи: найти

$$x^* = arg\min\{\varphi(x) : \ x \in R\}, \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ — выпуклая функция $x \in E^n, \ R \subset E^n$ — выпуклое множество.

Идея метода состоит в следующем: множество R или часть его, содержащая решение x^* задачи (1), последовательно погружается в симплексы $\{S^k\}$ такие, что их объемы $|S^k| \to 0$ и $x^* \in S^k \quad \forall_k$. Для построения S^{k+1} находится центр тяжести или чебышевская точка x^k симплекса S^k, через которую проводится отсекающая плоскость. Усеченный симплекс погружается в симплекс меньшего объема. В зависимости от способов построения этих симплексов и выбора их центров получены различные оценки сокращения их объемов [1, 2], а именно:

1. $$\frac{(S^k)}{(S^{k-1})} \le \left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)^{n_1-1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1 \ \ - \tag{2}$$

для ортогональных симплексов S^k, где n_1 число ненулевых элементов в уравнении отсекающей плоскости. Метод наиболее эффективен, если R задано системой линейных неравенств $Ax \le b$ с разряженной или блочной матрицей A.

Если допустить, что число ненулевых компонент в отсекающей плоскости равновероятно при $1 \le n_1 \le n$, то средняя оценка (2) будет иметь вид:

$$\frac{|\bar{S}^k|}{|\bar{S}^{k-1}|} \le \frac{1}{n}\Big[\sum_{n_1-2}^{n}\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)^{n_1-1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n + \frac{1}{2}\Big] \sim 1 - \frac{\ln n}{n}.$$

2. $$\frac{|S^k|}{|S^{k-1}|} \le \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^k < 1 \ -$$

для произвольных симплексов S^k, где $k \ \ (1 \le k \le n)$ — число неотсеченных вершин S^k, принадлежащих усеченному симплексу. Если также допустить, что равновероятно отсечение одной, двух или n вершин, то средняя оценка будет иметь вид:

$$\frac{|\bar{S}^k|}{|\bar{S}^{k-1}|} \le \frac{1}{n}\Big[\sum_{k-2}^{n}\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^k + \frac{1}{2}\Big] \sim 1 - \frac{0.79}{n}.$$

3. Если x^k — чебышевские точки S^k и $\{S^k\}$ — последовательность правильных симплексов, то гарантированная оценка сокращения объема имеет вид:

$$\frac{|S^k|}{|S^{k-1}|} \le \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) < 1.$$

В докладе рассматривается также метод опорных симплексов, для которого гарантированная оценка сокращения объемов не зависит от размерности пространства.

Работа поддержана грантом РФФИ № 06-01-00465

ЛИТЕРАТУРА

1. Булатов В.П., Шепотько И.О. Метод ортогональных симплексов в выпуклом программировании. // Прикладная математика. Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1982.

2. Анциферов Е.Г., Булатов В.П. Алгоритм симплексных погружений в выпуклом программировании // ЖВМиМФ. – 1984. – Т. 27, № 3. – С. 348–385.

Булатов Валерьян Павлович, Ськова Эльвира Николаевна,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130 ИСЭМ СО РАН тел. 8(3952)42-84-40, e-mail: elv@isem.sei.irk.ru

Белых Татьяна Ивановна,
Байкальский государственный университет экономики и права, 664004, г. Иркутск, ул. Ленина, 14

ПРИЖИМАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

С. А. Гальперин

Определение (автор) Неподвижное на $M \subseteq R^n$ отображение $\varphi : R^n \to R^n$ назовем прижимающим к M, если $\forall x \notin M \quad |\varphi(x) - M| < |x - M|$, где $|x - M| = \inf\limits_{y \in M} |x - y|$.

Класс представляет интерес, как расширение класса фейеровских отображений [1,2]. Напомним, что итерационная последовательность, порожденная замкнутым фейеровским отображением, сходится.

Теорема 1 Пусть φ - замкнутое отображение, прижимающее к ограниченному M в R^n, $x_0 \in R^n$, $x_n = \varphi(x_{n-1})$. Тогда $\{x_n\}'$ - связное непустое подмножество M. В частности, либо $\{x_n\}$ сходится к точке M, либо имеет не менее континуума предельных точек в M.

Напомним, что M является множеством положительной достижимости [3], если $\exists r > 0 : M + rB \subseteq \mathrm{Unp}(M)$, где $\mathrm{Unp}(M)$ - множество точек $x \in R^n$ с единственной проекцией $\pi_M(x)$ на M, а B - единичный шар. Выпуклые множества и C^2-многообразия [3] лежат в этом классе.

Теорема 2 Пусть φ - замкнутое отображение, прижимающее к ограниченному множеству положительной достижимости M в R^n, $x_0 \in R^n$, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ и $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} [x_n, x_{n+1}] \cap M = \emptyset$. Пусть также выполняется условие (*) $\exists N,\ \alpha > 0 : \quad \forall x \in \{x_n\}\,,\ n > N \quad \cos\left(\varphi(x) - \widehat{x, \pi}_M(x) - x\right) > \alpha$. Тогда x_n сходится к точке M.

Замечание Если $M \subseteq R^n$ - телесно, то замкнутые M-фейеровские отображения удовлетворяют (*).

При поддержке гранта Президента РФ, проект НШ-5595.2006.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Екатеринбург: УрО РАН, 2005.

2. Еремин И.И., Мазуров В.Д. Нестационарные процессы математического программирования, М.: "Наука", 1979.

3. Federer H., Curvature Measures // Trans. Amer. Math. Soc. 93, 3 (1959), 418-493.

Гальперин Семен Александрович, Уральский Государственный Университет, Тургенева 4, Екатеринбург, 620083, Россия, тел. 8-902-253-39-40, e-mail: senyag@hotmail.com

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ СЕМЕЙСТВА ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ, РАЗДЕЛЯЮЩИХ ПОЛИЭДРЫ

А. И. Голиков, Ю. Г. Евтушенко

Рассматривается задача о численном нахождении семейства гиперплоскостей, разделяющих два непересекающихся непустых полиэдра (многограные множества), которые заданы с помощью систем линейных неравенств. В основе численного метода лежит теорема И.И. Еремина о гиперплоскости, разделяющей полиэдры (теорема 10.1 в [1]). Нормаль и сдвиг разделяющей гиперплоскости выражаются через произвольное решение некоторой системы, являющейся альтернативной к несовместной системе. Эта несовместная система состоит из двух совместных подсистем, каждая из которых определяет непустой полиэдр. Система несовместна, так как эти полиэдры не пересекаются. Построение разделяющих гиперплоскостей существенно опирается на теоремы об альтернативах. Любое решение альтернативной системы определяет *одно* семейство разделяющих гиперплоскостей для двух полиэдров, заданных на всем пространстве. В случае полиэдров, заданных с помощью системы линейных неравенств на неотрицательном ортанте, любое решение альтернативной системы определяет уже *два различных* семейства разделяющих гиперплоскостей. Изучен вопрос о том, как из альтернативной системы выделить такое решение, которое дает семейство гиперплоскостей максимальной толщины, совпадающей с минимальным расстоянием между полиэдрами. Рассмотрено применение нормального решения альтернативной системы для построения семейства разделяющих гиперплоскостей. Нормальное решение находится из решения задачи безусловной минимизации невязки несовместной системы неравенств, задающей оба полиэдра. Как правило, число переменных в задаче безусловной минимизации существенно меньше, чем в альтернативной совместной системе. Поэтому такие расчеты менее трудоемки, чем нахождение решения альтернативной системы. Для решения задачи безусловной минимизации предлагается использовать обобщенный метод Ньютона, который для данной задачи сходится за конечное число шагов. Этот метод реализован в системе MATLAB и показал высокую эффективность при решении тестовых задач большой размерности, когда число линейных неравенств, задающих полиэдры, достигает несколько миллионов [2].

Работа поддержана грантом РФФИ 06-01-00547 и Программой поддержки ведущих научных школ НШ-2240.2006.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремин И.И. Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: УрО РАН, 1998.

2. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г., Кетабчи С. О семействах гиперплоскостей, разделяющих полиэдры // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45, № 2. С. 238–253.

Голиков Александр Ильич, Вычислительный центр им А.А. Дородницына РАН, ул. Вавилова 40, Москва, 119991, Россия, тел. (495) 135-61-61. E-mail: gol@ccas.ru

Евтушенко Юрий Гаврилович, Вычислительный центр им А.А. Дородницына РАН, ул. Вавилова 40, Москва, 119991, Россия, тел. (495) 135-00-20. E-mail: evt@ccas.ru

ПРИМЕНЕНИЕ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ КОНСТРУИРОВАНИЯ АЛГОРИТМОВ ОПТИМИЗАЦИИ С НОВЫМИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ

А. Ю. Горнов

Техника сплайн-аппроксимации применяется во многих областях вычислительной математики уже более сорока лет. Успех этой математической конструкции обусловлен рядом весьма удачных ее особенностей: глобальным характером приближения таблично заданных функций, надежностью вспомогательных алгоритмов, достаточно высокой локальной точностью аппроксимации, хорошо исследованными теоретическими свойствами (см., напр., [1,2]). Наиболее популярными в практических приложениях, несомненно, являются кубические сплайны. В то же время, нельзя не отметить, что при конструировании алгоритмов оптимизации сплайн-аппроксимации используются достаточно редко. В докладе рассматриваются возможности создания с применением кубических сплайнов алгоритмов с новыми свойствами и некоторые программные реализации алгоритмов.

Для задачи поиска корня нелинейного уравнения, часто возникающей в качестве вспомогательной задачи в более сложных алгоритмах, с применением сплайн-аппроксимации разработан алгоритм с кубической скоростью сходимости, позволяющий получать двухсторонние оценки области локализации корня как по аргументу, так и по значению функции. Проведенное тестирование подтвердило теоретический вывод о достаточно высокой эффективности и надежности алгоритма. Практически во всех задачах из рассмотренного пакета тестов алгоритм потребовал меньшего числа вычислений функции, чем широко известный алгоритм ZEROIN ([2]), играющий для данного класса задач роль эталонного.

Для задачи поиска глобального экстремума одномерной функции разработан комбинированный алгоритм, включающий локальное уточнение минимумов с кубической скоростью на основе сплайна и технику гарантированного покрытия интервала на классе функций с ограниченной скоростью роста. С применением сплайн-аппроксимации возможно получить достаточно точную оценку константы Липшица минимизируемой функции, что позволяет применять в расчетах значительно меньшие значения страховочных коэффициентов. Реализованный алгоритм во всех ситуациях оказался эффективнее эталонного алгоритма Р.Г. Стронгина ([3]). Кроме того, сплайн-оценка производных позволяет встраивать в алгоритм механизмы верификации решения: проверку выполнения условий оптимальности локальных экстремумов как первого, так и второго порядка, оценку размеров областей притяжения экстремумов, дополнительные критерии остановки на основе сравнения двух последовательных аппроксимирующих сплайнов, оценку вероятности появления ненайденного экстремума.

Работа поддержана грантами РФФИ 06-01-00247, 06-07-89215, 07-07-00265 и РГНФ 07-02-12112в.

ЛИТЕРАТУРА

1. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам.- М., Радио и связь, 1985.
2 Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М,. Мир, 1980.
3. Стронгин Р.Г. Численные методы многоэкстремальной оптимизации. М., Наука, 1978.

Горнов Александр Юрьевич, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия, тел. (8-3952) 51-03-03, факс (8-3952) 51-16-16, E-mail: gornov@ok.ru

МИНИМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКИ ЗАДАННОЙ ФУНКЦИИ НА ОСНОВЕ НЕРАВНОМЕРНЫХ ПОКРЫТИЙ

Г. Б. Диго, Н. Б. Диго

Пусть многоэкстремальная функция задана на n-мерном гиперпараллелепипеде. Требуется найти глобальный минимум, используя отличный от переборного метод при условиях, что целевая функция задана алгоритмически и удовлетворяет условиям Липшица с неизвестной константой. Дополнительной информацией могут быть лишь ее значения, вычисление которых требует значительных вычислительных ресурсов.

Среди методов, успешно работающих в таких условиях, был выбран метод половинных делений [1], основанный на неравномерном покрытии допустимого множества и использующий предположение о существовании оценки минимума целевой функции на гиперпараллелепипеде. Из-за алгоритмического задания целевой функции пришлось отказаться от техники интервального анализа и использовать оценки константы Липшица. В зависимости от имеющейся априорной информации о целевой функции и сложности алгоритма вычисления ее значений, рассмотрены случаи использования глобальной оценки константы Липшица, определяемой для всей допустимой области, и локальных оценок констант Липшица, определяемых для ее отдельных подобластей [2].

Для ускорения процесса сходимости алгоритмов и обеспечения нахождения глобального минимума предусмотрено применение попеременного перехода к локальной и глобальной информации при адаптивном оценивании локальных констант Липшица в различных подобластях текущего разбиения области поиска.

Работа поддержана грантом ДВО РАН 06-П15-054 по программе №16 ОЭММПУ РАН и грантом РФФИ 05-08-01398.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.Г. Евтушенко, В.А. Ратькин. Метод половинных делений для глобальной оптимизации функций многих переменных // Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика. 1987. №1. С. 119–127.

2. A. Molinaro, C. Pizzuti, Ya.D. Sergeyev. Acceleration tools for diagonal information global optimization algorithms // Computational Optimization and Applications. – 2001. – Vol. 18, no 1. – P. 5–26.

Диго Галина Борисовна, Диго Наталья Борисовна,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, ул. Радио, 5,
Владивосток, 690041, Россия, тел. (8-4232) 31-02-02, факс (8-4232) 31-04-52,
E-mail:bernatsk@iacp.dvo.ru, digo@iacp.dvo.ru

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ МЕТОДОМ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК

И. И. Дикин, О. М. Попова

Представлен оригинальный вариант метода Ньютона для решения системы нелинейных уравнений и линейных неравенств. В отличие от метода линеаризации при построении вспомогательной задачи не рассматриваются ограничения в форме неравенств и решается классическая экстремальная проблема. Неравенства учитываются с помощью специального выбора весовых коэффициентов и длины шага. Исследуется локальная сходимость алгоритма. Установлена сходимость последовательных приближений к относительно внутренней допустимой точке нелинейной системы [1].

Рассматривается проблема поиска потокораспределения в трубопроводной системе при наличии регуляторов расхода и давления. Это интересная задача, для решения которой требуется привлекать вычислительные алгоритмы, позволяющие эффективно учитывать ограничения в форме неравенств.

Известно, что при описании каждого регулятора требуется рассмотреть два неравенства, удовлетворяющие условиям сопряженности. В работе впервые к этим ограничениям добавляется простое уравнение и предлагается использовать малоизвестную модификацию метода Ньютона [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Дикин И.И. Решение систем равенств и неравенств методом внутренних точек. // Кибернетика и системный анализ. 2004. N 4. С. 184–187.

2. Дикин И.И., Попова О.М. Применение метода внутренних точек при расчете потокораспределения в гидравлической системе с регуляторами. // Кибернетика и системный анализ. 2000. N 4. С. 173–178.

Дикин Илья Иосифович, Попова Ольга Михайловна,
Институт систем энергетики СО РАН, ул. Лермонтова, 130, г. Иркутск, 664033, Россия, тел. (8-395-2) 42-63-80. E-mail: dikin@bk.ru; POM@isem.sei.irk.ru

ОБ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ ВЕКТОРНОЙ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ БУЛЕВОЙ ЗАДАЧИ

Е. Е. Гуревский, В. А. Емеличев

Пусть $X \subseteq \mathbf{E}^n = \{0,1\}^n$, C_i – i-я строка матрицы $C = [c_{ij}]_{m\times n} \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $i \in N_m = \{1,2,\dots,m\}$, $f(x,C) = (|C_1x|,|C_2x|,\dots,|C_mx|)$.

Под лексикографической m-критериальной булевой задачей оптимизации $Z^m(C)$: $\text{lex}\ \min\{f(x,C) :\ x \in X\}$, $m \geq 1$, будем понимать задачу поиска лексикографического множества $L^m(C) = \{x \in X :\ \forall\ x' \in X \quad (f(x',C) \overline{\prec} f(x,C))\}$, где $\overline{\prec}$ – отрицание лексикографического доминирования $\prec$, заданного в критериальном пространстве $\mathbf{R}^m$ по правилу $y \prec y' \iff y_k < y'_k,\ k = \min\{i \in N_m :\ y_i \neq y'_i\}$, $y = (y_1,y_2,\dots,y_m) \neq y' = (y'_1,y'_2,\dots,y'_m)$.

Исследуются два типа устойчивости задачи к вариациям исходных данных, т. е. элементов матрицы C. Следуя [1], задачу $Z^m(C)$ назовем устойчивой, если $\{\varepsilon > 0 :\ \forall\ C' \in \Omega(\varepsilon)\ \ (L^m(C+C') \subseteq L^m(C))\} \neq \emptyset$, и соответственно – квазиустойчивой, если $\{\varepsilon > 0 :\ \forall\ C' \in \Omega(\varepsilon)\ \ (L^m(C) \subseteq L^m(C+C'))\} \neq \emptyset$. Здесь $\Omega(\varepsilon) = \{C' \in \mathbf{R}^{m\times n} :\ ||C'|| < \varepsilon\}$. Понятно, что при выполнении равенства $L^m(C) = X$ задача $Z^m(C)$ устойчива. Задачу $Z^m(C)$, для которой множество $X \backslash L^m(C)$ непусто, назовем нетривиальной.

Положим $L_1^m(C) = \operatorname{Arg}\min\{|C_1x| :\ x \in X\}$, $\mathbf{0}_{(n)} = (0,0,\dots,0)^T \in \mathbf{R}^n$.

Теорема 1. Если $\mathbf{0}_{(n)} \notin X$, то нетривиальная задача $Z^m(C)$ устойчива тогда и только тогда, когда $L^m(C) = L_1^m(C)$. Если $\mathbf{0}_{(n)} \in X$, то задача $Z^m(C)$ устойчива при любой матрице $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$.

Теорема 2. Если $\mathbf{0}_{(n)} \notin X$, то задача $Z^m(C)$ квазиустойчива тогда и только тогда, когда $|L^m(C)| = |L_1^m(C)| = 1$. Если $\mathbf{0}_{(n)} \in X$, то задача $Z^m(C)$ квазиустойчива тогда и только тогда, когда $L^m(C) = \{\mathbf{0}_{(n)}\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Емеличев, Д.П. Подкопаев. Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2001. Т. 8. № 1. С. 47-69.

Гуревский Евгений Евгеньевич, Емеличев Владимир Алексеевич,
Белорусский государственный университет,
пр. Независимости 4, Минск, 220050, Беларусь, тел. (+375-17) 262-37-50.
e-mail: eugen_eugen@tut.by, emelichev@bsu.by

О КВАЗИУСТОЙЧИВОСТИ ДВУХУРОВНЕВОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ БУЛЕВОЙ ЗАДАЧИ

В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин

Пусть $X \subseteq \{0,1\}^n$, A_i (B_i) – i-я строка матрицы $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ ($B \in \mathbf{R}^{l\times n}$). Рассмотрим двухуровневую m-критериальную задачу

$$Z(A,B): \qquad A_i x \to \min_{x\in P(B)}, \quad i \in N_m = \{1,2,\ldots,m\}$$

поиска множества Парето (множества эффективных решений) $P(A,B)$, где $P(B)$ – множество Парето l-критериальной задачи

$$Z(B): \qquad B_i x \to \min_{x\in X}, \quad i \in N_l.$$

Через $Sm(A,B)$, $Sm(B)$ и $Sl(B)$ обозначим соответственно множества строго эффективных (оптимальных по Смейлу) решений и слабо эффективных (оптимальных по Слейтеру) решений [1] задач $Z(A,B)$ и $Z(B)$.

По аналогии с [2] задачу $Z(A,B)$ назовем квазиустойчивой, если

$$\{\varepsilon > 0: \ \forall (A',B') \in \Omega(\varepsilon) \quad (P(A+A', B+B') \supseteq P(A,B))\} = \emptyset,$$

где

$$\Omega(\varepsilon) = \{(A',B') \in \mathbf{R}^{m\times n} \times \mathbf{R}^{l\times n} : \max\{||A'||, ||B'||\} < \varepsilon\}.$$

Показано, что двухуровневая задача $Z(A,B)$ квазиустойчива тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

(i) $Sm(A,B) = P(A,B) \subseteq Sm(B)$,

(ii) $P(B) \neq Sl(B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall x \in P(A,B)\ \forall x' \in Sl(B) \setminus P(B)\ \exists k \in N_m \quad (A_k x < A_k x').$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.

2. Емеличев В. А., Подкопаев Д. П. Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 2001. Т. 8. № 1. С. 47–69.

Емеличев Владимир Алексеевич, Кузьмин Кирилл Геннадьевич,
Белорусский государственный университет, пр-т Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь. E-mail: emelichev@bsu.by, kuzminkg@mail.ru

МАТРИЧНАЯ КОРРЕКЦИЯ ДВОЙСТВЕННОЙ ПАРЫ БЛОЧНЫХ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. И. Ерохин, А. С. Красников

Рассматривается проблема коррекции матрицы (расширенной матрицы) коэффициентов двойственной пары несобственных задач линейного программирования

$$\begin{cases} L(A,b,c) : Ax = b,\ x \geq 0,\ c^{\mathrm{T}}x \to \max, \\ L^*(A,b,c) : A^{\mathrm{T}}u \geq c,\ b^{\mathrm{T}}u \to \min, \end{cases}$$

с блочной матрицей коэффициентов вида

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \multicolumn{4}{c}{A_0} \\ \hline A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & A_k \end{array}\right],$$

Задачи коррекции исследованы в следующих постановках:

Задача 1. Найти матрицу H, минимальную по евклидовой норме, гарантирующую собственность задач $L(A+H,b,c)$ и $L^*(A+H,b,c)$.

Задача 2. Найти матрицу H и вектор h, минимальные по евклидовой норме, гарантирующие собственность задач $L(A+H,b+h,c)$ и $L^*(A+H,b+h,c)$.

Обе задачи рассматриваются в двух вариантах: 1) коррекции подвергаются все блоки матрицы коэффициентов, 2) верхний блок, связывающий все переменные прямой задачи, не корректируется. На вид матрицы H наложены ограничения: ее коэффициенты, соответствующие нулевым и некорректируемым коэффициентам матрицы A, должны быть нулевыми.

Для задач 1 и 2 получены редукции к вспомогательным задачам минимизации дробно-квадратичных функций при наличии ограничений в форме линейных уравнений и неравенств, допускающим использование стандартных методов условной минимизации. Показано, что разрешимость вспомогательных задач является необходимым и достаточным условием разрешимости исследуемых задач матричной коррекции.

В качестве инструмента для получения соответствующих редукций, формул для матриц коррекции и обоснования условий существования решений задач коррекции использованы адаптированные для блочного вида матрицы A результаты работы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерохин В.И. Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 4. С. 587-601.

Ерохин Владимир Иванович, Красников Александр Сергеевич,
Борисоглебский государственный педагогический институт, ул. Народная, 43,
Борисоглебск Воронежской обл., 397160, Россия, тел. (8-47354)6-48-89,
факс (8-47354)6-26-01, e-mail:erohin_v_i@mail.ru, akrasnikov@bk.ru

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ВНУТРЕННЕЙ ТОЧКИ С УСКОРЕННОЙ СХОДИМОСТЬЮ К ДОПУСТИМОМУ МНОЖЕСТВУ ДЛЯ ЗАДАЧ ПОЛУОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. Г. Жадан, М. С. Бабынин

Рассматривается задача полуопределенного программирования: найти

$$\min_{X \in F} C \bullet X, \quad F = \left\{ X \succeq 0 : A_i \bullet X = b^i, \ i = 1, \dots, m \right\}. \tag{1}$$

Здесь X, C и A_i — симметричные матрицы порядка n, X — положительно полуопределенная матрица. Внутренней произведение $X \bullet Y$ между матрицами X и Y определяется как след матрицы $X^T Y$.

Для решения (1) предлагается класс методов внутренней точки, который является обобщением прямых барьерно-проективных методов для задач линейного программирования. Общая схема итеративного процесса в этих методах следующая:

$$X_{k+1} = X_k - \alpha_k X_k \odot V(X_k), \tag{2}$$

где $\alpha_k > 0$ — некоторый шаг, $X \odot V = (XV + V^T X^T)/2$ — симметризованное произведение и $V(X) = C - \sum_{i=1}^m u^i(X) A_i$. В качестве начальной матрицы X_0 берется произвольная положительно определенная матрица.

Вектор $u(X) = [u^1(X), \dots, u^m(X)]$ выбирается таким образом, чтобы траектории приближались бы к допустимому множеству в задаче (1). Рассматриваются разные способы задания $u(X)$. В частности, предлагается находить $u(X)$ из решения системы алгебраических уравнений

$$X \odot \left(C - \sum_{i=1}^m u^i A_i \right) = \tau \sum_{i=1}^m \left(A_i \bullet X - b^i \right) A_i,$$

где $\tau > 0$. Поскольку эта система переопределена, то в качестве ее решения берется нормальное псевдорешение. Данный способ выбора вектора $u(X)$ аналогичен тому, что был предложен в [2] для решения задач нелинейного программирования, и ведет к более быстрому попаданию на допустимое множество.

Доказывается локальная сходимость метода (2) к решению задачи (1).

Работа поддержана грантом РФФИ 06-01-00547 и Программой ведущих научных школ НШ-2240.2006.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yu. Evtushenko, V.Zhadan. Stable barrier-projection and barrier-newton methods in linear programming. // Comput. Optimiz. and Applications. 1994. V. 3. P. 289-304.
2. S.Wang, X.Yang, K.L.Teo. A unified gradient flow approach to constrained nonlinear optimization problems. // Comput. Optimiz. and Applications. 2003. V. 25. P. 251-268.

Жадан Виталий Григорьевич,
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, ул. Вавилова, 40, Москва, ГСП-1, 119991, Россия, тел. (495) 135-25-39, факс (495) 135-61-59. E-mail: zhadan@ccas.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕТРИВИАЛЬНЫХ СВОЙСТВ АЛГОРИТМОВ ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ПАКЕТЕ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ

Т. С. Зароднюк

В работе проведено исследование свойств алгоритмов, лежащих в основе комплекса программ для решения задач оптимального управления (ЗОУ) OPTCON-I (Горнов А.Ю., Диваков А.О., 1990г., IBM-PC, MS-DOS) и находящейся в стадии разработки вычислительной технологии, применяемой в программном комплексе OPTCON-III (Горнов А.Ю., Зароднюк Т.С., версия 22/02, MS Windows 95/98/2000/XP). Расчеты проводились для аппроксимаций непрерывных ЗОУ на разных сетках дискретизации, включающих от 100 до 3200 точек. Для типового пакета тестов из 30 невыпуклых ЗОУ известные значения глобального минимума находились с помощью метода мультистарта. В соответствии с известными теоретическими результатами (см. [1], [2]), информационная сложность аппроксимирующих конечномерных задач может экспоненциальным образом зависеть от числа переменных. Полученные результаты расчетов демонстрируют более высокую эффективность исследуемых алгоритмов. В большинстве рассмотренных тестов наблюдается только линейный рост времени решения при увеличении количества точек дискретизации.

Работа поддержана грантами РФФИ 06-07-89215, 07-07-00265а и РГНФ 07-02-12112в.

ЛИТЕРАТУРА

1. Немировский А.С., Юдин Д.Б. Информационная сложность математического программирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. No 1. С. 88-117.

2. Методы поиска локального экстремума овражных функций / О.И. Ларичев, Г.Г. Горвиц - М.: Наука, 1989. 95 с.

Зароднюк Татьяна Сергеевна,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева, Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (8-3952) 42-87-11, факс (8-3952) 42-67-96. E-mail:tatyana_z@isem.sei.irk.ru

РАВНОВЕСНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕРАВНОВЕСНЫХ НЕОБРАТИМЫХ ПРОЦЕССОВ

М. С. Зароднюк, Б. М. Каганович, А. В. Кейко

Излагается сформулированная на языке математического программирования модель экстремальных промежуточных состояний (МЭПС) [1], которая позволяет определять на основе положений классической равновесной термодинамики предельные показатели разнообразных физико-химических процессов.

