DOOR-2010

Республика Алтай
27 июня – 3 июля 2010

Российская конференция

Дискретная оптимизация и исследование операций

Материалы конференции

DOOR-2010

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирский государственный университет, Российское научное общество исследования операций, Ассоциация математического программирования

в рамках
Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы

при финансовой поддержке **Российского фонда фундаментальных исследований**

Программный комитет

- **д.ф.-м.н. В.Л. Береснев** (Новосибирск) (Председатель)
- д.ф.-м.н. А.С. Антипин (Москва)
- д.ф.-м.н. Э.Х. Гимади (Новосибирск)
- акад. РАН И.И. Еремин (Екатеринбург)
- к.ф.-м.н. А.В. Еремеев (Омск)
- д.ф.-м.н. А.И. Ерзин (Новосибирск)
- д.т.н. В.И. Зоркальцев (Иркутск)
- д.ф.-м.н. А.В. Кельманов (Новосибирск)
- д.ф.-м.н. А.А. Колоколов (Омск)
- к.ф.-м.н. Ю.А. Кочетов (Новосибирск)
- д.ф.-м.н. Е.А. Нурминский (Владивосток)
- д.ф.-м.н. В.К. Попков (Новосибирск)
- д.ф.-м.н. Л.Д. Попов (Екатеринбург)
- член-корр. РАН К.В. Рудаков (Москва)
- д.ф.-м.н. С.В. Севастьянов (Новосибирск)
- д.ф.-м.н. А.С. Стрекаловский (Иркутск)
- к.ф.м.н. О.В. Хамисов (Иркутск)
- д.ф.-м.н. М.Ю. Хачай (Екатеринбург)
- член-корр. РАН А.Г. Ченцов (Екатеринбург)
- д.ф.-м.н. В.Н. Шевченко (Нижний Новгород)
- д.ф.-м.н. В.И. Шмырев (Новосибирск)

Организационный комитет

- д.ф.-м.н. В.Л. Береснев (Новосибирск)
- д.ф.-м.н. А.И. Ерзин (Новосибирск)
- к.ф.-м.н. Ю.А. Кочетов (Новосибирск)
- д.т.н. С.М. Лавлинский (Новосибирск)
- к.ф.-м.н. А.В. Плясунов (Новосибирск)
- к.ф.-м.н. Н.Ю. Золотых (Нижний Новгород)
- Н.А. Кочетова (Новосибирск)

---

http://www.math.nsc.ru/conference/DAOR'04/

e-mail: door@math.nsc.ru

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л. СОБОЛЕВА СО РАН

Российская конференция

Дискретная оптимизация и исследование операций

Алтай, 27 июня – 3 июля 2010

Материалы конференции

Новосибирск
Издательство Института математики
2010

ББК 22.1
Д76

Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций»: Материалы конференции (Алтай, 27 июня – 3 июля 2010). — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. — 222 с.

ISBN 978-5-86134-172-1.

Данные материалы содержат пленарные доклады и тезисы выступлений, представленные на Российскую конференцию «Дискретная оптимизация и исследование операций» (DOOR-2010).

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-01-06029), Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы.

В редактировании выпуска принимали участие:
В. Л. Береснев, Э. Х. Гимади, В. И. Зоркальцев, Ю. А. Кочетов, А.В. Кононов, А.В. Плясунов, В.И. Шмырев, С.В. Севастьянов.

Оригинал-макет подготовили:
Н. А. Кочетова, П.А. Кононова.
При оформлении обложки использована авторская фотография Е. Бабуриной.

Ответственный за выпуск Ю. А. Кочетов.

М $\dfrac{1602100000-04}{Я82(03)-2010}$ Без объявл.

ISBN 978-5-86134-172-1

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛАН РАБОТЫ КОНФЕРЕНЦИИ

27 ИЮНЯ, ВОСКРЕСЕНЬЕ
10:00 Отъезд от ИМ СО РАН

28 ИЮНЯ, ПОНЕДЕЛЬНИК

10.00 – 10.30 **ОТКРЫТИЕ КОНФЕРЕНЦИИ**

10.30 – 12.00 Пленарное заседание

15.00 – 16.20 Секционные заседания
16:20 – 16:50 Кофе-брейк
16.50 – 17.50 Секционные заседания

21.00 – 23.00 **ФУРШЕТ** (Летнее кафе)

29 ИЮНЯ, ВТОРНИК

10.00 – 11.30 Пленарное заседание

11.30 – 12.00 Кофе-брейк

12:00 – 12:45 Пленарное заседание

15.00 – 16.20 Секционные заседания
16:20 – 16:50 Кофе-брейк
16.50 – 17.50 Секционные заседания

20.00 – 22.00 **СПОРТИВНЫЕ МЕРОПРИЯТИЯ**

30 ИЮНЯ, СРЕДА

10.00 – 11.30 Пленарное заседание

11.30 – 12.00 Кофе-брейк

12:00 – 12:45 Пленарное заседание

15.00 – 16.20 Секционные заседания
16:20 – 16:50 Кофе-брейк
16.50 – 17.50 Секционные заседания

21.00 – 23.00 **ФУРШЕТ** (Летнее кафе)

1 ИЮЛЯ, ЧЕТВЕРГ

10.00 – 11.30 Пленарное заседание

11.30 – 12.00 Кофе-брейк

12:00 – 12:45 Пленарное заседание

15.00 – 18.00 **ЭКСКУРСИИ**

2 ИЮЛЯ, ПЯТНИЦА

10.00 – 11.30 Пленарное заседание

11.30 – 12.00 Кофе-брейк

12:00 – 12:45 Пленарное заседание

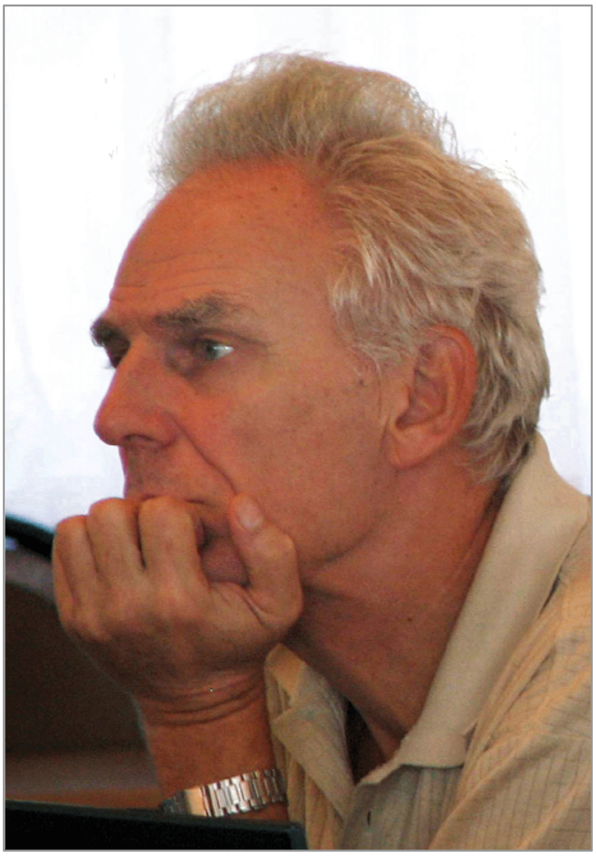
15.00 – 16.20 Секционные заседания
16:20 – 17:00 Кофе-брейк

17.00 – 17.30 **ЗАКРЫТИЕ**

20.00 – 23.00 **БАНКЕТ** (Ресторан Ареда-1)

3 ИЮЛЯ, СУББОТА
8:00 Отъезд

70 лет В. Н. ШЕВЧЕНКО
ПОЗДРАВЛЯЕМ ЮБИЛЯРА!



В июне исполняется 70 лет заведующему кафедрой математической логики и высшей алгебры факультета вычислительной математики и кибернетики Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, доктору физико-математических наук, профессору **Валерию Николаевичу Шевченко.**

В. Н. Шевченко родился 17 июня 1940 г. в Минске. В 1957 г. в Горьком он закончил среднюю школу и поступил в Горьковский государственный университет на физико-математический факультет. В 1962 г. В. Н. Шевченко закончил мехмат и поступил в аспирантуру. С 1965 г. по настоящее время он работает на факультете вычислительной математики и кибернетики.

Научной работой В. Н. Шевченко начал заниматься на 3-м курсе под руководством зав. кафедрой математической логики и высшей алгебры доц. Ю.В. Глебского. Эти исследования, продолженные далее в аспирантуре, были связаны с разработкой и изучением математических моделей производственных процессов. Полученные результаты привели в 1966 г. к защите кандидатской диссертации «О составлении оптимальных расписаний».

После защиты кандидатской диссертации В. Н. Шевченко продолжает заниматься дискретной оптимизацией. В 1988 г. он защищает докторскую диссертацию «Алгебраический подход в целочисленном линейном программировании».

Исследования В. Н. Шевченко и созданной им школы отличает последовательное использование алгебраических методов в дискретной оптимизации, что позволяет глубже понять природу изучаемых задач. Хорошо известно, что задачу целочисленного линейного программирования можно сформулировать как задачу максимизации линейной функции cx при ограничении $x \in P_I$, где $P = \{x \in \mathbf{R}^d : Ax \leq b\}$, $P_I = \mathrm{conv}(P \cap \mathbf{Z}^d)$, $A \in \mathbf{Z}^{m \times d}$, $b \in \mathbf{Z}^m$. В своих работах В.Н. Шевченко и его ученики проводят глубокое исследование комбинаторных и метрических свойств полиэдров P и P_I. Перечислим некоторые результаты.

В. Н. Шевченко предложил дискретный аналог теоремы Фаркаша и решил близкую задачу агрегации множества неотрицательных целочисленных решений системы линейных уравнений. В частности, им получены необходимые и достаточные условия существования агрегирующего уравнения и доказана (совместно с С. И. Веселовым) неизбежность экспоненциального роста его коэффициентов.

В.Н. Шевченко разработал единый подход к анализу существующих методов отсечений. Данный подход позволяет строить и анализировать новые алгоритмы отсечений для задач целочисленного линейного и выпуклого программирования.

Получены оценки абсолютных величин миноров и перманентов в матрицах ограничений для ряда задач целочисленного программирования, например, для многоиндексных транспортных задач, что позволяет оценить знаменатели в значениях координат вершин полиэдра P (совместно с А.П. Ильичевым, А.А. Федотовой, Е.Б. Титовой и др.). Данные результаты представляют несомненный интерес в целочисленном программировании, так как большие знаменатели, как правило, означают сложную комбинаторную структуру полиэдра P_I. Сформулирована гипотеза, гласящая, что класс задач целочисленного линейного программирования, в которых миноры матрицы A ограничены константой δ, является разрешимым за полиномиальное время. Эта гипотеза справедлива при $\delta=1$. Частично она подтверждена С.И. Веселовым и А.Ю. Чирковым для $\delta=2$.

В.Н. Шевченко предложил метод получения нетривиальных верхних оценок числа вершин полиэдра P_I. Метод состоит в отображении множества вершин полиэдра P_I в разделённое множество и оценке его мощности. Разработанный метод позволил В.Н. Шевченко и его ученикам С.И. Веселову и А.Ю. Чиркову получить оценки числа вершин для многих важных задач. Эти результаты применены к задаче расшифровки пороговых функций и близким задачам. Совместно с Н.Ю. Золотых удалось построить экспоненциальные нижние оценки сложности для одного класса оракульных алгоритмов решения задачи о рюкзаке. Совместно с А.Ю. Чирковым и Н.Ю. Золотых выделены классы эффективно разрешимых задач многокритериального целочисленного линейного программирования, описано строение множества оптимальных по Парето решений.

В последнее время В. Н. Шевченко активно занимается комбинаторной теорией многогранников. Им открыты аналоги для триангуляций известных уравнений Дена–Соммервиля, описаны множества f–векторов триангуляций циклических политопов, совместно с Д. В. Груздевым разработан ряд алгоритмов построения триангуляций. Предложено и исследовано представление решётки граней выпуклого многогранника и представление симплициального комплекса граней триангуляции точечной конфигурации булевыми функциями. Установлен ряд соотношений для f–векторов пирамидальных триангуляций точечных конфигураций.

В. Н. Шевченко — известный ученый и крупный специалист в области дискретной оптимизации. Им опубликовано более 150 научных работ. Его монография «Качественные вопросы целочисленного программирования», вышедшая в свет в 1995 г., переведена на английский язык и опубликована Американским математическим обществом. Под руководством В. Н. Шевченко защитили кандидатские диссертации 7 его учеников.

В. Н. Шевченко — почетный работник высшего профессионального образования, почетный работник ННГУ. Регулярно участвует в работе программных комитетов ряда конференций по дискретной математике и методам оптимизации. Он член диссертационного совета, член правления Нижегородского математического общества, член правления Ассоциации математического программирования, член Американского Математического общества. В. Н. Шевченко — руководитель постоянного Нижегородского семинара по дискретной математике.

С 1970 г. Валерий Николаевич возглавляет кафедру математической логики и высшей алгебры. Сфера научных интересов ее сотрудников — дискретная математика. Выдающиеся результаты получены ими в целочисленном программировании, дискретной геометрии, теории графов, теории кодирования, математической логике и др. В.Н. Шевченко — признанный лидер Нижегородской научной школы по дискретной математике.

Дорогой Валерий Николаевич!
Желаем Вам крепкого здоровья и новых научных достижений!

Пленарные доклады

ВЫЧИСЛЕНИЕ СЕДЛОВЫХ ТОЧЕК В КЛАССЕ ПРОГРАММНЫХ СТРАТЕГИЙ

А. С. Антипин

В работе рассматривается итеративный метод вычисления седловой точки выпукло-вогнутой функции, определенной в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Метод представляет собой процесс градиентного типа, управляемый с помощью обратных связей. Обратимся к формальной постановке задачи.

Назовем функцию кусочно-дифференцируемой на сегменте, если она кусочно-непрерывна на этом сегменте и дифференцируема в точках непрерывности. Рассмотрим в пространстве $L_n^2[0,T]$ линейное подпространство $\check{C}_n[0,T]$ ограниченных непрерывных кусочно-дифференцируемых векторных функций $x_i(t) = (x_i^1(t),...,x_i^n(t))$, $i = 1,2$, и линейное подпространство $S_n[0,T]$ кусочно-непрерывных функций. Характерный представитель первого класса функций - это $|x(t)|$, а второго $sign(x(t))$. Введем множества $U_i \subset S_n[0,T],\ i = 1,2$, кусочно-непрерывных на $[0,T]$ управлений $u_i(t) = (u_i^1(t),...,u_i^{r_i}(t))$, удовлетворяющих ограничениям интервального типа:

$$U_i = \{u_i(t) \mid u_{ij} \in [u_{ij}^-, u_{ij}^+],\ j = 1,2,...,r_i,\ 0 \le t \le T\},\ i = 1,2. \quad (1)$$

Пусть пары векторных функций $(x_1(t),u_1(t))$ и $(x_2(t),u_2(t))$ удовлетворяют системе двух независимых обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = D_1(t)x_1(t) + B_1(t)u_1(t), \quad 0 \le t \le T, \quad x_1(0) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = D_2(t)x_2(t) + B_2(t)u_2(t), \quad 0 \le t \le T, \quad x_2(0) = 0. \quad (2)$$

Здесь $D_i(t), B_i(t),\ i = 1,2,$ - заданные непрерывные функциональные матрицы размерностей $n \times n$ и $n \times r_i$ соответственно, определенные на $[0,T]$.

Поскольку правые части этих дифференциальных уравнений могут быть разрывны, то понятие решения уравнений требуют уточнения. А именно, будем называть решениями системы (2), соответствующими начальным условиям $x_i(0) = 0$ и управлениям $u_i(t), i = 1,2$, непрерывные функции $x_i(t)$, удовлетворяющие равенствам

$$x_i(t) = x_i(0) + \int_0^t (D_i(\tau)x_i(\tau) + B_i(\tau)u_i(\tau))d\tau,\ 0 \le t \le T. \quad (3)$$

Интеграл здесь понимается в смысле Римана, поскольку этого понимания достаточно для выполнения формулы Ньютона-Лейбница (основной теоремы анализа).

В силу (2) каждому допустимому управлению $u_i(t) \in U_i$ однозначно соответствует единственная траектория $x_i(t) = x_i(u_i(t)) \in \check{C}_n[0,T]$, которой, в свою очередь, отвечает единственный вектор $x_i(T)$. Правые концы траекторий $(x_1(T), x_2(T))$ описывают в пространстве $R^n \times R^n$ множество достижимости, которое будем обозначать как $X_1(T) \times X_2(T) = W(T)$. На множестве допустимых управлений $U_1 \times U_2 = U$ определим седловую функцию

$$L(u_1(t),u_2(t)) = \langle x_1(T) - b_1, x_2(T) - b_2 \rangle, \quad (4)$$

где $(b_1, b_2) \in X_1(T) \times X_2(T)$, - заданные вектора, и поставим задачу вычисления седловой точки $(u_1^*(t), u_2^*(t))$ функции $L(u_1(t), u_2(t))$ на этом множестве:

$$(u_1^*(t), u_2^*(t)) \in \mathrm{ArgSdl}\{L(u_1(t), u_2(t)) \mid u_i(t) \in U_i,\ i = 1, 2\}, \tag{5}$$

где символ ArgSdl$\{...\}$ обозначает множество седловых точек функции $L(u_1(t), u_2(t))$ на множестве U.

Задача сводится к решению системы задач оптимизации

$$L(u_1^*(t), u_2(t)) \leq L(u_1^*(t), u_2^*(t)) \leq L(u_1(t), u_2^*(t)) \quad \forall u_1 \in U_1, \forall u_2 \in U_2. \tag{6}$$

В зависимости от выбора управлений $(u_1(t), u_2(t))$ из $U_1 \times U_2$ пара $(x_1(T), x_2(T))$ принимает те или иные значения на множестве $X_1(T) \times X_2(T)$. Таким образом, смысл задачи (6) сводится к вычислению управлений $(u_1^*(t), u_2^*(t))$, которым отвечают терминальные значения траекторий на множестве достижимости, удовлетворяющие условиям быть седловой точкой.

1 Редукция к игре двух лиц с нулевой суммой

Система (2),(1),(6) при фиксированных $(u_1^*(t), u_2^*(t)) \in U$ представляет собой пару независимых задач оптимизации или, в более общем контексте, — игру двух лиц с равновесием по Нэшу [1]. При этом задача первого игрока состоит в минимизации функции $L(u_1(t), u_2(t))$ по переменной $u_1(t)$

$$L(u_1^*(t), u_2^*(t)) \leq L(u_1(t), u_2^*(t)) \tag{7}$$

на множестве, которое определяется ограничениями типа равенств и включений:

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = D_1(t)x_1(t) + B_1(t)u_1(t), \quad x_1(0) = 0, \quad \forall u_1(t) \in U_1,\ u_2^* \in U_2; \tag{8}$$

задача второго игрока — максимизация функции $L(u_1(t), u_2(t))$ по переменной $u_2(t)$

$$L(u_1^*(t), u_2(t)) \leq L(u_1^*(t), u_2^*(t)) \tag{9}$$

на множестве, заданном условиями

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = D_2(t)x_2(t) + B_2(t)u_2(t), \quad x_2(0) = 0, \quad \forall u_2(t) \in U_2,\ u_1^* \in U_1. \tag{10}$$

Обе задачи являются задачами линейного программирования, сформулированными в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Предполагается, что обе задачи достаточно регулярны, и для них выполняется теорема двойственности [2].

Чтобы не иметь дело с каждой задачей по отдельности, скаляризуем эту систему и представим ее в агрегированном виде. Для этого обе задачи (7),(9) сложим и представим результат в компактной векторно-матричной форме. Введем обозначения для векторов

$$w(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},\ w(T) = \begin{pmatrix} x_1(T) \\ x_2(T) \end{pmatrix},\ w^*(t) = \begin{pmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{pmatrix},\ w^*(T) = \begin{pmatrix} x_1^*(T) \\ x_2^*(T) \end{pmatrix},$$

$$u(t)=\begin{pmatrix} u_1(t)\\ u_2(t)\end{pmatrix},\ \psi=\begin{pmatrix} \psi_1(t)\\ \psi_2(t)\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\end{pmatrix}$$

и функциональных матриц

$$J=\begin{pmatrix} 0 & -I\\ I & 0\end{pmatrix},\ D(t)=\begin{pmatrix} D_1(t) & 0\\ 0 & D_2(t)\end{pmatrix},\ B(t)=\begin{pmatrix} B_1(t) & 0\\ 0 & B_2(t)\end{pmatrix},$$

где I и 0 — соответственно, единичная и нулевая матрицы согласованных размерностей. Тогда систему (7)-(10) можно представить в форме

$$\langle w^*(T)-b, J(w^*(T)-b)\rangle \le \langle w^*(T)-b, J(w(T)-b)\rangle,$$
$$\frac{d}{dt}w(t)=D(t)w(t)+B(t)u(t),\ u(t)\in U_{2n} \tag{11}$$

или в виде задачи вычисления неподвижной точки $w^*(t)\in \check{C}_{2n}[0,T]$ экстремального отображения

$$w^*(t)\in \operatorname{Argmin}\{\langle J^T(w^*(t)-b), w(t)-b\rangle \mid \frac{d}{dt}w(t)=D(t)w(t)+B(t)u(t), u(t)\in U_{2n}\}.$$

Если функции Лагранжа системы задач линейного программирования (7)(8) и (9),(10) имеют седловые точки, которые являются прямыми и двойственными решениями задач этой системы, то скаляризованная (агрегированная) функция Лагранжа задачи (11)

$$\mathcal{L}(\psi(t),w(t),u(t))=\langle w^*(T)-b, J(w(T)-b)\rangle+\int_0^T\langle \psi(t), D(t)w(t)+B(t)u(t)-\frac{d}{dt}w(t)\rangle$$

для всех $\psi(t)\in \check{C}_{2n}[0,T], w(t)\in \check{C}_{2n}[0,T], w(0)=0, u(t)\in U_{2n}$, будет иметь агрегированную седловую точку $\psi^*(t),(w^*(t),u^*(t))$, удовлетворяющую седловому неравенству

$$\langle w^*(T)-b, J(w^*(T)-b)\rangle+\int_0^T\langle \psi(t), D(t)w^*(t)+B(t)u^*(t)-\frac{d}{dt}w^*(t)\rangle dt\le$$
$$\le \langle w^*(T)-b, J(w^*(T)-b)\rangle+\int_0^T\langle \psi^*(t), D(t)w^*(t)+B(t)u^*(t)-\frac{d}{dt}w^*(t)\rangle dt\le$$
$$\le \langle w^*(T)-b, J(w(T)-b)\rangle+\int_0^T\langle \psi^*(t), D(t)w(t)+B(t)u(t)-\frac{d}{dt}w(t)\rangle dt, \tag{12}$$

что верно для всех $\psi(t)\in \check{C}_{2n}[0,T], w(t)\in \check{C}_{2n}[0,T], w(0)=0, u(t)\in U_{2n}$.

Используя свойства линейности системы (7)-(10), свойства сопряженного оператора, включая формулу интегрирования по частям для дифференциального оператора, седловую систему (12) можно привести к эквивалентной форме

$$\frac{d}{dt}w^*(t)=D(t)w^*(t)+B(t)u^*(t),\quad w^*(0)=0,$$

$$\frac{d}{dt}\psi^*(t)=-D^T(t)\psi^*(t),\quad \psi^*(T)=J^T(w^*(T)-b),$$

$$\int_0^T \langle B^T(t)\psi^*(t), u(t)-u^*(t)\rangle dt \geq 0, \quad u(t)\in U, \tag{13}$$

где $w^*(t), u^*(t)$ прямое решение (траектория и управление), $\psi^*(t)$- сопряженное решение, $w^*(T) = (x_1^*(T), x_2^*(T))$ - неподвижная точка экстремального отображения множества достижимости в себя (она же седловая точка относительно переменных $x_i^*(T), i=1,2$.

2 Процесс экстраградиентного типа

Для решения системы (13) используем управляемый метод простой итерации, известный в оптимизации как экстрапроксимальный или экстраградиентный подход (в линейном случае они совпадают) [3],[4]. Каждая итерация этого подхода по прямым $w(t), u(t)$ и сопряженным переменным $\psi(t)$ распадается на два полушага. Существуют различные варианты методов. Один из них рассматривается ниже и имеет вид

1) прогнозный полушаг

$$\bar\psi^n(t) = \psi^n(t) + \alpha(D(t)w^n(t) + B(t)u^n(t) - \frac{d}{dt}w^n(t)),\ w(0)=0,$$

$$\bar w^n(T) = w^n(T) - \alpha(J^T(w^n(T)-b) - \bar\psi^n(T)),$$

$$\bar w^n(t) = w^n(t) - \alpha(D^T(t)\psi^n(t) + \frac{d}{dt}\bar\psi^n(t)),$$

$$\bar u^n(t) = \pi_U(u^n(t) - \alpha B^T(t)\psi^n(t));$$

2) основной полушаг

$$\psi^{n+1}(t) = \psi^n(t) + \alpha(D(t)\bar w^n(t) + B(t)\bar u^n(t) - \frac{d}{dt}\bar w^n(t)),\ w(0)=0,$$

$$w^{n+1}(T) = w^n(T) - \alpha(J^T(\bar w^n(T)-b) - \bar\psi^n(T)),$$

$$w^{n+1}(t) = w^n(t) - \alpha(D^T(t)\bar\psi^n(t) + \frac{d}{dt}\bar\psi^n(t)),$$

$$u^{n+1}(t) = \pi_U(u^n(t) - \alpha B^T(t)\bar\psi^n(t)). \tag{14}$$

Здесь первый полушаг $\bar\psi^n(t), \bar w^n(T), \bar w^n(t), \bar u^n(t)$ трактуется как прогноз, или прогнозный полушаг, в котором вычисляется направление будущего развития процесса. Затем в этом направлении делается полушаг из текущей точки $\psi^n(t), w^n(T), w^n(t), u^n(t)$. Прогноз здесь рассматривается как управление методом в форме обратной связи.

Предлагаемый вариант экстраградиентного метода, отличается от других версий, тем что полученный вектор двойственных переменных $\bar\psi^n(t)$ в прогнозном полушаге сразу же используется для вычисления траектории $\bar w^n(t)$. Это объясняет почему для вычисления траектории $\bar w^n(t)$ используются одновременно приближения $\psi^n(t)$ и $\bar\psi^n(t)$.

Доказано, что процесс (14) сходится в смысле подпоследовательностей к решению задачи (13) и тем самым к неподвижной точке экстремального отображения (11) или седловой точке системы (7)–(10).

Теорема. Если множество решений задачи (13) не пусто и $w^*(t) \in \check{C}_{2n}[0,T]$, то последовательность, порожденная процессом (14), сходится к решению задачи, при условии, что длина шага α выбирается из интервала

$$0 < \alpha < \min\{1, 1/\sqrt{(|D||D^T| + |B||B^T|)}\}.$$

В теореме установлено, что последовательность итераций порожденная методом (14) имеет не пустое множество слабо предельных точек. Все они являются решением задачи (13). Известно [1], что если последовательность управлений процесса (14) слабо сходится к некоторому пределу, то последовательность траекторий, соответствующих этим управлениям, сходится в равномерной норме к тому же пределу, тем более эта последовательность будет сходится к этому пределу по норме пространства $L_n^2[0,T]$. Учитывая этот факт, можно утверждать, процесс (14) сходится к решению задачи в смысле подпоследовательностей по управлениям в слабой топологии, по траекториям в смысле равномерной нормы и тем самым нормы пространства $L_n^2[0,t]$.

Для многих регулярных задач слабо сходящаяся последовательность управлений может содержать сильно сходящуюся подпоследовательность. Если выполняется это условие, тогда последовательность $w^n(T), w^n(t), u^n(t), \psi^n(t)$, порожденная методом (14) будет иметь сильно предельные точки. Учитывая условие монотонности убывания величины $|w^n(T)-w^*(T)|^2+\int_0^T |w^n(t)-w^*(t)|^2dt+\int_0^T |u^n(t)-u^*(t)|^2dt+\int_0^T |\psi^n(t)-\psi^*(t)|^2dt$ нетрудно доказать единственность предельной точки, т.е. сильную сходимость последовательности в целом, более того эта сходимость будет монотонной по норме пространства $L_n^2[0,T]$. Другими словами, $|w^n(T) - w^*(T)|^2 + \int_0^T |w^n(t) - w^*(t)|^2dt + \int_0^T |u^n(t) - u^*(t)|^2 + \int_0^T |\psi^n(t) - \psi^*(t)|^2dt \to 0$ при $n \to \infty$.

Работа поддержана грантом РФФИ (код проекта 09-01-00388) и Программой поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ-4096.2010.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. J.F.Jr. Nash. Equilibrium points in n-person games.Proc.Nat.Acad.Sci. USA 36. 48–49.

2. Ф.П. Васильев. А.Ю. Иваницкий. Линейное программирование. Факториал Пресс. Москва. 2008.

3. А.С. Антипин. Управляемые проксимальные дифференциальные системы для решения седловых задач. // Дифференциальные уравнения. 1992. Т.28. No.11. С. 1846–1861.

4. Anatoly Antipin. Extra-proximal methods for solving two-person nonzero-sum games. //Math.Program., Ser.B (2009) V.120. P.147–177.