От традиционных моделей равновесной термодинамики МЭПС отличается двумя основными особенностями. Во-первых, она дает возможность находить не только точку конечного равновесия, но и просматривать всю область термодинамической достижимости из заданного исходного состояния системы и находить в ней равновесное состояние (промежуточное или частичное), соответствующее экстремальному значению интересующего исследователя свойства (например максимальные концентрации полезных продуктов химической реакции). Во-вторых, в применяемую математическую модель включаются записанные в термодинамической форме (без использования переменной времени) ограничения на лимитирующие осуществление равновесий необратимые процессы переноса [2].

Приводится обоснование возможности "равновесного" описания различных неравновесностей и необратимостей. Исследуются особенности областей термодинамической достижимости для разных типов МЭПС с использованием выпуклого анализа и теории графов.

Эффективность предлагаемых подходов иллюстрируется на примерах анализа характеристик процессов сжигания газа в камере сгорания газовой турбины, газификации низкосортных твердых топлив и др.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Проект 05-02-16626.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gorban A.N., Kaganovich B.M., Filippov S.P, Keiko A.V., Shamansky V.A., Shirkalin I.A. Thermodynamic Equilibria and Extrema. Analysis of Attainability Regions and Partial Equilibria. - Springer. 2006 - 305p.

2. Gorban A.N., Karlin I.V. Constructive Methods of Invariant Manifolds for Physical and Chemical Kinetics. - Springer. 2005. - 478 p.

Зароднюк Максим Сергеевич, Институт систем энергетики им. Л.А.Мелентьева СО РАН, Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (8-3952) 42-34-43, факс. (8-3952) 42-67-96, max@isem.sei.irk.ru.

Каганович Борис Моисеевич, Институт систем энергетики им. Л.А.Мелентьева СО РАН, Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (8-3952) 42-74-96, факс (8-3952) 42-67-96, thermo@isem.sei.irk.ru.

Кейко Александр Владимирович, Институт систем энергетики им. Л.А.Мелентьева СО РАН, Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия тел. (8-3952) 42-34-64, факс (8-3952) 42-67-96, keiko@isem.sei.irk.ru.

ЭКСТРАПРОКСИМАЛЬНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧИ ОБРАТНОЙ ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ

А. В. Зыкина, О. Н. Канева

Для заданных нелинейных отображений $P : R^m \to R^m$ и $F : R^n \to R^m$ рассматривается параметрическая задача дополнительности

$$\omega = P(y) - F(x),\ \omega \geq 0,\ \ y \geq 0,\ y^T\omega = 0 \tag{1}$$

с вектором параметров $x \in X,\ X \subseteq R^n$. Для параметрического семейства задач дополнительности (1) строится отображение $x \longmapsto Y(x)$, сопоставляющее каждому $x \in X$ множество решений $Y(x)$ задачи дополнительности. В работе рассматривается следующая задача обратной дополнительности: найти параметры $x^* \in X$ и $y^* \in Y(x^*)$, такие что

$$\langle y^*,\ F(x) - F(x^*)\rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in X. \tag{2}$$

Для обратной задачи (2) естественным образом выписывается нормализованная функция $\Phi(x^*, x) = \sup\limits_{y^* \in Y(x^*)} \langle y^*,\ F(x) - F(x^*)\rangle$ и задача обратной дополнительности (2) сводится к задаче равновесия: найти параметр $x^* \in X$, такой что $\Phi(x^*, x) \geq 0 \quad \forall\, x \in X$, для решения которой используется итеративный процесс экстрапроксимального типа [1]

$$\begin{aligned} \overline{x}^n &\in \mathrm{Argmin}\{\tfrac{1}{2}\|x - x^n\|^2 + \alpha\langle y(x^n),\ F(x) - F(x^n)\rangle \mid x \in X\},\\ x^{n+1} &\in \mathrm{Argmin}\{\tfrac{1}{2}\|x - x^n\|^2 + \alpha\langle y(\overline{x}^n),\ F(x) - F(\overline{x}^n)\rangle \mid x \in X\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Доказана сходимость процесса (3). Результаты численных экспериментов подтверждают теоретические результаты и позволяют сделать вывод об эффективности предложенной схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корпелевич Г.М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и математические методы, 1976. – Т. 1, № 4. – С. 747-756.

Зыкина Анна Владимировна, Канева Ольга Николаевна,
Омский гос. тех. университет, пр. Мира, 11, Омск, 644050, Россия, тел. (8-381-2) 65-20-84, факс (8-381-2) 65-26-98, E-mail:avzykina@mail.ru

ПОИСК ОПТИМИСТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ ДВУХУРОВНЕВЫХ ЗАДАЧАХ

А. В. Орлов

В работе рассматривается задача линейного двухуровневого программирования в оптимистической постановке [1]:

$$\left.\begin{aligned} F(x,y) \overset{\triangle}{=} \langle c,x\rangle + \langle d,y\rangle \downarrow \min_{x,y}, \qquad x \in X \overset{\triangle}{=} \{x \in I\!R^m \mid Ax \le b,\ x \ge 0\}, \\ y \in Y_*(x) \overset{\triangle}{=} \operatorname{Arg}\min_y\{\langle d_1,y\rangle \mid \ A_1x + B_1y \le b_1,\ y \ge 0\}, \end{aligned}\right\} \qquad (P)$$

где $c,\ x \in I\!R^m,\ \ d,\ d_1,\ y \in I\!R^n,\ \ b \in I\!R^p,\ \ b_1 \in I\!R^q;\ \ \ A,\ A_1,\ B_1$ — матрицы соответствующего размера. Такого сорта задачи возникают при моделировании иерархических систем управления, которые характеризуются неравноправным положением участников (центр – регионы, корпорация – филиалы и т.п.) [2].

Одним из способов решения задачи (P) является ее сведение к одной или нескольким задачам одноуровневого программирования. Действительно, с использованием двойственной задачи к задаче нижнего уровня и метода штрафов можно показать, что поиск решений в задаче (P) можно производить посредством решения конечной последовательности параметрических билинейных задач следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} \langle c,x\rangle + \langle d,y\rangle + \mu(\langle d_1,y\rangle - \langle A_1x - b_1, v\rangle) \downarrow \min_{x,y,v} \\ Ax \le b,\ x \ge 0, \quad A_1x + B_1y \le b_1,\ y \ge 0, \quad vB_1 \ge -d_1,\ v \ge 0, \end{aligned}\right\} \qquad (BLP(\mu))$$

где $v \in I\!R^q$ — вспомогательная переменная, $\mu > 0$ — параметр.

Задача $(BLP(\mu))$ является невыпуклой, а значит для ее решения неприменимы стандартные методы выпуклой оптимизации. Для отыскания глобального решения в задачах типа $(BLP(\mu))$ используется алгоритм, основанный на теории глобального поиска [3], который был предложен в [4]. Все этапы алгоритма глобального поиска конкретизированы для задачи вида $(BLP(\mu))$. Проведено его первое тестирование, показавшее возможность применения указанной методики для отыскания оптимистических решений в линейных двухуровневых задачах.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №05-01-00110, а также гранта Президента РФ МК-6580.2006.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dempe S. Foundations of bilievel programming. — Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers, 2002.

2. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. — М.: Радио и связь, 1982.

3. Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации. – Новосибирск: Наука, 2003.

4. Орлов А.В. О локальном и глобальном поиске в задачах билинейного программирования //Труды XIII Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005, Т.1., с. 313–318.

Орлов Андрей Васильевич,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия, т. (3952) 51-13-98, ф. (3952) 51-16-16.
E-mail: anor@icc.ru

К РЕШЕНИЮ КВАДРАТИЧНО–ЛИНЕЙНЫХ ДВУХУРОВНЕВЫХ ЗАДАЧ

А. В. Орлов, А. В. Малышев

В работе рассматривается поиск оптимистических решений [1] в квадратично-линейной двухуровневой задаче следующего вида:

$$\left.\begin{array}{r} F(x,y) \stackrel{\triangle}{=} \langle x, Cx\rangle + \langle c, x\rangle + \langle y, C_1 y\rangle + \langle c_1, y\rangle \downarrow \text{“}\min\limits_{x}\text{”}, \\ Ax + By \le b,\ x \ge 0,\ \ y \in Y_*(x) \stackrel{\triangle}{=} \operatorname*{Argmin}\limits_{y}\{\langle d, y\rangle | A_1 x + B_1 y \le b_1, y \ge 0\}, \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P})$$

где $c,\ x \in I\!R^m,\ \ c_1,\ d,\ y \in I\!R^n,\ \ b \in I\!R^p,\ \ b_1 \in I\!R^q;\ \ \ A,\ B,\ A_1,\ B_1,\ C = C^T > 0,$ $C_1 = C_1^T > 0$ — матрицы соответствующего размера. Двухуровневые задачи являются удобным математическим объектом для моделирования иерархических систем управления, которые характеризуются неравноправным положением участников (центр – регионы, корпорация – филиалы и т.п.) [1].

Для решения задачи $(\mathcal{P})$ предлагается использовать стандартный подход [1], заключающийся в замене задачи нижнего уровня её условиями оптимальности типа Каруша-Куна-Таккера. Решение получившейся задачи, с применением штрафного подхода, можно производить посредством решения параметрического семейства квадратично-билинейных задач следующего вида:

$$\left.\begin{array}{c} F(x,y) + \mu(\langle d, y\rangle - \langle A_1 x - b_1, v\rangle) \downarrow \min\limits_{x,y,v} \\ Ax + By \le b,\ x \ge 0, \quad A_1 x + B_1 y \le b_1,\ y \ge 0, \quad vB_1 \ge -d,\ v \ge 0, \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P}(\mu))$$

где $v \in I\!R^q$ — вспомогательная переменная, $\mu > 0$ — параметр.

Задача $(\mathcal{P}(\mu))$ является невыпуклой, а значит для ее решения неприменимы стандартные методы выпуклой оптимизации. Для отыскания глобального решения в задачах типа $(\mathcal{P}(\mu))$ разработан алгоритм, основанный на теории глобального поиска [2], который обобщает предложенный ранее алгоритм решения билинейных задач [3]. Все этапы алгоритма глобального поиска конкретизированы для задачи вида $(\mathcal{P}(\mu))$. Проведено его численное тестирование на задачах небольшой размерности, показавшее возможность применения указанной методики для отыскания оптимистических решений в квадратично-линейных двухуровневых задачах.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №05-01-00110, а также гранта Президента РФ МК-6580.2006.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dempe S. Foundations of bilievel programming. — Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Academic Publishers, 2002.
2. Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации. – Новосибирск: Наука, 2003.
3. Орлов А.В. О локальном и глобальном поиске в задачах билинейного программирования //Труды XIII Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005, Т.1., с. 313–318.

Орлов Андрей Васильевич, Малышев Антон Валентинович
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия, т. (3952) 51-13-98, ф. (3952) 51-16-16.
E-mail: anor@icc.ru, anton@irk.ru

АЛГОРИТМЫ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК С ПРИБЛИЖЕННЫМ РЕШЕНИЕМ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

С. М. Пержабинский, А. Ю. Филатов

Одним из направлений методов решения пары взаимно-двойственных задач линейного программирования

$$c^T x \to \min_{x \in X}, \quad X = \{x \in R^n : Ax = b,\ x \geq 0\}, \tag{1}$$

$$b^T u \to \max_{u \in U}, \quad U = \{u \in R^m : g(u) \equiv c - A^T u \geq 0\}, \tag{2}$$

где $c \in R^n$, $b \in R^m$, A – матрица размерности $m \times n$, $rank\, A = m$, являются алгоритмы внутренних точек. Ключевая их идея состоит в исключении из задачи ограничений-неравенств путем введения в целевую функцию квадратичного или логарифмического штрафа за приближение к границам допустимой области.

Итеративный переход осуществляется по правилу $x^{k+1} = x^k + \lambda^k \Delta x^k$, где направление корректировки Δx^k находится как решение вспомогательной задачи

$$c^T \Delta x + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta x_j^2}{d_j^k} \to \min_{\Delta x \in R^n}, \quad A\Delta x = b - Ax^k. \tag{3}$$

Решение задачи (3) осуществляется по формулам

$$u^k = (AD_k A^T)^{-1}(AD_k c + r^k), \quad \Delta x_j^k = -d_j^k g_j(u^k). \tag{4}$$

Таким образом, наиболее сложным в вычислительном отношении на каждой итерации алгоритма внутренних точек является обращение симметричной положительно определенной матрицы $AD_k A^T$, где D_k – меняющаяся по итерациям диагональная матрица весовых коэффициентов. Традиционно оно осуществляется точными методами, в частности, методом квадратного корня, для чего требуется порядка m^3 вычислительных операций. Альтернативный подход связан с использованием итеративных методов, одним из которых является метод сопряженных направлений. Специфика алгоритмов внутренних точек позволяет решать задачу (4) приближенно. Действительно, на первых итерациях достаточно искать направление корректировки Δx^k, используя вектор $\tilde{u}^k$, для которого $AD_k A^T \tilde{u}^k \neq AD_k c + r^k$, а в финальной стадии вычислительного процесса, где важна высокая точность, диагональная матрица весовых коэффициентов D_k изменяется по итерациям крайне незначительно. Таким образом, в методе сопряженных направлений имеется хорошее стартовое приближение u^{k-1}, полученное как решение задачи (4) на предыдущей итерации алгоритма внутренних точек.

Проведен численный эксперимент, результаты которого приводятся в докладе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 05-01-00587а.

Пержабинский Сергей Михайлович, Филатов Александр Юрьевич,
Институт систем энергетики им. Мелентьева СО РАН, Россия, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 130, тел. (8-395-2) 42-97-64, 8-914-88-21-888, факс (8-395-2) 42-67-96.
E-mail: sergey_per85@mail.ru, fial@irlan.ru

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ О ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТИ

Е. Г. Петрова, А. С. Стрекаловский

В работе рассматривается решение линейной задачи о дополнительности методом, основанном на необходимых и достаточных условиях глобальной оптимальности [1] для задач с целевой функцией, представимой в виде разности двух выпуклых функций (d.c. функцией).

Задачи о дополнительности возникают во многих областях экономики и инженерии. Они тесно связаны с задачами квадратичного программирования, вариационными неравенствами, биматричными играми и т.д.

Задача о линейной дополнительности заключается в нахождении пары векторов (x, w), удовлетворяющим условиям:

$$\left.\begin{array}{c} Mx + q = w, \\ \langle x, w \rangle = 0, \\ x \geq 0, \quad w \geq 0, \end{array}\right\} \tag{1}$$

где $x, w, q \in I\!R^n$, а $M \in R^n \times R^n$ - знаконеопределенная матрица.

Задача (1) может быть сформулирована как задача минимизации [2]:

$$\left.\begin{array}{c} F(x) = \langle x, Mx + q \rangle \downarrow \min, \\ x \geq 0, \quad Mx + q \geq 0. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Как известно, знаконеопределенная матрица M может быть представлена в виде разности двух положительно определенных матриц: $M = M_1 - M_2$. Это влечет следующее d.c. представление целевой функции:

$$F(x) = \frac{1}{2}\langle x, M_1 x \rangle + \langle q, x \rangle - \frac{1}{2}\langle x, M_2 x \rangle.$$

Для задачи (2) рассматривается алгоритм глобальной оптимизации [1], основными этапами которого являются локальный поиск, решение линеаризованных задач и построение аппроксимации поверхности уровня.

Приводятся результаты численного эксперимента на ряде линейных задач о дополнительности [3],[4], показавшие эффективность применения разработанной методики.

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00110.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003.

2. Pang J.S. Complementarity problems. // Handbook of Global OPtimization, Kluwer Academic Publishers,1995, pp. 271–338.

3. Cottle R., Pang J.S., and Stone R.E. The Linear complementarity problem. Academic Press, 1999.

4. Simantiraki E.M., Shanno D.F. An Infeasible-Interior-Point method for linear complementarity problems. Rutcor Research Report,1996.

Петрова Елена Геннадьевна, Стрекаловский Александр Сергеевич
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова 134, Иркутск, 644033, Россия, тел. (3952)511398.
E-mail: strekal@icc.ru, nekolyap@mail.ru

МЕТОД БАРЬЕРНЫХ ФУНКЦИЙ И АЛГОРИТМЫ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. Д. Скарин

Рассматривается задача

$$\min\{f_0(x) : x \in X\}, \tag{1}$$

где $X = \{x : f(x) \leq 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — определенные на $\mathbb{R}^n$ выпуклые дифференцируемые функции ($i = 0, 1, \ldots, m$). При этом предполагается, что ограничения задачи (1) могут быть противоречивыми, т.е. возможен случай $X = \emptyset$. Тогда (1) будет несобственной задачей выпуклого программирования [1].

Для (1) строится аппроксимирующая задача

$$\min\{f_0(x) : x \in X_{\bar{\sigma}}\}, \tag{2}$$

где $X_\sigma = \{x : f_i(x) \leq \sigma,\ i = 1, \ldots, m\}$, $\bar{\sigma} = \min\{\sigma : \sigma \geq 0,\ X_\sigma \neq \emptyset\}$. Если множество X_σ непусто и ограничено для некоторого $\sigma > 0$, то $\bar{\sigma} = \|f^+(\bar{x})\|_\infty$, где $\bar{x} = \arg\min\limits_x \|f^+(x)\|^2_\infty$. Если $X \neq \emptyset$, то $\bar{\sigma} = 0$ и задачи (1) и (2) совпадают.

Целью исследования являются вопросы применения обратной барьерной функции для построения итерационных процедур нахождения решения задачи (2). Предлагаются две алгоритмические схемы оптимальной коррекции задачи (1), обосновывается их сходимость. Приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Опишем один из предлагаемых алгоритмов. Пусть задана произвольная точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\{\varepsilon_k\}$ и $\{\delta_k\}$ — последовательности положительных чисел такие, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$. Положим

$$\sigma_0 = \|f^+(x_0)\|_\infty, \qquad Y_0 = \{x : f_i(x) \leq \sigma_0 + \varepsilon_0,\ i = \overline{1, m}\}.$$

Пусть известны точка $x_k \in \mathbb{R}^n$, параметры $\sigma_k > 0$, $\delta_k > 0$, $\varepsilon_k > 0$ и множество $Y_k^0 = \{x : f_i(x) < \sigma_k + \varepsilon_k,\ i = \overline{1, m}\}$. Построим функцию

$$B_k^0(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu_0}{\sigma_k + \varepsilon_k - f_i(x)} \quad (\mu_0 = \mathrm{const},\ \mu_0 > 0).$$

Выберем точку $x_{k+1} \in Y_k^0$ из условия $B_k^0(x_{k+1}) - B_k^0(\bar{x}_{k+1}) < \delta_k$, где $\bar{x}_{k+1} = \arg\min\{B_k^0(x) : x \in Y_k^0\}$. Положим $\sigma_{k+1} = \|f^+(x_{k+1})\|_\infty$.

Пусть задача (2) разрешима в единственной точке x^* и $f_0(x) > -\infty$ ($\forall\, x \in \mathbb{R}^n$). Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_k = \bar{\sigma}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_k = x^*$.

Работа поддержана грантами РФФИ (проект № 07-01-00399) и программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-5595.2006.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983.

Скарин Владимир Дмитриевич,
Институт математики и механики УрО РАН, ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620219, Россия, тел. (343)375-34-23, факс (343)374-25-81. E-mail: skavd@imm.uran.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ДВУХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

И. И. Тахонов

В данной работе исследуются две модели так называемых *динамических распределенных систем*, представленные взвешенными графами. В каждый момент времени элементы такого рода системы характеризуются набором некоторых параметров. Назовем этот набор *состоянием элемента*, а совокупность состояний всех элементов – *состоянием системы*. Предположим, элементы стремятся “оптимизировать” взаимодействия с соседями, и нам известны правила (*стратегии*), которыми они при этом руководствуются. На каждом временном шаге элемент принимает решение об изменении своего состояния, исходя из наблюдаемых на предыдущем шаге состояний соседей. Но, так как элементы действуют независимо друг от друга, состояние, в которое попадает система, вообще говоря отличается от ожидаемого, что вынуждает элементы снова изменять состояния. Возникает естественный вопрос: сходится ли этот процесс к некоторому предельному состоянию и существуют ли у системы равновесные (устраивающие все элементы) состояния?

В работах [1] и [2] приведены достаточные условия существования предельных и равновесных состояний для двух систем с фиксированными стратегиями участников, а также указаны явные формулы для их вычисления.

В данной работе проведены дальнейшие исследования этих моделей, рассмотрен вопрос *непрерывной зависимости* предельных и равновесных состояний от погрешностей вычисления и даны легко проверяемые достаточные условия их устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерзин А.И.,Тахонов И.И. *Равновесное распределение ресурсов сетевой модели.* Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. VIII, 3(23). с. 58-68.

2. Ерзин А.И., Тахонов И.И. *Задача поиска сбалансированного потока.* Сибирский журнал индустриальной математики. 2006. Т. IX, 4(28). с. 50-63.

Тахонов Иван Иванович, Новосибирский Государственный Университет, ул. Пирогова, 2, 630090, Новосибирск, Россия. E-mail: takhonov@gmail.com

АЛГОРИТМ С ОЦЕНКАМИ ДЛЯ ЗАДАЧИ FLOW SHOP С МИНИМАЛЬНЫМИ ЗАДЕРЖКАМИ И ПРОЦЕССОРНО-НЕЗАВИСИМЫМИ ДЛИТЕЛЬНОСТЯМИ ОПЕРАЦИЙ

А.А. Агеев

Рассматривается задача типа FLOW SHOP (потоковая конвейерная схема) на двух машинах с минимальными задержками. В задаче дано множество $J = \{1, \ldots, n\}$ независимых работ. Каждая работа $j \in J$ состоит из первой и второй операций (на первой и второй машине), на выполнение которых требуется a_j и b_j единиц времени соответственно. Кроме того, для каждой работы $j \in J$ задана неотрицательная величина l_j, называемая задержкой. Выполнение второй операции работы $j \in J$ должно начинаться не ранее, чем по истечении l_j единиц времени после окончания выполнения первой операции. Требуется минимизировать длину расписания. В стандартной трехместной системе обозначений задач теории расписаний исследуемая задача записывается как $F2 \mid l_j \mid C_{\max}$.

Известно [2,3], что задача $F2 \mid l_j \mid C_{\max}$ NP-трудна в сильном смысле даже в случае единичных длительностей всех операций. Делл Амико в 1996 г. [1] предложил четыре алгоритма для задачи $F2 \mid l_j \mid C_{\max}$ с одной и той же оценкой точности 2 и временной сложности $O(n \log n)$. С тех пор этот результат не улучшался, хотя вопрос о существовании полиномиальных алгоритмов с лучшей оценкой точности ставился рядом исследователей.

В настоящей работе построен алгоритм с временной сложностью $O(n^2)$ и оценкой точности 3/2 для случая, когда длительность операции каждой работы не зависит от номера машины, т. е. $a_j = b_j$ при всех $j \in J$. Алгоритм вначале перенумеровывает работы так, чтобы выполнялось условие $a_j + l_j \le a_{j+1} + l_{j+1}$ для всех $j \in J \setminus \{n\}$. Затем он строит n допустимых расписаний таким образом, что последовательность выполнения работ на второй машине у всех этих расписании одна и та же — $1, 2, \ldots, n$, а последовательность выполнения работ на первой машине зависит от расписания и состоит из двух переставленных местами отрезков последовательности на второй машине. При анализе алгоритма фундаментальную роль играет нетривиальное обобщение нижней границы на длину оптимального расписания, установленной в [2,3].

Работа поддержана грантами РФФИ 05-01-00960, 06-01-00255.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Dell'Amico, Shop problems with two machines and time lags, Operations Research 44 (1996), 777–787.
2. W. Yu, The two-machine shop problem with delays and the one-machine total tardiness problem, Ph.D. thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 1996.
3. W. Yu, H. Hoogeveen, J. K. Lenstra, Minimizing makespan in a two-machine flow shop with delays and unit-time operations is NP-hard. J. Sched. 7 (2004), no. 5, 333–348.

Агеев Александр Александрович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел.: 8(383)333-2086, факс: 8(383)333-2598, e-mail: ageev@math.nsc.ru

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ НЕКОТОРЫХ NP-ТРУДНЫХ ВАРИАНТОВ ЗАДАЧ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ С ЖЕСТКИМИ ЗАДЕРЖКАМИ

А.А. Агеев, М.А. Иванов

В работе исследуются частные случаи двух двухстадийных задач теории расписаний с жесткими задержками, в которых задержки могут принимать либо одно, либо не более двух различных значений. Полученные в работе верхние и нижние оценки аппроксимируемости улучшают аналогичные оценки, установленные в [1] для тех же задач в общем случае. В рассматриваемых задачах задано множество $J = \{1, \ldots, n\}$ независимых работ. Каждая работа $j \in J$ состоит из первой и второй операций, на выполнение которых требуется a_j и b_j единиц времени соответственно. Для каждой работы $j \in J$ задана величина $l_j \in \mathbb{Z}_+$, называемая задержкой. Выполнение второй операции работы $j \in J$ должно начинаться точно по истечении l_j единиц времени после окончания выполнения первой операции. В первой задаче все операции каждой работы выполняются на одной машине, во второй — на двух машинах, причем первая операция каждой работы выполняется на первой машине, а вторая на второй (потоковая конвейерная схема или FLOW SHOP). В стандартной трехместной системе обозначений задач теории расписаний рассматриваемые задачи записываются следующим образом: задача на одной машине как $1 \mid \text{exact } l_j \mid C_{\max}$, задача на двух машинах как $F2 \mid \text{exact } l_j \mid C_{\max}$.

Известно [2], что $1 \mid \text{exact } l_j \mid C_{\max}$ NP-трудна в сильном смысле даже в случае когда $l_j = L$ для всех работ $j \in J$. В настоящей работе установлен более сильный результат: показано, что существование полиномиального алгоритма с оценкой точности $1.25 - \varepsilon$ для решения задачи $1 \mid \text{exact } l_j = L \mid C_{\max}$ влечет P=NP. Кроме того, показано, что алгоритм, предложенный в [1] для общей задачи применительно к задаче $1 \mid \text{exact } l_j = L \mid C_{\max}$ имеет лучшие оценки точности: 2.5 в случае произвольных a_j и b_j, 2 в случаях $a_j \leq b_j$ и $a_j \geq b_j$ для всех $j \in J$ и 1.5 в случае $a_j = b_j$ для всех $j \in J$.

Для задачи $F2 \mid \text{exact } l_j \mid C_{\max}$ показано, что существование полиномиального алгоритма с оценкой точности $1.25 - \varepsilon$ для частного случая, где $l_j \in \{0, L\}$ при всех $j \in J$, влечет P=NP. Кроме того, для этого частного случая построен алгоритм с временной сложностью $O(n^2)$ и оценкой точности 2.

Работа поддержана грантами РФФИ 05-01-00960, 06-01-00255.

ЛИТЕРАТУРА

1. A.A. Ageev, A.V. Kononov, Approximation algorithms for scheduling problems with exact delays. // Lecture Notes in Computer Science 4368 (Proceedings of WAOA 2006), 1–14.

2. A. J. Orman, C. N. Potts, On the complexity of coupled-task scheduling.// Discrete Appl. Math. 72 (1997), 141–154.

Агеев Александр Александрович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел.: 8(383)333-2086, факс: 8(383)333-2598, e-mail: ageev@math.nsc.ru

АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ РЕШЕТЧАТЫХ ГРАФОВ

Т. А. Алдын-оол, А. И. Ерзин, Ю. В. Шамардин

На множестве точек на плоскости с целочисленными координатами рассматривается ориентированный граф-решетка G с источником $s = (0, 0)$ и стоком $t = (a, b)$. Горизонтальные дуги графа G направлены вправо, вертикальные – вверх. Надежность каждой дуги (вероятность прохождения сигнала по дуге) равна $p \in (0, 1]$. Подсетью $S \subseteq G$ назовем любой связный подграф с источником s и стоком t. Надежностью R_S подсети S назовем вероятность существования хотя бы одного исправного пути $P \subseteq S$ из s в t.

Исследуется вопрос о нахождении максимально надежной последовательно–параллельной сети (ППС) среди сетей $S \subseteq G$. Такая постановка обусловлена тем, что нахождение подсети в ППС, удовлетворяющей дополнительным свойствам, часто является полиномиально разрешимой задачей [1].

Положим $L = a + b$. Доказаны следующие утверждения.

1. Для любой ППС S справедлива оценка $\frac{R_S}{R_G} \geq \frac{1}{2^{L-1}}$.

2. Если $p \geq \sqrt[L]{\varepsilon}$, где $0 < \varepsilon \leq 1$, то для любой ППС S имеет место оценка $\frac{R_S}{R_G} \geq \varepsilon$.

3. Наиболее надежной ППС, содержащей не более $2L$ дуг, является равномерная цепочка, то есть сеть, состоящая из максимальной последовательности прямоугольников.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.И. Ерзин, Г.Г. Паршин. Задача синтеза надежной сети связи ограниченного веса. // Управляемые системы. 1993. Вып. 31. С. 3-9.

Алдын-оол Татьяна Андреевна, Новосибирский Госуниверситет, ул. Пирогова, 2, 630090, Новосибирск, Россия, тел. 8-913-751-08-90. E-mail: gerla@gorodok.net

Ерзин Адиль Ильясович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Россия, тел. (8-383) 333-37-88, факс (8-383) 333-25-98. E-mail: adil@math.nsc.ru

Шамардин Юрий Владиславович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Россия, тел. (383) 333-37-88, факс (8-383) 333-25-98. E-mail: ORlab@math.nsc.ru

ТОЧНЫЕ И ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О P-МЕДИАНЕ С ПРЕДПОЧТЕНИЯМИ КЛИЕНТОВ

Е. В. Алексеева, И. Л. Васильев, К. Б. Климентова, Ю. А. Кочетов

В работе рассматривается задача о p-медиане с предпочтениями клиентов в следующей постановке: найти

$$\min_{y_i \in \{0,1\}} \{\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x^*_{ij}(y) | \sum_{i \in I} y_i = p\},$$

где $x^*_{ij}(y)$ — оптимальное решение задачи:

$$\min_{x_{ij} \in \{0,1\}} \{\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} g_{ij} x_{ij} | \sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J, \quad x_{ij} \le y_i, \quad i \in I, j \in J\}.$$

Тестовые примеры из библиотеки "Дискретные задачи размещения" [1] показывают, что поиск приближенного и точного решений стандартными средствами комбинаторной оптимизации связан с большими вычислительными затратами. Поэтому требуется более тщательное изучение структуры задачи при разработке методов ее решения.

Для поиска приближенного решения задачи разработан генетический локальный поиск по окрестностям 1-замена и Лина-Кернигана со стандартными операторами селекции, скрещивания и мутации. Используя формулировку задачи в виде задачи целочисленного программирования (ЦП) [2], для поиска оптимального решения разработан метод ветвей и отсечений. Для улучшения нижних оценок ЛП-релаксации задачи предложена новая формулировка, полученная сведéнием к задаче для пары матриц, а также построены отсекающие плоскости, полученные при изучении взаимосвязи с задачей упаковки множества.

Благодаря эффективному эвристическому алгоритму и существенному усилению формулировки задачи удалось сократить разрыв целочисленности и уменьшить время решения задач по сравнению с коммерческими решателями задач ЦП.

Работа поддержана грантами РФФИ 06-01-00075 и 05-01-0011, НАТО RIG981258.

ЛИТЕРАТУРА

1. http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/

2. Горбачевская Л. Е., Дементьев В. Т., Шамардин Ю. В. Двухуровневая задача стандартизации с условием единственности оптимального потребительского выбора // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1999. Т. 6, № 2. С. 3–11.

Алексеева Екатерина Вячеславовна, Кочетов Юрий Андреевич,
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН пр. Ак. Коптюга 4, 630090 Новосибирск, тел. (383) 333-20-86, факс (383) 333-25-98. E-mail: ekaterina2@math.nsc.ru, jkochet@math.nsc.ru

Климентова Ксения Борисовна, Васильев Игорь Леонидович,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН ул. Лермонтова 134, 664033 Иркутск, тел. (3952) 51-13-98, факс (3952) 51-16-16. E-mail: xenia.klimentova@icc.ru, vil@icc.ru

ТРУДНЫЕ ПРИМЕРЫ ДЛЯ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА МОЩНОСТИ

И. Л. Васильев, Ю. А. Кочетов

В области целочисленной и комбинаторной оптимизации наблюдается быстрый рост числа работ, посвященных новым эвристическим и точным методам. Все более и более сложные модели удается использовать в различных областях исследования операций. В связи с этим актуальной проблемой является создание методов генерации сложных тестовых примеров, на которых можно было бы достоверно оценивать эффективность новых методов, анализировать области их применения и сравнивать с другими.

В настоящем докладе рассматривается одна из хорошо известных задач исследования операций, а именно полностью целочисленная задача размещения производства с ограничениями на мощности предприятий. В этой задаче задано множество клиентов и множество предприятий. Для каждого предприятия известны стоимость его открытия, максимальный объем производства и транспортные затраты на доставку продукции клиентам. Требуется найти подмножество предприятий, которое позволит с минимальными затратами удовлетворить потребности всех клиентов, не нарушая ограничений на мощности предприятий.

Для данной задачи предлагается способ генерации трудных в вычислительном отношении тестовых примеров. Проводится анализ трудоемкости решения задачи методом ветвей и границ в зависимости от плотности матрицы транспортных затрат, разброса затрат на открытие предприятий и величины максимальной мощности предприятий. Подчеркиваются различия с простейшей задачей размещения [1]. Показано, что эффективность метода ветвей и границ может быть значительно увеличена при использовании техники отсечений. Получены нижние оценки целевой функции при декомпозиции допустимого множества задачи на многогранники, образованные ограничениями на мощности предприятий. Исследована зависимость влияния мощности предприятий на качество получаемых нижних оценок и, как следствие, эффективность метода ветвей и отсечений по сравнению с методом ветвей и границ.

Работа поддержана грантами РФФИ 05-01-0011, 06-01-00075, НАТО RIG981258.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева Е.В., Кочетов Ю.А., Кочетова Н.А. Критические параметры простейшей задачи размещения // Труды XIII Байкальской международной школы-семинара. 2005. Т.1. С. 407–412

Васильев Игорь Леонидович, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия, тел. (8-3953) 51-13-98, факс (8- 3952) 51-16-16, E-mail:vil@icc.ru

Кочетов Юрий Андреевич, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, просп. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383) 333-20-86, факс: (8-383) 333-25-98, E-mail: jkochet@math.nsc.ru

НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛА ШАГОВ ЛОКАЛЬНОГО СПУСКА ДЛЯ ЗАДАЧИ $Pm||C_{max}$

Ю. Ю. Великанова

Рассматривается NP–трудная задача теории расписания $Pm||C_{max}$. Задано n работ и m идентичных параллельных машин. Для каждой работы определена длительность ее выполнения. Требуется распределить работы по машинам так, чтобы минимизировать время завершения всех работ.

Окрестностью $Swap$ заданного решения называют множество решений, полученных из данного перестановкой двух работ, расположенных на разных машинах. Окрестностью $Swap\bigcup Flip$ называют множество решений, получаемых переносом одной работы на другую машину или перестановкой двух работ.

Доказано, что с каждой из перечисленных окрестностей стандартный алгоритм локального спуска достигает локальный минимум с любой стартовой точки за полиномиальное число шагов, а именно:

– для задачи $P2||C_{max}$ с обеими окрестностями $Swap$ и $Swap\bigcup Flip$ алгоритму локального спуска требуется $O(n^3)$ шагов;

– для задачи $Pm||C_{max}$ с обеими окрестностями $Swap$ и $Swap\bigcup Flip$ алгоритму локального спуска требуется $O(m^2n^4)$ шагов.

Построены примеры для задачи $P2||C_{max}$ для которых алгоритм локального спуска с окрестностями $Swap$ и $Swap\bigcup Flip$ достигает локального минимума за $O(n^2)$.

Работа поддержана грантом РФФИ 06-01-00075.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brucker P., Hurink J., Werner F. Improving local search heuristics for some scheduling problems-I // Discrete Applied Mathematics – 1996. – Vol. 65. – P.97-122.

2. Brucker P., Hurink J., Werner F. Improving local search heuristics for some scheduling problems-II // Discrete Applied Mathematics – 1997. – Vol. 72. – P.47-69.

Великанова Юлия Юрьевна, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 333-20-86, факс (383) 333-25-98, E-mail: julia.velikanova@gmail.com

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЦЕЛЫХ МАТРИЦ.

С. И. Веселов, В. Н. Шевченко.

Пусть $A \in \mathbf{Z}^{m\times n}$ $(2m \le n)$, $rg\ A = m$, наибольший общий делитель миноров m - го порядка матрицы A равен 1. Обозначим A_1 любую невырожденную $(m \times m)$ подматрицу матрицы A. Не уменьшая общности считаем, что A_1 расположена в первых m столбцах матрицы A. Через A_2 обозначим подматрицу, содержащую столбцы с номерами $m+1, .., n$.

Рассмотрим систему уравнений

$$A_1x_1 + A_2x_2 = 0.$$

Обозначим M множество целых решений этой системы, $H \in \mathbf{Z}^{(n-m)\times n}$ матрицу, по строкам которой расположены векторы базиса M, $H_2((n-m)\times(n-m))$ подматрицу в H, расположенную в последних столбцах. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Если $diag(d_1, ..., d_m)$ есть нормальная диагональная форма(НДФ) матрицы A_1, то НДФ матрицы H_2 равен $diag(1, ..1, d_1, ..., d_m)$, где число единиц равно $n - 2m$.

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00552.

Веселов Сергей Иванович, Нижегородский университет, пр. Гагарина, д.23, Н.Новгород. тел. (8-8312) 65-78-81 , E-mail:vesi@uic.nnov.ru

Шевченко Валерий Николаевич, Нижегородский университет, пр. Гагарина, д.23, Н.Новгород. тел. (8-8312) 65-78-81 , E-mail:shvn@uic.nnov.ru

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМА "ИДИ В БЛИЖАЙШИЙ ГОРОД" ДЛЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА НА СЛУЧАЙНЫХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ СВЕРХУ ВХОДАХ

Э. Х. Гимади, А. В. Шахшнейдер, Arnaud Le Gallou

Сообщение посвящено вероятностному анализу алгоритма АИБ ("Иди в ближайший непройденный город") для приближенного решения задачи коммивояжера (ЗК). Ранее вероятностный анализ этого алгоритма был проведен для класса ЗК с элементами матрицы расстояний — независимыми случайными переменными с одинаковой функцией распределения на отрезке $[a_n, b_n]$, $a_n > 0$ (Э.Х. Гимади, В.А. Перепелица, 1969,1974). В случае равномерного распределения АИБ асимптотически точен при $\frac{b_n}{a_n} = o\left(\frac{n}{\log n}\right)$. Позже это условие было установлено для всех распределений мажорирующего типа. В данном сообщении рассматривается случай входных данных из неограниченной сверху области значений $[a_n, \infty)$.

Теорема 1. *АИБ для ЗК с гауссовым распределением*

$$p(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi\sigma_n^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}\right), \; a_n \le x < \infty,$$

имеет оценки относительной погрешности и вероятности несрабатывания

$$\varepsilon_n = O\left(\frac{\sigma_n \log n}{n a_n}\right); \quad \delta_n = O(n^{-\delta}),$$

где константа $\delta > 0$. При этом АИБ асимптотически точен, если

$$\frac{\sigma_n}{a_n} = o\left(\frac{n}{\log n}\right).$$

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 05-01-00395, 07-07-00022).

Гимади Эдуард Хайрутдинович, ИМ СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383) 333-21-89, факс (8-383) 333-25-98, E-mail: gimadi@math.nsc.ru

Шахшнейдер Анастасия Валерьевна, НГУ, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. +7-923-150-62-45, E-mail: pedastrina@gorodok.net

Arnaud Le Gallou, Ecole Polytechnique, 91120 PALAISEAU, France, phone: (0033) 661-50-89-32; E-mail: arnaud.le-gallou@polytechnique.edu

К ЗАДАЧЕ О МАКСИМАЛЬНОЙ ВЗВЕШЕННОЙ КЛИКЕ

Т. В. Груздева, А. А. Кузнецова

В работе рассматривается известная задача поиска максимальной взвешенной клики в графе $G(V,E)$ в новой непрерывной постановке в виде оптимизационной задачи с одним d.c. ограничением-неравенством:

$$\left.\begin{array}{c} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i} x_i^2 \downarrow \min, \quad x \in S, \\ F(x) = \langle x, Bx \rangle \le 0 \end{array}\right\} \qquad (P)$$

где $S = \left\{x \ge 0 \mid \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$, а матрица $B(G,\omega) = \| b_{ij} \|_{(n\times n)}$ имеет вид:

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2w_i} + \frac{1}{2w_j}, & \text{если } i \ne j, \quad (i,j) \notin E; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $C \subset V$ и $W(C) = \sum\limits_{i\in C} w_i$. Определим взвешенный характеристический вектор $z(C,w)$ множества C следующим образом:

$$z(C,w)_i = \begin{cases} \frac{w_i}{W(C)}, & \text{если } \quad i \in C, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема. Пусть задан простой граф G, и $w \in R^n$ — произвольный вектор с положительными компонентами. Множество C образует максимальную взвешенную клику в графе G тогда и только тогда, когда вектор $z(C,w)$ является глобальным решением задачи (P).

Для решения задачи (P) применяется стратегия глобального поиска для задач с d.c. ограничением [1], основными этапами которой являются локальный поиск [1]–[3], решение линеаризованных задач и построение аппроксимаций поверхности уровня выпуклой функции. Разработанный алгоритм протестирован на задачах о максимальной взвешенной клике и проведено сравнение с результатами из [4].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №05-01-00110 и Фонда содействия отечественной науке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрекаловский А.С. (2003) *Элементы невыпуклой оптимизации.* — Новосибирск: Наука.
2. Kuznetsova A.A., Strekalovsky A.S. (2001) *On solving the maximum clique problem* // Journal of Global Optimization. — V. 21, N. 3. — P. 265–288.
3. Груздева Т.В., Стрекаловский А.С. (2007) *Локальный поиск в задачах с невыпуклыми ограничениями* // ЖВММФ. — Т. 47, № 3. — С. 397–413.
4. Mannino C., Stefanutti E. (1999) *An augmentation algorithm for the maximum weighted stable set problem* // Comput. Optimization and Applications. — V. 14 (3). — P. 367–381.

Груздева Татьяна Владимировна, Кузнецова Антонина Александровна
Институт Динамики систем и Теории Управления СО РАН,
ул. Лермонтова 134, Иркутск, 664033, Россия,
тел. (8-395-2) 51-13-98, факс (8-395-2) 51-16-16,
E-mail: yak@icc.ru, kuznet@icc.ru

УНИМОДУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

М. В. Девятерикова, А. А. Колоколов, А. П. Колосов

Рассматривается задача поиска некоторой точки множества $M_0 = M \cap \mathbb{Z}^n$, где $M = \{x : \ Ax \le b, \ x \ge 0\}$, A – целочисленная $(m \times n)$-матрица, b – целочисленный m-вектор, $M \ne \varnothing$ и ограничено. С этой целью можно использовать следующую задачу: найти лексикографически максимальный элемент множества M_0, т.е.

$$z^* = lexmax(M \cap \mathbb{Z}^n). \tag{1}$$

Для решения данной задачи применяются различные методы целочисленного линейного программирования (ЦЛП), в том числе методы отсечения, ветвей и границ, перебора L-классов [1] и другие.

Важную роль в исследовании задачи (1) и алгоритмов ее решения играет дробное накрытие $M_* = \{x \in M : \ x \succ z \ \forall z \in M_0\}$, где $\succ$ – символ лексикографического порядка. Мощность L-накрытия задачи (L-разбиения этого множества) входит в оценки числа итераций ряда алгоритмов ЦЛП. Во многих случаях весьма полезным является применение унимодулярных преобразований пространства, которые могут существенно уменьшить L-накрытие и число итераций алгоритмов.

В [2] предложены семейства задач типа (1), являющиеся „трудными“ для указанных методов ЦЛП, т.е. требующие экспоненциального числа итераций в зависимости от длины входа задачи. В данной работе продолжены исследования алгоритмов в рассматриваемом направлении, в частности, построены семейства задач, на основе которых доказана неустойчивость первого алгоритма Гомори в соответствии с подходом, развиваемым в [1]. Приведены унимодулярные преобразования, позволяющие повысить эффективность алгоритмов ЦЛП.

ЛИТЕРАТУРА

1. Девятерикова М.В., Колоколов А.А. Анализ устойчивости некоторых алгоритмов дискретной оптимизации // Автоматика и телемеханика. – 2004. - No. 3. – С. 48–54.

2. Колоколов А.А., Колосов А.П. Анализ некоторых алгоритмов целочисленного программирования с использованием L-разбиения // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования. No. 11. УрО РАН. - Екатеринбург, 2007. - С. 186.

Девятерикова Марина Владимировна,
Омский государственный технический университет,
пр-т Мира, 11, Омск, 644050, Россия, тел. (3812) 65-20-48, факс (3812) 65-20-48.
E-mail: devy@omgtu.ru

Колоколов Александр Александрович, Колосов Антон Павлович,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru, apkolosov@mail.ru

ПОСТАНОВКИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ РАЗМЕЩЕНИЯ ОБЪЕКТОВ НА ПЛОСКОСТИ

Г. Г. Забудский

Важным направлением в исследовании операций является анализ и решение задач оптимального размещения объектов. Такие задачи необходимо решать при проектировании предприятий и робототехнологических комплексов, определении мест расположения пунктов обслуживания, автоматизированном конструировании электронных устройств и выполнении многих других работ [1].

Одной из классических задач указанного класса является задача Вебера. На плоскости имеются фиксированые объекты, необходимо на ней разместить новые объекты, которые связаны между собой и с фиксированными так, чтобы суммарная стоимость связей между всеми объектами была минимальной. Для прямоугольной метрики указанная задача сводится к нахождению потока минимальной стоимости в некоторой сети (A.V. Cabot, R.L. Francis), либо к решению серии задач поиска максимального потока (В.А. Трубин). В проведенном экспериментальном исследовании более эффективным оказался алгоритм В.А. Трубина.

Одно из направлений обобщения задачи Вебера – это наличие зон запрета для размещения объектов. Запрещенными зонами могут быть элементы географического ландшафта (горы, реки, озера), а также: здания, санитарные зоны и другие участки. Предложен метод построения моделей ЦЛП указанных задач, разработаны алгоритмы их решения, проведен вычислительный эксперимент [2].

При размещении технологического оборудования, как правило, требуется располагать оборудование на меньшей площади и не хаотично, а вдоль некоторых линий. Для решения таких задач предлагается использовать аппарат целочисленной оптимизации. Построена двухкритериальная модель ЦП размещения технологического оборудования швейного производства и предложены алгоритмы решения указанной задачи.

В отмеченных выше постановках размещаемые объекты располагаются как можно ближе друг к другу и к фиксированным объектам. На практике необходимо решать задачи, в которых объекты должны размещаться как можно дальше от фиксированных. В этом случае размещаемыми объектами могут быть, например, опасные производства, которые неблагоприятно влияют на здоровье жителей близлежащих районов. Для решения таких задач с прямоугольной метрикой применяются модели и методы ЦП и комбинаторной оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. B. Mirchandani, R.L. Francis. Discrete Location Theory. New York: John Wiley & Sons, 1990.
2. Г.Г. Забудский. Построение моделей и решение задач размещения на плоскости с запрещенными зонами// Автоматика и телемеханика. 2006. N 12. С. 136-141.

Забудский Геннадий Григорьевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, г. Омск, 644099, Россия. тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84,
E-mail:zabudsky@ofim.oscsbras.ru

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ НАД ПОЛЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Н. Ю. Золотых

Пусть F — некоторое подполе поля действительных чисел. Хорошо известно, что произвольный выпуклый полиэдр $P \subseteq F^d$ может быть представлен любым из следующих двух способов: как множество решений системы линейных неравенств $P = \{x \in F^d : \ Ax \le b\}$, где $A \in F^{m\times d}$, $b \in F^m$, и как сумма конической оболочки некоторой системы векторов $u_1, \ldots, u_s$ из F^d и выпуклой оболочки некоторой системы точек $v_1, \ldots, v_n$ из F^d. Метод двойного описания (double description method) [1], известный также как алгоритм Моцкина–Бургера, по одному из этих описаний строит другое. При этом метод всегда находит неприводимую систему векторов $u_1, \ldots, u_s$, $v_1, \ldots, v_n$ и неприводимую систему неравенств $Ax \le b$ соответственно. Существует несколько известных программ, реализующих различные модификации этого метода. Как правило, программы поддерживают точную рациональную арифметику (числа представлены как отношения двух целых чисел произвольной длины) или приближенную машинную арифметику с плавающей запятой (`float` или `double`). С другой стороны, известно, что поля рациональных чисел не достаточно, чтобы представить все комбинаторные типы полиэдров. Минимальным подполем поля вещественных чисел, на котором реализуются все комбинаторные типы выпуклых полиэдров, является поле алгебраических вещественных чисел [2]. Разработаны две модификации метода двойного описания, специально предназначенные для случаев, когда 1) F — простое расширение $\mathbf{Q}(\alpha)$ поля рациональных чисел, 2) F — поле алгебраических чисел. В первом случае должен быть задан минимальный многочлен $\varphi(x)$ алгебраического числа α и рациональный локализующий интервал (a, b), содержащий α и не содержащий других корней многочлена $\varphi(x)$. Чтобы задать число β из $\mathbf{Q}(\alpha)$ достаточно указать многочлен $f(x)$, такой, что $\beta = f(\alpha)$. Во втором случае каждое число встречающееся в вычислениях, представлено парой: минимальный многочлен и локализующий интервал. Программные реализации обеих модификаций встроены в систему Skeleton (см. `http://www.uic.nnov.ru/~zny/skeleton`). Skeleton использует библиотеку Arageli (см. `http://www.unn.ru/cs/arageli`), в которой арифметика алгебраических чисел реализована С.С. Лялиным.

Автору известно о другой модификации (и соответствующей программе) метода двойного описания над полем алгебраических чисел, предложенной Д.В. Груздевым.

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00552-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моцкин Т.С., Райфа Х., Томпсон Дж.Л., Тролл Р.М. Метод двойного описания // Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С. 81–109.

2. Мнёв Н.Е. О реализуемости над полями комбинаторных схем выпуклых многогранников // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1983. Т. 123. С. 203–207.

Золотых Николай Юрьевич,
Нижегородский гос. университет им. Н.И. Лобачевского, пр. Гагарина, 23, Нижний Новгород, 603950, Россия, тел. (8312) 65-78-81, E-mail: Nikolai.Zolotykh@gmail.com

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ГРАДИЕНТНОГО АЛГОРИТМА МИНИМИЗАЦИИ СУПЕРМОДУЛЯРНОЙ ФУНКЦИИ

С. Д. Иванова, В. П. Ильев

Пусть I — непустое множество; p — натуральное число, $p < n = |I|$; $f : 2^I \to R_+$ — невозрастающая *супермодулярная* функция, т.е. $f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \geq f(X) + f(Y)$ для любых $X, Y \subseteq I$; $f(I) = 0$. Рассмотрим следующую NP-трудную задачу:

$$\min \{f(X) : X \subseteq I,\ |X| = p\}. \tag{1}$$

Для $X \subseteq I$, $x \in X$ определим $d_x(X) = f(X \setminus \{x\}) - f(X) \geq 0$ и введем величины

$$s = \max_{\substack{x \in I, \\ d_x(\{x\})>0}} \frac{d_x(\{x\}) - d_x(I)}{d_x(\{x\})}, \quad \overline{s} = \max_{\substack{x \in I, \\ d_x(GR\cup\{x\})>0}} \frac{d_x(GR \cup \{x\}) - d_x(I)}{d_x(GR \cup \{x\})},$$

где GR — приближенное решение задачи (1), найденное следующим алгоритмом:

Алгоритм GR.

Шаг 0. Положим $A_0 \leftarrow I$. Переходим на шаг 1.

Шаг i ($i \geq 1$). Выберем $a_i \in A_{i-1}$ так, чтобы $f(A_{i-1} \setminus \{a_i\}) = \min\limits_{a \in A_{i-1}} f(A_{i-1} \setminus \{a\})$. Положим $A_i \leftarrow A_{i-1} \setminus \{a_i\}$. Если $i < n - p$, то переходим к шагу $i + 1$. В противном случае $GR \leftarrow A_{n-p}$. *Конец.*

Нетрудно показать, что $0 \leq \overline{s} \leq s \leq 1$. Для $s < 1$ положим $t = s/(1 - s)$. В работе [1] получена гарантированная оценка погрешности алгоритма **GR**:

$$\frac{f(GR)}{f(OPT)} \leq \frac{1}{t}\left[\left(\frac{q+t}{q}\right)^q - 1\right], \tag{2}$$

где OPT — оптимальное решение задачи (1), $q = n - p$.

В данном сообщении предложена следующая оценка:

$$\frac{f(GR)}{f(OPT)} \leq t + 1, \tag{3}$$

которая уже для $q = 3$ лучше оценки (2) при $t > 18$. Для $q = 6$ оценка (3) лучше (2) при $t \geq 3,88$, а для $q = 9$ — при $t \geq 2,89$.

При $\overline{s} < 1$ верна аналогичная апостериорная оценка $f(GR)/f(OPT) \leq \overline{t} + 1$, где $\overline{t} = \overline{s}/(1 - \overline{s})$, которая часто оказывается значительно более точной, чем (3).

Заметим, что полученные результаты справедливы и для задачи о p-медиане на минимум, являющейся частным случаем задачи (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. В.П. Ильев. Оценка точности алгоритма жадного спуска для задачи минимизации супермодулярной функции // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1998. Т. 5, N 4. С. 45–60.

Иванова Светлана Диадоровна, ООО ”Омсктелеком”, ул. 1-я Заводская, 23, Омск, 644065, Россия, тел. (3812) 53-21-68, E-mail: ivanovaSD@yandex.ru,

Ильев Виктор Петрович, Омский государственный университет, пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 56-70-88, E-mail: iljev@math.omsu.omskreg.ru

АЛГОРИТМЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ БЕНДЕРСА ДЛЯ ДВУХСТАДИЙНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

А. А. Колоколов, Т. В. Леванова, А. С. Федоренко

Среди исследований по оптимизации размещения предприятий важное место занимает двухстадийная задача [1], которая состоит в следующем. Имеются множества предприятий $L = \{1, \ldots, k\}$ (нижний уровень, стадия производства) и $I = \{1, \ldots, m\}$ (верхний уровнь, стадия продажи), выпускающих некоторую продукцию, а также множество ее потребителей $J = \{1, \ldots, n\}$. Каждое предприятие верхнего уровня связано с несколькими предприятиями нижнего уровня: $g_{il} = 1$, если предприятия i и l связаны, в противном случае $g_{il} = 0$, $i \in I$, $l \in L$. Предполагается, что каждый потребитель обслуживается только одним предприятием верхнего уровня, однако такое предприятие может удовлетворить спрос любого потребителя. Для открытия предприятия верхнего уровня необходимо, чтобы действовали все связанные с ним предприятия нижнего уровня. Заданы стоимости открытия предприятий $d_i \geq 0$ и $f_l \geq 0$ верхнего и нижнего уровней, соответственно, $i \in I$, $l \in L$. Известны затраты c_{ij} на удовлетворение спроса потребитилей, $i \in I$, $j \in J$. Требуется найти набор предприятий, удовлетворяющий спрос всех потребителей с минимальными суммарными затратами.