Антипин Анатолий Сергеевич, Вычислительный Центр РАН, ул. Вавилова, 40, г.Москва, 602333, Россия, тел. 8(499)135-61-61, факс 8(499)135-61-59,
e-mail: asantip@ccas.ru

ТОЧНЫЕ АЛГОРИТМЫ ОТСЕЧЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

И. Л. Васильев

Рассмотрим общую задачу целочисленного программирования (ЦП) с бинарными переменными. Даны матрица $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ и вектора $c \in \mathbb{Z}^n$, $b \in \mathbb{Z}^m$. Определить:

$$\max_x c^T x, \quad x \in X = \{x \in \mathbb{B}^n : Ax \le b\}. \tag{1}$$

Введем $P = conv(X)$ и $R = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b,\ 0 \le x_i \le 1\ \forall i \in i = \overline{1,n}\}$ — многогранник задачи (1) и многогранник ее ЛП-релаксации соответственно, а также

$$UB_X = \max_{x \in X} c^T x,\ UB_R = \max_{x \in R} c^T x,\ UB_P = \max_{x \in P} c^T x.$$

Наиболее распространенным и эффективным методом решения задач ЦП является метод ветвей и отсечений (МВО). МВО – это вариант широко известного метода ветвей и границ, основанного на ЛП-релаксации, в котором для получения верхних оценок (в случае задачи максимизации) используются полиэдральные свойства задачи. Действительно, $UB_X = UB_P \le UB_R$. Следовательно, чем "ближе" многогранник ЛП–релаксации к выпуклой оболочке P допустимых точек, тем лучше оценка, получаемая при решении задачи линейного программирования(ЛП) на многограннике R.

Один из способов улучшения оценки — использование пересечения многогранников подзадач, порожденных в результате декомпозиции Данцига–Вульфа или Бендерса. Пусть $P(i)$ $i = \overline{1,k}$ многогранники задач, полученные в результате декомпозиции. Рассмотрим многогранник

$$P_F = \bigcap_{i=1}^{m} P(i)$$

и обозначим через $UB_F = \max_{x \in P_F} c^T x$. Очевидно, что $UB_P \le UB_F \le UB_R$. В докладе предлагается использование точных алгоритмов отсечения для получения оценки UB_F и обсуждаются, насколько искомая оценка лучше UB_R, и насколько она полезна при поиске точного решения для различных задач, таких как: обобщенная задача о назначениях, p-медиана с ограничениями на ресурсы [1], задача покрытия множества и др.

Остановимся подробно на случае, когда $P(i)$ являются многогранниками задачи о рюкзаке. Таким образом нам необходимо разработать точный алгоритм отделения для многогранника задачи о рюкзаке. В виде задачи целочисленного программирования (ЦП) данная задача формулируется следующим образом. Даны вектора $c \in \mathbb{Z}^n$ и $a \in \mathbb{Z}^n$, число $\beta \in \mathbb{Z}$, найти:

$$\max_x c^T x, \quad x \in X_K = \{x \in \mathbb{B}^n : a^T x \le \beta\}.$$

Не умоляя общности можно считать, что $0 < a_i \le \beta$ и $0 < \beta < \sum_{i=1}^n a_i$. Обозначим через P_K многогранник задачи о рюкзаке, т.е. $P_K = conv(X_K)$, а через R_K многогранник ее ЛП–релаксации, т.е. $R_K = \{x \in \Re^n : a^T x \le \beta,\ 0 \le x_i \le 1\ \forall i \in i = \overline{1,n}\}$.

Пусть даны точка $\bar{x} \in \Re^n$ и многогранник P_K. *Задача отделения* заключается в следующем:

– либо доказать, что $\bar{x} \in P_K$;

– либо найти правильное неравенство, отсекающее $\bar{x}$ от P_K, т.е. определить число p_0 и вектор p такие, что $p^T x \le p_0$ $\forall x \in P_K$ и $p^T \bar{x} > p_0$.

Алгоритм, решающий задачу отделения, называется *точным алгоритмом отделения*, а полученное неравенство $p^T x \le p_0$ — отсечением.

Предположим, что для любого $p \in \Re^n$ значение опорной к P_K функции $f(p) = \max\limits_{x \in P_K} p^T x$ может быть подсчитано. Тогда, в общем случае, задача отделения сводится к задаче оптимизации:

$$v(p^*) = \max_p \{\bar{x}^T p - f(p) \ : \ p \in \Lambda\}, \tag{2}$$

где Λ — это некоторое выпуклое компактное множество, содержащее начало координат в своей внутренности. Если $v(p^*) \le 0$, то $\bar{x} \in P_K$, иначе, $p^{*T} x \le f(p^*)$ искомая отсекающая гиперплоскость. Функция $f(p)$ — недифференцируемая, выпуклая, кусочно-линейная функция, следовательно, задача (2) допускает сведение к задаче ЛП:

$$\max_{(p,p_0)} \left[\bar{x}^T p - p_0\right], \tag{3}$$

$$h^T p \le p_0 \quad \forall h \in extr(P_K), \tag{4}$$

$$p \in \Lambda, \tag{5}$$

где $extr(P_K)$ — множество угловых точек многогранника P. Очевидно, что $extr(P_K) \subseteq X_K$, следовательно, ограничения (4) можно заменить на $h^T p \le p_0$ $\forall h \in X_K$.

Для начала представим некоторые известные особенности метода отсечений для многогранника задачи о рюкзаке [2]. Известно, что неравенства $x_i \ge 0$ являются гранеобразующими (фасетой) для многогранника P_K. Остальные гранеобразующие неравенства имеют неотрицательные коэффициенты. С учетом этого факта, задачу (3)–(5) можно переписать в следующем виде:

$$w(p^*) = \max_p \left\{\bar{x}^T p : \ h^T p \le 1 \ \ \forall h \in X_K\right\}. \tag{6}$$

Если $w(p^*) \le 1$, то $\bar{x} \in X$, иначе $p^{*T} x \le 1$ правильное неравенство, отсекающее $\bar{x}$. Кроме того, если p^* выступает угловой точкой допустимого множества задачи (6), то это неравенство гранеобразующее.

На практике задачу (6) невозможно записать в явном виде, так как она содержит большое количество ограничений. Сначала задача отделения рассматривается для дробного многогранника

$$P_K(\bar{x}) = \{x \in P_K : x_i = 0, \text{ если } \bar{x}_i = 0; \ x_i = 1, \text{ если } \bar{x}_i = 1 \ \ \forall i = \overline{1,n}\},$$

для которого находится гранеобразующее отсечение, если такое существует, т.е. задача (6) решается для многогранника $P_K(\bar{x})$.

Задача отделения (6) — это задача ЛП, в которой каждой строке матрицы ограничений соответствует допустимая точка задачи о рюкзаке. Даже для задач небольшой размерности перебрать все допустимые точки не представляется возможным.

Как известно, в двойственном симплекс-методе решения задач ЛП на каждой итерации активными являются только n ограничений, которые задают текущую точку метода. При переходе на следующую итерацию необходимо определить только одно ограничение, которому текущая точка не удовлетворяет. На этой же идее основывается метод генерации строк, в котором на каждой итерации решается задача на подмножестве ограничений. Схема метода выглядит следующим образом.

Шаг 0. Выбрать начальное подмножество строк матрицы ограничений задачи (6), т.е. $U \subset X_K$.

Шаг 1. Решить неполную задачу отделения на множестве U, формуруемую как

$$w(\bar{p}) = \max_{p} \left\{ \bar{x}^T p : \; h^T p \leq 1 \;\; \forall h \in U \right\}. \tag{7}$$

Шаг 2. Проверить, удовлетворяет ли $\bar{p}$ всем ограничениям (6). Для этого найти некоторое решение задачи о рюкзаке:

$$\bar{h} \in \operatorname*{Argmax}_{h \in X_K} \bar{p}^T h.$$

Шаг 3. Если $\bar{h}^T \bar{p} > 1$, то $\bar{h}$ добавить в матрицу ограничений задачи (7), т.е. $U := U \cup \{\bar{h}\}$, и перейти на шаг 1.

Шаг 4. Если $\bar{h}^T \bar{p} \leq 1$, то $\bar{p}$ является решением задачи отделения (6) и $\bar{p}^T x \leq 1$ правильное неравенство для P_K, отсекающее $\bar{x}$ в случае $\bar{p}^T \bar{x} > 1$.

Для того, чтобы избежать неограниченности задачи (7), в качестве начального набора ограничений можно выбрать единичные вектора, т.е. $U = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{e^i\}$. Ключевыми моментами метода генерации строк служат решения задачи ЛП на шаге 1 и задачи о рюкзаке на шаге 2. Решение задачи ЛП осуществлялось с помощью коммерческого решателя. Для решения задачи о рюкзаке использовалась модификация алгоритма MINKNAP. В алгоритме MINKNAP [3] требуется, чтобы все коэффициенты задачи были целочисленными, но в рассматриваемом случае коэффициенты целевого вектора задачи о рюкзаке (шаг 2) дробные. Поэтому в этой задаче применялся модифицированный алгоритм, предложенный в [4], который адаптирован для задач с дробными компонентами целевого вектора и обеспечивает получение результата с некоторой заданной точностью.

В методе генерации строк при решении задач ЛП на шаге 1 и задачи о рюкзаке с дробными коэффициентами целевого вектора на шаге 2 не исключены ошибки округления. При поиске отсечений влияние этих ошибок может оказаться значительным, поэтому в результате возможно получение неравенств, которые отсекают оптимальное решение.

Пусть в результате работы метода генерации строк определено неравенство $\bar{p}^T x \leq 1$. Далее осуществляется преобразование этого неравенства в неравенство с целочисленными коэффициентами следующим образом. Рассмотрим задачу ЦП:

$$\begin{aligned} \min_{(p,\tau)} \quad & \tau, \\ & p = \tau \bar{p}, \\ & (p,\tau) \in \mathbb{Z}^{n+1}, \quad \tau > 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Решение $(\check{p}, \check{\tau})$ этой задачи конкретизирует эквивалентное неравенству $\bar{p}^T x \leq 1$ неравенство $\check{p}^T x \leq \check{\tau}$, все коэффициенты которого целочисленны. Задача (8) имеет $n+1$

переменную и n ограничений. Таким образом, при достаточно малом n эта задача может быть решена с помощью решателя задач ЦП. Далее выполняется проверка, гарантирующая корректность найденного неравенства.

1. Если по крайне мере один элемент вектора $\check{p}$ превосходит 10^5, то полученное неравенство удаляется, во избежание возможных ошибок арифметического переполнения при дальнейшей работе метода.

2. Подтверждается правильность результирующего неравенства путем решения задачи о рюкзаке:
$$\nu = \max_{h \in X_K} \check{p}^T h.$$
Если $\nu \leq \check{\tau}$, то неравенство правильное. Такая задача о рюкзаке может быть решена с помощью алгоритма MINKNAP, причем ошибок округления в данном случае не возникает, так как все коэффициенты задачи целочисленные.

Найденное отсечение расширяется в исходное пространство с помощью теоремы о расширении:

Теорема 1 (о расширении). Даны многогранник P_K, индекс $s \in \{1, \ldots, n\}$ и сечения многогранника P_K: $P_s^0 = \{x \in P_K : x_s = 0\}$ и $P_s^1 = \{x \in P_K : x_s = 1\}$. Пусть неравенство $p^T x \leq p_0$, в котором $p_s = 0$, является правильным (гранеобразующим)

1) для сечения P_s^0. Если $P_s^1 = \emptyset$, то $x_s = 0$ $\forall x \in P_K$. Если $P_s^1 \neq \emptyset$, то неравенство $p^T x + p_s x_s \leq p_0$ правильное (гранеобразующее) для P_K, где
$$p_s = p_0 - \max_x \{p^T x \ : \ x \in P_s^1\};$$

2) для сечения P_s^1. Если $P_s^0 = \emptyset$, то $x_s = 1$ $\forall x \in P_K$. Если $P_s^0 \neq \emptyset$, то неравенство $p^T x + (p_s - p_0) x_s \leq p_s$ правильное (гранеобразующее) для P_K, где
$$p_s = \max_x \{p^T x \ : \ x \in P_s^0\}.$$

Отметим также, что при расширении полученного неравенства в исходное пространство, вновь решается задача о рюкзаке, причем на этот раз данная задача имеет целочисленные коэффициенты, и, следовательно, может быть решена без ошибок округления.

Работу алгоритма проиллюстрируем на примере обобщенной задача о назначениях (ОЗН). Даны множества машин $I = \{1, \ldots, m\}$ и работ $J = \{1, \ldots, n\}$. Если работа j выполняется на машине i, то на это тратится d_{ij} некоторого ресурса и время c_{ij}. Ресурсы i-ой машины ограничены величиной q_i. Требуется назначить выполнение работ машинам таким образом, чтобы за минимальное время завершить все работы, не нарушая ограничений на имеющиеся ресурсы машин. Введем переменные:
$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если машина } i \text{ выполняет работу } j, \\ 0 \text{ в противном случае}, \end{cases} \qquad \forall i \in I, j \in J.$$

Тогда формулировка ОЗН в виде задачи ЦП выглядит следующим образом:

$$\min_{(x,y)} \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij}, \tag{9}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \quad j\in J, \tag{10}$$

$$\sum_{j\in J} d_{ij}x_{ij} \le q_i, \quad i\in I, \tag{11}$$

$$x_{ij}\in\{0,1\}, \quad i\in I,\ j\in J. \tag{12}$$

Целевая функция (9) минимизирует время выполнения всех работ. Ограничения (10) гарантируют, что каждая работа будет завершена. Ограничения на ресурсы машин выражены неравенствами (11).

Тестовые примеры для этой задачи предложены в [5]. Оптимальные решения известны только для вариантов с $n \le 200$. Наиболее успешным для данной серии был метод ветвей и оценок, рассмотренный в [6].

Численные результаты представлены в таблице 1 для трех подходов:

1) метод ветвей и отсечений с использованием отсечений, представленных в данной статье. Метод отсечений применялся к каждому ограничению (11) (столбцы *MBO*);

2) решатель ILOG CPLEX 10 (столбцы *CPLEX*);

3) метод ветвей и оценок, предложенный в [6] (столбцы *МВОЦ*), оригинальный код которого был предоставлен авторами.

В столбцах "Время" представлено время счета в секундах, *ОП(%)* – относительная погрешность решения в процентах. Время счета ограничивалось 30 минутами. Если за этот период было найдено решение задачи, то $ОП = 0$, в противном случае $ОП = \frac{BUB-BLB}{BUB}\cdot 100$, где BUB и BLB наилучшие верхняя и нижняя оценки метода ветвей и границ соответственно. Отметим, что в полученных результатах для метода ветвей и оценок, значение относительной погрешности отсутствует в случае, если пример не был решен за заданное время, так как реализация метода не обеспечивает необходимую для вычисления этого значения информацию. Как видно из таблицы, метод ветвей и отсечений оказался значительно эффективней.