Введем переменные: $z = (z_i)$, $y = (y_l)$, $X = (x_{ij})$, $i \in I$, $j \in J$, $l \in L$. Полагаем $z_i = 1$, если предприятие i верхнего уровня открыто, иначе $z_i = 0$. Аналогично определяются переменные y_l для предприятий нижнего уровня. Кроме того, $x_{ij} = 1$, если предприятие i удовлетворяет спрос потребителя j, в противном случае $x_{ij} = 0$.

Модель целочисленного линейного программирования для этой задачи имеет вид:

$$F(z, y, X) = \sum_{i \in I} d_i z_i + \sum_{l \in L} f_l y_l + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \ j \in J,$$

$$z_i \geq x_{ij}, \ i \in I, \ j \in J,$$

$$y_l \geq g_{il} z_i, \ i \in I, \ l \in L,$$

$$x_{ij}, \ y_l, \ z_i \in \{0, 1\}, \ i \in I, \ j \in J, \ l \in L.$$

Для данной задачи разработан ряд алгоритмов, основанных на декомпозиции Бендерса и переборе L-классов с учетом специфики задачи, проведен анализ алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Береснев В.Л. Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных.– Новосибирск: Издательство Института математики, 2005.

2. Колоколов А.А., Леванова Т.В. Задачи оптимального размещения предприятий и метод декомпозиции Бендерса. Учеб.-метод. пособие.– Омск: Омск. гос. ун-т, 2004.

Колоколов Александр Александрович, Леванова Татьяна Валентиновна, Федоренко Анатолий Сергевич, Омский филиал Института математики СО РАН, Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (8-381-2) 23-67-39, факс (8-381-2) 23-45-84. E-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru, levanovat@mail.ru, fas.omsk@mail.ru

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ОДНОЙ ДВУХУРОВНЕВОЙ ЗАДАЧИ О P-МЕДИАНЕ

Ю. А. Кочетов

В большинстве дискретных задач размещения [2] предполагается наличие одного лица, принимающего решения (ЛПР). Такое предположение является естественным при централизованном планировании. В условиях рынка более адекватными являются модели с несколькими ЛПР, которые размещают свои предприятия, стремясь получить максимальную прибыль.

В работе рассматривается математическая модель, в которой два ЛПР последовательно принимают решения об открытии предприятий [1]. Сначала принимает решение ЛПР$_1$ и открывает множество предприятий S_1. Затем, зная это решение, принимает решение ЛПР$_2$ и открывает свое множество предприятий S_2, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Каждый потенциальный клиент выбирает из множества открытых предприятий $S_1 \cup S_2$ одно предприятие, согласно собственным предпочтениям. Если обслуживание клиентов приносит определенный доход, ЛПР$_1$ открывает p_1 предприятий, а ЛПР$_2$ — p_2 предприятий, то в зависимости от размещения этих предприятий рынок будет как-то разделен на две части. Каждый ЛПР будет стремиться максимизировать свою долю рынка. Получаем игру двух лиц с противоположными интересами. Эта игра может быть представлена в виде задачи двухуровневого целочисленного программирования. В работе предлагается оригинальный способ построения семейства верхних оценок на доход ЛПР$_1$ и, соответственно, нижних оценок на доход ЛПР$_2$. Это семейство имеет экспоненциальную мощность. Представителями семейства являются оптимальные решения задач целочисленного линейного программирования специального вида.

Работа поддержана грантами РФФИ 06–01–00075, 07-06-13500.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочетов Ю.А. Двухуровневые задачи размещения // Труды ИВМиМГ СО РАН. Серия Информатика. Новосибирск 2007. Т. 6. С. 97–104.

2. Mirchandani P.B., Francis R.L. Discrete Location Theory. New York: John Wiley and Sons, 1990.

Кочетов Юрий Андреевич
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383) 333-20-86, факс (8-383) 333-25-98.
E-mail: jkochet@math.nsc.ru

ВЕРШИНЫ И ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ТОЧКИ МНОГОГРАННИКА МНОГОИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

М. К. Кравцов, Е. В. Лукшин

Популярность полиэдральной комбинаторики в наше время, прежде всего, объясняется возможностью применения ее аппарата для оценки трудоемкости методов оптимизации и перспективами построения на ее основе эффективных алгоритмов.

Наиболее глубоко исследуются многогранники задач транспортного типа ввиду того, что эти задачи находят многочисленные применения в различных областях науки, техники, экономики и управления. Для решения двухиндексных транспортных задач разработаны простые и эффективные методы. Однако перенесение этих методов на многоиндексные транспортные задачи (особенно в целочисленной постановке) вызывает значительные вычислительные трудности, которые связаны со сложным строением вершин многогранников названных задач [1, 2].

В настоящей работе для p-индексного аксиального транспортного многогранника (p-АТМ) порядка $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$, $n_1, n_2, \ldots n_p > 1$, $p \geq 2$, определенного целочисленными векторами (терминологию см. в [1, 2]), исследуются комбинаторные свойства, касающиеся его целочисленных точек (ЦТ), целочисленных вершин (ЦВ) и нецелочисленных вершин.

Предложен подход к определению числа ЦТ p-АТМ порядка $n_1 \times n_2 \times ... \times n_p$. С использованием этого подхода доказаны критерии принадлежности p-АТМ веса k к классам с минимальным, "почти" минимальным (т.е. со следующим за минимальным) и максимальным числом ЦТ. Выделены следующие классы p-АТМ: многогранники, у которых количество ЦТ не зависит от их веса; многогранники, у которых количество ЦТ совпадает с числом ЦВ. Установлено, что не всякий p-АТМ веса k с максимальным числом вершин обладает максимальным числом ЦТ. Найдена оценка сверху для числа ЦТ p-АТМ.

Доказана теорема об экспоненциальном росте знаменателей дробных компонент нецелочисленных вершин 3-АТМ и показано, что всякий 3-АТМ порядка $n_1 \times n_2 \times n_3$, $n_3 = \min\{n_1, n_2, n_3\}$, и веса k с минимальным числом ЦТ имеет r-нецелочисленные вершины для любого $r \in \{4, 6, 7, \ldots, 3n_3 - 2\}$, т.е. вершины, число дробных компонент у которых равно r.

ЛИТЕРАТУРА

1. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. *Многогранники, графы, оптимизация.* М.: Наука, 1981. – 342 с.

2. Емеличев В.А., Кравцов М.К. Полиэдральные аспекты многоиндексных аксиальных транспортных задач // Дискр. математика. 1991. Т. 3, вып. 2. С. 3–24.

Кравцов Михаил Константинович, НИЭИ Минэкономики РБ, ул. Славинского, 1/1, г. Минск, 220086, Беларусь, тел. (8-017) 267-35-24

Лукшин Евгений Валентинович, ЭПАМ Системз, ул. В.Хоружей, 29, г. Минск, 220123, Беларусь, тел. (8-017) 237-44-99 (ext. 2735), E-mail: e.lukshin@gmail.com

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ С ОЦЕНКАМИ ДЛЯ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОЙ КЛИКЕ

А. А. Кузнецова

Пусть дан неориентированный простой граф $G = G(V, E)$. Подмножество вершин C_* называется максимальной кликой, если граф $G(C_*)$ — полный, и мощность $w(G) = |C_*|$ — максимальная. Ставится задача поиска максимальной клики.

Рассмотрим квадратичную задачу

$$F_\gamma(x) = \langle x, T_\gamma x\rangle \downarrow \min, \quad x \in S, \qquad (D_\gamma)$$

где $T_\gamma = A_{\bar{G}} + \gamma I_n$, $A_{\bar{G}}$ — матрица смежности дополнительного графа $\bar{G}$, I_n — единичная матрица, $S = \{x \in R^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1,\ x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$ — канонический симплекс.

Теорема 1. Пусть $\gamma > 0$ в задаче (D_γ), и $\mathcal{V}(D_\gamma) = \min(F_\gamma, S)$ — значение задачи. Тогда

$$w(G) \leq \left\lfloor \frac{\gamma}{\mathcal{V}(D_\gamma)} \right\rfloor, \qquad (1)$$

причем, если $\gamma \leq 1$, то неравенство (1) выполняется как равенство.

Данную оценку можно уточнить, используя следующий результат.

Теорема 2. Пусть $\gamma > 0$ в задаче

$$F^i_\gamma(x) = F_\gamma(x) + (1-\gamma)x_i \downarrow \min, \quad x \in S, \qquad (D^i_\gamma)$$

и $\mathcal{V}(D^i_\gamma) = \min(F^i_\gamma, S)$ — значение задачи. Тогда, если $i \in C_*$, то

$$w(G) \leq \left\lfloor \frac{1}{\mathcal{V}(D^i_\gamma)} \right\rfloor.$$

В работе [1] представлена процедура локального поиска, позволяющая с произвольной точки из S находить клику в G, причем с известной оценкой снизу для размерности найденной клики. Используя теоремы 1, 2 и данную процедуру, можно построить алгоритм поиска максимальной клики с оценками. Данный алгоритм тестировался на задачах из библиотеки DIMACS. Произведено сравнение с другими алгоритмами поиска максимальной клики.

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00110.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецова А.А., Карпачева О.Н. Два метода локального поиска с параметрами для задачи о максимальной клике // Труды XIII Байкальской международной школы-семинара. 2005. Т.1 С. 527-532.

Кузнецова Антонина Александровна,
ИДСТУ СО РАН, ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия, тел. (395-2) 51-13-98, факс (395-2) 51-16-16, E-mail:kuznet@icc.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕАЛИЗАЦИЙ АЛГОРИТМА СЕРДЮКОВА ДЛЯ ЗАДАЧИ MAX TSP

А. В. Панюков, С. А. Тычинин

Для симметрической задачи коммивояжера одним из лучших алгоритмов является алгоритм Сердюкова с оценкой точности 3/4 [1]. Данный алгоритм состоит из следующих шагов: 1) построение 2-фактора C и совершенного паросочетания M максимальных весов; 2) перемещение из каждого цикла $c \in C$ в множество M ребра, оставляющего M частичным туром; 3) дополнение C и M до гамильтоновых циклов T_1 и T_2 соответственно; 4) выбор из построенных гамильтоновых циклов T_1 и T_2 в качестве решения цикла, имеющего максимальный вес.

Из описания алгоритма следует возможность различных реализаций этого алгоритма, отлиличающихся способами дополнения текущих частичных туров до гамильтоновых циклов. В частности возможны стратегии "первый подходящий", жадный алгоритм и алгоритм дополнения подграфами [2].

Результатом проведенных исследований является следующая модификация алгоритма Сердюкова:

1) вычисляется не два, а пять гамильтоновых циклов;

2) один гамильтонов цикл вычисляется с помощью алгоритма дополнения подграфами [2];

3) два цикла получают перемещением ребер из C в M и последующим дополнением полученных частичных туров до гамильтоновых циклов T_1 и T_2 с помощью жадного алгоритма;

4) два дополнительных цикла получают перемещением ребер из C в M и последующим дополнением полученных частичных туров до гамильтоновых циклов T_1 и T_2 с помощью алгоритма дополнения подграфами [2].

Вычислительный эксперимент показал, что получаемые данным алгоритмом решения являются наиболее точными среди известных приближенных алгоритмов. Кроме того следует отметить, что наибольшую частоту нахождения наилучшего решения имеет алгоритм дополнения подграфами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э.Х. Гимади, А.И. Сердюков. О некоторых результатах для задачи коммивояжера на максимум. // Дискретный анализ и исследование операций. 2002. Серия 2. Том 8. N. 1. С. 22-29.

2. С.А. Тычинин Алгоритм дополнения подграфами для решения задачи MAX TSP. // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования. N. 11 Научное издание. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. С.217-218.

Панюков Анатолий Васильевич, Тычинин Сергей Александрович
Южно-Уральский государственный университет, пр. Ленина, 76, Челябинск 454080, Россия. тел. (351) 2679039, факс (351) 7982644, E-mail: pav@susu.ac.ru

ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННАЯ ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

А. В. Пяткин, В. Т. Дементьев

В классической транспортной задаче владелец склада должен распределить товары между своими магазинами так, чтобы прибыль была максимальной. В децентрализованной или двухуровневой транспортной задаче владелец склада (верхний уровень) не является владельцем магазинов. Он может лишь определять очередность обслуживания клиентов нижнего уровня (владельцев магазинов), которые будут выбирать себе подходящие товары, максимизируя собственную прибыль. Задача владельца склада заключается в том, чтобы найти такую последовательность обслуживания клиентов, при которых его собственная прибыль будет максимальной.

Формально, рассматривается задача максимизации функции

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}^*$$

по всем перестановкам строк матрицы $C = (c_{ij})$, где матрица оптимальных решений задач нижнего уровня (x_{ij}^*) строится путем последовательного $(i = 1, 2, \ldots, n)$ решения задач

$$\max_{x_{ij}} \{ \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \mid \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i, 0 \leq x_{ij} \leq b_j - \sum_{k=1}^{i-1} x_{ij}^*, j = 1, 2, \ldots, m \}.$$

Доказана NP-трудность этой задачи даже в случае, когда все $b_j = 1$ и $a_i = 2$ (если все $a_i = b_j = 1$, то задача эквивалентна задаче о назначениях). Приводится приближенный полиномиальный алгоритм, строящий решение, меньшее оптимального не более чем вдвое.

Работа поддержана грантами РФФИ 05-01-00395 и INTAS 04–77–7173.

Пяткин Артем Валерьевич, Дементьев Владимир Тихонович,
ИМ СО РАН, пр-т Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383) 333-25-94, факс (8-383) 333-25-98, E-mail:artem@math.nsc.ru

ОБ ОЦЕНКЕ ГЛОБАЛЬНОГО МАКСИМУМА РАЗНОСТИ СТРОГО ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ НА СУПЕРМАТРОИДАХ И ИХ ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ

А. Б. Рамазанов

В работе получены верхняя и нижняя границы в глобальном максимуме разности двух строго выпуклых функций дискретного аргумента на суперматроидах и их пересечениях.

Рассматривается следующая задача А дискретной оптимизации: найти

$$\max\{F(x) = f(x) - \varphi(x) | x = (x_1, ..., x_n) \in S = S_1 \cap S_2\},$$

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно ρ и σ – координатно-выпуклые функции на Z_+^n [1], $S_1, S_2 \subseteq Z_+^n$ – суперматроиды [2], Z_+^n – множество n-мерных неотрицательных целочисленных векторов.

Пусть x_F^* – оптимальное решение задачи A, x_f^g и x_φ^g соответственно градиентные максимумы (т.е. построенные с помощью градиентного алгоритма покоординатного подъема [1-3]) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$на S.

Очевидно, что в общем случае функция $F(x)$не обладает свойством координатно-выпуклости [2]. Поэтому для оценки $F(x_F^*)$ нельзя применить методику, разработанную в [1, 2]. Тем не менее $F(x_F^*)$ можно оценить сверху и снизу с помощью x_f^g, x_φ^g.

Теорема. Пусть $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$ неубывающие функции на S, $f(0) = \varphi(0) = 0$. Тогда

$$\max\{0,\ f(x_f^g) - \varphi(x_f^g)\} \leqslant F(x_F^*) \leqslant 3f(x_f^g) - \varphi(x_\varphi^g).$$

Следствие. Если $S = S_1 \cap S_2$ является суперматроидом, то справедливо

$$\max\{0,\ f(x_f^g) - \varphi(x_f^g)\} \leqslant F(x_F^*) \leqslant 2f(x_f^g) - \varphi(x_\varphi^g).$$

Замечание 1. Класс задач типа A достаточно широк. Так например, задача нелинейного дробного программирования, задача надежности сетей могут быть сформулированы в виде задачи A.

Замечание 2. Полученные оценки могут служить минорантой или мажорантой в методах построения последовательности планов [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Б. Рамазанов // Дискрет. анализ и исслед. операций 2005. Сер. 1. Т. 12, №4. С. 60–80.

2. М.М. Ковалев (1987) Матроиды в дискретной оптимизации // Бел. Гос. Ун-т.

3. Н.И. Глебов // Управляемые системы. Новосибирск: Наука, 1973. Вып. 11. С. 10–15.

4. В.А. Емеличев, В.И. Комлик (1981) Метод построения последовательности планов. М. Наука.

Рамазанов Али Багдаш оглы,

Бакинский государственный университет, ул. З. Халилова, 23, г. Баку, AZ-1148, Азербайджан. E-mail: *rab-unibak@rambler.ru*

ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ ЦИКЛИЧЕСКОГО РАСПИСАНИЯ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А. А. Романова, В. В. Сервах

Рассматривается задача обработки партии однотипных деталей на производственной линии, состоящей из m различных машин. Все детали проходят одинаковый технологический маршрут обработки, включающий n операций. Операция j выполняется непрерывно в течение $p_j \in Z^+$ единиц времени на машине m_j, $j = 1, \ldots, n$. Машины в технологическом порядке могут повторяться. Одновременное выполнение двух и более операций на одной машине не допускается.

В случае большого числа однотипных деталей удобно использовать циклические расписания, в которых выполнение одних и тех же операций любых двух последовательных деталей начинается через равные промежутки времени. Это время называется временем цикла. Естественным критерием построения циклического расписания является критерий минимизации времени цикла, обеспечивающий максимальную производительность линии. Эта задача относится к числу полиномиально разрешимых.

Однако на производстве часто возникают ситуации, когда после завершения какой-то операции необходимо сразу начать выполнение следующей операции технологического маршрута, то есть запрещаются простои между некоторыми парами последовательных операций.

В работе исследуется задача составления циклического расписания с минимальным временем цикла при наличии указанных запретов. Доказана сильная NP-трудность этой задачи. К ней полиномиально сведена задача "3-разбиение" [1]. Выделены полиномиально разрешимые случаи, описаны соответствующие алгоритмы. При дополнительном ограничении, когда количество одновременно обрабатываемых деталей на линии ограничено константой, построена вполне полиномиальная аппроксимационная схема решения задачи, что обобщает результат из [2].

Работа выполнена при поддержке INTAS, проект № 03-51-5501.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. - Москва, "Мир", 1982.
2. Romanova A.A., Servakh V.V. On some cyclic machine scheduling problem // Abstracts of the XVII European Conference of Combinatorial Optimization (ECCO'2005), Minsk, 2005. - P. 58-59.

Романова Анна Анатольевна,
Омский государственный университет, пр. Мира, 55А, Омск, 644077, Россия, тел. (8-3812) 22-56-96, E-mail: romanova_ann@bk.ru

Сервах Владимир Вицентьевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (8-3812) 30-19-97, факс (8-3812) 23-45-84, E-mail: svv_usa@rambler.ru

О СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ СО СКЛАДИРУЕМЫМИ РЕСУРСАМИ

В. В. Сервах, Т. А. Щербинина

При долгосрочном планировании инвестиционных проектов большинство ресурсов может быть заменено одним ресурсом – финансовым, который является складируемым. Задача минимизации срока завершения всего проекта со складируемыми ресурсами является полиномиально разрешимой [1]. В данной работе исследуется сложность задачи с другими критериями.

Пусть задано $V = \{1, \ldots, n\}$ – множество взаимосвязанных работ проекта. Взаимосвязь определяется отношениями вида $i \to j$, где работа j не может начать свое выполнение до завершения работы i. Данная структура может быть представлена при помощи ориентированного ациклического графа $G = (V, E)$, где V – множество всех работ, а $E = \{(i, j)|i, j \in V, i \to j\}$ – множество дуг. При выполнении работ используется только финансовый ресурс. На период планирования проекта, в каждый момент времени t имеется ресурс в объеме $K(t)$. Каждая работа $j \in V$ характеризуется длительностью $p_j \in Z^+$ и потребностью $k_j(\tau)$ в ресурсе в момент времени τ, $\tau = 1, \ldots, p_j$. Все работы выполняются непрерывно.

Обозначим через s_j время начала выполнения работы $j \in V$. Необходимо построить расписание выполнения работ проекта $S = \{s_j\}$, для которого соблюдаются технологический порядок выполнения работ E и ограничения на ресурсы. В качестве критерия рассматриваются: минимизация среднего времени завершения работ проекта $C_{\sum}$ и максимизация чистой приведенной прибыли NPV.

В работе [2] была доказана NP–трудность для задачи с $E = \emptyset$ и с критериями $C_{\sum}$ и NPV. В настоящей работе доказана сильная NP–трудность задачи с критериями $C_{\sum}$ и NPV. К этим задачам полиномиально сведена задача о максимальном полном подграфе.

Работа поддержана грантом РФФИ 03-51-5501.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э.Х., Залюбовский В.В., Севастьянов С.В. Полиномиальная разрешимость задач календарного планирования со складируемыми ресурсами и директивными сроками // Дискретный анализ и исследование операций. Новосибирск. Серия 2. 2000. Т. 7, N. 1. С. 34–49.

2. Сервах В.В., Щербинина Т.А. О задаче календарного планирования проекта с различными критериями и складируемыми ресурсами // III Всероссийская конференция "Проблемы оптимизации и экономические приложения". Омск. 2006. С. 125.

Сервах Владимир Вицентьевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 30-19-97, факс (3812) 23-45-84,
E-mail: svv_usa@rambler.ru

Щербинина Татьяна Александровна, Омский государственный университет
им. Ф.М. Достоевского, пр. Мира 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 57-89-49,
E-mail: shcherbininaT@hotmail.com

О СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ НИЖНИХ ОЦЕНОК ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ НА СЕТИ

Д. В. Филимонов

В работе рассматривается дискретная минимаксная задача размещения. Дана связная неориентированная сеть N. В каждой вершине сети $v_1, ..., v_m$ расположен фиксированный объект. Требуется разместить в вершинах сети n объектов, обслуживающих фиксированные. В одной вершине можно размещать произвольное количество обслуживающих объектов. Пусть $I = \{1, ..., m\}$, $J = \{1, ..., n\}$. Обозначим через $d(v_i, v_s)$ длину кратчайшего пути между вершинами v_i и v_s в сети N, $i, s \in I$.

Пусть $w_{ij} > 0$ – удельная стоимость связей между фиксированным объектом i и размещаемым j, $i \in I$, $j \in J$. Структура связей между обслуживающими объектами определяется с помощью неориентированной сети $U = (J, A)$. Длина дуги $(j, k) \in A$ равна $u_{jk} > 0$ – удельной стоимости связи размещаемых объектов j и k между собой.

Размещением объектов назовем однозначное отображение $\pi : J \to I$. Необходимо найти размещение π, минимизирующее максимальную стоимость связи между объектами:

$$\max(\max_{(j,k)\in A} u_{jk} d(v_{\pi(j)}, v_{\pi(k)}), \max_{i\in I,\ j\in J} w_{ij} d(v_i, v_{\pi(j)})) \to \min_{\pi}. \qquad (1)$$

Если сети N и U – произвольные, то задача (1) является NP-трудной [1]. В случае древовидной сети U задача (1) полиномиально разрешима [1].

В данной работе предложен алгоритм ветвей и границ для решения дискретной минимаксной задачи размещения в случае произвольных сетей N и U. Вычисление нижних оценок основывается на решении вспомогательной задачи с древовидной структурой связей между размещаемыми объектами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филимонов Д.В. Решение дискретной минимаксной задачи размещения с древовидной структурой связей на сети. // Труды XIII Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения", Иркутск, 2005. Т. 1. С. 595–600.

Филимонов Дмитрий Валерьевич,
Омский государственный университет, пр. Мира, 55а, г. Омск, 644077, Россия, тел. (8-381-2) 22-56-96. E-mail: fdvmail@mail.ru

ОБ f-ВЕКТОРАХ ПИРАМИДАЛЬНЫХ ТРИАНГУЛЯЦИЙ ТОЧЕЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

В. Н. Шевченко, Д. В. Груздев

Конечное множество точек $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathrm{R}^d$ называется *d-мерной точечной конфигурацией*, если его выпуклая оболочка $[A]$ есть d-мерный выпуклый многогранник (называемый также *политопом*). Для d-мерного политопа M через $\Gamma_i(M)$ обозначим множество его i-мерных граней, $i = -1, \ldots, d$. При этом $\Gamma_{-1}(M) = \{\emptyset\}$ и $\Gamma_d(M) = \{M\}$. Для грани F политопа M через $\mathrm{relint}(F)$ обозначим множество внутренних точек грани F в ее аффинной оболочке.

Множество d-мерных симплексов $T = \{S_1, \ldots, S_t\}$ назовем *триангуляцией* d-мерной точечной конфигурации A, если $[A] = \cup_{k=1}^{t} S_k$, $\Gamma_0(S_i) \subseteq A$ при $i = 1, \ldots, t$ и $S_i \cap S_j = [\Gamma_0(S_i) \cap \Gamma_0(S_j)]$ при $i, j = 1, \ldots, t$. Положим $\Gamma_i(T) = \cup_{j=1}^{t} \Gamma_i(S_j)$, $f_i^T = |\Gamma_i(T)|$, $i = -1, \ldots, d$, и заметим, что $\Gamma_{-1}(T) = \{\emptyset\}$ и $f_{-1}^T = 1$. Вектор $f^T = (f_0^T, \ldots, f_d^T)$ и полином $f^T(\lambda) = \sum_{i=-1}^{d} f_i^T \lambda^{i+1}$ назовем *f-вектором* и *f-полиномом* триангуляции T соответственно. Множество всех триангуляций d-мерных точечных конфигураций обозначим через $\mathcal{T}_d$. Известно, что для $T \in \mathcal{T}_d$ существуют, единственны и являются неотрицательными целые числа $\gamma_0^T, \ldots, \gamma_{d+1}^T$ такие, что $f^T(\lambda) = \sum_{i=0}^{d+1} \gamma_i^T \lambda^i (1+\lambda)^{d+1-i}$, причем $\gamma_0^T = 1$ и $\gamma_{d+1}^T = 0$.

Триангуляцию $T = \{S_1, \ldots, S_t\}$ d-мерной точечной конфигурации A назовем *пирамидальной*, если существует $a \in \Gamma_0(S_i)$ при $i = 1, \ldots, d$; если $a \in \mathrm{relint}(F)$ — такая грань F политопа $[A]$ существует и единственна — и $F \in \Gamma_k([A])$, то триангуляцию T назовем *k-пирамидальной*. Заметим, что пирамидальными являются триангуляции, составляющие один из видов регулярных триангуляций (pulling triangulations), рассматриваемых в [1].

Теорема 1. Если триангуляция $T \in \mathcal{T}_d$ является k-пирамидальной, то $\gamma_d^T = 0$ при $k \in \{0, \ldots, d-1\}$, $\gamma_d^T = 1$ при $k = d$, и $\sum_{i=0}^{d} \gamma_i^T \le \left(\sum_{i=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} (\gamma_i^T - \gamma_{d+1-i}^T)(d+1-2i)\right) - (k+1)(d-k)$.

Существует предположение, что условия теоремы 1 достаточны.

Рассмотрим в R^d при $d \ge 3$ точки $a^d = (0, 0, \ldots, 0, 0)$, $b^d = (1, 1, \ldots, 1, 1)$, $e_1^d = (1, 0, \ldots, 0, 0)$, $e_2^d = (0, 1, \ldots, 0, 0)$, …, $e_d^d = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, $v^d = (2(d-1), -1, \ldots, -1, 1)$ и пусть $A(d) = \{a^d, b^d, e_1^d, e_2^d, \ldots, e_d^d, v^d\} \subset \mathrm{R}^d$. Положим $E_i = \{e_1, \ldots, e_d\} \backslash \{e_i\}$, $i = 1, \ldots, d$. Рассмотрим $T(d) = \{[a^d, b^d, E_i] \ : i = 1, \ldots, d\} \bigcup \{[b^d, E_i, v^d] \ : i = 2, \ldots, d\} \bigcup \{[a^d, E_i, v^d] \ : i = 2, \ldots, d-1\}$.

Теорема 2. При $d \ge 3$ выполняются следующие утверждения:

1. $T(d)$ является триангуляцией d-мерной точечной конфигурации $A(d)$, причем $[A(d)]$ есть симплициальный политоп с множеством вершин $A(d)$.
2. $(\gamma_0^{T(d)}, \gamma_1^{T(d)}, \gamma_2^{T(d)}, \ldots, \gamma_{d-1}^{T(d)}, \gamma_d^{T(d)}, \gamma_{d+1}^{T(d)}) = (1, 2, 3, \ldots, 3, 0, 0)$ и вектор $f^{T(d)}$ не реализуется как f-вектор пирамидальной триангуляции точечной конфигурации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 05-01-00552-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lee C.W. Regular triangulations of convex polytopes // DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. 1991. V.4. P.443-456.