ЛИТЕРАТУРА

1. И.Л. Васильев. Метод отсечения для многогранника задачи о рюкзаке. // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 99. с. 74-81.

2. P. Avella, M. Boccia, I. Vasilyev. A computational study of exact knapsack separation for the generalized assignment problem. // Computational Optimization and Applications, V. 45(3). 2010. pp. 543 – 555.

3. D. Pisinger. A minimal algorithm for the 0-1 knapsack problem. // Operations Research. 1995. V.46. P. 758–767.

4. A. Ceselli. Two exact algorithms for the capacitated p-median problem. // 4OR. 2003. V.1. P. 319–340.

5. J.E. Beasley. Or-library: distributing test problems by electronic mail // J. Operational Research Society. 1990. V.41. №11. P. 1069–1072.

6. A. Pigatti, M. Poggi de Aragao, E. Uchoa. Stabilized branch-and-cut-and-price for the generalized assignment problem // 2nd Brazilian Symposium on Graphs, Algorithms and Combinatorics, Electronic Notes in Discrete Mathematics. Rio de Janeiro. 2005. V.19. P. 389–395.

Таблица 1: Обобщенная задача о назначениях

		MBO		CPLEX		MBOЦ	
Пример	(m, n, p)	Время	ОП(%)	Время	ОП(%)	Время	ОП(%)
c05200	(5,200)	3.6	0.00	3.9	0.00	216.5	0.0
c10200	(10,200)	7.8	0.00	184.6	0.00	245.1	0.0
c20200	(20,200)	8.4	0.00	31.0	0.00	1.0	0.0
c10400	(10,400)	17.0	0.00	51.6	0.00	1800.0	—
c20400	(20,400)	54.2	0.00	1800.0	0.04	1800.0	—
c40400	(40,400)	19.3	0.00	351.3	0.00	6.1	0.0
c30900	(30,900)	1800.0	0.02	1800.0	0.06	1800.0	—
c60900	(60,900)	1683.9	0.00	1800.0	0.08	1800.0	—
d05200	(5,200)	1800.0	0.03	1800.0	0.04	577.7	0.0
e05200	(5,200)	6.7	0.00	6.5	0.00	705.2	0.0
e10200	(10,200)	196.8	0.00	249.8	0.00	1338.3	0.0
e20200	(20,200)	26.6	0.00	1800.0	0.02	60.3	0.0
e10400	(10,400)	22.5	0.00	109.8	0.00	1800.0	—
e20400	(20,400)	40.3	0.00	1800.0	0.01	1800.0	—
e40400	(40,400)	1772.3	0.00	1800.0	0.09	1800.0	—
e15900	(15,900)	62.3	0.00	1346.0	0.00	1800.0	—
e30900	(30,900)	342.1	0.00	1800.0	0.01	1800.0	—
e201600	(20,1600)	1765.0	0.00	1800.0	0.01	1800.0	—
e401600	(40,1600)	1800.0	0.02	1800.0	0.01	1800.0	—

Васильев Игорь Леонидович, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 46-31-06, факс (3952) 51-16-16, e-mail:vil@icc.ru

NEW IDEAS IN SOLVING MIXED–INTEGER BILEVEL PROGRAMMING PROBLEMS

S. Dempe, V. V. Kalashnikov

1 Introduction

Hierarchical decision making is strongly motivated by real-world applications. For example, in engineering design, the main objective of the design engineer may be constrained by the properties inherent in the process (such as minimum energy), which, in turn, may be parametric in decision variables, chosen by the engineer. These problems can be formulated within a bilevel programming problem (BLP) framework, where an upper level (or, outer) optimization problem is constrained by another, lower level (or, inner) optimization problem.

In mathematical terms, it means that the set of variables is partitioned into two vector variables, x and y, where $y \in R^m$ are the leader's variables and $x \in R^n$ are those governed by the follower. Using y as a parameter, the follower solves a parametric optimization problem, and the values $x = x(y)$ are determined by the follower knowing the selection y of the leader. The leader has to determine the best choice of y knowing the (optimal) reaction $x = x(y)$ of the follower to the leader's decision.

However, important decision making problems may involve decisions both in discrete and continuous variables. For example, a chemical engineering design problem may involve discrete decisions regarding the existence of chemical process units *in addition to* decisions in continuous variables, such as temperatures or pressures. Problems of this class, dealing with both discrete and continuous decision variables, are referred to as mixed-integer BLPs.

A particular case of the mixed-integer bi-level programming problem is presented by the real-world problem of minimizing the cash-out penalty costs of a natural gas shipping company [2]. This problem arises when a (gas) shipper draws a contract with a pipeline company to deliver a certain amount of gas at several delivering meters. What is actually shipped may be higher or lower than the amount that had been originally agreed upon (this phenomenon is called an *imbalance*). When such an imbalance occurs, the pipeline penalizes the shipper by imposing a cash-out penalty policy. As this penalty is a function of the operating daily imbalances, an important problem for the shippers is how to carry out their daily imbalances so as to minimize the incurred penalty. On the other hand, the pipeline (the follower) tries to minimize the absolute values of the cash-outs, which produces the optimal response function taken into account by the leader to find the optimal imbalance strategy. Integer variables are involved at the lower level problem, and various algorithms to solve the natural gas cash-out problem are described in [2], [10]–[12].

In general, mixed-integer BLPs can be classified into four classes [8]:

(I) **Integer Upper, Continuous Lower**.

(II) **Purely Integer**.

(III) **Continuous Upper, Integer Lower**.

(IV) **Mixed-Integer Upper and Lower**.

Advances in the solution of the mixed-integer bilevel programming problems (MIBLP) of all four types can greatly expand the scope of decision making instances that can be modeled and solved within a bilevel optimization framework. However, very little attention has been paid in the literature to both the solution and the application of BLP governing discrete variables. This is mainly because these problems pose major algorithmic challenges in the development of efficient solution strategies.

In the literature, methods developed for the solution of the MIBLP have so far addressed a very restricted class of problems. More attention has been paid to *linear* problems. For instance, for the solution of the purely integer (Type II) linear BLP, a branch-and-bound type of enumerating technique has been proposed by Moore and Bard [13], whereas Nishizaki et al. [14] applied a kind of genetic algorithm to the same problem. For the solution of the mixed-integer BLP of Type I, another branch-and-bounds approach has been developed by Wen and Yang [17]. Cutting plane and parametric solution techniques have been elaborated by Dempe [1] to solve MIBLP, in which the lower level has only one upper level (outer) variable involved into the (lower level) objective function. A method based upon decomposition technique has been proposed by Saharidis and Ierapetritou [15].

Mixed-integer *nonlinear* bilevel programming problems have received even less attention in the literature. The developed methods include an algorithm making use of parametric analysis to solve separable monotone nonlinear MIBLP proposed by Jan and Chern [9], a stochastic simulated annealing method presented by Sahin and Ciric [16], a global optimization approach based on parametric programming technique published by Faísca et al. [5]. Floudas et al. in [6] and [8] developed several algorithms dealing with global optimization of mixed-integer bilevel programming problems of both deterministic and stochastic nature. The sensitivity analysis for MIBLPP also was considered in [18].

The main goal of this paper is to propose an efficient algorithm to solve the mixed-integer linear BLP of Type I . Knowing that this problem is hard to solve, we propose an algorithm generating approximations that converge to a global solution. The paper is organized as follows. The general formulation of the mathematical model is given in Section 2, whereas the geometry of the problem is described in Section 3. The approximation algorithm is presented in Section 4 completing the paper.

2 Mathematical Model

The Mixed Integer Bi-level Linear Programming Problem with a parameter in the right-hand side of the lower level is formulated as follows:

$$\min_{x,y} \left\{ \langle a, x\rangle + \langle b, y\rangle \ \mid Gy = d, x \in \psi(y), y \in Z^m_+ \right\}, \tag{1}$$

which represents the upper level where $a, x \in R^n$, $b, y \in R^m, G$ is an $r \times m$ matrix, $d \in R^r$. Note that we use the optimistic version of the bilevel programming problem here, *see* [1]. From now on, $\langle .,. \rangle$ is the inner product. Here $\psi(y)$ is defined as follows:

$$\psi(y) = Arg \min_x \left\{ \langle c, x\rangle \ \mid Ax = y, x \geq 0 \right\}, \tag{2}$$

which describes the set of optimal solution of the lower level problem (the set of rational reactions). Here $c, x \in R^n$, A is an $m \times n$ matrix with $m \leq n$.

Let us determine the optimal value function of the lower level problem as follows:

$$\varphi(y) = \min_x \left\{ \langle c, x\rangle \ \mid Ax = y, x \geq 0 \right\}. \tag{3}$$

We suppose that the feasible set of problem (2) is non-empty.

In this paper, we consider a reformulation of (1)–(3) based upon an approach reported in the literature (*see* [1], or [19]) as a classical nondifferentiable optimization problem. If we take into account the lower level optimal value function (3), then problem (1)–(3) can be replaced by:

$$\min_{x,y} \left\{ \langle a, x\rangle + \langle b, y\rangle \ \mid Gy = d, \langle c, x\rangle \le \varphi(y),\ Ax = y,\ x \ge 0, y \in Z^m_+ \right\}. \tag{4}$$

Our work is concentrated on the lower level objective value function (3). For this reason, we show some important characteristics (*see* [3] or [7]) that will be helpful for solving problem (4).

3 Problem's Geometry

Consider the parametric linear programming problem (3)

$$\varphi(y) = \min_x \left\{ \langle c, x\rangle \ \mid Ax = y, x \ge 0 \right\}.$$

In order to solve this problem, we use the dual simplex algorithm, like in [3]. Let us fix $y = y^*$ and let x^* be an optimal basic solution for $y = y^*$ with the corresponding basic matrix B, which is a quadratic submatrix of A having the same rank as A, and such that $x^* = (x^*_B, x^*_N)^T$, with $x^*_B = B^{-1}y$ and $x^*_N = 0$. Moreover, let us fix the upper level variable value $y = y^*$. Then, we can say that $x^*(y^*) = (x^*_B(y^*), x^*_N(y^*))^\top = (B^{-1}y^*, 0)^\top$ is an optimal basic solution of problem (3) for a fixed parameter y^*. And if the following inequality holds: $B^{-1}y \ge 0$, then $x^*(y) = (x^*_B(y), x^*_N(y))^\top = (B^{-1}y, 0)^\top$ is also optimal for the parameter vector y.

It is possible to perturb y^* so that B remains a basic optimal matrix [7]. We denote by $\Re(B)$ a set that we call the *stability region* of B, which is defined as $\Re(B) = \{y \mid B^{-1}y \ge 0\}$.

For all $y \in \Re(B)$, the point $x^*(y) = (x^*_B(y), x^*_N(y))^\top = (B^{-1}y, 0)^\top$ is an optimal basic solution of the problem (3). This region is nonempty because $y^* \in \Re(B)$. Furthermore, it is closed but not necessarily bounded. If $\Re(B)$ and $\Re(B')$ are two different stability regions with $B \ne B'$, then only one of the following cases is possible.

1. $\Re(B) \cap \Re(B') = \{0\}$.
2. $\Re(B) \cap \Re(B')$ contains the common border of the regions $\Re(B)$ and $\Re(B')$.
3. $\Re(B) = \Re(B')$.

Moreover, $\Re(B)$ is a convex polyhedral set, on which the lower level optimal value function is a finite and linear function. To determine an explicit description of the function φ consider the dual problem to problem (3). If $\varphi(y)$ is finite, then $\varphi(y) = \max\{\langle y, u\rangle : A^\top u \le c\}$. Let $u^1, u^2, \ldots, u^s$ denote the vertices of the polyhedral set $\{u : A^\top u \le c\}$. Then, $\varphi(y) = \max\{\langle y, u^1\rangle, \langle y, u^2\rangle, \ldots, \langle y, u^s\rangle\}$, whenever $\varphi(y)$ is finite.

By duality, for some basic matrix B_i with $y \in \Re(B_i)$ we have $B_i^\top u = c_{B_i}$ or $u = \left(B_i^\top\right)^{-1} c_{B_i}$ and, thus, $\langle y, u^i\rangle = \langle y, \left(B_i^\top\right)^{-1} c_{B_i}\rangle = \langle (B_i)^{-1} y, c_{B_i}\rangle$. Setting $x^i(y) = ((B_i)^{-1} y, 0)$ we derive $\varphi(y) = \max\left\{\langle c, x^1(y)\rangle, \langle c, x^2(y)\rangle, \ldots, \langle c, x^q(y)\rangle\right\}$.

4 An Approximation Algorithm

The basis to start describing the algorithm is given above in this paper. The difficulty in the work with the objective value function (3) is due to the simple fact that we do not have it in an explicit form. This algorithm tries to approximate function (3) with a finite number of iterations. Also (3) is not differentiable: *cf.* [4], [19], working with subdifferential calculus based upon the non-smooth Mangasarian-Fromowitz constraint qualification. Now, we describe the proposed algorithm as follows.

Step 0. *Initialization.* The list of problems initially includes only the Approximate Integer Problem (AIP) built as follows. We consider problem (4) and compose the polytop Y as a convex hull of the leader's strategies at the upper level: $Y = \{y\,|Gy = d, y \geq 0\}$, and select $\widehat{m}+1$ affine independent points y^i such that $Y \subset \operatorname{conv}\{y^1, \ldots, y^{\widehat{m}+1}\} \subset \{y : |\varphi(y)| < \infty\}$. Here $\widehat{m} = m - rank(G)$, and $y^2 - y^1, y^3 - y^1, \cdots, y^{\widehat{m}+1} - y^1$ form a linearly independent system. We denote this set of vertices as $V = \{y^1, \ldots, y^{\widehat{m}+1}\}$. Also we consider a tolerance value $\varepsilon > 0$. Then, we solve the lower level linear programming problem (3) at each vertex, i.e., find $\varphi(y^1), \ldots, \varphi(y^{\widehat{m}+1})$ and the corresponding solution vectors $(x^1, y^1), \ldots, \left(x^{\widehat{m}+1}, y^{\widehat{m}+1}\right)$.

Now we build the first approximation of the optimal value function as follows:

$$\Phi(y) = \sum_{i=1}^{\widehat{m}+1} \lambda_i \varphi(y^i), \tag{5}$$

defined over

$$y = \sum_{i=1}^{\widehat{m}+1} \lambda_i y^i, \tag{6}$$

with $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, \widehat{m}+1$, and

$$\sum_{i=1}^{\widehat{m}+1} \lambda_i = 1. \tag{7}$$

In (5) we have an expression with the variable λ , that leads to variable y using (6) and (7). Now since the function φ is convex, $\langle c, x\rangle \leq \varphi(y) \leq \Phi(y)$, our condition $\langle c, x\rangle \leq \varphi(y)$ in (4) can be relaxed to the following explicit inequality: $\langle c, x\rangle \leq \Phi(y)$.