Шевченко Валерий Николаевич, Груздев Дмитрий Валентинович, Нижегородский государственный университет, пр. Гагарина, 23, Н.Новгород, 603950, Россия, тел. (8312) 65-78-81, E-mail: gruzdevdv@mail.ru, Nikolai.Zolotykh@gmail.com

ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

В. В. Шенмайер

Рассматриваемая задача заключается в отыскании иерархической последовательности назначений, имеющих минимальную стоимость. А именно, пусть заданы: множество клиентов (потребителей) C, множество предприятий F, расстояние $d(u, f) \geq 0$, определенное для каждого клиента u и предприятия f, а также вес $w(u) \geq 0$, определенный для каждого клиента u. *Назначением* будем называть произвольную функцию из C в F. Последовательность назначений $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называется *иерархической*, если назначение α_1 назначает всех клиентов на некоторое предприятие f_1, и для каждого $k < n$ назначение α_{k+1} получается из предыдущего переназначением части клиентов, назначенных на одно из предприятий, на новое предприятие $f_{k+1} \notin \{f_1, \ldots, f_k\}$. Стоимость произвольного назначения α равна взвешенной сумме расстояний $\sum_{u \in C} w(u)\, d(u, \alpha(u))$. Требуется построить иерархическую последовательность назначений $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, где n — мощность множества F, такую, что стоимость каждого назначения α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, равна стоимости k-медианы.

Поскольку в большинстве случаев искомой последовательности оптимальных назначений, по-видимому, не существует, имеет смысл говорить о приближенных решениях задачи. Говорим, что решение $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ иерархической задачи о назначениях имеет точность (competitive ratio) δ, если стоимость каждого из назначений α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, отличается от стоимости k-медианы не более чем в δ раз.

Наилучший известный алгоритм для общей метрической задачи имеет оценку точности 20.71 [1].

Рассмотрим два частных случая: одномерный случай (клиенты и предприятия расположены в точках вещественной прямой) и случай пространства l_p, $1 \leq p \leq \infty$. Предлагается алгоритм, решающий иерархическую задачу о назначениях в случае прямой с точностью 8, а в случае пространства l_p — с точностью $4\,(2^{2/p} + 2^{1/p})$. В частности, в евклидовом случае алгоритм имеет точность 13.66.

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00395.

ЛИТЕРАТУРА

1. G.Lin, C.Nagarajan, R.Rajaraman, D.P.Williamson: A general approach for incremental approximation and hierarchical clustering //Proc. of the seventeenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithm (2006), p.1147-1156.

Шенмайер Владимир Владимирович,
Институт математики им С.Л. Соболева СО РАН, проспект Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 333-21-89, факс (383) 333-25-98. E-mail: shenmaier@mail.ru

ЛОКАЛЬНЫЕ ЭЛИМИНАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ РАЗРЕЖЕННЫХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

О. А. Щербина

В последнее время возрос интерес к графовым декомпозиционным подходам в ДО. К графовым декомпозиционным подходам относится класс локальных элиминационных алгоритмов (ЛЭА) вычисления информации [1]. Алгоритмическая схема ЛАЭ представляет собой бесконтурный орграф, вершины которого соответствуют локальным подзадачам, а ребра – выражают информационную зависимость подзадач друг от друга. Процедура ЛЭА разбивается на прямую часть – элиминация элементов, вычисление и запоминание локальных решений подзадач, соответствующих окрестностям элементов, и получение в конце значения критерия и обратную часть – нахождение глобального решения всей задачи по имеющимся таблицам с локальными решениями, обеспечивающего достижение критерия в прямой части. Структура задачи ДО задается так называемым структурным графом, который может быть как графом взаимосвязей исходных элементов (переменных) задачи, так и конденсированным графом. ЛЭА анализирует окрестность текущего элемента в структурном графе задачи, применяет оператор элиминации, зависящий от конкретной задачи, к этому элементу, вычисляя локальную информацию об элементе, а также локальное решение. Элиминация элементов и создание клик изменяет структурный граф и окрестности элементов.

Работа поддержана австрийским грантом FWF P17948-N13.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.И. Журавлев. Избранные научные труды. Москва: Магистр, 1998.

Щербина Олег Александрович, Institut für Mathematik, University of Vienna, Nordbergstr. 15, Vienna, 1180, Austria,
phone: (+431) 4277-50660, fax: (+431) 4277-50670.
E-mail: oleg.shcherbina@univie.ac.at

INTEGER POINTS IN A PARAMETERISED POLYHEDRON

G. Shmonin, F. Eisenbrand

The classical parameterised integer feasibility problem is as follows. Given a rational matrix $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ and a rational polyhedron $Q \subseteq \mathbb{R}^m$, decide whether there exists a vector $b \in Q$ such that the system $Ax \leqslant b$ is infeasible in integer variables. Our main result is a polynomial algorithm to solve a slightly more general parameterised integer feasibility problem if the number n of columns of A is fixed. This extends a result of Kannan [2], who provided such an algorithm for the case, in which—additionally to n—also the affine dimension of the polyhedron Q must be fixed. More precisely, we prove the following theorem:

Theorem 1. *There exists an algorithm that, given rational matrices $A \in \mathbb{Q}^{m+n}$ and $B \in \mathbb{Q}^{k+n}$, rational affine transformations $\Phi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ and $\Psi : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$ and a rational polyhedron $Q \subseteq \mathbb{R}^l$, finds $b \in Q$ such that the system $Ax \leqslant \Phi(b)$ has an integer solution, while the system $Bx \leqslant \Psi(b)$ has no integer solution, or asserts that no such b exists. The algorithm runs in polynomial time if n is fixed.*

As an application of our result, we describe an algorithm to find the maximum difference between the optimum values of an integer program

$$\max\left\{cx : Ax \leqslant b,\, x \in \mathbb{Z}^n\right\}$$

and its linear programming relaxation, as the right-hand side b varies over all vectors, for which the integer program is feasible. The latter is an extension of a recent result of Hoşten and Sturmfels [1], who gave such an algorithm for integer programs in standard form.

REFERENCES

1. S. Hoşten and B. Sturmfels. Computing the integer programming gap. To appear in *Combinatorica*.
2. R. Kannan. Lattice translates of a polytope and the Frobenius problem. *Combinatorica*, 12(2):161–177, June 1992.

Shmonin Gennady, Universität Paderborn, Warburger Str. 100, 33098 Paderborn, Germany, Phone: +49-5251-60-2651. E-Mail: shmonin@math.uni-paderborn.de

ИЕРАРХИЧЕСКАЯ ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ МНОГОБЛОЧНЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

А. С. Величко

Рассматривается линейная оптимизационная задача вида $\min \sum f_i(x)$, где $f_i(x) = \min\{(c_i, z_i) \mid A_i z_i \le d_i - B_i x\}, i = 1, \ldots, k$. Ограничения задачи имеют k-блочную структуру со связывающими переменными.

Развитый ранее алгоритм [1] применялся для параллельной двублочной декомпозиции задач большой размерности. Перспективное новое направление развития алгоритма состоит в разработке вложенных иерархических схем декомпозиции, что позволит осуществить разбиение задачи на относительно более простые подзадачи и добиться более высокой степени распараллеливания алгоритма.

Одним из возможных подходов является последовательное разбиение исходной задачи на две максимально сбалансированные по количеству ограничений задачи. На верхнем уровне иерархии необходимо решать задачу $\min\{g_1(x) + g_2(x)\}$, где $g_1(x) = \sum\limits_{i=1}^{v} f_i(x), g_2(x) = \sum\limits_{i=v+1}^{k} f_i(x), v = [k/2]$. Преимущество такого подхода состоит в том, что при решении наиболее сложной задачи верхнего уровня иерархии используется только половина ограничений. Схема параллельных расчетов представляется топологией “двоичное дерево” и реализуется средствами интерфейса передачи сообщений MPI/LAM.

Применение параллельного алгоритма двублочной декомпозиции на каждом уровне иерархии требует вычисления субградиента суммы функций $f_i(x)$, и субградиента сопряженной функции от суммы функций $f_i(x)$. Для кусочно-линейных функций $f_i(x)$ обе эти задачи сводятся к задачам линейного программирования.

Работа частично поддержана программой Президиума РАН №17 и грантом РФФИ-ДВО 06-III-A-01-459.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. Величко, Е.А. Нурминский. Опыт декомпозиции метода конечных элементов с использованием теории структурированных оптимизационных задач // Электронный журнал “Исследовано в России”. 2002. Т. 4. С. 1237-1256. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/113.pdf.

Величко Андрей Сергеевич,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Радио, 5, Владивосток, 690041, Россия, тел. (8-4232) 31-04-04, факс (8-4232) 31-04-52, e-mail: vandre@dvo.ru

МЕТОД ВЛОЖЕННЫХ РАЗБИЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОЕКЦИЙ

Д. В. Долгий

Предметом настоящей работы является разработка специальной конечной процедуры проекции на простейший вид выпуклого многогранника — симплекс и построение параллельного алгоритма решения данной задачи.

Рассматривается следующая фундаментальная задача нахождения расстояния от начала координат до множества $Y = co(X)$, где $X \subset E^n$ есть объединение семейства множеств $\{X_k, k = 1, 2, ..., N\}$:

$$\min_{z \in Y} ||z||^2. \tag{1}$$

Для решения задачи (1) в случае, когда $N \leq n+1$, разработан метод подходящих аффинных подпространств (МАП) [1]. Конечная сходимость данного метода доказана в работе [1], а его глобальная «лучше, чем геометрическая» скорость сходимости — в [2].

При условии ($N > n + 1$) для решения задачи проекции (1) предлагается метод вложенных разбиений, основанный отчасти на идее параллельного метода проекции [3], но использующий, во-первых, дихотомию множества X, а во-вторых, тот факт, что разбиение множества X может изменяться от итерации к итерации. Первое дает возможность применить метод аффинных подпространств, а второе — существенно ускорить сходимость до гарантии конечности, в отличие от [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Нурминский Е.А. Ускорение итеративных методов проекции на многограннике // Исследовано в России. 2005. С. 51–62.

2. Нурминский Е.А. Метод подходящих аффинных подпространств // Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 45, вып. 11, 2005. С. 1996–2004.

3. Нурминский Е.А. Параллельный метод проекции на выпуклую оболочку семейства множеств // Известия ВУЗов. Математика. 2003. Т. 12, № 499. С. 78–82.

Долгий Дмитрий Викторович,
Институт автоматики и процессов управления, ул. Радио, д. 5, г. Владивосток, 690041, Россия, тел.(4232) 31-04-04, e-mail: d_dol@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ СЕТОЧНЫХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В. М. Дорожко

Численное моделирование CFD-методами геометрически сложных областей содержит ряд трудоемких процедур, одной из которых является создание структурированной сеточной модели. Существенное снижение трудоемкости моделирования может быть достигнуто при применении неструктурированных сеточных моделей на основе полиэдральных элементов.

В качестве объекта для моделирования выбрана задача идентификации начального этапа циркуляции морского судна. Экспериментально установлено, что угловое ускорение судна имеет максимум непосредственно перед завершением перекладки руля. Для выяснения причин формирования указанного максимума было проведено моделирование на полномасштабной 3D-модели движетельно-рулевого комплекса судна [1] в квазистационарной постановке.

Моделирование выполнено на кластере FASTRUN в распараллеливаемом универсальном пакете FLUENT 6.3 [2]. Сеточная модель создавалась в два этапа. Первоначально с помощью сеточного генератора GAMBIT генерировалась неструктурированная тетраэдральная сетка, а затем непосредственно в пакете FLUENT она преобразовывалась в полиэдральную. За счет этого число элементов сетки уменьшилось в 2,5 раза, а размер полученного сеточного файла сократился в 1,6 раза. В ходе преобразования используемый размер физической памяти (включая page) превысил размер исходного сеточного файла в 20 раз, однако применение параллельного режима преобразования позволило не предьявлять повышенные требования к вычислительному ресурсу. В сравнении с тетраэдральной моделью число итераций и время вычисления (до установления решения) сократилось в 2 и 4 раза, соответственно. Благодаря близкой к сферической симметрии полиэдральных элементов изменение в ходе моделирования направления вектора скорости потока не привело к ухудшению точности вычислений.

Применение полиэдральных элементов позволило не только упростить проектирование сеточной модели, но также снизить за счет ускорения вычислений требования к вычислительному ресурсу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mathematical model of LO-RO ship (Disp. 19512t). Transas. St.Petersburg, 2001. 34p.

2. Fluent.Inc. FLUENT 6.3 User's guide. Lebanon. 2006. 2501p.

Дорожко Вениамин Мефодьевич,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, ул. Радио, 5, г. Владивосток, 690041, Россия, (4232)313-549. E-mail: bendor@iacp.dvo.ru

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СРЕДА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ПО КРИТЕРИЮ НАДЕЖНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ МАССИВНО-ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ТИПА

Я. В. Катуева

Задача оптимального выбора номиналов параметров с учетом отклонений их значений от расчетных [1] относится к классу задач, требующих высоких вычислительных мощностей. Для создания высокопроизводительных вычислений необходимы параллельные алгоритмы и средства, поддерживающие всю цепочку действий, требуемых для решения задачи. К ним относятся методы решения задачи параметрического синтеза, средства декомпозиции последовательных алгоритмов, библиотеки распределенного ввода-вывода, алгоритмы и библиотеки балансировки загрузки процессоров, специальные библиотеки параллельных датчиков случайных чисел, средства визуализации результатов экспериментов и многое другое.

В работе обсуждаются методы декомпозиции задачи параметрического синтеза на различных уровнях последовательного вычислительного алгоритма: от параллельных методов статистического оценивания до параллельных алгоритмов поисковой оптимизации [2] с учетом наилучшей загрузки всех вычислительных компонентов комплекса. Предлагаются методы балансировки вычислительной нагрузки для несимметричных вычислительных кластеров. Обсуждается проблема согласования компонентов вычислительного комплекса и их объединения в рамках единой системы, позволяющей специалисту прикладной области воспользоваться ими для выполнения вычислительного эксперимента в случае известных законов распределения технологических отклонений параметров и их временного дрейфа.

Работа поддержана грантами ДВО РАН №06-III-А-03-070 и РФФИ 05-08-01398.

ЛИТЕРАТУРА

1. О.В. Абрамов. Параметрический синтез стохастических систем с учетом требований надежности. М.: Наука. 1992.

2. О.В. Абрамов, Я.В. Катуева. Технология параллельных вычислений в задачах анализа и оптимизации // Проблемы управления. – 2003. №4. С. 11-15.

Катуева Ярослава Владимировна, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, ул. Радио, 5, Владивосток, 690041, Россия, тел. (8-4232) 31-02-02, факс (8-4232) 31-04-52, E-mail:gloria@iacp.dvo.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА С ЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ ПОДВОДА ЭНЕРГИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. А. Левин, Е. В.Трифонов, В. А. Анненков

Исследование эффектов воздействия локального подвода энергии на волновую структуру сверхзвукового потока и обтекание тел интенсивно развивается в последнее время. Создавая области энерговыделения в окрестности летательных аппаратов, можно управлять их аэродинамическими характеристиками, в частности, добиваться снижения сопротивления [1]. В работе [2] исследовалось взаимодействие сверхзвукового потока с локальным источником энерговыделения. В данной работе изучается взаимодействие сверхзвукового потока с нагретым телом эллиптической формы. Подвод энергии в локализованной области пространства перед телом приводит к существенным изменениям формы головной ударной волны.

Задачи численного моделирования в области аэродинамики больших скоростей предъявляют высокие требования к вычислительным ресурсам [3]. Это связано, прежде всего, с большим числом узлов разностных сеток, применяемых в реальных расчетах, особенно для нестационарных течений в случае трех пространственных переменных. С другой стороны, современные численные схемы, корректно решающие задачи с большими градиентами величин (например, TVD—схемы Хартена), содержат громоздкие аналитические выражения для вычисления потоков через границы ячеек [4].

Вычислительные эксперименты проводились на многопроцессорных вычислительных комплексах ИАПУ ДВО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.М.Фомин, В.И.Яковлев. Физические модели лазерного энергоподвода в газовый поток. — Новосибирск, 2004. — 43 с. — (Препр / Институт теоретической и прикладной механики СО РАН; N 2004)

2. В.А. Анненков, В.А. Левин, Е.В. Трифонов. Разрушение ударных волн при их взаимодействии с локальным источником энерговыделения. // Прикладная механика и техническая физика, 2006, № 2, с. 3–7.

3. А.Е. Луцкий., А.С. Черногузов. Численное исследование вязких течений на многопроцессорных вычислительных системах. // Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2005, N 35.

4. H.C. Yee, R.F. Warming & A.Harten Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steady - State Calculations. //Journal of Computational Physics, v.57 N3 (1985) pp. 327–360.

Левин Владимир Алексеевич, Трифонов Евгений Викторович,
Анненков Вадим Алексеевич,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, ул. Радио, 5, Владивосток, 690041, Россия, тел. (8-423-2) 32-07-02. E-mail: trif@dvo.ru, ann@dvo.ru

РАСПРЕДЕЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОБЛАСТИ РАБОТОСПОСОБНОСТИ В ЗАДАЧЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО СИНТЕЗА

Д. А. Назаров

Обсуждается построение области работоспособности [1,2] на основе матричного представления [2] с использованием распределенных вычислений [3].

Построение области работоспособности в задаче параметрического синтеза сопряжено с большими вычислительными затратами [1]. Большую вычислительную трудоемкость представляет расчет модели сложного устройства [1]. Методика построения области работоспособности [2] позволяет проводить это построение по частям в независимых друг от друга процессах.

Система для множественных моделирований технического устройства и построения области работоспособности должна являться гетерогенной распределенной системой [3], ориентированной на компьютеры различной конфигурации, объединенные в сеть.

Решение задачи построения области работоспособности ложится на центральный узел распределенной системы, который должен разбить матричное представление описанного бруса на фрагменты, передать эти фрагменты узлам системы и, получив результаты, построить общее матричное представление области работоспособности.

Работа поддержана грантами ДВО РАН №06-III-А-03-070 и РФФИ 05-08-01398

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов О. В. Параметрический синтез стохастических систем по критерию надежности// М.: Наука, 1992.

2. Катуева Я.В., Назаров Д.А Аппроксимация и построение областей работоспособности в задаче параметрического синтеза// Международный симпозиум "Надежность и качество", Пенза: ПГУ, 2005, С. 130–134.

3. Афанасьев А.П., Волошинов В.В., Посыпкин М.А., Сухорослов О.В., Хуторной Д.А. Грид-технологии и вычисления в распределенной среде// Избранные доклады III Международной конференции "Параллельные вычисления и задачи управления"PACO'2006 памяти И.В. Парангишвили. Москва, 2-4 октября 2006 г. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. М.: Институт управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2006, С 5–16.

Назаров Дмитрий Анатольевич,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, ул. Радио, д. 5, Владивосток, 690041, Россия, тел. (8-4232) 31-02-02, факс (8-4232) 31-04-52.
E-mail:nazardim@iacp.dvo.ru

СИСТЕМА РАСПРЕДЕЛЕННОГО ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В. В. Окольнишников

В настоящее время имитационное моделирование является одним из наиболее распространенных и эффективных средств исследования сложных систем. Для решения этих задач необходимы имитационные модели, требующие для своего выполнения большого количества вычислительных ресурсов, которые могут предоставить многопроцессорные вычислительные системы (МВС). Но для использования МВС для этих целей требуется программное обеспечение имитационного моделирования.

В докладе рассматривается система распределенного имитационного моделирования *Мера* [1], реализованная для МВС 1000/128 (на базе процессоров DEC Alpha 21264), которая эксплуатируется в Сибирском Суперкомпьютерном центре (ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск). Система *Мера* предназначена для решения сложных и большого масштаба задач математического моделирования.

В системе *Мера* реализован консервативный алгоритм синхронизации модельного времени [2]. Система *Мера* является переносимой. Система Мера перенесена на Новосибирский кластерный суперкомпьютер НКС-160 (на базе процессоров Intel Itanium 2). Система *Мера* может быть перенесена на другие МВС, использующие библиотеку MPI [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. В.В. Окольнишников. Разработка системы распределенного имитационного моделирования // Информационные технологии. 2006. №12. С. 28-31.
2. В.В. Окольнишников. Представление времени в имитационном моделировании // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10, №5. С. 57-80.
3. А.С. Антонов. Параллельное программирование с использованием технологии MPI. М.: Изд-во МГУ, 2004.

Окольнишников Виктор Васильевич,
Конструкторско-технологический институт вычислительной техники СО РАН, ул. Институтская, 6, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383) 330-93-61, факс (8-383) 330-93-61. E-mail:okoln@kti.nsc.ru

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ЛОКАЛЬНОГО ПОИСКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕРЕГУЛЯРНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ОРИЕНТИРОВАННЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

М. А. Верхотуров, С. В. Петренко

В работе рассматривается решение следующей задачи: требуется в произвольной невыпуклой многоугольной области S_0 разместить m плоских невыпуклых многоугольников $S_1, S_2, ..., S_m$, таким образом, чтобы длина (расстояние от вершины области с наименьшей абсциссой до вершины объекта, имеющей наибольшую абсциссу) занятой части области S_0 была минимальной. Предлагаемый подход к решению задачи основан на построении годографа [1], композиции линейных неравенств и идеологии активного набора [2], он позволяет итерационно улучшать некоторое начальное приближение, в результате чего достигается локальный экстремум задачи. По сравнению с аналогичными подходами, основанными на идеологии активного набора [3], представленный метод имеет более широкие возможности получения следующего приближения за счет рассмотрения всей области допустимых решений при определении длины шага, а не некоторой ее подобласти.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bennell J.A., Song X. A comprehensive and robust procedure for obtaining the no-fit polygon using Minkowski sums, (June 2005). Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=766146.

2. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. - М.: Мир, 1985.

3. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. - Киев: Наук. Думка, 1986.

Верхотуров Михаил Александрович, Уфимский государственный авиационный технический университет, ул. К. Маркса, 12, г.Уфа, 450000, (347)-2737967, (347)-2722918, e-mail:verhotur@vmk.ugatu.ac.ru

Петренко Семен Васильевич, Уфимский государственный авиационный технический университет, ул. К. Маркса, 12, г. Уфа, 450000, (347)273-79-67, (347)272-29-18, e-mail:semen@inbox.ru

АЛГОРИТМ ЛОКАЛЬНОГО СПУСКА ПО РАСШИРЕННОЙ ОКРЕСТНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ПСЕВДО–БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Е. Н. Гончаров

Рассматривается задача минимизации полинома от булевых переменных с неотрицательными коэффициентами при нелинейных членах полинома, которая заключается в отыскании наименьшего значения функции $p_0(y_1, \ldots, y_m)$ от булевых переменных, представленной в виде

$$p_0(y_1, \ldots, y_m) = a_0 + \sum_{i \in I} a_i(1 - y_i) + \sum_{s=1}^{S} b_s \prod_{i \in \beta_s} y_i,$$

где $I = \{1, \ldots, m\}$, $\beta_s \subset I$, $b_s \geq 0$, $s = 1, \ldots, S$.

Приводятся результаты исследования алгоритма решения этой задачи, являющегося обобщением алгоритма локального спуска. В исследуемом алгоритме на каждом шаге рассматривается локальный минимум и, в отличие от классического алгоритма локального спуска, осуществляется переход к другому локальному минимуму с лучшим значением целевой функции. Соседний локальный минимум выбирается из так называемой расширенной окрестности текущего локального минимума, которая строится специальным образом по любой обычной окрестности. Алгоритм заканчивает работу когда найден локальный минимум, в обобщенной окрестности которого все локальные минимумы не лучше найденного.

Для проведения численных экспериментов, иллюстрирующих качество алгоритма, были использованы трудные примеры задачи размещения (http://www.math.nsc.ru/AP/benchmarks/english.html). Результаты экспериментов показыают конкурентоспособность предложенного алгоритма на данном классе задач.

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00395.

Гончаров Евгений Николаевич
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383) 333-20-86, факс (8-383) 332-25-98. E-mail: gon@math.nsc.ru.

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА С ЗАПРЕТАМИ ДЛЯ ЗАДАЧИ О РАЗБИЕНИИ ГРАФА

И. А. Давыдов

В работе рассматривается следующая NP-трудная задача о разбиении графа. Задано натуральное число p и неориентированный взвешенный граф $G = (V, E)$ с множеством вершин V, множеством ребер E и весами $w_e \geq 0$, $e \in E$. Требуется разбить множество вершин V на непересекающиеся подмножества так, чтобы мощность каждого подмножества не превышала бы p и сумма весов ребер, вершины которых принадлежат разным подмножествам, была бы минимальной.

Для решения сформулированной задачи разработан вероятностный алгоритм поиска с запретами [1]. В качестве окрестности используется множество всех допустимых решений, получаемых из данного переносом одной вершины в другое подмножество или заменой одной вершины на другую для разных подмножеств [2]. Для предотвращения зацикливания в алгоритме используется список запретов. В нем хранится информация о вершинах, участвовавших в локальной перестройке решений на предшествующих итерациях. Согласно этому списку часть решений в окрестности объявляются запрещенными, что позволяет алгоритму не останавливаться в локальном минимуме, а *путешествовать* от одного локального минимума к другому, стремясь найти оптимальное решение задачи. Для сокращения трудоемкости одного шага алгоритма используется рандомизация окрестности. Исследована зависимость эффективности алгоритма от степени рандомизации окрестности и длины списка запретов. Проведено сравнение данного алгоритма с известным полиномиальным алгоритмом [3], имеющим гарантированную оценку точности.

Разработанный алгоритм использовался для решения прикладных задач по поиску равновесий в транспортных сетях. На этапе декомпозиции задачи с помощью данного алгоритма ищется оптимальное разбиение транспортной сети на части малой мощности. Проведенные эксперименты свидетельствуют о высокой эффективности разработанного подхода для поиска подходящего разбиения.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Glover, M. Laguna. Tabu Search. Kluwer Academic Publishers. Boston, 1997.

2. R. Batiti, A. Bertossi. Greedy, Prohibition, and Reactive Heuristics for Graph Partitioning. IEEE Transaction on computers. 1999. Vol. 48, N4.

3. V.V. Vazirani. Approximation Algorithms, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

Давыдов Иван Александрович
Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383-2) 33-20-86, e-mail: davse@yandex.ru

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА МОЩНОСТИ

Д. С. Иваненко

В работе рассматривается задача размещения с ограничениями на мощности производства в смешано-целочисленной постановке [1]. Это известная NP–трудная задача, имеющая широкий спектр приложений. Для её решения предлагается генетический алгоритм [2]. Начальная популяция порождается при помощи решения лагранжевой релаксации задачи [3]. Особенностью алгоритма является оператор скрещивания, который использует для построения потомка решение вспомогательной задачи, известной также как задачи об оптимальном скрещивании [4]. Вспомогательная задача решается точно или приближенно при помощи метода ветвей и границ общего вида, реализованного с помощью программного средства $GLPK$ [5].

В работе исследуется поведение алгоритма в зависимости от начальных данных задачи. Проводится сравнительное тестирование нескольких модификаций предложенного генетического алгоритма и гибридного алгоритма локального поиска с чередующимися окрестностями [6]. В качестве примеров входных данных задачи используются ресурсы библиотеки тестовых примеров "Дискретные задачи размещения"[7].