Thus we obtain a new optimization problem that can be solved with the branch-and-bound techniques. The Approximate Integer Problem (AIP) is described as follows:

$$\min_{x,y} \left\{\langle a, x\rangle + \langle b, y\rangle : Gy = d, \langle c, x\rangle \leq \Phi(y), Ax = y, x \geq 0, y \in Z^m_+\right\}. \tag{8}$$

Now let $t = 1$, and $z_t = +\infty$, where z_t is the incumbent objective value. Put this problem into the problems list. By definition, this problem corresponds to the convex polyhedron Y. Go to Step 1.

Step 1. *Termination criterion.* Stop if the problems list is empty, or if all the current solutions of problem (5) are close enough: $\max_{1\leq i\neq k\leq \widehat{m}+1} \left\|(x^i, y^i) - (x^k, y^k)\right\| < \varepsilon$. In these cases, select the point (x^r, y^r), where $\varphi(y^r) = \min\left\{\varphi\left(y^1\right), \ldots, \varphi\left(y^{\widehat{m}+1}\right)\right\}$ as the best approximation to the optimal solution of the original problem. Otherwise, arbitrarily select and remove a program from the problems list. Go to Step 2.

Step 2. Solve the problem taken from the problems list using typical methods for integer programming (e.g., like branch-and-bound) to manage the integrality constraint. Denote

the set of optimal solutions as $S = \{(\tilde{x}^1, \tilde{y}^1), \ldots\}$ and $\tilde{z}$ the objective function value. If the problem has no feasible solution, or if its objective function value is larger than z_t, then fathom this branch, let $z_{t+1} = z_t$, $t = t+1$ and go to Step 1. Otherwise go to Step 3.
Step 3. If the components y of all the solutions belonging to S are elements of V, then store the solutions, set $z_{t+1} = \tilde{z}$, $t = t+1$ and go to Step 1 (for such values of y, the point (x, y) is feasible for problem (4)). Otherwise, considering the solution $(\tilde{x}^j, \tilde{y}^j)$ from S such that the component $\tilde{y}^j$ is different from all the elements of V, we add $\tilde{y}^j$ to V, set $z_{t+1} = z_t$, $t = t+1$ and go to Step 4.
Step 4. *Subdivision.* Make a subdivision of the set Y corresponding to this problem. By construction, problem (8) corresponds to one set of $\widehat{m}+1$ affine independent points, which without loss of generality are assumed to be the points $y^1, \ldots, y^{\widehat{m}+1}$. Adding the point $\tilde{y}^j$ to this set, it becomes affinely dependent. Excluding one element of the resulting set, affine independence can eventually be obtained (this is guaranteed if some correct element is dropped). When one uses this approach, at most $\widehat{m}+1$ new affine independent sets arise, each corresponding to a new linear approximation of the lower level objective function on the convex hull of these points. If one such simplex T is a subset of some region of stability: $T \subset \Re(B_i)$, the feasible points (x, y) of problem (8) are also feasible for problem (4). Aim of this step is to find these simplices by subsequent subdivisions of the set Y. These problems are then added to the problems list.

To calculate the new approximation of the lower level optimal value function we proceed as follows: First compute $\varphi(\tilde{y}^j)$. Then construct one set of affinely independent points as described above, i.e. delete one of the previous points, say y^ℓ, where $\ell \in \{1, \ldots, \widehat{m}+1\}$, and compute $\Phi_\ell(y) = \sum_{i=1, i\neq\ell}^{\widehat{m}+1} \lambda_i \varphi(y^i) + \mu\varphi(\tilde{y}^j)$, defined over $y = \sum_{i=1, i\neq\ell}^{\widehat{m}+1} \lambda_i y^i + \mu\tilde{y}^j$, with $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, \widehat{m}+1$, $i \neq \ell$, and $\sum_{i=1, i\neq\ell}^{\widehat{m}+1} \lambda_i + \mu = 1$.

Thus we construct at most $\widehat{m}+1$ new problems:

$$(P^\ell) \quad \min_{x,y} \left\{ \langle a, x\rangle + \langle b, y\rangle : Gy = d, \langle c, x\rangle \leq \Phi_\ell(y), Ax = y, x \geq 0, y \in Z_+^m \right\},$$

and add them to the problems list. Go to Step 1.

Conclusions In this paper, we propose an approximation algorithm to solve the mixed-integer BLP, and at the same time, using the exact penalty function, we provide upper and lower bounds for a feasible solution.

The work does not stop here, our goal is to analyze more alternatives such as a convexification of the exact penalty function, or making use of the subdifferential calculus as another alternative. Later, comparing the algorithms, we will choose the best one according to its performance and robustness.

Acknowledgments: The research activity of the second author was supported by the R&D Department (Cátedra de Investigación) CAT-174 of the Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Campus Monterrey, Mexico, by the SEP-CONACYT projects CB-01-2008-106664 and I0010-122315, and also by the Russian Humanitarian Research Foundation (RGNF) within the project RGNF 08-02-00271.

REFERENCES

1. S. Dempe. Foundations of Bilevel Programming. Dordrecht/London/Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002.

2. S. Dempe, V.V. Kalashnikov, R.Z. Ríos-Mercado. Discrete bilevel programming: Application to a natural gas cash-out problem. // European J. Oper. Res. 2005. V. 166. P. 469–488.
3. S. Dempe, H. Schreier. Operations Research – Deterministische Modelle und Methoden. Wiesbaden: Teubner-Verlag, 2006.
4. S. Dempe, A.B. Zemkoho. A bilevel approach to optimal toll setting in capacitated networks. Freiberg: TU Bergakademie Freiberg, Preprint, 2008.
5. N.P. Faísca, V. Dua, B. Rustem, P.M. Saraiva, E.N. Pistikopoulos. Parametric global optimization for bilevel programming. // J. Glob. Optim. 2007. V. 38. P. 609–623.
6. C.A. Floudas, Z.H. Gümüş, M.G. Ierapetritou. Global optimization in design under uncertainty: Feasibility test and flexibility index problem. // Ind. Eng. Chem. Res. 2001. V. 40. P. 4267–4282.
7. L. Grygarová. Qualitative Untersuchung des I. Optimierungsproblems in mehrparametrischer Programmierung. // Applications of Mathematics. V. 15 . P. 276–295.
8. Z.H. Gümüş, C.A. Floudas. Global optimization of mixed-integer-bilevel programming problems. // Comput. Management Sci. 2005. V. 2. P. 181–212.
9. R.H. Jan, M.S. Chern. Non-linear integer bilevel programming. // European J. Oper. Res. 1994. V. 72. P. 574–587.
10. V.V. Kalashnikov, G. Pérez-Valdés, N.I. Kalashnykova. A linearization approach to solve the natural gas cash-out bilevel problem. // To appear in Ann. Oper. Res. 2010.
11. V.V. Kalashnikov, G. Pérez-Valdés, N.I. Kalashnykova, A. Tomasgard. Natural gas cash-out problem: Bilevel stochastic optimization approach. // To appear in European J. Oper. Res. 2010. ISSN 0377-2217, doi: 10.1016/j.ejor.2010.02.018. - 39 p.
12. V.V. Kalashnikov, R.Z. Ríos-Mercado. A natural gas cash-out Problem: A bilevel programming framework and a penalty function method. // Optim. Engin. 2006. V. 7. P. 403–420.
13. J.T. Moore, J.F. Bard. The mixed integer linear bilevel programming problem. // Oper. Res. 1990. V. 38. P. 911–921.
14. I. Nishizaki, M. Sakawa, T. Kan. Computational methods through genetic algorithms for obtaining Stackelberg solutions to two-level integer programming problems. // Electronics and Communications in Japan, Part 3. 2003. V. 86. P. 1251–1257.
15. G.K. Saharidis, M.G. Ierapetritou. Resolution method for mixed integer bi-level linear problems based on decomposition techinque. // J. Glob. Optim. 2009. V. 44. P. 29–51.
16. K.H. Sahin, A.R. Ciric. A dual temperature simulated annealing approach for solving bilevel programming problems. Comp. Chem. Engng. 1998. V. 23. P. 11–25.
17. U.P. Wen, Y.H. Yang. (1990). Algorithms for solving the mixed integer two level linear programming problem. // Computers Oper. Res. 1990. V. 17 P. 133–142.
18. R.E. Wendell. A preview of a tolerance approach to sensitivity analysis in linear programming. // Discrete Mathematics. 1982. V. 38. P. 121–124.
19. J.J. Ye, D.L. Zhu. Optimality conditions for bilevel programming problems. // Optimization. 1995. V. 33. P. 9–27.

Dempe Stephan, TU-Bergakademie Freiberg, Akademiestrasse, 6, Freiberg, 09599, Germany, Tel. +49 (3731) 39-29-56, Fax +49 (3731) 39-27-40, e-mail:dempe@math.tu-freiberg.de

Kalashnikov Vyacheslav Vitalievich, ITESM, Campus Monterrey, Tel. +52-81-8358-2000 ext. 5548, Fax +52-81-8358-0771, e-mail: kalash@itesm.mx; on leave from CEMI RAS, Moscow, Russian Federation.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ю. Г. Евтушенко, А. И. Голиков

Традиционные методы линейного программирования (ЛП) в ряде случаев теряют свою эффективность при решении задач большой размерности (задачи с десятками миллионов неизвестных и с сотнями тысяч ограничений). Возникает необходимость создания новых численных методов, которые в полной мере используют возможности современных многопроцессорных вычислительных комплексов. В докладе приводятся алгоритмы, позволяющие не только распараллелить процесс расчетов и тем самым ускорить вычисления, но и решать задачи значительно большей размерности. Предложенные алгоритмы реализованы на многопроцессорных вычислительных системах с распределенной памятью, их эффективность иллюстрируется вычислительными экспериментам.

Пусть прямая и двойственная задачи ЛП заданы в стандартной форме

$$f_* = \min_{x \in X} c^\top x, \quad X = \{x \in R^n \ : \ Ax = b, \ x \geq 0_n\}. \tag{P}$$

$$f_* = \max_{u \in U} b^\top u, \quad U = \{u \in R^m \ : \ A^\top u \leq c\}. \tag{D}$$

Здесь $A \in R^{m \times n}$, $c \in R^n$ и $b \in R^m$ заданы, x – вектор прямых переменных, а u – двойственных, через 0_i обозначен i-мерный нулевой вектор. Всюду ниже предполагаем, что множество решений X^* прямой задачи (P) непусто, тогда множество решений U^* двойственной задачи (D) также непусто.

Для нахождения проекции заданной точки $\hat{x}$ на множество решений прямой задачи (P) введем вспомогательную задачу безусловной максимизации

$$\max_{p \in R^m} S(p, \beta, \hat{x}), \quad \text{где } S(p, \beta, \hat{x}) = \{b^\top p - \frac{1}{2}\|(\hat{x} + A^\top p - \beta c)_+\|^2\}. \tag{1}$$

Здесь скаляр β фиксирован, a_+ — вектор, у которого i-я компонента совпадает с i-й компонентой вектора a, если она неотрицательна, и равна нулю в противном случае.

Воспользуемся следующими ранее сформулированными в [1] теоремами.

Теорема 1. *Существует такое число β_*, что при любом $\beta \geq \beta_*$ пара $[p(\beta), \beta]$, где $p(\beta)$ – решение задачи безусловной максимизации (5), определяет проекцию $\hat{x}^*$ точки $\hat{x}$ на множество решений X^* прямой задачи (P) по формуле*

$$\hat{x}^* = (\hat{x} + A^T p(\beta) - \beta c)_+. \tag{2}$$

Теорема 2. *При $\hat{x} = x^* \in X^*$ и при любом $\beta > 0$ точное решение двойственной задачи (D) находится по формуле $u^* = p(\beta)/\beta$, где $p(\beta)$ – решение задачи безусловной максимизации (5).*

Итак, в результате решения двух задач безусловной максимизации вогнутой кусочно-квадратичной функции от m переменных получается проекция точки на множество прямой задачи (P) и некоторое решение двойственной задачи (D).

Следующий итерационный процесс дает одновременное решение прямой и двойственной задач ЛП

$$x_{s+1} = (x_s + A^T p_{s+1} - \beta c)_+, \tag{3}$$

здесь произвольный параметр $\beta > 0$ фиксирован, а вектор p_{s+1} определяется из решения следующей задачи безусловной максимизации:

$$p_{s+1} \in \arg\max_{p \in R^m} \{b^T p - \tfrac{1}{2}\|(x_s + A^T p - \beta c)_+\|^2\}. \qquad (4)$$

Теорема 3. *При любом $\beta > 0$ и для любой начальной точки x_0 итерационный процесс (3), (4) сходится к $x^* \in X^*$ за конечное число шагов ω. Формула $u^* = p_{\omega+1}/\beta$ определяет точное решение двойственной задачи (D).*

Решение задач безусловной максимизации (5) или (4) может выполняться любым методом, например, методом сопряженного градиента. Однако гораздо эффективней использовать обобщенный метод Ньютона. Доказательство конечной глобальной сходимости обобщенного метода Ньютона для безусловной оптимизации кусочно-квадратичной функции с выбором шага по правилу Армихо можно найти, например в [2]. Рассмотрим параллельные реализации метода (3), (4) в вычислительной системе с распределенной памятью. Считаем, что у каждого процесса (исполняемой программы) имеется свое адресное пространство, а обмены данными между процессами осуществляются при помощи библиотеки MPI, каждый процесс выполняется на своем процессоре (ядре).

Расчетные формулы.

1. Задать $\beta > 0$, пороги точности $tol1$ и tol для внешних и внутренних итераций, соответственно, начальные приближения x_0 и p_0.

2. Вычислить значение функции $S(p_k, \beta, x_s)$ и ее градиент:

$$G_k = \frac{\partial S}{\partial p}(p_k, \beta, x_s) = b - A(x_s + A^T p_k - \beta c)_+.$$

Здесь k – номер внутренней итерации метода Ньютона для решения задачи безусловной максимизации (4), а s – номер внешней итерации.

3. Используя обобщенную матрицу Гессе функции $S(p_k, \beta, x_s)$, сформировать матрицу $H_k \in R^{m \times m}$:

$$H_k = \delta I + A D_k A^T, \qquad (5)$$

где δ – некоторое положительное число (обычно 10^{-4}), I – единичная матрица, диагональная матрица $D_k \in R^{n \times n}$ задается равенствами

$$(D_k)_{ii} = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad (x_s + A^T p_k - \beta c)^i > 0 \\ 0 & \text{если} \quad (x_s + A^T p_k - \beta c)^i \le 0 \end{cases}$$

4. Найти направление максимизации Δp из решения линейной системы

$$H_k \Delta p = -G_k \qquad (6)$$

с помощью предобусловленного метода сопряженных градиентов. В качестве предобусловливателя используется диагональная часть матрицы H_k.

5. Определить p_{k+1} по формуле $p_{k+1} = p_k - \tau_k \Delta p$, где итерационный параметр τ_k находится из решения одномерной задачи максимизации $\tau_k = \max\limits_{\tau} S(p_k - \tau \Delta p, \beta, x_s)$ методом Армихо. Во всех приведенных ниже расчетах полагалось $\tau_k = 1$.

6. Если выполнен критерий останова для внутренних итераций $\|p_{k+1} - p_k\| \le tol$, то положить $\tilde{p} = p_{k+1}$ и вычислить x_{s+1} по формуле

$$x_{s+1} = (x_s + A^T \tilde{p} - \beta c)_+.$$

Иначе перейти к шагу 2), положив $k = r + 1$.

7. Если выполнен критерий останова для внешних итераций $\|x_{s+1} - x_s\| \leq tol1$, то вычислить решение двойственной задачи (D) $u^* = \frac{\tilde{p}}{\beta}$ и решение прямой задачи (P) есть $x^* = x_{s+1}$. Иначе положить $p_0 = \tilde{p}$ и перейти к шагу 2), положив $s = s + 1$.

В приведенном алгоритме наиболее трудоемкими операциями являются формирование системы (6) и ее решение. При реализации алгоритма распараллеливаются следующие операций:

1) матрично-векторные умножения: Ax и $A^T p$;

2) вычисление скалярных произведений вида $x^T y$, $x, y \in R^n$ и $p^T q$, $p, q \in R^m$;

3) формирование обобщенной матрицы Гессе и матрицы H_k (5);

4) умножение матрицы H_k на вектор.

Все остальные вычисления являются локальными. Было реализовано несколько параллельных схем приведенного алгоритма 1) – 7) в зависимости от вида разбиения исходной матрицы A на блоки: клеточная схема, когда матрица A разбивается на одинаковые блоки, количество которых рано числу процессоров; столцовая схема – матрица A разбивается на блоки по столбцам; строчная схема – матрица A разбивается на блоки по строкам. Каждая из предложенных схем имеет свои достоинства и недостатки, чем и определяется область их применения. Так столбцовая схема весьма эффективна при формировании системы линейных уравнений (6), строчная схема более эффективна для параллельного метода решения системы линейных уравнений.

Для численных экспериментов использовался генератор случайных тестовых задач ЛП, описанный в [1]. Расчеты проводились на параллельном вычислительном кластере МВС-6000IM, состоящем из двухпроцессорных узлов на основе Intel Itanium 2 с частотой 1.6 GHz, соединенными сетью Myrinet 2000 [3].

Некоторые результаты расчетов представлены в табл. 1 – 2. В них T_{tot} – время решения задачи ЛП в секундах, T_{lin} – время решения систем линейных уравнений (6), T_{rem} – время на оставшиеся вычисления. Через s_{tot} обозначено ускорение при параллельном решении задачи ЛП, s_{lin} – ускорение решения линейных систем, а s_{rem} – ускорение оставшихся вычислений. В качестве значения β бралось 100, что в данных задачах превосходило β_*. Всюду вектор $\hat{x} = 0_n$, т.е. в задаче (P) находилось нормальное решение.

Результаты расчетов для клеточной схемы приведены в табл. 1 при решении задачи ЛП размерности $m = 10^4$, $n = 10^6$ и плотности заполненности $\rho = 0.01$ матрицы A ненулевыми элементами. Так, например, при решении задач ЛП с одним миллионом неизвестных и при десяти тысячах ограничений на 144 процессорах кластера МВС-6000IM было достигнуто ускорение расчетов примерно в 50 раз, время счета составило 28 сек.

Была еще реализована "безматричной" схема, которая позволила решать задачи ЛП с наибольшим числом ограничений m по сравнению с другими схемами. Эта схема наиболее рационально использует память кластера, поэтому ее целесообразно применять при больших значениях m и n. Ускорение для этой схемы при сравнительно малых m может оказаться меньше единицы. Но в наиболее трудном случае больших m для обобщенного метода Ньютона эта схема весьма эффективна и в некоторых случаях приводила к ускорениям больше единицы. Использование безматричной схемы существенно эффективнее по сравнению с методами, использующими медленную дисковую память при нехватке оперативной памяти.

В табл. 2 представлены времена счета для безматричной схемы и чебышевские

$n_r \times n_c$	1×1	2×2	4×4	8×8	10×10	12×12
T_{tot} (сек.)	1439.32	502.98	145.13	45.65	36.77	28.21
s_{tot}	1	2.86	9.92	31.53	39.14	51.03
T_{lin} (сек.)	121.88	62.17	31.66	15.89	12.94	11.26
s_{lin}	1	1.96	3.85	7.67	9.42	10.82
T_{rem} (сек.)	1317.35	440.73	113.43	29.74	23.79	16.9
s_{rem}	1	2.99	11.61	44.30	55.37	77.94

Табл. 1.

нормы невязок критериев

$$\Delta_1 = \|Ax - b\|_\infty, \quad \Delta_2 = \|(A^T u - c)_+\|_\infty, \quad \Delta_3 = |c^T x - b^T u|.$$

для разных задач и разного количества процессоров n_p. Так, задача ЛП с двумя миллионами переменных при двухстах тысячах ограничений на 80 процессорах была решена менее, чем за 40 минут.

$m \times n \times \rho$	n_p	T_{tot}	Δ_1	Δ_2	Δ_3
$5\cdot 10^4 \times 10^6 \times 0.01$	16	400.02	$2.1\cdot 10^{-6}$	$2.1\cdot 10^{-7}$	$1.1\cdot 10^{-10}$
$10^5 \times 10^6 \times 0.01$	20	484.62	$8.1\cdot 10^{-6}$	$3.6\cdot 10^{-6}$	$5.6\cdot 10^{-11}$
$10^5 \times 2\cdot 10^6 \times 0.01$	40	823.13	$4.5\cdot 10^{-6}$	$4.2\cdot 10^{-7}$	$7.2\cdot 10^{-11}$
$2\cdot 10^5 \times 2\cdot 10^6 \times 0.01$	80	2317.42	$4.9\cdot 10^{-5}$	$6.6\cdot 10^{-6}$	$5.2\cdot 10^{-10}$

Табл. 2.

На рисунке 1 приведены графики зависимости общего времени работы алгоритма (T_tot), времени решения систем уравнений (T_lin) и времени на остальных операциях (T_rem), а также соответствующие ускорения от числа процессоров для строчной, столбцовой и клеточной схем разбиений при решении некоторых типичных тестовых задач в зависимости от числа процессоров.

Отметим, что с помощью столбцовой схемы разбиения задача ЛП с максимальным количеством переменных – 60 млн. при четырех тысячах ограничений была решена на 128 процессорах за 140 сек.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант 08-01-00619, поддержке ведущих научных школ НШ-4096.2010.1 и программе Президиума РАН П-14.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.И. Голиков, Ю.Г. Евтушенко. Метод решения задач линейного программирования большой размерности // Докл. Академии наук, 2004. Т. 397. № 6. С. 727–732.

2. O.L. Mangasarian. A Newton Method for Linear Programming. // J. of Optimiz. Theory and Applic. 2004. V. 121. P.1–18.

3. В.А. Гаранжа, А.И. Голиков, Ю.Г. Евтушенко, М.Х. Нгуен. Параллельная реализация метода Ньютона для решения больших задач линейного программирования. // Ж. вычислит. матем. и математ. физ. Т. 49. № 8. С. 1369–1384.

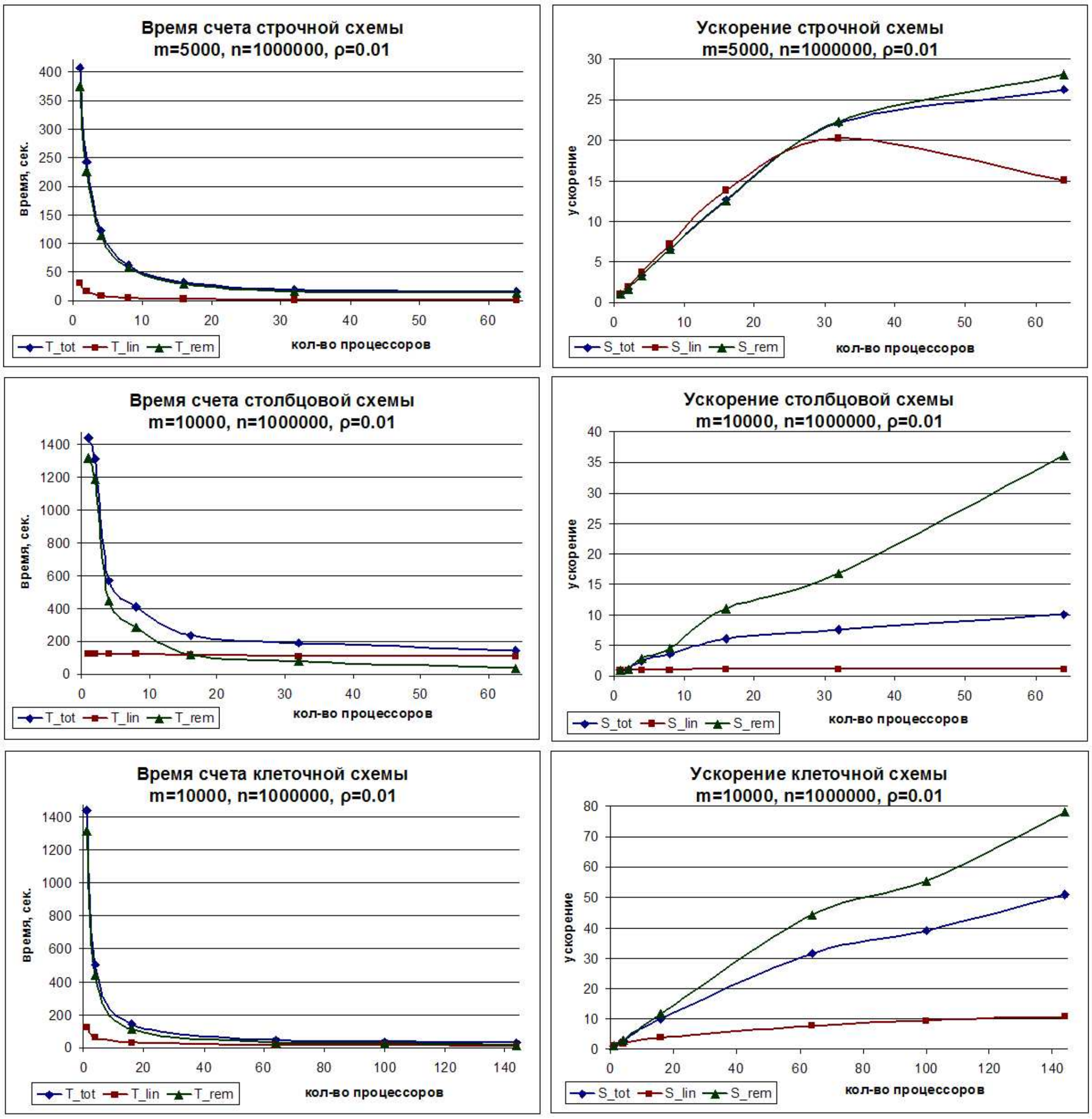


Рисунок 1.

Евтушенко Юрий Гаврилович, Голиков Александр Ильич, ВЦ РАН, ул. Вавилова, д. 40, Москва, 119333, Россия, тел. (8-499) 135-00-20, факс (8-499) 135-61-59, e-mail:evt@ccas.ru, gol@ccas.ru

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ: ТЕНДЕНЦИИ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Н. Н. Кузюрин

Известно много примеров, когда удается построить алгоритмы, использующие в своей работе случайные биты (вероятностные алгоритмы) с лучшими сложностными характеристиками по сравнению с детерминированными. Например, в задаче проверки выполнимости 3-КНФ с n булевыми переменными лучший из известных вероятностных алгоритмов имеет сложность $O(1.323^n)$ [1], в то время как наилучший из детерминированных алгоритмов имеет сложность $O(1.473^n)$ [2]. Классической задачей дискретной оптимизации, где исторически применялись вероятностные методы является задача подсчета числа решений или оценка этого числа. Здесь также вероятностные алгоритмы обеспечивают определенное преимущество перед детерминированными. Например, в [3] предложена эффективная вероятностная схема оценки числа выполняющих булевых наборов для ДНФ с любой наперед заданной точностью. Для булевой задаче о рюкзаке с n целочисленными переменными и m линейными ограничениями в [4] предложена вероятностная аппроксимационная схема оценки числа решений с наперед заданной точностью сложности $n^{2^{O(m)}}$, а в [5] эта оценка улучшена до $O(n^{2m+1})$.

Соотношение между эффективными детерминированными и вероятностными алгоритмами – это классический вопрос в теории сложности вычислений [6],[7]. Известны методы (метод условных вероятностей, метод малых вероятностных пространств), позволяющие для некоторых задач конвертировать вероятностные полиномиальные алгоритмы в детерминированные полиномиальные алгоритмы, т.е. дерандомизировать их (см., например, [8]). Тем не менее, для каждого конкретного вероятностного алгоритма требуется некое искусство для осуществления его дерандомизации. Например, для задачи о максимальном разрезе в графе для дерандомизации вероятностного округления решения, полученного методами полуопределенного программирования [9], потребовалось специальное исследование [10].

В общем случае возможность эффективной дерандомизации, т.е. доказательство равенства $P = BPP$, установлена в настоящее время лишь при весьма сильном предположении: существует задача, разрешимая за время $2^{O(n)}$, которая не вычислима никакой схемой из функциональных элементов размера $2^{o(n)}$ [11]. Например, достаточно, чтобы это было справедливо для проблемы выполнимости КНФ. Отметим, что гипотеза, в предположении которой осуществима такая дерандомизация, сильнее гипотезы $P \neq NP$, поэтому надеяться на ее скорое доказательство (если она верна), по-видимому, не стоит. Более того, из [12] вытекает, что доказательство равенства $P = BPP$ будет иметь следствием получение сверхполиномиальных нижних оценок сложности для алгебраических схем. Все это свидетельствует о трудности дерандомизации в общем случае. Таким образом, хотя теоретически вероятностные алгоритмы могут и не давать выигрыша по сравнению с детерминированными (с точностью до полиномиального множителя), в настоящее время и в ближайшей перспективе остается большой простор для построения вероятностных алгоритмов для конкретных задач дискретной оптимизации более эффективных, чем детерминированные. Далее мы рассмотрим несколько направлений исследований в дискретной оптимизации, в которых вероятностные методы играют важную роль.