Работа поддержана грантом РФФИ 06–01–00075.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Sridharan. The capacitated plant location problem. // European J. Oper. Res., 1995. V. 87, p. 203–213.
2. C. Ribeiro, P. Hansen, (eds.): Essays and surveys in metaheuristics, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001.
3. М. Пащенко. Лагранжевы эвристики для задачи размещения с ограничениями на мощности. // Труды XI международной Байкальской школы-семинара Методы оптимизации и их приложения, Иркутск, 1998, С. 175–178.
4. C.C. Aggarwal, J.B. Orlin, R.P. Tai. An optimized crossover for maximum independent set. // Oper. Res. 1997. V. 45. P. 225–234.
5. http://www.gnu.org/software/glpk/glpk.html
6. Д. Иваненко, Ю. Кочетов. Локальный поиск с чередующимися окрестностями для задачи размещения с ограничениями на мощности.// Тезисы III Всероссийской конференции "Проблемы оптимизации и экономические приложения", 11 - 15 июля 2006, Омск, С. 105
7. http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/index.html

Иваненко Дмитрий Сергеевич
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН
пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (8-383-2) 33-20-86, факс (8-383-2) 32-25-98,
E-mail: ivanen@math.nsc.ru

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОИСК С ЗАПРЕТАМИ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЁРА С ВРЕМЕННЫМИ ОКНАМИ

Д. Н. Ивницкий, Ю. А. Кочетов

В задаче коммивояжера с временными окнами задано множество клиентов и гараж, где находится транспортное средство. Известно время переезда от одного клиента к другому и до гаража, а также временные промежутки, когда нужно посетить каждого клиента. Требуется найти маршрут для посещения всех клиентов (гамильтонов цикл), начинающийся и заканчивающийся в гараже, удовлетворяющий ограничениям по временным окнам для каждого клиента и требующий минимального времени в пути.

Для решения сформулированной задачи разработан вероятностный алгоритм поиска с запретами [1]. В алгоритме используются три рандомизированные окрестности: 2-*opt*, 3-*opt* и вставка. Список запретов содержит номера клиентов, участвовавших в локальной перестройке циклов на нескольких последних итерациях алгоритма. Основная идея алгоритма состоит в использовании нелинейной функции штрафа за нарушение ограничений по временным окнам при обслуживании клиентов [2]. Применение таких функций позволяет использовать недопустимые решения задачи и стимулирует детальное исследование границы допустимой области, где, как правило, находится оптимальное решение. Функция штрафа меняется в ходе локального поиска. С ростом числа итераций повышается штраф за нарушение ограничений задачи.

Разработанный алгоритм запрограммирован на языке C и тестировался на примерах электронной библиотеки [3]. Результаты расчетов свидетельствуют о его высокой конкурентоспособности. С его помощью удается получать наилучшие известные решения для ряда тестовых примеров из указанной библиотеки.

Работа поддержана грантами РФФИ 06–01–00075, 05–06–90606.

ЛИТЕРАТУРА

1. Glover F., Laguna M. Tabu search. Boston: Kluwer Acad. Publ., 1997.

2. Kulturel-Konak S., Norman B.A., Coit D.W. Exploiting tabu search memory in constrained problems. INFORMS Journal on Computing. 2004. V. 16, N 3. P. 241–254.

3. The traveling salesman problem with time windows – Benchmark data sets. http://myweb.uiowa.edu/bthoa/TSPTWBenchmarkDataSets.htm

Ивницкий Дмитрий Николаевич
Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383) 333-20-86. E-mail: @ngs.ru

Кочетов Юрий Андреевич
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383) 333-20-86, факс (8-383) 333-25-98. E-mail: jkochet@math.nsc.ru

ЛОКАЛЬНЫЙ ПОИСК С ЧЕРЕДУЮЩИМИСЯ ОКРЕСТНОСТЯМИ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЁРА С ВРЕМЕННЫМИ ОКНАМИ

Е. В. Копылова, Ю. А. Кочетов

В работе рассматривается следующее обобщение известной задачи коммивояжёра. Для данного множества клиентов задано время переезда от одного клиента к другому и до гаража, а так же временные окна когда нужно посетить каждого клиента. Прибытие раньше временного окна предполагает простой. Прибытие позже назначенного срока не допускается. Требуется найти гамильтонов цикл, начинающийся и заканчивающийся в гараже, удовлетворяющий временным окнам и требующий минимального суммарного времени в пути.

Для решения сформулированной задачи разработан итерационный алгоритм локального поиска с чередующимися окрестностями [1]. В алгоритме используется четыре окрестности: 2-*opt*, 3-*opt*, Лина-Кернигана и вставка, которые хорошо зарекомендовали себя при решении классической задачи коммивояжера [2]. Для повышения эффективности поиска вводится штрафная функция и разрешается нарушать ограничения по временным окнам. Начальное решение строится с помощью вероятностного жадного алгоритма типа "иди в ближайший из непосещенных".

Разработанный алгоритм запрограммирован на языке Object Pascal в среде Delphi и тестировался на примерах из электронной библиотеки [3]. Полученные результаты свидетельствуют о высокой эффективности предложенного подхода.

Работа поддержана грантами РФФИ 06–01–00075, 05-06-90606.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hansen P., Mladenovic N. Developments of Variable Neighborhood Search. In C.C. Ribeiro, P. Hansen (Eds.) Essays and surveys in metaheuristics. Kluwer Academic Publishers. 2002. P. 415–440.

2. Kulturel-Konak S., Norman B.A., Coit D.W. Exploiting tabu search memory in constrained problems. INFORMS Journal on Computing. 2004. V. 16, N 3. P. 241–254.

3. The traveling salesman problem with time windows – Benchmark data sets. http://myweb.uiowa.edu/bthoa/TSPTWBenchmarkDataSets.htm

Копылова Елена Владимировна
Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383) 333-20-86. E-mail: kopylova_elena@ngs.ru

Кочетов Юрий Андреевич
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383) 333-20-86, факс (8-383) 333-25-98. E-mail: jkochet@math.nsc.ru

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ ЛОКАЛЬНЫЙ ПОИСК ДЛЯ ЗАДАЧИ О РАЗБИЕНИИ ГРАФА

А. Н. Михайлова

В работе рассматривается следующая NP-трудная задача о разбиении графа. Задано натуральное число p и неориентированный взвешенный граф $G = (V, E)$ с множеством вершин V, множеством ребер E и весами $w_e \geq 0$, $e \in E$. Требуется разбить множество вершин V на непересекающиеся подмножества так, чтобы мощность каждого подмножества не превышала бы p и сумма весов ребер, вершины которых принадлежат разным подмножествам, была бы минимальной.

Для решения сформулированной задачи разработан вариант генетического алгоритма, в котором поиск ведется только среди локальных оптимумов. В качестве окрестностей использовались следующие известные окрестности [1]:
$Flip$ — перенос одной вершины в другое подмножество;
$Swap$ — замена одной вершины на другую для родных подмножеств;
FM — вариант окрестности $Swap$ линейной мощности;
KL — окрестность Кернигана–Лина в рандомизированном варианте.

Применение стандартных операторов скрещивания наталкивается на две проблемы: выход за границу допустимой области и выявление общих признаков у элементов популяции [2]. Первая проблема является типичной для операторов скрещивания и решается, как правило, с помощью жадных алгоритмов. Для решения второй проблемы формулируется задача о назначениях, и ее оптимальное решение используется чтобы установить взаимно однозначное соответствие между элементами разбиения двух *родительских* решений. Разработано пять различных операторов скрещивания и пять жадных алгоритмов для построения допустимых решений задачи.

Алгоритм запрограммирован на языке ПАСКАЛЬ (DELPHI 6.0) и тестировался на примерах большой размерности из электронной библиотеки [3]. Результаты расчетов свидетельствуют о конкурентоспособности предложенного подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.А. Кочетов, М.Г. Пащенко, А.В. Плясунов О сложности локального поиска в задаче о p-медиане // Дискретный анализ и исследование операций Серия 2, 2005, том 12, № 2. С. 44–71.

2. A. Moraglio, Y.H. Kim, Y.Yoon, D.R. Moon. Geometric Crossovers for Multiway Graph Partitioning.

3. C. Walshaw. Graph Partitioning archive, http://staffweb.cms.gre.ac.uk/ wc06/partition/

Михайлова Анастасия Николаевна
Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383-2) 33-20-86, E-mail: davse@yandex.ru

АЛГОРИТМ ИМИТАЦИИ ОТЖИГА ДЛЯ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ КРУГОВ И ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ В КОНТЕЙНЕРЫ

А. С. Руднев

В работе рассматривается задача упаковки конечного множества предметов в прямоугольные контейнеры. Каждый предмет является либо кругом и задается радиусом, либо прямоугольником и задается длиной и шириной. Задано число контейнеров и их размеры. Известно, что контейнеров достаточно для размещения всех предметов. Требуется сократить размеры контейнеров так, чтобы их суммарная площадь была бы минимальной, но достаточной для размещения всех предметов. При размещении прямоугольников их стороны параллельны сторонам контейнеров. Допускаются повороты прямоугольников на 90 градусов.

Для решения сформулированной задачи разработан алгоритм имитации отжига [1]. Поиск решения ведется в пространстве так называемых двухконтактных упаковок [2], когда очередной предмет кладется на пару уже размещенных предметов, включая стороны контейнеров. Решения кодируются в виде перестановки предметов и перестановки контейнеров. При вероятностном локальном поиске используются окрестности квадратичной мощности.

Разработанный алгоритм тестировался на случайно сгенерированных примерах. Обсуждаются предварительные результаты численных экспериментов.

Работа поддержана грантом РФФИ 06-01-00075.

ЛИТЕРАТУРА

1. D.S. Johnson, C.R. Aragon, L.A. McGeoch, C. Schevon. Optimization by simulated annealing: An experimental evaluation, part I (graph partitioning). // Operations Research. 1989. V.37. P. 865-891.

2. J.A. George, J.M. George, B.W. Lamar. Packing of different-sized circles into a rectangular container. // European J. Oper. Res. 1995. V. 84. P. 693-712.

Руднев Антон Сергеевич,
Институт математики им. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383) 333-20-86, факс (8-383) 333-25-98, E-mail: antob.rudnev@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИНДЕКСОВ В УСЛОВИЯХ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ЦЕН

Н. И. Айзенберг, З. В. Солонина

При анализе экономических процессов широко используются агрегированные экономические показатели, в т.ч. индексы цен. Во время инфляции достоверная и своевременная оценка их динамики имеет приоритетное значение. Трудность состоит в том, что сильным толчкам инфляции обычно сопутствует рост ценовой неопределенности. Колебания темпов роста цен на товары приводят к увеличению расхождений индексов. Существующая теория индексов не позволяет выделить универсальный показатель для любой ценовой ситуации. Авторами разработана методика отбора индексов, предпочтительных для использования в различных экономических условиях, в зависимости от интенсивности колебаний цен.

Экспериментально на основе заданных статистики цен и эластичностей объемов товаров по цене исследовалось поведение индексов для разных экономических моделей. Сначала расчет осуществлялся на базе исходных данных, затем в них вводились возмущения: исходные цены и объемы домножались на случайную величину, распределенную по логнормальному закону. Качественные характеристики индексов оценивались по ряду критериев, позволяющих выявить из них наиболее устойчивые к росту колебаний цен и объемов. Были выявлены методы расчета индексов цен, оптимальные для использования в различных экономических ситуациях и даны рекомендации по их практическому использованию.

Работа поддержана грантом Лаврентьевского конкурса молодежных проектов СО РАН (постановление Президиума СО РАН от 26.01.2006)

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзенберг Н.И., Солонина З.В. Устойчивость методов расчета индексов цен в условиях ценового хаоса. - Иркутск: препринт ИСЭМ СО РАН, 2004.
2. Зоркальцев В.И. Индексы цен и инфляционные процессы. - Новосибирск: Наука, 1996, 279с.
3. Четвериков Н.С. Метод Index number как способ изучения ценности денег // Статистические и стохастические исследования. - М.: 1978.

Айзенберг Наталья Ильинична, ИСЭМ СО РАН, ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952)42-97-64. E-mail: zen@isem.sei.irk.ru

Солонина Зоя Валерьевна, ОАО Компания "РУСИА Петролеум", ул. Нижняя Набережная 14, Иркутск, 664011, Россия, тел. (3952) 255-959 * 2297. E-mail: zoyasolo@mail.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ФОРМУЛ РАСЧЕТА ФОНДОВЫХ ИНДЕКСОВ

Н. И. Айзенберг, Н. П. Шерстянкина

Фондовые индексы являются одним из основных инструментов анализа рынка ценных бумаг. Они используются в различных моделях, описывающих процессы, происходящие на фондовом рынке. Поэтому важно, чтобы индексы не искажали реальной ситуации и были устойчивы к различным колебаниям цен акций и фондовым кризисам. Анализ методов расчета фондовых индексов проведен с помощью имитационной модели функционирования фондового рынка с эндогенно-заданными объемами сделок и вычислительных экспериментов, состоящих из двух этапов. На первом этапе рассчитаны фондовые индексы на базе ежедневных данных по ценам акций, торгуемых на фондовой бирже РТС с 5.01.04 по 29.12.06, и объемам сделок, построенных при различных значениях коэффициента эластичности зависимости объемов сделок от цен акций. На втором этапе в цены акций добавлялись случайные колебания, имитирующие три возможных состояния фондового рынка: 1) период затишья (средняя вариация цен $\sigma = 5\%$), 2) предкризисный период ($\sigma = 10\%$), 3) фондовый кризис ($\sigma = 15\%$). По итогам вычислительных экспериментов выделены наиболее устойчивые методы расчета фондовых индексов.

Работа поддержана грантом Лаврентьевского конкурса молодежных проектов СО РАН (постановление Президиума СО РАН от 26.01.2006).

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзенберг Н.И. Поведение индексов цен при разной эластичности спроса от цены // Тр. международной конференции "Инструменты анализа и управления переходного состояния в экономике", Екатеринбург, 17-20 апр. 2006, 16 с.

2. Зоркальцев В.И. Индексы цен и инфляционные процессы. - Новоси-бирск. "Наука". Сибирская издательская фирма РАН, 1996. 280 с.

Айзенберг Наталья Ильинична, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева, СО РАН, ул. Лермонтова, 130, Иркутск, Россия, 664033, тел. (3952) 42-97-64.
E-mail: zen@isem.sei.irk.ru

Шерстянкина Нина Павловна, Байкальский гос. университет экономики и права, ул. Ленина, 11,Иркутск, Россия, 664009. (3952) 24-28-19.
E-mail: nina_21@mail.ru

ОПТИМАЛЬНОЕ ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ В СТРУКТУРЕ МОНОПОЛИСТ – ПОСРЕДНИК – ПОТРЕБИТЕЛЬ

И. А. Быкадоров, Е. Моретти, А. Эллеро

Исследуется динамическая модель ценообразования в структуре монополист – посредник – потребитель. В [1] и [2] установлен характер зависимости вида оптимальной стратегии производителя по формированию оптовой цены от поведения посредника при определении розничной цены, рассмотрены варианты двух-уровневых задач (целевыми функциями являются прибыли фирмы и посредника), предложены и изучены различные игровые подходы.

В докладе приведены некоторые новые результаты по этой тематике. В частности, в рамках дифференциальной игры "лидер – ведомый (последователь)" выделены параметры, являющиеся достаточными характеристиками для определения желательности той или иной рыночной ситуации с точки зрения фирмы и/или посредника.

Работа поддержана грантами Università Ca' Foscari di Venezia (Italia), MIUR - PRIN (co-financing 2005) и Президента РФ №НШ-4999.2006.6.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Bykadorov, A. Ellero, E. Moretti. Optimal control of trade discount in a vertical distribution channel // Rendiconti per gli Studi Economici Quantitativi. - Venezia (Italia), 2005. – P.121-129.

2. I. Bykadorov, A. Ellero, E. Moretti. Trade discount policies in the differential games framework: preliminary results // Universita Ca'Foscari di Venezia, Dipartimento di Matematica Applicata, 2005, report n.130/2005.

Быкадоров Игорь Александрович, Институт математики им С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика. Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383) 3330094, факс (8-383) 3332598. E-mail: bykad@math.nsc.ru

Ellero Andrea, Moretti Elena, Università Ca' Foscari di Venezia, Dorsoduro 3825/E, Venice, 30123, Italy, phone (+39) 0412346930, fax (+39) 0415221756.
E-mail: ellero@unive.it, emoretti@unive.it

ЗАДАЧА МАКСИМИЗАЦИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕКЛАМНЫХ ЗАТРАТ

И. А. Быкадоров, Е. Моретти, С. Фунари, А. Эллеро

Изучается динамическая модель рекламной деятельности фирмы- производителя и посредника в период продаж $[t_1,\ t_2]$. В отличии от [1], в качестве целевой функции рассматривается "индекс эффективности" — элемент семейства (при фиксированном $\lambda \in [0,1]$)

$$EI(\lambda) = \frac{\lambda A(t_2) + (1-\lambda)x(t_2)}{C_0 + \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt} \ ,$$

где $A(t_2)$ — конечный "гудвил" [2], $x(t_2)$ — итоговый совокупный объем продаж, $a(t)$ — текущие затраты на рекламу. Найдено полное описание оптимальной стратегии рекламной деятельности. При исследовании задачи использовался параметрический подход (см., например, [3]).

Работа поддержана грантами Università Ca' Foscari di Venezia (Italia), MIUR - PRIN (co-financing 2005) и Президента РФ №НШ-4999.2006.6.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Bykadorov, A. Ellero, E. Moretti. Minimization of communication expenditure for seasonal products // RAIRO Oper. Res. 2002. V. 36. P. 109-127.

2. M. Nerlove, K. J. Arrow. Optimal advertising policy under dynamic conditions // Economica. 1962. V. 29. P. 129-142.

3. W. Dinkelbach. On nonlinear fractional programming // Management Science. 1967. V. 13. P. 492-498.

Быкадоров Игорь Александрович, Институт математики им С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия,
тел. (8-383) 3330094, факс (8-383) 3332598. E-mail: bykad@math.nsc.ru

Moretti Elena, Funari Stefania, Ellero Andrea, Università Ca' Foscari di Venezia, Dorsoduro 3825/E, Venice, 30123, Italy, phone (+39)0412346930, fax (+39)0415221756.
E-mail: emoretti@unive.it funari@unive.it ellero@unive.it

НЕЛИНЕЙНАЯ ТРАНСПОРТНАЯ МОДЕЛЬ

В. И. Зоркальцев, Д. С. Медвежонков

Рассматриваются свойства [1] взаимно-двоственных задач оптимизации:

$$\sum F_j(x_j) + (c, x) \to \min, \ Ax = b, \ x \geq 0; \tag{1}$$

$$\sum \Phi_j(y_j) - (b, u) \to \min, \ A^T u - y \leq c. \tag{2}$$

Заданы: A – матрица $m \times n$; векторы $b \in R^m, c \in R^n$; сопряженные по Лежандру функции $F_j, \ \Phi_j, \ j = 1, \ldots, n$, равные нулю в нуле, производные которых возрастают от нуля в нуле до ∞. Переменные составляют векторы $x \in R^n, \ y \in R^n, \ u \in R^m$.

Обсуждается случай, когда задачи (1), (2) описывают нелинейную транспортную модель, представленную в виде направленного графа. Задача (1) интерпретируется как минимизация затрат на искомые объемы транспортировок по дугам, составляющим вектор x. Задача (2) интерпретируется как минимизация сверхдоходов транспортной системы. Здесь u – вектор цен в узлах. Задача (2) иллюстрируется в терминах проблемы регулирования естественных монополий.

Особое внимание уделено случаю, когда компоненты вектора b заданы в виде зависимостей от цен в узлах, выражающих законы спроса и предложения. Рассматриваемые задачи актуальны для анализа механизмов регулирования электрических, трубопроводных сетей, железнодорож-ного транспорта, формирования тарифной политики.

Работа поддержана грантом РГНФ 06-02-00266а .

ЛИТЕРАТУРА

1. В.И. Зоркальцев, О.В. Хамисов. Равновесные модели экономики и энергетики. Новосибирск.: Наука, 2006.

Зоркальцев Валерий Иванович, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (8-3952) 42-88-27, факс (8-3952) 42-67-96, E-mail: zork@isem.sei.irk.ru

Медвежонков Дмитрий Сергеевич, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (8-3952) 42-97-64, E-mail: dmitry@isem.sei.irk.ru

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧИСТЫХ НЕТТИНГОВЫХ ПОЗИЦИЙ ПРИ КЛИРИНГЕ МЕЖБАНКОВСКИХ ПЛАТЕЖЕЙ

А. А. Карпук, Е. С. Шейнкман

В докладе дается обзор математических моделей, методов и алгоритмов, используемых для решения задачи вычисления чистых неттинговых позиций при клиринге межбанковских платежей. Эта задача может служить примером приложения различных математических моделей и методов исследования операций.

Исходная математическая модель задачи, построенная в работе [1], представляет собой задачу линейного программирования с булевыми переменными, число которых измеряется десятками тысяч, что исключает непосредственное применение существующих методов поиска оптимального решения для задач этого типа. В Немецком федеральном банке для решения задачи применяют эвристические алгоритмы REMAINDER и MULTILATERAL [2]. Вычислительные эксперименты показали, что эти алгоритмы в большинстве случаев дают очень хорошее решение, однако существуют ситуации, встречающиеся на практике, когда эти алгоритмы вообще не могут найти допустимого решения задачи.

При переходе к непрерывным переменным получаем задачу линейного программирования с числом переменных $n(n-1)$, где n - количество банков, участвующих в клиринговом сеансе. Эту задачу можно решить известными методами, однако серьезные проблемы возникают при переходе к дискретному решению. Для уменьшения этих проблем вводятся дополнительные ограничения, в результате получаем задачу поиска максимальной циркуляции в ориентированном графе [3], для решения которой можно применить алгоритм дефекта, составной частью которого является алгоритм Форда–Фалкерсона для поиска максимального потока из источника в сток.

Для перехода от найденного оптимального решения задачи с непрерывными переменными к решению исходной задачи требуется для каждой пары банков решить задачу о рюкзаке с минимальным избытком, для решения которой применяются модификации известных методов решения задачи о рюкзаке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпук А.А., Шейнкман Е.С. Математические модели и алгоритмы клиринга межбанковских платежей // Материалы IX Международной конференции "Интеллектуальные системы и компьютерные науки". – М.: МГУ, 2006. – Т. 2, ч. 1. – С. 142-145.

2. Электронный доступ в Немецком федеральном банке. Внешние спецификации. Глава 3. Система EAF–2. 7 сентября 1998 г. Версия 4.1. – Франкфурт: Немецкий федеральный банк, 1998. – 137 с.

3. Карпук А.А., Шейнкман Е.С. Задача поиска максимальной циркуляции в ориентированном графе // Информ. бюллетень Ассоциации мат. программирования. Конф. "Математическое программирование и приложения"(тезисы докладов). – Екатеринбург: УрО РАН, 2007. – N 11. – С. 122-123.

Карпук Анатолий Алексеевич, Шейнкман Евгения Самуиловна, Расчетный центр Национального банка Республики Беларусь, ул. Кальварийская, д. 7, Минск, 220048, Беларусь, тел. +375 17 206 34 04, факс +375 17 206 34 03, E-mail: Anatoly_Karpuk@bisc.by, Sheinkman_evg@mail.ru

НАХОЖДЕНИЕ СИТУАЦИЙ РАВНОВЕСИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧЕ

М. А. Киселева

Классическая постановка транспортной задачи состоит в следующем: при заданной сети возможных маршрутов (топологии) и потребностях требуется с минимальными издержками привести груз (передать среду) из пунктов отправления в пункты назначения, то есть связать узлы–источники и узлы–потребители такими объемами товаров по дугам, чтобы издержки на транспортировку были минимальными. Чаще всего эта задача рассматривается с издержками линейного вида и является типовой для подобного класса задач линейного программирования.

В докладе рассматривается транспортная задача при нелинейных затратах на перевозку по маршрутам (дугам) сети при наличии нескольких поставщиков–перевозчиков (экономических агентов).

Возможные варианты совместного поведения участников экономических отношений важно учитывать, например, при реформировании электроэнергетики, систем тепло-, газоснабжения, железнодорожного транспорта и других систем с транспортной составляющей, чтобы оценить, к чему могут привести последствия принимаемых на законодательном уровне решений. Поэтому при прогнозировании возможных последствий таких решений является полезным рассмотрение наиболее правдоподобных сценариев взаимодействия участников экономических отношений.

Считаем, что транспортная сеть является системой коллективного пользования, а также занимается распределении грузов отдельных перевозчиков по дугам сети. Исходя из условий, что заданы объемы поставок в пункты назначения для каждого из перевозчиков и функции затрат на перевозки по дугам сети, рассматриваются последствия и экономические эффекты ситуаций равновесия по Нэшу, Штакельбергу, неравновесия по Штакельбергу между экономическими субъектами для сетевой нелинейной транспортной задачи. Рассматриваются ситуации двухуровневого и, как его обобщение, многоуровневого программирования в сочетании с поиском равновесия Нэша для «одноуровневых» агентов. Приводится сравнительный анализ полученных результатов как по издержкам, так и по общим затратам на перевозки.

Работа поддержана грантом РГНФ 06-02-00266а.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.И. Зоркальцев, О.В. Хамисов. Равновесные модели экономики и энергетики. Новосибирск.: Наука, 2006.

Киселева Марина Александровна,
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (8-3952) 42-97-64, E-mail:marinee@mail.ru

АНТАГОНИСТИЧЕСКАЯ ИГРА НА РАЗОРЕНИЕ

В. В. Кулагин

В классическую антагонистическую игру двух лиц вносится ограничение на величину платы игры $f(x, y)$ (т. е. на величину суммы, которую игрок А платит игроку В в результате акта игры (x, y)),

$$f(x, y) \leq \beta. \tag{1}$$

Превышение величины ограничения β означает разорение игрока А и является целью игрока В.

Вводятся в рассмотрение:

(а) новые стратегии – действительные числа ν, γ;

(б) соответствующие новым стратегиям множества

$$X(\nu) = \{x \mid \varphi(x) \leq \nu\}, \qquad Y(\gamma) = \{y \mid \psi(y) \leq \gamma\},$$

где $\varphi(x), \psi(y)$ – выпуклые функции, имеющие смысл затрат игрока А на осуществление стратегии x, и затрат игрока В на осуществление стратегии y;

(в) оценка нового акта игры (ν, γ) – функция $\varrho(\nu, \gamma)$,

$$\varrho(\nu, \gamma) = \beta - \min_{x \in X(\nu)} \max_{y \in Y(\gamma)} f(x, y),$$

имеющая смысл дистанции до ограничения после акта игры (ν, γ). Условие (1) неразорения игрока А теперь имеет вид $\varrho(\nu, \gamma) \geq 0$.

Обозначим через $\gamma^*_\nu = \mathrm{root}_\gamma\, \varrho_\nu(\gamma)$ корень функции $\varrho_\nu(\gamma)$, или решение уравнения $\varrho_\nu(\gamma) = 0$, где $\varrho_\nu(\gamma)$ – сечение функции $\varrho(\nu, \gamma)$ при фиксированном ν. Величина γ^*_ν трактуется как расход игрока В на разорение игрока А, выбравшего стратегию ν.

В [1] показано, что при некоторых предположениях (в том числе при $\nu \leq \nu_0$, $\gamma-$ любое) в игре существует равновесие, т. е. имеет место равенство

$$\max_\nu \ \mathrm{root}_\gamma \ \varrho(\nu, \gamma) = \mathrm{root}_\gamma \ \max_\nu \ \varrho(\nu, \gamma),$$

и существует точка (ν, γ), решающая обе двойные задачи равенства. Здесь левая двойная задача для функции $\varrho(\nu, \gamma)$ дает оптимальную стратегию игрока А (игрок А заставляет игрока В заплатить за свое разорение максимальную сумму), правая двойная задача дает оптимальную стратегию игрока В (найти минимальную сумму из тех, что гарантируют разорение игрока А).

В качестве примера данной антагонистической игры двух лиц рассмотрена одна игровая задача теории управления в условиях неопределенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Кулагин. Игровое равновесие как эквивалентность двойных задач для функции двух переменных. // В трудах V Московской международной конференции по исследованию операций. 2007. С.278.