Магистральным направлением в дискретной оптимизации является построение эффективных приближенных алгоритмов для NP–трудных задач и доказательство оценок их точности. В развитии этого направления значительную роль играют вероятностные методы. Следует отметить, что в большинстве современных подходов к разработке эффективных эвристик и метаэвристик, используется рандомизация, однако, проанализировать математически поведение таких эвристик достаточно сложно. Но дело не только в том, что многие предлагаемые приближенные алгоритмы являются вероятностными. Вопрос о наилучшей точности, достижимой в классе полиномиальных алгоритмов также часто решается с использованием вероятностных методов. Здесь следует отметить ту роль, которую для анализа приближенных алгоритмов стала играть теория сводимостей сохраняющих аппроксимации (L-сводимости, E-сводимости, AP-сводимости) для классов задач, эффективно решаемых с заданной точностью (APX и подобных). Однако, для многих задач оставался открытым вопрос о том, с какой точностью они могут эффективно быть аппроксимированы, существуют ли для них PTAS (polynomial time approximation scheme) или нет.

Существенный шаг в такого рода исследованиях был сделан с использованием концепции вероятностно проверяемых доказательств (probabilistically checkable proofs). Знаменитая PCP-теорема (см., например, [7]) дала возможность доказательства несуществования PTAS для ряда задач: вершинное покрытие, SAT, 3-SAT, 2-SAT, максимальный разрез, метрическая задача коммивояжера на минимум и др. (при условии $P \neq NP$). Та же техника позволила найти пороги неаппроксимируемости для ряда известных задач [13], [14]. Обычно, под порогом неаппроксимируемости для оптимизационной задачи понимают значение f, для которого существование f-приближенного полиномиального алгоритма влечет совпадение некоторых классов сложности (типа $P = NP$, $RP = NP$ и т.п.). Однако, хотя для некоторых задач и удается достаточно точно определить пороги неаппроксимируемости (задача о покрытии, задача о клике и др.), для ряда задач прогресс не так значителен. Например, для метрической задачи коммивояжера на минимум алгоритм Кристофидеса является 1.5-приближенным, но доказано лишь, что существование полиномиального 220/219-приближенного алгоритма влечет равенство $P = NP$ [15]. Похожая ситуация в задаче о вершинном покрытии и ряде других проблем, где исследования продолжаются. Современные тенденции в данном направлении включают доказательства неаппроксимируемости в предположении некоторых гипотез, усиливающих PCP-теорему [16].

Поскольку вероятностные алгоритмы иногда приводят к лучшим приближениям в конкретных задачах дискретной оптимизации, то актуален вопрос: можно ли надеяться на получение лучших оценок точности аппроксимации в классе вероятностных алгоритмов по сравнению с детерминированными алгоритмами? Ответ будет скорее отрицательным в следующем смысле. Напомним, как обычно определяется точность для вероятностных алгоритмов.

Определение. Вероятностный алгоритм A является r-приближенным, если для любого входа I задачи алгоритм A находит допустимое решение $A(I)$ такое, что математическое ожидание значения целевой функции для $A(I)$ (по случайным битам алгоритма A) отличается от оптимального не более, чем в r раз.

Напомним, что класс f-APX определяется как множество оптимизационных задач, имеющих полиномиальные f-приближенные алгоритмы. При этом f может зависеть от длины входа, например, log-APX – задачи, имеющие эффективные приближенные алгоритмы с логарифмической мультипликативной ошибкой, *poly*-APX – задачи, эффективно приближаемые с мультипликативной ошибкой, ограниченной некоторым полиномом от длины входа.

Утверждение. Для любой задачи на максимум из класса *poly*-APX из существования r-приближенного полиномиального вероятностного алгоритма вытекает существование полиномиального вероятностного алгоритма, который для любой константы $c > 1$ находит решение со значением целевой функции не менее $(1 - 1/L^c)r$ с вероятностью не менее $1 - 2^{-poly(L)}$, где L – длина входа.

Как следствие, отсюда можно получить, что существование полиномиального вероятностного f-приближенного алгоритма для оптимизационной задачи на максимум из класса *poly*-APX, где $f > cr$ ($c > 1$ – произвольная константа), а задача нахождения r-приближенного решения NP–трудна, влечет равенство $RP = NP$. Аналогичное верно и для задач на минимум (без ограничения принадлежности классу *poly*-APX). Таким образом, для задач дискретной оптимизации порог неаппроксимируемости в классе детерминированных алгоритмов сколь нибудь существенно превзойти в классе вероятностных алгоритмов скорее всего нельзя при разумных теоретико-сложностных гипотезах ($RP \neq NP$).

Еще одним важным направлением применения вероятностных методов в дискретной оптимизации является анализ поведения алгоритмов в типичном случае (на случайных входных данных). Исследования в этом направлении ведутся давно [17], [18], [19] и достаточно успешно, хотя ситуация с анализом поведения алгоритмов на случайных входах не так ясна, как при аналогичном анализе по худшему случаю. Наиболее глубокие результаты получены для задач, для которых традиционно в течение длительного времени исследуется качество алгоритмов на случайных данных: алгоритмических проблем для случайных графов [19], проблемы выполнимости к.н.ф. и т.п.

Подход, более требовательный к понятию эффективности на типичных входах, заключается в исследовании полиномиальных в среднем алгоритмов. Классические исследования по анализу сложности в среднем проведены для симплекс-метода решения задач линейного программирования [20], усиленные затем в теории сглаженной сложности [21] и разработке вероятностного полиномиального варианта симплекс-метода [22]. Однако, теория сложности в среднем, разработанная применительно к сводимостям задач с вероятностными распределениями на входах, не смогла дойти до практически значимых задач в отличие теории NP–полноты, теории APX–полноты и т.д. [23], [24].

Для задач дискретной оптимизации эта проблематика только набирает силу. Сравнительно недавно была доказана полиномиальность в среднем одного классического алгоритма, основанного на методе динамического программирования, для задачи о рюкзаке [25] и для задачи о рюкзаке с фиксированным числом ограничений [26]. Однако, проблемы анализа сложности общих методов решения задач дискретной оптмизации на типичных данных (метода ветвей и границ, метода отсечений и т.п.) изучены недостаточно [27]. Возможно более глубоко проблематика, аналогичная методу ветвей и границ, исследована в логике (см. например [28]) для процедур типа Дэвиса-Путнама проверки выполнимости булевой формулы, и при получении нижних оценок длины минимального вывода и его эффективной аппроксимируемости [29]. В докладе предполагается рассмотреть перспективы получения подобных результатов для задач целочисленного линейного программирования.

В докладе также будет затронута важная тема, связанная с применением вероятностных методов для построения приближенных алгоритмов решения многокритериальных задач дискретной оптимизации и задачей оценки размера множеств Парето в типичном случае. В частности, в [30] удалось получить полиномиальные верхние оценки математического ожидания мощности множества Парето-оптимальных решений для произвольной задачи булевой оптимизации с фиксированным числом линейных критериев со случайными коэффициентами. Однако, степень полинома зависит от числа критериев экспоненциально и актуальной является задача получения более точных оценок.

Работа поддержана грантом РФФИ 10-01-00768.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Rolf. Improved bound for the PPSZ/Schoning algorithm for 3-SAT.//J. of Satisfiability, Boolean Modeling and Computation. 2006. V. 1. P. 111–122.

2. T. Brueggemann, W. Kern. An improved local search algorithm for 3-SAT.// Theoretical Computer Science. 2004. V. 329 (1–3). P. 303–313.

3. R.M. Karp, V. Luby, N. Madras. Monte-Carlo approximation algorithms for enumeration problems// J. Algorithms. 1989. V. 10. N 3. P. 429–448.

4. B. Morris, A. Sinclair. Random walks on truncated cubes and sampling 0-1 knapsack solutions// Proc. of the 40th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 1999. P. 230–240.

5. M. Dyer. Approximate counting by dynamic programming// Proc. Annual ACM Symposium on Theory of Computing. 2003.

6. R. Motwani, P. Raghavan. Randomized algorithms.// Cambridge University Press. 1995.

7. S. Arora, B. Barak. Complexity Theory: A Modern Approach.// Cambridge University Press. 2009.

8. Н. Алон, Дж. Спенсер. Вероятностный метод. Москва.: БИНОМ (пер. с английского), 2007.

9. M.X. Goemans, D.P. Williamson. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming.// Journal of the ACM. 1995. V. 42. P. 1115–1145.

10. S. Mahajan, H. Ramesh. Derandomizing semidefinite programming based approximation algorithm.//Proc. of the 36th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science. 1995. P. 162–169.

11. C. Umans. Pseudo-random Generators for All Hardnesses. // Proceedings of the 34th Annual Symposium on Theory of Computing. 2002. P. 627–634.

12. V.Kabanets, R. Impagliazzo. Derandomizing Polynomial Identity Tests Means Proving Circuit Lower Bounds.// Computational Complexity. 2004. V. 13. N 1-2. P. 1–46.

13. J. Hastad. Some optimal inapproximability results.// Proc. 28th ACM Symposium on Theory of Computing. 1997. P. 1–10.

14. U. Feige. A threshold of $\ln n$ for the approximating set cover.// Proc. of the ACM

Symposium on Theory of Computing. 1996. P. 314–318.

15. C.H. Papadimitriou, S Vempala. On the approximability of the traveling salesman problem.//Proc. of the 32nd ACM Symposium on Theory of Computing. 2000. P. 126–133.

16. S. Khot, G. Kindler, E. Mossel, R. O'Donnel. Optimal inapproximability results for MAX-CUT and other CSPs?. SIAM J. Computing. 2007. V. 37. N 1. P. 319–357.

17. В.А. Перепелица, Э.Х. Гимади. К задаче нахождения минимального контура на шрафе с взвешенными дугами.// Дискретный анализ. Новосибирск. 1969. Вып. 15. С. 57–65.

18. R.M. Karp. The probabilistic analysis of combinatorial optimization algorithms.// Algorithms and Complexity: New Directions and Recent Results. J.F. Traub, ed. Academic Press. 1976. P. 1–19.

19. A. Frieze, C. McDiarmid. Algorithmic Theory of Random Graphs.// Random Structures and Algorithms. 1997. V. 10. P. 5–42.

20. S. Smale. On the average number of steps in the simplex method of linear programming.// Math. Programming. 1983. V. 27. P. 241–262.

21. D.A. Spielman, S.-H. Teng. Smoothed analysis of algorithms: why simplex algorithm usually takes polynomial time.// Proc. 33rd ACM Symposium on Theory of Computing. 2001. P. 296–305.

22. J.A. Kelner, D.A. Spielman. A randomized polynomial-time simplex algorithm for linear programming.//Proc. 38th Annual Symposium on the Theory of Computing. 2006.

23. Л. Левин. Односторонние функции.// Проблемы передачи информации. 2003. Т. 23. N 1. С. 103–117.

24. Y. Gurevich. Average case completeness.// J. Comput. System Sci. 1991. V. 42. N 3. P. 346–398.

25. R. Beier, B. Vocking. Random knapsack in expected polynomial time.// 35th ACM Symp. on Theory of Computing, San Diego. 2003.

26. R.Beier, B. Vocking. Typical Properties of Winners and Losers in Discrete Optimization. // 36th ACM Symp. on Theory of Computing, Chicago, Illinois. 2004.

27. V. Chvatal. Hard knapsack problems.// Operations Research. 1980. V. 28. P. 1402–1411.

28. V. Chvatal, E. Szemeredi. many hard examples for resolution.// J. of ACM. 1988. V. 35. P. 759–768.

29. M. Alekhnovich, S.R. Buss, S. Moran, T. Pitassi. Minimum Propositional Proof Length Is NP-Hard to Linearly Approximate.// J. Symb. Log. 2001. V. 66. N 1. P. 171–191.

30. H. Roglin, S.H. Teng. Smoothed analysis of multi-objective optimazition.// Proc. IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science. 2009.

Кузюрин Николай Николаевич, Институт системного программирования РАН, ул. А. Солженицына 25, Москва, 109004, факс: 8(495) 912-15-24, e-mail: nnkuz@ispras.ru

АППРОКСИМАЦИЯ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ГРАНИЦЫ ПАРЕТО В ЗАДАЧЕ ДИСКРЕТНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

А. В. Лотов

В статье рассматривается подход к задачам многокритериальной оптимизации (МКО), основанный на визуализации границы Парето и предназначенный для поддержки принятия решений в широком классе задач с числом критериев до семи-восьми. Описываемый подход был использован как в случае непрерывных задач (выпуклых и невыпуклых), так и в случае задач дискретной оптимизации. В статье сначала дается общее представление о подходе, а затем более подробно описываются методы, предназначенные для дискретных задач МКО с конечным числом вариантов.

Общее описание подхода

Пусть заданы множество допустимых решений $X \subset W$, где W – некоторое пространство решений, и отображение $f : W \to R^m$, сопоставляющее решению $x \in W$ вектор критериев. Под множеством достижимых критериальных векторов будем понимать множество $Z = f(X)$. Предположим для определенности, что предпочтительно уменьшение значений каждого из m критериев (при прочих равных). Тогда между векторами R^m можно ввести соотношение частичного порядка — доминирование по Парето: вектор $z^{**} \in R^m$ доминирует вектор $z^* \in R^m$, если $z_j^{**} \leq z_j^*$ для $j = 1, ..., m$ и $z^{**} \neq z^*$. На основе этого понятия можно ввести понятие критериального вектора, оптимального по Парето на множестве Z: вектор $z^* \in Z$ является оптимальным по Парето, если среди векторов $z \in Z$ не найдется вектора, доминирующего z^* по Парето. Точки Z, оптимальные по Парето, составляют границу Парето $P(Z)$ множества Z, которая может содержать либо бесконечное число различных решений (в непрерывных задачах), либо большое конечное число (в дискретных задачах). Множество эффективных решений $P(X)$ задается как $P(X) = \{x \in X : f(x) \in P(Z)\}$.

Множество $P(X)$ является теоретическим решением задачи МКО. Наличие более чем одной точки в $P(X)$ — принципиальное отличие задач МКО от задач с единственным критерием. На практике, однако, требуется выбрать единственное решение $x^* \in P(X)$ из совокупности математически эквивалентных решений $P(X)$. В методах МКО для этого обычно предлагается использовать предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР). Поэтому такие методы являются методами поддержки принятия решений.