Кулагин Виктор Васильевич, Институт проблем машиноведения РАН, Большой пр. В.О., 61, Санкт-Петербург, 199178, Российская федерация, тел. (812) 321-47-83, факс (812) 321-47-71, E-mail:kulagin@random.ipme.ru

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ РЕГИОНАЛЬНОЙ ЭКОНОМИКИ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ ЗАПАЗДЫВАНИЕ ПРИ ВВОДЕ ФОНДОВ

Г. А. Мухин, В. К. Булгаков

В реальной экономике капитальные вложения в основные фонды экономической системы всегда осваиваются с запаздыванием во времени. В настоящей работе на основе принципа максимума Понтрягина изложено решение задачи оптимального управления математической модели региональной экономики, основанной на производственной В-функции [1] и учитывающей запаздывание при вводе фондов, особенности межбюджетных отношений в РФ [2].

Разработан и численно апробирован на примере экономики Хабаровского края оригинальный алгоритм решения краевой задачи, определяющей оптимальное управление, соответствующие ему оптимальные траектории фазовой переменной. Проведено исследование сходимости алгоритма. Приводятся результаты численных исследований закономерностей динамики макроэкономических параметров на оптимальных траекториях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков, В.К. Моделирование динамики обобщающих показателей развития региональных экономических систем России [Текст] / В. К. Булгаков, О. В. Булгаков // Экономика и мат. методы. — 2006. — Т. 42. — №1. — С. 32-49.

2. Мухин, Г.А. Математическая модель региональной макроэкономики с учетом времени освоения капитальных вложений [Текст] / Г. А. Мухин, В. К. Булгаков // Научное издание. Научно-технические проблемы и экономическое сотрудничество стран АТР в XXI веке. Труды Пятой международной научной конференции творческой молодежи 17-19 апреля 2007. — Хабаровск: ДВГУПС. — 2007. — Т. 4. — С. 118-123.

Мухин Геннадий Алексеевич, Булгаков Виктор Кирсанович,
Дальневосточный Государственный Университет Путей Сообщения,
ул. Серышева, 47, г. Хабаровск, Россия, тел. (4212) 38-44-80, (4212) 34-97-52,
e-mail: gmuhin@ivc.dvgd.ru.

УЧЕТ СРОКА КРЕДИТОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ АКТИВОВ

Н.А. Орозбеков

В [1] и [2] изучались задачи оптимизации активов коммерческого банка, в которых ставка процента по кредитам была единой для всех заемщиков. На практике банки устанавливают ссудную ставку процента в виде кусочно-постоянной функции от некоторых параметров таких как: объем кредита, срок кредитования и т.д. В данном докладе будет предложена модифицированная задача оптимизации активов, в которой ставка процента представлена в виде кусочно-постоянной функции от срока кредитования.

Рассматриваются два вида кредитов: краткосрочные и долгосрочные. При этом мы имеем функцию ставки процента с разрывом в одной точке, т.е. банк устанавливает различные ставки процента на краткосрочные и долгосрочные кредиты. Учет такой ставки процента в задаче оптимизации активов можно осуществить разбиением множества I_{11} на два подмножества I_{11}^k и I_{11}^d, где I_{11}^k - множество номеров краткосрочных активов, а I_{11}^d - множество номеров долгосрочных активов. В каждом из выделенных подмножеств устанавливаются ставки y^k и y^d, соответственно.

В итоге получается задача математического программирования с нелинейными ограничениями и нелинейной целевой функцией. Для этой задачи разработан алгоритм нахождения оптимального решения, основанный на редукции исходной задачи в две нелинейные задачи. Далее каждая из двух нелинейных задач редуцируется в последовательность задач линейного программирования.

Работа поддержана грантом РФФИ 07-06-13500.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.М. Анцыз, Н.А. Орозбеков. Об одном подходе к построению математических моделей для оптимизации банковской деятельности. // -Новосибирск: Препринт/РАН. Сиб. отд–ние. Ин–т математики; № 147, 2004, 26 с.

2. Н.А. Орозбеков. Нелинейные модели оптимизации банковских активов. // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Том VIII, №4(24), стр. 73-90.

Орозбеков Нурлан Аскарович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. ак. Коптюга, 4, г. Новосибирск, 630090, Россия, (8-383) 333-00-94,
E-mail: nurlan_o@math.nsc.ru

ОБ ОТЫСКАНИИ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ ОБМЕНА С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ПОЛЕЗНОСТИ УЧАСТНИКОВ

Л. Д. Попов

Рассматривается экономика обмена с m участниками и n типами товаров и услуг, предназначенных для обмена. Пусть $b_{ji} \geq 0$ — начальные запасы товара i-го вида у j-го участника экономики и $x_{ji}(p)$ — спрос j-го участника на i-й товар при заданном уровне цен $p = (p_1, \ldots, p_n) \geq 0$ на них. Вектор цен $\bar{p}$ называется точкой равновесия в модели Эрроу—Дебре, если $\sum_{j=1}^{m} x_{ji}(\bar{p}) = c_i$ при всех i (здесь $c_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ji}$ — суммарные запасы i-го товара).

Ограничимся случаем, когда функции полезности участников обмена мультипликативны. В этой ситуации $x_{ji}(p) = p_i^{-1}\alpha_{ji}\sum_{s=1}^{n} p_s b_{js}$ и равновесные цены можно искать как некоторое положительное решение системы однородных линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{ji}\,p_s b_{js} = c_i p_i, \quad i \in \overline{1,n}, \tag{1}$$

или, в матричной записи,

$$(C - A^{\top}B)\,p = 0, \quad p > 0, \tag{1a}$$

где $A = (\alpha_{ji})_{m\times n}$ — матрица коэффициентов эластичности, $B = (b_{ji})_{m\times n}$ — матрица товарных запасов, $C = \mathrm{diag}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Для отыскания решения однородной системы (1) предлагается применить алгоритм, опирающийся на идеи классического метода расщепления и определяемый соотношениями

$$C\,p_{k+1} = A^{\top}B\,p_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\ . \tag{2}$$

Здесь начальное приближение $p_0 > 0$, причем суммарная стоимость товарных запасов остается постоянной, если только строчные суммы матрицы A равны 1.

Центральная идея доклада: алгоритм (2) имитирует работу рыночных посредников, скупающих товары у производителей и перепродающих их потребителям (прибыль с продаж игнорируется). Посредники непосредственно отслеживают интенсивность финансовых потоков, направляемых потребителями на приобретение товаров каждой категории, и на интенсивность поступления этих товаров от их производителей в натуральном выражении. Стремясь избежать на своих складах избыточности запасов одних товаров и нехватку других, посредники так устанавливают розничные цены на них, чтобы выровнять интенсивности их входящих и исходящих потоков.

Алгоритм (2) легко модифицируется на случай, когда некоторый товар играет роль стоимостного эталона (денег), т. е. имеет фиксированную цену.

В докладе приводятся условия (на взаимное расположение ненулевых элементов матриц A и B), гарантирующие разрешимость исходной системы и сходимость основного алгоритма и его модификаций, а также результаты численных экспериментов.

Работа поддержана РФФИ, проект 07-01-00399.

Попов Леонид Денисович,
Институт математики и механики УрО РАН, ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 6200219, Россия, тел. (3433)75-34-23, факс (3433)74-25-81. E-mail: popld@imm.uran.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОГЛАСОВАННЫХ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ БИМАТРИЧНОЙ ИГРЫ В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ

О. А. Попова

Рассматривается процесс принятия согласованного решения группой участников. В качестве подхода предлагается рассмотреть процесс поиска компромиссного решения, как дифференциальную биматричную игру в смешанных стратегиях

$$\frac{dx}{dt} + x = \operatorname{argmax}\{-(1/2)|z_1 - x|^2 + \alpha(\langle S^T z_1, y + u_2\rangle + (1/2)\langle Bz_1, z_1\rangle) \mid \langle e, z_1\rangle = 1,\ z_1 \geq 0\},$$

$$\frac{dy}{dt} + y = \operatorname{argmax}\{-(1/2)|z_2 - y|^2 + \alpha(\langle x + u_1, Pz_2\rangle + (1/2)\langle Dz_2, z_2\rangle) \mid \langle e, z_2\rangle = 1,\ z_2 \geq 0\},$$

с управлением в виде обратных связей

$$u_1(x) = \operatorname{argmax}\{-(1/2)|z_1 - x|^2 + \alpha(\langle S^T z_1, y\rangle + (1/2)\langle Bz_1, z_1\rangle) \mid \langle e, z_1\rangle = 1,\ z_1 \geq 0\} - x,$$

$$u_2(y) = \operatorname{argmax}\{-(1/2)|z_2 - y|^2 + \alpha(\langle x, Pz_2\rangle + (1/2)\langle Dz_2, z_2\rangle) \mid \langle e, z_2\rangle = 1,\ z_2 \geq 0\} - y.$$

Отметим следующие особенности предлагаемого подхода. Во-первых, рассматриваемая модель позволяет представить согласованное решения как динамический процесс, протекающий в поисках компромисса и учитывающий мнение всех участников. Во-вторых, модель рассматривает, согласованное решение как рефлексивное решение. Важно, что согласованное решение имеет рефлексивную природу отражения субъективных представлений участников о возможных векторах предпочтений всех и каждого участника процесса. Рефлексивная природа проявляется в существовании обратных связей, которые определяют траекторию движения к компромиссу. Траектория рассматриваемой системы описывает динамику процесса принятия решений. Основной вопрос - это сходимость траектории к исходному состоянию равновесия или равновесию по Нэшу. Неподвижная точка и будет определять искомое согласованное решение. В-третьих, управление в виде обратной связи при достаточно общих ограничениях на игровые матрицы в модели обеспечивает сходимость процесса к равновесию по Нэшу. В докладе дается содержательная интерпретация модели на примере поиска согласованного решения в рамках кредитно-банковских услуг.

ЛИТЕРАТУРА

А.С. Антипин, О.А. Попова. Игра двух лиц в смешанных стратегиях как модель обучения// Журнал Вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45, № 9. С. 1566–1574.

Попова Ольга Аркадьевна, Сибирская автомобильно-дорожная академия, пр. Мира 5, Омск, 644080, Россия. E-mail: olgaarc@yandex.ru

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ РЕГИОНА РФ ДЛЯ КОНЕЧНОГО, ЗАРАНЕЕ ЗАДАННОГО ГОРИЗОНТА ПЛАНИРОВАНИЯ

В. В. Стригунов, В. К. Булгаков

В работе рассматривается решение задачи оптимального управления динамикой макроэкономической системы региона РФ для заранее заданного горизонта планирования $T_p < \infty$.

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{w \in \overline{W}} = \int\limits_0^{T_p} w^{\alpha}(t)dt \\ \frac{dx}{dt} = aB(x) - \lambda x - pw, \qquad x(0) = x_1, \qquad x(T_p) = x_2 \\ B(x) = b\left(1 - e^{-x}\right) + (1-b)x\left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right) \end{array}\right\}.$$

В докладе излагается разработанный авторами алгоритм решения краевой задачи оптимального управления и соответствующих ему оптимальных траекторий. Определены условия существования и единственности решения рассматриваемой задачи оптимального управления. В качестве примера проведены численные исследования для экономики Хабаровского края.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Булгаков, В. Стригунов. Решение задачи оптимального управления динамикой региональной экономической системы для конечного горизонта планирования // Вестник ТОГУ. 2006. № 1.
2. В. Булгаков, В. Стригунов. Исследование одной математической модели макроэкономики региона РФ, решение задачи оптимального управления: Препринт № 96 ВЦ ДВО РАН. Хабаровск, 2006.
3. Л. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982.
4. Л. Понтрягин, В. Болтянский, Р. Гамкрелидзе. К теории оптимальных процессов. // Докл. АН СССР. 1959. Т. 110. №1.

Булгаков Виктор Кирсанович, Стригунов Валерий Витальевич,
Тихоокеанский государственный университет, ул. Тихоокеанская, 136, Хабаровск, 680035, Россия, тел. (4212) 34-97-52, E-mail: strigunov@mail.ru

МАГИСТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ МОДЕЛИ С АДДИТИВНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

А. Е. Трубачева

В реальной экономике производственная функция подвергается различным возмущениям, которые обусловлены объективными причинами, спрогнозировать которые заранее невозможно [1, 2].

Определение. Функция $\tilde{f}(k) = f(k) + \tau(k)$ называется *аддитивно слабо возмущенной* (или *квазинеоклассической*), если $f(k)$ — неоклассическая производственная функция, $\tau(k) \in C^2$ и возмущение $\tau(k)$ мало, т.е. $\|\tau\|_{C^2} \leq \zeta$ для $0 < \zeta \ll 1$ и $\tau(0) = 0$.

Априори нельзя было предположить, что при возмущенном случае существует математическое обоснование оптимального управления производством. Задача оптимизации имеет следующий вид: максимизировать функционал (1) $\int_0^T (1-s(t))\tilde{f}(k(t))e^{-\delta t}dt$ при ограничениях (2) $\dot{k}(t) = s(t)\tilde{f}(k(t)) - \mu k(t)$, (3) $0 \leq s(t) \leq 1$, (4) $k(0) = k_0 > 0$, (5) $k(T) \geq k_T > 0$, где $s(t)$ - доля инвестиций в доходе, $\delta > 0$ - константа дисконтирования, $k(t)$ - фондовооруженность, $\mu > 0$ - темп амортизации фондов, k_T - нижняя граница фондовооруженности в момент времени T.

Теорема. *Пусть в задаче планирования (1)-(5) функция $\tilde{f}(k)$ является аддитивно слабо возмущенной, существуют допустимые траектории и промежуток планирования T достаточно велик ($T > T_0$). Пусть также существует максимальный элемент k^{**}_{max} в множестве $\{k^*_i, i \in I\} \cap (0, \tilde{k}_{min})$, где k^*_i — решения уравнения $f'(k) = \delta + \mu - \tau'(k)$, $\tilde{k}_{min}$ — минимальное из решений уравнения $f(k) = \mu k - \tau(k)$, I — некоторое индексное множество. Тогда справедливы следующие утверждения.*
1) Существует по крайней мере одна оптимальная стратегия распределения дохода на потребление и инвестиции.
2) Оптимальное управление $s(t)$ имеет следующий вид: в начале периода ($0 \leq t \leq T^*$) и в конце ($T^{**} \leq t \leq T$) выполнено $s(t) \in \{0, 1\}$, а все остальное время ($T^* \leq t \leq T^{**}$) имеет место $s(t) = s^* = \frac{\mu k^{**}_{max}}{f(k^{**}_{max}) + \tau(k^{**}_{max})}$.

Данная теорема показывает, что для квазинеоклассических производственных функций особый оптимальный режим управления существует.

Работа поддержана грантом РФФИ № 07-06-00363-а, грантом № НШ-4999.2006.6 и грантом РФФИ-NWO № 047-017-017.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трубачева А.Е. Исследование поведения инвестора при различных схемах налогообложения и разных видах производственной функции // Препринт ИМ СО РАН № 153ю Новосибирск, 2005.
2. Трубачева А.Е. Влияние возмущения производственной функции на поведение инвестора // Сибирский журнал индустриальной математики, 2004, Т. 7, № 3(19), С. 156–169.

Трубачева Анна Евгеньевна,
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел.(383) 333-00-94, факс (383) 333-25-98. E-mail: aetrub@math.nsc.ru

МОДЕЛЬ ЦЕНОВОЙ ОЛИГОПОЛИИ С ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫМ ПРОДУКТОМ

А. Ю. Филатов

В работе рассматривается развитие модели олигополии Бертрана на случай несовершенной ценовой эластичности спроса. В классической модели ценовой войны Бертрана рынок полностью захватывает фирма, установившая на свою продукцию самую низкую цену. В реалистической ситуации у более дорогих фирм до определенного ценового предела по-прежнему остается свой круг покупателей. Действительно, даже в случае продаж однородного продукта имеются различия в месторасположении фирм, ассортименте продукции, качестве обслуживания и сервиса, также нельзя не учитывать неполноту информации и издержки на поиск самой дешевой фирмы.

Пусть на рынке продукции с суммарным спросом $Q(p) = a - bp$ работают n фирм, средние издержки производства для которых одинаковы и равны c. При повышении цены в j-фирме на каждый рубль объем продаж в ней сокращается на величину $b\Delta$, а у каждого из $(n-1)$ конкурентов увеличивается на $b\Delta/(n-1)$. Также при повышении цены на каждый рубль в первой (самой дешевой) фирме суммарный объем продаж уменьшается на величину b, что означает дополнительное сокращение продаж в каждой фирме на b/n. Получим уравнение спроса следующего вида:

$$q = \frac{1}{n}a + bBp, \tag{1}$$

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a \\ a \\ \dots \\ a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\Delta - \frac{1}{n} & \frac{\Delta}{n-1} & \dots & \frac{\Delta}{n-1} \\ \frac{\Delta}{n-1} - \frac{1}{n} & -\Delta & \dots & \frac{\Delta}{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\Delta}{n-1} - \frac{1}{n} & \frac{\Delta}{n-1} & \dots & -\Delta \end{pmatrix}.$$

При данных предположениях найдены равновесия Нэша в одноуровневой и двухуровневой играх. Продемонстрировано, что в равновесии цены и объемы продаж олигополистов будут различны. Исследована также ситуация сговора. Показано, что олигополисты на основе ценовой дискриминации получают прибыль больше монопольной. Исследована возможность "инверсии", когда более дорогая фирма пытается занять место дешевой и наоборот. Рассмотрены ситуации различной реакции потребителей на разницу цен в фирмах, выражающейся в различных формулах для расчета показателя Δ. Приведены результаты расчетов на численном примере.

Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 06-02-00266а.

Филатов Александр Юрьевич,
Институт систем энергетики им. Мелентьева СО РАН, Россия, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 130, тел. (8-395-2) 42-97-64, 8-914-88-21-888, факс (8-395-2) 42-67-96.
E-mail: fial@irlan.ru

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ФИНАНСАМИ ФИРМЫ

Н. Н. Шеломенцева

В докладе представлена динамическая модель управления финансовыми ресурсами фирмы. В момент времени t фирма располагает собственным капиталом $S(t)$, который складывается из уставного капитала $C(t)$, фондов специального назначения $F(t)$ и резервов $P(t)$, т.е. $S(t) = C(t)+F(t)+P(t)$. Фирма имеет возможность привлекать заемный капитал по ставке $r\%$, поэтому капитал фирмы состоит из собственного и заемного $K(t) = S(t)+B(t)$. Этот капитал фирма размещает в оборотные средства $M(t)$ и внеоборотные активы $D(t)$, т.е. $K(t) = M(t) + D(t)$.

В результате производственной деятельности фирма получает доход, описывающийся двухфакторной функцией $R(M, D)$. Доход $R(M, D)$ распределяется на амортизационные отчисления mD $(m \in (0, 1))$, погашение долговых обязательств $v(t)$, выплату процентов rB и уплату налогов в бюджеты. Если $\gamma(R)$ - сумма налогов, уплачиваемых из прибыли, то налогооблагаемой базой прибыли будет величина
$N = R(M, D) - mD - rB - v - \gamma(R)$, а прибылью фирмы $\Pi = \max\{0; (1 - \mu)\}$, где ставке налога на прибыль μ.

Если $N > 0$, то при ставке налога на прибыль μ отчисления составят μN и прибыль, оставшуюся в распоряжении фирмы $\Pi = (1 - \mu)N$, фирма распределяет на пополнение фондов специального назначения $(u(t))$ и резервов $(w(t))$, т.е. $\dot{F} = u$, $\dot{P} = w, \;\; u(t) + w(t) = (1 - \mu)N$. Если $N \leq 0$, то $\Pi = 0$, $u = 0$ и $w = N$.

Кроме того, отчисления в резервные фонды не могут превышать $\beta\%$ чистой прибыли $w(t) \leq \beta\Pi$, величина резервов должна быть не менее $\alpha\%$ уставного капитала $\alpha C(t) \leq P(t) \leq L$, $(L = const)$, а заемный капитал не может превосходить $a\%$ собственного $0 \leq B(t) \leq aS(t)$ (α, β, a заданы нормативными документами, L фиксируется учредительными документами фирмы). Показателем финансовой состоятельности фирмы является отношение собственного капитала к стоимости всего имущества $S(t) \geq b(M(t) + D(t))$.

Приведенные соотношения представляют расширенную версию модели [1]. В модели [1] не учитывалось налогообложение, поэтому доход не зависел от структуры капитала по теореме Модильяни и Миллера [2]. В рамках описанной модели можно исследовать разнообразные задачи управленческого характера: определение пороговых значений параметров α, β, a, b, регламентирующих жесткость финансовых ограничений; нахождение решений, оптимизирующих возможные критерии качества. Среди краткосрочных целей деятельность фирмы можно отметить максимизацию прибыли, в качестве критерия достижения долгосрочных целей фирмы можно рассматривать максимизацию собственного капитала фирмы в конце периода или максимизацию дохода фирмы, источником увеличения которого является прибыль.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Дыхта. Импульсное оптимальное управление в моделях экономики и квантовой электроники // Автоматика и телемеханика. 1999. N 11. С.100–113.

2. Ч.Ф. Ли, Д.И. Финнерти. Финансы корпораций: теория, методы и практика. Пер.с англ. М.:ИНФРА-М, 2000.

Шеломенцева Наталья Николаевна, БГУЭП, кафедра математики, ул. Ленина, д. 11, Иркутск, 664003, Россия, тел. (3952) 37-29-57. E-mail: natshel@isea.ru

О ЗАДАЧЕ ВЫБОРА УЗЛОВ ХАБОВ В МОДЕЛИ КОНКУРЕНТНОГО РЫНКА ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ

П. А. Борисовский, А. В. Еремеев, С. А. Клоков

Развитие многих рынков сырья и продукции приводит к созданию небольшого количества крупных центров, называемых *торговыми хабами*, в которых сосредотачивается электронная торговля и заключается большое число фьючерсных контрактов [1]. Рынки электроэнергии также могут иметь в своей структуре торговые хабы. При узловом ценообразовании в конкурентной модели рынка электроэнергии ценовой индекс хаба рассчитывается по ценам в некотором множестве узлов сети, составляющих данный хаб.

В настоящей работе рассматриваются свойства задачи выбора узлов хабов в модели конкурентного рынка электроэнергии [2]. Исследуется применимость индекса хаба, рассчитанного как среднее арифметическое узловых цен и связь рассматриваемой задачи с одной известной задачей кластеризации. Установлена NP-трудность двух вариантов задачи выбора узлов хабов. Проведен вычислительный эксперимент с использованием алгоритма локального спуска, эволюционных алгоритмов и метода ветвей и границ из пакета CPLEX 9.0.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00410).

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Hartshorn, S. Chang. A. Hartshorn, S. Chang. MWISO Hubs development. LECG, LLC. Cambridge, MA, 2003.

2. E. R. Braziel. Trading hubs: Where power is traded and why. PMA OnLine Magazine 12, 1998.

Борисовский Павел Александрович,
Омский государственный технический университет,
пр. Мира 11, Омск, 644050, Россия, тел. (3812) 65-20-48.
E-mail: borisovski@user.omskreg.ru

Еремеев Антон Валентинович, Клоков Сергей Александрович
Омский филиал Института математики им С.Л.Соболева СО РАН,
ул. Певцова 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: eremeev@ofim.oscsbras.ru, klokov@ofim.oscsbras.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ОТСЕЧЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЯ В ВУЗАХ

И. Л. Васильев

Широко известно, что задача составления расписания в образовательных учреждениях является одной из сложнейших задач комбинаторной оптимизации. Поэтому для ее решения, как правило, разрабатываются эвристические методы. Точные методы решения, такие как различные модификации метода ветвей и границ, находили применение только в отдельных простых случаях. Это обусловлено тем, что целочисленные формулировки практических задач содержат большое количество переменных и ограничений, и, кроме того, они характеризуются большим разрывом целочисленности.

В настоящем докладе рассматривается одна практическая задача составления ВУЗовского расписания. Заданы множества учебных ресурсов (учебные курсы, преподаватели, группы студентов, учебные аудитории) и их взаимосвязь (учебный план, совместимость и достпупность различных ресурсов и пр.). Необходимо распределить имеющиеся ресурсы в определенный интервал времени с учетом требований, возникающих в рассматриваемом учебном заведении. Задача составления расписаний является задачей допустимости, которая сводится к задаче оптимизации разделением ограничений на *мягкие* и *жесткие.* Ставится задача поиска расписания, удовлетворяющего жестким ограничениям и минимизирующего нарушение мягких ограничений. К жестким ограничениям относятся требования выполнения учебного плана, совместимость и доступность имеющихся ресурсов, их бесконфликтное использование и пр. В качестве мягких ограничений рассматриваются пожелания преподавателей. Составлена модель целочисленного программирования (ЦП) и показано, что рассматриваемые примеры сложны для решения с помощью коммерческих решателей ЦП.

Для решения поставленной задачи был разработан метод ветвей и отсечений. Формулировка задача рассматривалась как задача упаковки множества с дополнительными ограничениям. Для усиления исходной формулировки были использованы хорошо известные отсечения, такие как отсечения клики и отсечения цикла нечетной длины. Кроме того, на основе анализа комбинаторных свойств задачи, были найдены новые семейства отсекающих плоскостей. Численный эксперимент показал эффективность предложенного подхода на практических примерах.

Работа поддержана грантами РФФИ 05-01-0011, НАТО RIG981258.

Васильев Игорь Леонидович,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН, ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3953) 51-13-98, факс (3952) 51-16-16. E-mail:vil@icc.ru

МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИЯ БЕСПРОВОДНЫХ СЕНСОРНЫХ СЕТЕЙ

В. В. Залюбовский

Отличительной особенностью сенсорных сетей (WSN) в сравнении с традиционными беспроводными сетями являются строго ограниченные ресурсы каждого сенсора. В первую очередь это относится к продолжительности его работы. Поэтому оптимизация энергопотребления WSN является в настоящее время одной из наиболее актуальных проблем [1].

Предполагается, что местоположение сенсоров и объектов мониторинга известно. Каждый сенсор может находится либо в активном, либо в "спящем"состоянии. В любой момент времени каждый наблюдаемый объект должен находиться в области достижимости хотя бы одного активного сенсора. Увеличение времени жизни WSN может быть достигнуто разбиением множества сенсоров на непересекающиеся подмножества, каждое из которых полностью покрывает все объекты [2]. В качестве дополнительного условия может выступать требование связности каждого из подмножеств.

Соответствующие оптимизацилнные задачи, будучи обобщением известной задачи о минимальном покрытии, являются NP-трудными.

Предлагаются быстрые эвристические алгоритмы и приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00395.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Hwang, D. H. C. Du, E. Kusmierek. Energy effisient organization of mobile sensor networks. // The International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems. 2005. V. 20. P. 221–233.

2. M. Cardei, D. Z. Du. Improving wireless sensor network lifetime through power aware organization. // Wireless Networks. 2005. V. 11. P. 333–340.

Залюбовский Вячеслав Валерьевич, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Коптюга, 4, 630090, Новосибирск, Россия, тел. (8-383) 333-21-89, факс (8-383) 333-25-98. E-mail: slava@math.nsc.ru

РАЗРАБОТКА АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ТЕСТИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ

Л. А. Заозерская, В. А. Планкова

Компьютерное тестирование – один из современных методов диагностики знаний, который может быть использован наряду с традиционными формами контроля для повышения уровня подготовки по математическим дисциплинам специалистов различных профилей. Эффективность тестирования во многом зависит от качества используемых тестов.

В [1] нами разработана методика построения "оптимальной" структуры теста из существующего набора типовых тестовых заданий с применением моделей дискретной оптимизации. В данной работе предлагается автоматизированная тестирующая система по линейному программированию в рамках курса "Экономико-математические методы" для студентов экономических специальностей, созданная на базе описанной методики. В соответствии со стандартом указанного курса на основе ряда сборников задач и авторских разработок был подготовлен набор типовых заданий по линейному программированию (ЛП), который прошел экспериментальную проверку при проведении зачета. После этого структура теста была определена с использованием одной из предложенных математических моделей, построенной на основе задачи о покрытии множества.

Тестирующая система направлена на оценивание навыков студентов по математическому моделированию экономических задач, их знаний теоретических основ и алгоритмов решения задач ЛП, умения экономически интерпретировать и анализировать полученные результаты. В качестве особенности системы можно отметить, что типовые задания, образующие вариант теста, формируются большей частью автоматически (одни – во время тестирования в соответствии с определенным алгоритмом, другие – до тестирования специальной утилитой), остальные задания традиционно выбираются из подготовленной преподавателем базы данных.

Система разработана в среде визуального программирования Delphi и предназначена для итогового контроля знаний студентов экономических специальностей. Кроме того, она может быть полезна для диагностики знаний студентов ряда других специальностей, а также для подготовки базы данных при создании тестов с помощью известных оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.А. Заозерская, В.А. Планкова. Создание автоматизированной системы компьютерного тестирования с использованием дискретной оптимизации // Тез. науч.-метод. конф. "Новые информационные технологии в университетском образовании". – Новосибирск: ИЭПМСО РАО, 2007. – С. 82-83.

Заозерская Лидия Анатольевна, Планкова Валентина Александровна,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, г. Омск, 644099, Россия. тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84,
E-mail:zaozer@ofim.oscsbras.ru, plankova@ofim.oscsbras.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОСИСТЕМЫ ПЕЛАГИАЛИ ОЗЕРА БАЙКАЛ

А. В. Казазаева, И. В. Мокрый

Экосистема пелагиали характеризуется устоявшимися трофическими взаимоотношениями, что позволяет выдвинуть ряд предположений, облегчающих процесс исследования, в частности, гипотезу стационарности среды, гипотезу о смертности особи только за счет выедания хищником и д.р.

Эти предположения, а также специфика экспериментальных данных, опубликованных в работах [1], [2], позволяют сформулировать методы оценки параметров динамики жизнедеятельности организмов экосистемы.

В работе представлены оценки коэффициентов рождаемости и смертности организмов и оценки потоков биомасс, а также построенная на этих оценках модель межгодовой динамики потоков биомасс популяций следующих видов организмов: пелагический бокоплав — макрогектопус, рыбы — большая голомянка и малая голомянка.

В основу модели положены дифференциальные уравнения типа Лотке–Вольтерра. Каждая популяция в модели представлена биомассами ее возрастных групп.

Расчеты показывают, что поведение модели достаточно устойчиво. При отклонении от равновесного состояния наблюдаются затухающие колебания динамических показателей с периодом около 3,5 лет, что не противоречит поведению исследуемой экосистемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стариков Г.В. Голомянки Байкала. Новосибирск.: Наука. Сиб. Отделение, 1977.
2. О.А. Тимошкин, Г.Ф. Мазепова, Н.Г. Мельник и др. Атлас и определитель пелагобионтов Байкала (с краткими очерками по их экологии). Новосибирск.: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1995.

Казазаева Анна Васильевна, ИМЭИ ИГУ, Иркутск ул. Гагарина 20, Россия, Тел. 8-9148-77-42-92. E-mail: kuz-ann@yandex.ru

Мокрый Игорь Владимирович, ИСЭМ СО РАН, Иркутск ул. Лермонтова 130, Россия, Тел. (8-3952-)42-97-64. E-mail: ygr@isem.sei.irk.ru

ОПТИМАЛЬНОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ В КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПОВТОРЯЮЩЕГОСЯ НАБОРА ЭТАЛОННЫХ ФРАГМЕНТОВ

А. В. Кельманов, Л. В. Михайлова, С. А. Хамидуллин

В работе продолжены систематизация и исследование дискретных экстремальных задач, возникающих при реализации нетрадиционного подхода к помехоустойчивому анализу и распознаванию числовых последовательностей [1]. Этот подход заключается в off-line обработке последовательности в сочетании с формализацией содержательной задачи как задачи проверки гипотез. Рассматриваемая задача — обобщение задачи, изученной в [2]. Настоящим исследованием установлено, что максимально правдоподобное обнаружение в числовой квазипериодической последовательности (искаженной аддитивной гауссовской некоррелированной помехой) повторяющегося набора эталонных фрагментов в случае, когда суммарное число фрагментов в последовательности неизвестно, сводится к решению следующей экстремальной задачи.

Дано: числовая последовательность $y_0, \ldots, y_{N-1}$, набор $(U_1, \ldots, U_L)$ ненулевых векторов из $\mathbb{R}^q$, натуральные числа N^-, N^+, $T_{\min}$ и $T_{\max}$. *Найти*: совокупность $\{n_1, \ldots, n_M\} \in \{0, \ldots, N-q\}$ и число M такие, что

$$\sum_{m=1}^{M} \{2(Y_{n_m}, U_{l(m|L)}) - \|U_{l(m|L)}\|^2\} \longrightarrow \max,$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение векторов, $\|\cdot\|$ — норма l_2 в $\mathbb{R}^q$, $Y_n = (y_n, \ldots, y_{n+q-1})$, $n = 0, \ldots, N-q$; $l(m, L) = (m-1) \bmod L + 1$, при ограничениях: $0 \leq n_1 \leq N^+ \leq N-q; 0 \leq N^- \leq n_M \leq N-q; q \leq T_{\min} \leq n_m - n_{m-1} \leq T_{\max} \leq N-q, m = 2, \ldots, M$.

Задача может быть эффективно решена путем перебора по всем допустимым $M \in [M_{\min}, M_{\max}]$ с помощью алгоритма, изложенного в [2], за время $O[(M_{\max} - M_{\min} + 1)(M_{\max} + M_{\min})(T_{\max} - T_{\min} + q)(N - q + 1)] = O(N^4)$; здесь $M_{\min}$ и $M_{\max}$ находятся из решения системы неравенств–ограничений. В данной работе обоснован менее трудоемкий алгоритм, позволяющий находить точное решение задачи с временной задержкой $O[\min\{L, M_{\max}\}(T_{\max} - T_{\min} + q)(N - q + 1)] = O(N^3)$. Этот алгоритм служит ядром помехоустойчивого алгоритма обнаружения.

Работа поддержана грантами РФФИ 06-01-00058 и 07-07-00022.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельманов А.В. Проблемы оптимизации в типовых задачах помехоустойчивой апостериорной обработки числовых последовательностей с квазипериодической структурой // Материалы 3-й Всероссийской конференции "Проблемы оптимизации и экономические приложения". Омск. 2006. С. 37-41.

2. Кельманов А.В., Михайлова Л.В., Хамидуллин С.А. Апостериорное обнаружение в квазипериодической последовательности повторяющегося набора эталонных фрагментов // ЖВМиМФ. 2007 (в печати).

Кельманов Александр Васильевич, Михайлова Людмила Викторовна,
Хамидуллин Сергей Асгадуллович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 333-3291, факс (383) 333-2598, e-mail: {kelm, okolnish, kham}@math.nsc.ru

ЗАДАЧА РАСПОЗНАВАНИЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, ВКЛЮЧАЮЩЕЙ ПОВТОРЯЮЩИЙСЯ НАБОР ЭТАЛОННЫХ ФРАГМЕНТОВ

А. В. Кельманов, Л. В. Михайлова, С. А. Хамидуллин

Рассматриваемая задача — обобщение задачи, исследованной в [1]. Она дополняет список полиномиально разрешимых и NP-трудных задач комбинаторной оптимизации, возникающих в рамках слабо изученного подхода к помехоустойчивому анализу и распознаванию числовых последовательностей с квазипериодической структурой [2]. Сущность этого подхода состоит в апостериорном (off-line) способе обработки последовательности при формализации содержательной задачи как задачи принятия решения. В работе показано, что максимально правдоподобное распознавание числовой квазипериодической последовательности (искаженной аддитивной гауссовской некоррелированной помехой), включающей повторяющийся набор эталонных фрагментов, в случае, когда суммарное число фрагментов в последовательности известно, сводится к решению следующей экстремальной задачи.

Дано: числовая последовательность $y_0, \dots, y_{N-1}$, натуральные числа M, N^-, N^+, $T_{\min}$, $T_{\max}$ и множество $\mathbb{W} \subset \{(U^{(1)}, \dots, U^{(i)}) : U^{(k)} \in \mathbb{R}^q, \|U^{(k)}\| \neq 0, k = 1, \dots, i; i \leq M\}$, $|\mathbb{W}| = K$. *Найти*: набор $(U_1, \dots, U_L) \in \mathbb{W}$ такой, что

$$\sum_{m=1}^{M} \{2(Y_{n_m}, U_{l(m,L)}) - \|U_{l(m,L)}\|^2\} \longrightarrow \max,$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение векторов, $\|\cdot\|$ — норма l_2 в $\mathbb{R}^q$, $Y_n = (y_n, \dots, y_{n+q-1})$, $n = 0, \dots, N-q$; $l(m, L) = (m-1) \bmod L + 1$, при ограничениях: 1) $0 \leq n_1 \leq N^+ \leq N - q; 0 \leq N^- \leq n_M \leq N - q; q \leq T_{\min} \leq n_m - n_{m-1} \leq T_{\max} \leq N - q, m = 2, \dots, M$; 2) $M_{\min} \leq M \leq M_{\max}$, где $M_{\min}$ и $M_{\max}$ находятся из решения системы неравенств.

Обоснован точный эффективный алгоритм решения задачи с оценкой временной сложности $O[KM(T_{\max} - T_{\min} + q)(N - q + 1)] = O(KMN^2)$. Этот алгоритм является ядром алгоритма распознавания, устойчивого к помехам.

Работа поддержана грантами РФФИ 06-01-00058 и 07-07-00022.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельманов А.В., Михайлова Л.В., Хамидуллин С.А. Апостериорное обнаружение в квазипериодической последовательности повторяющегося набора эталонных фрагментов // ЖВМиМФ. 2007 (в печати).

2. Кельманов А.В. Проблемы оптимизации в типовых задачах помехоустойчивой апостериорной обработки числовых последовательностей с квазипериодической структурой // Материалы 3-й Всероссийской конференции "Проблемы оптимизации и экономические приложения". Омск. 2006. С. 37-41.

Кельманов Александр Васильевич, Михайлова Людмила Викторовна,
Хамидуллин Сергей Асгадуллович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 333-3291, факс (383) 333-2598, e-mail: {kelm, okolnish, kham}@math.nsc.ru

ПАКЕТ ПРОГРАММ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

И. В. Мокрый, О. В. Хамисов

Предлагаемый пакет программ предназначен для решения задачи квадратичного программирования следующего вида:

$$q_0(x) \to \min, \tag{1}$$

$$q_i(x) = 0,\ i = 1, \dots, \eta, \tag{2}$$

$$q_i(x) \le 0,\ i = \eta + 1, \dots, \eta + \tau, \tag{3}$$

$$Ax \le b, \tag{4}$$

$$Hx = t, \tag{5}$$

$$x \in \Pi = \{x \in R^n : \underline{x} \le x \le \overline{x}\}, \tag{6}$$

где

$$q_i(x) = x^T Q^i x + (c^i)^T x + r_i \tag{7}$$

– не обязательно выпуклые квадратичные функции, Q^i – симметричные $n \times n$ матрицы, $c^i \in R^n$, $r_i \in R$, $i = 0, \dots, \eta + \tau$, A – $m \times n$ матрица, $b \in R^m$, H – $l \times n$ матрица, $t \in R^l$, $\underline{x} \in R^n$, $\overline{x} \in R^n$.

Целью пакета программ является нахождение глобального минимума в рассматриваемой задаче в том случае если допустимая область, определяемая ограничениями (2)-(6), не пуста и идентификация несовместности ограничений в противном случае.

В целевой функции $q_0(x)$ допускается отсутствие квадратичной части, в этом случае целевая функция будет линейной $q_0(x) = (c^0)^T x + r_0$. В квадратичных функциях-ограничения наличие квадратичной части обязательно. Отсутствие квадратичных ограничений-равенств соответствует значению $\eta = 0$, квадратичных ограничений-неравенств – значению $\tau = 0$.

Методика решения комбинирование локальной и глобальной оптимизации. Локальный поиск представляет собой специальный вид метода доверительных (многомерных) интервалов. Технически эта часть методики представляет собой линеаризацию квадратичных функций в сочетании с адаптивным определением многомерного параллелепипеда, в рамках которого линейная модель считается приемлемой.

Глобальный поиск основан на методе ветвей и границ. Для текущего параллелепипеда решается вспомогательная задача линейного программирования, разбиение допустимой области осуществляется делением текущего параллелепипеда на два относительно наибольшего ребра. Предполагается демонстрация работы пакета.

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00587-а

Мокрый Игорь Владимирович, Хамисов Олег Валерьевич,
ИСЭМ СО РАН, ул. Лермонтова 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 42-84-39, факс (3952) 42-67-96, E-mail: khamisov@isem.sei.irk.ru

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОМСКОЙ НИЗКОНАПОРНОЙ ПЛОТИНЫ

В. А. Сальников, А. А. Соловьев, М. Ю. Фатыхова

Трудно переоценить значение реки Иртыш для Омской области, крупнейшего промышленного и аграрного региона России. Иртыш для омичей — это основной источник водоснабжения, зона концентрированного расселения людей, крупная транспортная магистраль государственного значения, рыбоводный водоем, зона отдыха, а его пойма — естественный богатейший источник получения кормов и родной дом многих представителей фауны Западной Сибири. Кроме того, Иртыш — это история от Ермака до наших дней.

Иртыш — трансграничная река, протекающая по территории трех государств: КНР, Казахстан, Россия, каждое из которых осуществляет отбор воды, увеличивающийся с каждым годом. Изменение водного режима Иртыша привело к сокращению пойменных водоемов. В результате зарегулирования стока Иртыша уменьшились глубины, что потребовало переустройства многих водозаборов, увеличения объема дноуглубительных работ для обеспечения гарантированных судоходных глубин и многих других работ, связанных с низкими уровнями реки в летний период. В перспективе при снижении минимальных уровней возникает необходимость полной реконструкции водозаборов или строительства новых.

Анализ различных вариантов решения водных проблем Омской области показывает всю сложность нахождения оптимального варианта, который бы удовлетворял потребности всех водопотребителей и водопользователей Иртыша. Выбор створа для строительства современной Омской низконапорной плотины для целей водоснабжения Омской области следует делать с позиции не только приближения водохранилища к г. Омску, но и с учетом безопасности города в случае чрезвычайных ситуаций.

В процессе проектирования плотины требуется создание математической модели сезонного регулирования стока р. Иртыш. Необходимость применения модельных расчетов обусловлена тем, что эксперименты с водно–ресурсными системами (ВРС) сложны, во многих случаях недопустимы. Для выбора стратегий управления ВРС могут быть использованы потоковые модели, которые отображают основные особенности их функционирования и развития. В потоковых моделях ВРС изображается сетью, геометрическое начертание которой согласуется со схематическим изображением моделируемой системы. Сетью моделируются все рассматриваемые элементы — существующие и возможные. Элементы сети, соответствующие фрагментам ВРС, обладают эквивалентными им характеристиками. Оптимальное функционирование ВРС описывается задачей определения оптимальных потоков в сети, а параметры ВРС находятся через оптимальные значения параметров сети и потоков в ней.

Сальников Виктор Александрович, Соловьев Анатолий Алексеевич,
Фатыхова Марина Юрьевна,
Сибирская автомобильно–дорожная академия, тел. (3812) 65-17-63

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВЕКТОР-ГРАДИЕНТА ПРИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

А. Ю. Торгашов

Рассматривается решение задачи идентификации запаздывания динамического объекта [1], на основе метода наискорейшего спуска. Модель динамики объекта представлена в дискретной форме, поэтому возникает необходимость в аппроксимации вектор-градиента целевой функции, используя конечные разности.

Дискретная импульсная характеристика объекта задается матричным уравнением, зависящим от вектора запаздывания d : $W\beta(d) = H$, где W — матрица возможных вариаций запаздывания; β — вектор радиально-базисных функций; H — вектор коэффициентов импульсной характеристики. В настоящей работе излагается методика нахождения приближенных значений вектор-градиента минимизируемой функции: $f(d) = (y - \sum_j h_j(d)u_j)^2$, где y — измеряемое значение выходной величины объекта, u — входное воздействие.

Работа поддержана грантами ДВО РАН №06-III-B-03-080 и РФФИ 06-08-96014-р-восток-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Торгашов А.Ю. Управление нестационарным объектом на основе прогноза по непараметрической модели // Сб. тезисов докладов III Международной конференции по проблемам управления. Москва, 2006. Т.1., секция А.6. С. 85.

Торгашов Андрей Юрьевич,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, ул. Радио, 5, Владивосток, 690041, Россия, тел. (8-4232) 31-02-02, факс (8-4232) 31-04-52.
E-mail: torgashov@iacp.dvo.ru

РОБАСТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ РЕГРЕССИИ И АВТОРЕГРЕССИИ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. Н. Тырсин, А. В. Панюков

Рассмотрим проблему оценки коэффициентов линейных уравнений регрессии (1) и авторегрессии (2) по экспериментальным данным

$$y_i = a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_i x_{ij} + \epsilon_i,\ i = 1, 2, \dots, n, \tag{1}$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} a_j y_{i-j} + \epsilon_i,\ i = m+1, m+2, \dots, n. \tag{2}$$

Здесь $y_1, y_2, \dots, y_n$ – значения зависимой переменной; $x_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{nj}$ – значения j-й объясняющей переменной; $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ – случайные ошибки; $\mathbf{a}$ – искомый вектор неслучайных коэффициентов. Для устойчивого оценивания коэффициентов моделей (1) и (2) в работе [1] предложен обобщенный метод наименьших модулей (ОМНМ), состоящий в решении задачи

$$\sum_{i=1}^{n} \rho\left(\left| y_i - a_0 - \sum_{j=1}^{m} a_j x_{ij} \right|\right) \Rightarrow \min_{\mathbf{a}\in\mathbf{R}^{m+1}}, \tag{3}$$

где $\rho(x)$ – дважды непрерывно-дифференцируемая на положительной полуоси функция, причем $\rho(0) = 0$, $\forall x > 0\, \rho'(x) > 0$, $\rho''(x) < 0$. При параметрической идентификации модели (2) решается аналогичная задача.

В докладе рассматривается подход, основанный на сведении решения задачи (3) к решению последовательности задач линейного программирования. Это позволяет значительно снизить объем вычислений по сравнению с переборным поиском и анализом всех узловых точек.

Описаны возможные алгоритмы, основанные на данном подходе. Приведены результаты их работы на ряде примеров.

Работа поддержана грантом РФФИ 07-01-96035 Урал-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тырсин А.Н. Робастное построение регрессионных зависимостей на основе обобщенного метода наименьших модулей. // Записки научных семинаров ПОМИ. 2005. Т. 328. С. 236-250.

Тырсин Александр Николаевич, Челябинский государственный университет, ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454021, Россия, тел. (8-351) 799-72-28, факс (8-351) 742-09-25, E-mail: at2001@yandex.ru

Панюков Анатолий Васильевич, Южно-Уральский государственный университет, пр. Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия, тел. (8-351) 267-90-39, факс (8-351) 267-99-00, E-mail: pav@susu.ac.ru

ФОРМИРОВАНИЕ СЕТОК ДЛЯ ЦИФРОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБТЕКАНИЯ КРУПНОГАБАРИТНЫХ ПЛАВУЧИХ ВЕТРОТУРБИН

В. В. Чебоксаров, В. В. Чебоксаров, S. W. Chau, Y. J. Chen, J. S. Kouh

В России предложен новый вид энергетического объекта — ветроэнергетические морские установки [1]. Их особенностью является использование крупногабаритного (несколько сот метров в диаметре) плавучего ротора с вертикальной осью вращения и поворотными лопастями по периметру ротора. Размеры установки исключают натурные эксперименты из-за невозможности соблюдения подобие по Рейнольдсу [2]. Однако надежные результаты могут быть получены проверенными методами компьютерной динамики жидкости при корректном построении расчетной области.

На первом этапе на кластере МВС-1000/17 ИАПУ ДВО РАН решается задача моделирования воздушных потоков сквозь турбину, включающую 30–60 вертикальных лопастей, расположенных под разными углами. В работе показывается, что тетраэдрная сетка даёт завышенные результаты из-за неправильной обработки потоков в пристеночной области. Представлена методика формирования неконформной сетки гексаэдров в рабочей области, поделённой на стационарную и вращающуюся зоны, позволяющей обойти существующие ограничения. Показано, как происходит деление зон на блоки. Сетка из 4 млн. ячеек характеризуется плавным ростом размеров от миллиметрового пристеночного слоя ($y^+ < 500$) до границ области, имеющей длину более 1000 м.

На втором этапе совместно проводится гидродинамический расчет вращающегося понтона, состоящего из заглубленной трубы и 45 вертикальных колонн, с учетом поверхностных волн. Периодичность геометрии позволяет здесь строить сетку путем копирования модуля, включающего одну колонну. Показывается, что и в этом случае конформная сетка не даёт приемлемого числа ячеек. Приведены результаты сравнительных расчетов.

Работа поддерживается грантом РФФИ/ННС Тайваня 06-01-89505-ННС_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cheboxarov Valery V., Cheboxarov Victor V., Bekker A.T., Anokhin P.V. A Novel Turbine for Offshore Wind Energy: Design and Energy Conversion// Proc. of the 12th Int. Offshore and Polar Engineering Conference, Kitakyushu, Japan, 2002. V.1. P 700-706.

2. Чебоксаров Вал. В., Чебоксаров Вик. В. Исследование крупногабаритных плавучих ветротурбин // Вестник ДВО РАН, 2005, №6, с. 46–51.

Чебоксаров Виктор Валериевич, ИАПУ ДВО РАН, ул. Радио, 5, Владивосток, 690041, Россия, тел. (8-423-2) 30-06-82, факс (8-423-2) 31-04-52, E-mail:VChebox@gmail.com

Чебоксаров Валерий Викулович, ИАПУ ДВО РАН, ул. Радио, 5, Владивосток, 690041, Россия, тел. (8-423-2) 30-06-82, факс (8-423-2) 31-04-52, E-mail:Val.Chebox@gmail.com

Chau Shiu-Wu, Chung Yuan Christian Univ., 200 Chung-Pei Rd, Jhongli, 32023, Taiwan, ROC, tel. (886-3) 265-4311, fax (886-3) 265-4362, e-mail: chausw@cycu.edu.tw

Chen Yen-Jen, Lunghwa Inst. of Technol., 300 Wan-Shou Rd., Sec.1, Kueishan, Taoyuan, Taiwan, ROC, tel/fax (886-2) 8209-3211, e-mail:clive_chen@mail.lhu.edu.tw

Kouh Jen-Shiang, National Taiwan Univ., No. 1, Sec. 4, Roosevelt Road, Taipei, 10617, Taiwan, ROC, tel. (886-2) 3366-5751, fax (886-2)) 2392-9885, e-mail:kouhjsh@ntu.edu.tw

ОБ ИНСТРУМЕНТАРИИ СИСТЕМЫ ИНДИКАТИВНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ В РЕГИОНЕ

И. И. Шаповалова, С. М. Лавлинский

Разработка механизмов косвенного регулирования деятельности независимых хозяйственных субъектов в регионе, направленных на достижение стратегических целей социально-экономического развития территории — основная задача государства как основного игрока региональной экономики. Ключевая роль здесь принадлежит индикативному планированию — процессу формирования системы индикаторов, характеризующих состояние и развитие экономики, и государственному регулированию социально–экономических процессов, обеспечивающему достижение целевых значений индикаторов.

В России пока еще немного регионов, где используются элементы индикативного планирования, но имеющаяся практика (Татарстан, Санкт-Петербург, Чувашия, Мордовия), подтверждая эффективность метода индикативного планирования в целом, говорит о необходимости адаптации базовой идеи индикативного планирования к реалиям экономики конкретной территории. Здесь необходимо творчески подойти к формированию концепции системы индикативного планирования в регионе и на основе содержательного анализа исходных посылок такой концепции строить регламент полного комплекса процедур планирования и прогнозирования, сочетающий разработку долгосрочных (10–15 лет), среднесрочных (3 года) и краткосрочных (1 год) индикативных планов, согласованных между собой по основным целевым индикаторам.

При этом для всех временных горизонтов необходимо разработать методику информационно-технологического обеспечения процессов принятия решений и механизм построения индикативного плана, обеспечивающий сбалансированность намечаемых мероприятий по трудовым и материальным ресурсам, бюджетных планов и доходов бюджетов на протяжении всего рассматриваемого периода. Для решения вышеперечисленных проблем необходимо взаимосвязано решить три основные задачи.

1. Разработка системы мониторинга социально–экономического развития региона в разрезе муниципальных образований.

2. Разработка методических основ индикативного планирования на базе методов целевого прогнозирования.

3. Разработка специальной системы моделей, описывающих социально–экономическое развитие региона, в которой реализован набор качеств, отсутствующий в известных системах регионального планирования и прогнозирования — двухуровневое пространственное представление региональной экономики; специальный инструментарий работы с объектами минерально–сырьевой базы; приоритет долгосрочных временных горизонтов и показателей уровня жизни в структуре индикативного плана.

Инструментарий решения вышеперечисленных задач образует содержательную основу перехода региональных администраций на современные технологии индикативного планирования, в наибольшей степени позволяющие реализовать возможности фундаментального подхода к управлению по результату.

Работа поддержана грантом РФФИ 07-06-13500.

Шаповалова Ирина Ивановна, Администрация НСО, Красный пр. 18, Новосибирск, РФ, тел. 8-383-2237210, E-mail: shii@obladm.nso.ru.

Лавлинский Сергей Михайлович, Югорский НИИ информационных технологий, пр. Мира,151, г. Ханты-Мансийск, РФ, тел.8-34671-59175, E-mail: lavlin@uriit.ru.

ФОРМИРОВАНИЕ СЕРИЙ МОДЕЛЕЙ ОДЕЖДЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

А. В. Ярош, Л. В. Ларькина

В [1] и других работах развивается подход к эскизному проектированию одежды основанный на использовании задач дискретной оптимизации с логическими ограничениями. Проведенные исследования на некоторых ассортиментных группах швейных изделий (например, женских демисезонных пальто) показали перспективность этого направления.

В данной работе указанный подход применяется для решения задачи формирования серий одежды [2]. Это может быть сделано следующим образом. Предположим, что имеется совокупность составляющих, используемая для получения моделей одежды. При формировании серий моделей из рассматриваемой совокупности выделяется группа составляющих ("ядро"), которая должна войти в каждое изделие, остальные элементы добавляются по мере необходимости и с учетом предпочтений проектировщика. Далее строится модель дискретной оптимизации с логическими и другими ограничениями для всей совокупности составляющих и фиксируются элементы указанной группы, в результате чего математическая модель упрощается. Проведя экспериментальные расчеты на ЭВМ для полученной модели, найдем набор эскизов одежды с общей группой составляющих. Остальные элементы могут создавать разнообразие эскизов в зависимости от поставленной задачи проектирования.

Отметим, что в "ядро"желательно включать составляющие, которые совпадают или близки по технологии обработки и конструкции. С практической точки зрения это позволит выполнять замену одних изделий на другие и изготавливать их в едином потоке без дополнительных затрат времени.

Проведенный вычислительный эксперимент для женских жакетов показал широкие возможности применения данного подхода и его практическую значимость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колоколов А.А., Нагорная З.Е., Ярош А.В. Системы автоматизированного проектирования в сервисе: учебное пособие. Ч. 1 - Омск: Омский государственный институт сервиса. 2006. – 113 с.

2. Ларькина Л.В. Разработка основ проектирования свободнокомплектующейся одежды // Сборник статей III Международной научно-практической конф. "Современные тенденции и перспективы развития образования в высшей школе". Ч. 1 - Омск: ОГИС. 2005. – С. 137-138.

Ярош Александра Викторовна,
Омский государственный институт сервиса, ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия,
тел. (8-381-2) 23-67-39, факс (8-381-2) 23-45-84,E-mail: a.v.yarosh@rambler.ru

Ларькина Лариса Викторовна,
Филиал ГОУ ВПО "Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности"в г. Омске, ул. Пушкина, 63, Омск, 644010, Россия,
тел. (8-381-2) 31-57-04, факс (8-381-2) 31-00-96, E-mail: llv-1965@mail.ru

Список авторов

Российская конференция

Дискретная оптимизация и исследование операций

Владивосток, 7 – 14 сентября 2007

Материалы конференции