В большинстве методов поддержки принятия решений на основе задач МКО используется оптимизация некоторых скалярных функций критериев, которые называют свертками критериев. В целом методы МКО укладываются в четыре основных направления, отличающихся ролью ЛПР (см. подробнее в [1]):

1) *методы без учета предпочтений ЛПР*: на основе объективных характеристик задачи МКО строится свертка критериев; поиск решения основан на максимизации этой свертки; ЛПР может лишь принять или отвергнуть найденное решение;

2) *методы, основанные на вовлечение ЛПР в процесс построения свертки критериев*: строится функция полезности (ценности), позволяющая сравнить два любых возможных решения по их полезности для ЛПР; поиск наилучшего решения основан на максимизации свертки;

3) *интерактивные (итеративные) методы*: берется исходная свертка и от итерации к итерации осуществляется модификация ее параметров на основе степени

удовлетворенности ЛПР результатами ее максимизации;

4) *методы, основанные на аппроксимации границы Парето*: ЛПР изучает границу Парето и указывает ее предпочтительную точку, по которой находится решение.

Обратим внимание на то, что участие ЛПР выводит методы решения задачи МКО за рамки математики и требует использования методов психологии для их анализа.

Как видно, к теоретическому пониманию решения задачи МКО наиболее близко стоят методы, основанные на аппроксимации границы Парето (эти методы называют также методами недоминируемой границы или апостериорными методами). Наиболее многочисленными, однако, являются методы второй и третьей групп, поскольку они не требуют решения трудной задачи аппроксимации границы Парето, а в плане вычислений позволяют обойтись решением задачи оптимизации, не вызывающей принципиальных затруднений. Вопрос о том, может ли ЛПР последовательно и устойчиво отвечать на вопросы о своих предпочтениях и, следовательно, в какой степени свертки, используемые в методах второго и третьего подходов, соответствуют предпочтениям ЛПР, является вопросом из области психологии и многими авторами попросту игнорируется. Анализ этой проблемы проведен в [1], где показано, что большинство вопросов, предлагаемых ЛПР в таких методах, слишком сложны для того, чтобы ответы на них были надежны.

Методы четвертой группы в последнее время вызывают повышенный интерес в связи с отсутствием в них необходимости выявлять предпочтения ЛПР до предоставления информации об эффективных решениях. Уже давно известно, что в случае двух критериев именно построение границы Парето, ее изображение на плоскости и прямой выбор предпочтительной критериальной точки является наиболее практичным подходом к задачам МКО [2, 3]. Такая методика, однако, не переносится сразу на случай более чем двух критериев. Были разработаны методы аппроксимации границы Парето конечным набором большого числа многомерных критериальных точек с дальнейшим ее представлением ЛПР в виде списка многомерных точек, но выбор из такого списка оказался слишком трудоемким для ЛПР [1]. Поэтому на практике такие методы используются мало.

Выход из этой ситуации нашелся в визуализации границы Парето. Один из первых методов такого рода был предложен нами еще в 1970-х годах, а в 1980-х годах были разработаны эффективные вычислительные методы для линейных задач МКО. В предложенном нами методе, получившем название метода достижимых целей (МДЦ), вместо $P(Z)$ аппроксимируется множество, называемое оболочкой Эджворта-Парето (ОЭП) множества Z и определяемое в задаче многокритериальной минимизации как $H(Z) = \{z \in R^m : z = z' + z''$ где $z' \in Z, z'' \geq 0\}$. Наряду с достижимыми точками $H(Z)$ содержит все критериальные точки, доминируемые $P(Z)$. Выбор $H(Z)$ как объекта аппроксимации вместо Z или $P(Z)$ объясняется тем, что $P(H(Z)) = P(Z)$, а также удобством его аппроксимации и визуализации в виде наборов двумерных сечений. Граница Парето визуализируется в виде эффективных границ двухкритериальных сечений ОЭП. Наборы сечений (карты решений) изображаются по запросу ЛПР; используется также анимация карт решений. Многолетнее практическое применение МДЦ для анализа экономических, экологических и других сложных систем показывает, что у ЛПР при этом складывается представление о взаимосвязи недоминируемых значений критериев (о так называемых критериальных замещениях), что позволяет ЛПР сознательно выбрать предпочтительную точку на границе Парето, по которой находится соответствующее решение [4, 5].

Аппроксимация ОЭП в выпуклом случае

Аппроксимация ОЭП — главная математическая проблема, которую потребовалось решить при реализации МДЦ. Для обеспечения диалоговой визуализации ОЭП его двумерными сечениями это множество должно быть аппроксимировано простыми телами, сечения которых рассчитываются достаточно быстро. В выпуклом случае в качестве аппроксимирующих тел берутся выпуклые многогранные множества, а в невыпуклом случае — объединения многомерных конусов [5].

В выпуклом случае аппроксимация ОЭП основана на комбинации скалярной оптимизации и свертывания систем линейных неравенств. Поскольку ОЭП представляет собой сумму выпуклого множества и конуса, рассматриваемая задача тесно связана с классической задачей полиэдральной аппроксимации многомерных выпуклых тел, для которой и разрабатываются методы аппроксимации, которые затем переносятся на случай ОЭП. Нами были разработаны адаптивные итерационные методы аппроксимации многомерных выпуклых компактных тел последовательностями вписанных многогранников $P^k, k = 0, 1, \ldots$ с растущим числом вершин, лежащих на границе аппроксимируемого тела C. Последующий многогранник строится на основе предыдущего с использованием расчетов опорной функции $g_C(u) = sup\{< u, y >: y \in C\}$ для адаптивно выбранных направлений u из единичного шара. Наибольшее распространение получил метод уточнения оценки (УО), предложенный нами в 1982 году и являющийся первым методом такого типа.

Перед началом очередной $(k+1)$-й итерации метода УО должен быть задан многогранник P^k сразу в двух формах: в виде списка вершин и в виде системы линейных неравенств, множество решений которой совпадает с P^k.

Шаг 1. Для направлений, задаваемых нормальными векторами граней многогранника P^k, рассчитывается отклонение множества C от этого многогранника. Находится та грань P^k, для которой достигается максимальное отклонение. Кладем $P^{k+1} = \text{ conv } \{z^*, P^k\}$, где z^* — точка границы C, наиболее отстоящая от найденной грани.

Шаг 2. Строится такая система линейных неравенств, множество решений которой совпадает с P^{k+1}.

Эксперименты и практическое использование метода УО показали его эффективность при аппроксимации ОЭП, если число критериев не превосходит семи-восьми. Теоретический анализ метода УО и других методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел основан на сравнении построенных многогранников с “образцовыми” последовательностями многогранников, дающих наилучшую аппроксимацию тела (многогранников наилучшей аппроксимации). Такие многогранники обычно не удается построить, но знание их свойств дает основу для изучения эффективности реализуемых методов аппроксимации. Была разработана теория методов полиэдральной аппроксимации многомерных выпуклых тел [6]. В частности, было показано, что метод УО является асимптотически оптимальным по порядку числа вершин и по порядку числа вычислений опорной функции.

Одной из задач, решенных на пути реализации МДЦ, является построение P^{k+1} в виде множества решений системы линейных неравенств. Метод решения этой задачи, устойчивый по отношению к ошибкам округления, был разработан О.Л. Черных [7]. Метод базируется на идеях метода свертывания систем линейных неравенств, предложенного С.Н. Черниковым [8].

В проблемах МКО опорная функция $H(Z)$ рассчитывается на основе решения задачи оптимизации функции $< u, f(x) >$ на множестве допустимых решений X. Единственное отличие метода аппроксимации ОЭП от метода аппроксимации компактного множества состоит в том, что направления u берутся из пересечения единичного шара с неположительным конусом.

Визуализация границы Парето в дискретных задачах

Для поддержки многокритериального выбора из конечного числа альтернатив на основе визуализации границы Парето был предложен метод разумных целей (МРЦ). В рамках МРЦ вместо $H(Z)$ аппроксимируется conv $H(Z)$. Процесс поддержки принятия решения состоит в том, что ЛПР изучает $P(\text{conv } H(Z))$, представляемую в виде карт решений аналогично выпуклым задачам. ЛПР назначает на $P(\text{conv } H(Z))$ предпочтительную точку $\hat{y}$, которая теперь, вообще говоря, не достижима и поэтому называется разумной целью. Далее находится небольшое число альтернатив $\hat{X}$, критериальные точки которых в каком-то смысле близки к цели.

В исходном варианте МРЦ, предложенном в [9], предполагается, что альтернативы заданы конечным множеством критериальных точек $Y = \{y^1, \ldots, y^N\}$. Тогда аппроксимация conv $H(Z)$ не составляет труда — она осуществляется с помощью метода УО. Разумная цель $\hat{y}$ используется для выбора из Y некоторого подмножества $\hat{Y}$, состоящего из нескольких оптимальных по Парето точек, близких к $\hat{y}$. По $\hat{Y}$ находится множество альтернатив $\hat{X}$. Окончательное решение ЛПР выбирает из $\hat{X}$ напрямую или используя специальные методы поддержки принятия решений, предназначенные для работы с малым числом альтернатив.

Для построения $\hat{Y}$ в МРЦ можно использовать различные подходы. В [9] был предложен алгоритм, имеющий теоретическое обоснование. Его идея состоит в использовании предположения о том, что достижение значений критериев, заданных $\hat{y}$, много важнее превышения этих значений.

МРЦ показал себя эффективным средством поддержки многокритериального выбора из конечного числа альтернатив с количественными критериями при числе критериев до восьми [5], результаты его практического использования в сети Интернет описаны в [11]. В то же время, исходный вариант МРЦ применим только в случае относительно малого числа альтернатив (в изученных задачах их максимальное число составляло около 400 тысяч [10]). Для случая значительно большого числа альтернатив потребовалось разработать методы аппроксимации conv $H(Z)$, не требующие расчета всех критериальных точек. Рассматривалась задача

$$f\left(x\right) \rightarrow \min,\; x \in X = \left\{x \in X_0 | w_i\left(x\right) \leq 0,\; i = 1, 2, \ldots, k\right\},$$

где $X_0 = \{0, 1 ... K\}^n$ — целочисленный куб. Предполагалось, что $f(\cdot)$ является монотонно возрастающей по части переменных и монотонно убывающей по остальным и что ограничения также монотонны.

Было разработано два метода решения этой задачи: метод квазиразумных целей (МКРЦ) и МРЦ для большого числа альтернатив. В МКРЦ [12] рассматривается релаксированная задача, получаемая из исходной задачи исключением требования целочисленности. Предлагается аппроксимировать ОЭП релаксированной задачи, для чего могут быть использованы методы, разработанные ранее для непрерывных задач. ЛПР предлагается указать цель $\hat{y}$ (называемую в данном случае квазиразумной) на границе Парето аппроксимации ОЭП релаксированной задачи. Далее, аналогично исходному МРЦ, по цели требуется найти множество альтернатив $\hat{X}$, порождающих множество $\hat{Y}$, однако уже без использования всех точек Y. Для решения задачи нахождения $\hat{X}$ был разработан алгоритм, применимый в случае монотонных функции и использующий идеи метода ветвей и границ.

В МРЦ для большого числа альтернатив [13] применяется метод полиэдральной аппроксимации conv $H(Z)$, использовавшийся в прикладной задаче с 10^{32} альтернативами и моделью, заданной в виде черного ящика. Метод основан на синтезе идей метода ветвей и границ и методов адаптивной полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. А.И.Поспелов в кандидатской диссертации получил оценки зависимости точности аппроксимации conv $H(Z)$ от числа вершин многогранника, построенного этим методом.

Работа поддержана грантом РФФИ 10-01-00199, ПФИ Президиума РАН П-2 и ПФИ ОМН РАН № 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. О.И. Ларичев. Объективные модели и субъективные решения. М.: Наука, 1987.

2. S. Gass, T. Saaty. The Computational Algorithm for the Parametric Objective Function // Naval Research Logistics Quarterly. 1955. V.2, P. 39.

3. B. Roy. Decisions avec criteres multiples // Metra International. 1972. V.11(1). P. 121–151.

4. А.В. Лотов, В.А. Бушенков, Г.К. Каменев и О.Л. Черных. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.

5. A.V. Lotov, V.A. Bushenkov and G.K. Kamenev, Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier, Boston: Kluwer, 2004.

6. Г.К. Каменев. Оптимальные адаптивные методы полиэдральной аппроксимации выпуклых тел. М: Изд. ВЦ РАН, 2007.

7. О.Л. Черных. Построение выпуклой оболочки конечного множества точек при приближенных вычислениях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28(9).

8. С.Н. Черников. Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 9. Д.В. Гусев, А.В.Лотов. Методы поддержки принятия решений в задаче конечного выбора // Исследование операций. Модели, системы, решения (под ред. Ю.П.Иванилова). М.: ВЦ РАН, 1994. С. 15–43.

10. Л.В. Бурмистрова, Р.В.Ефремов, А.В. Лотов. Методика визуальной поддержки принятия решений и ее применение в системах управления водными ресурсами // Известия АН. Сер. Теория и Системы Управления. 2002. № 5. С. 89–100.

11. J. Dietrich, A.H. Schumann, A.V. Lotov. Workflow oriented participatory decision support for integrated river basin planning // Topics on System Analysis and Integrated Water Resource Management. Elsevier, 2007, P. 207–221.

12. А.В. Лотов, А.И. Поспелов. Метод квазиразумных целей для целочисленных задач многокритериальной оптимизации // Доклады АН. 2007. Т. 414(3). С. 317–319.

13. А.И. Поспелов. Аппроксимация выпуклой оболочки Эджворта-Парето в многокритериальных задачах с монотонными критериями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49(10). С. 1765–1778.

Лотов Александр Владимирович, ВЦ РАН, ул. Вавилова 40, Москва, 119333, РФ, тел. (499)135-1209, факс ((499)135-6159, e-mail:avlotov@yandex.ru

VARIABLE NEIGHBOURHOOD SEARCH PUMP AND DIVING FOR MIP INITIALISATION

N. Mladenović, S. Hanafi, J. Lazić

The 0-1 Mixed Integer Programming (0-1 MIP) problem can be formulated as follows:

$$(P) \qquad \min\{c^T x \mid x \in X\}, \tag{1}$$

where $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x_j \geq 0 \text{ for } j = 1, \ldots, n, x_j \in \{0,1\} \text{ for } j = 1, \ldots, p \leq n\}$ is the feasible set, $c^T x$ is the objective function, and $x \in X$ are the feasible solutions. Finding an initial feasible solution for Mixed Integer Programs (MIPs) is NP–complete [8], and can be very hard in practice. Several methods that increase speed of finding a first initial solution, like Feasibility pump [2] and its modifications [1, 3], have already been included into CPLEX, the best known commercial software for solving MIPs. In this paper we propose two new Variable Neighbourhood Search (VNS) [7] based heuristics of that kind for 0-1 MIPs.

The first heuristic, called Variable Neighbourhood Pump (VNP), combines ideas of Feasibility Pump (FP) [2] and Variable Neighbourhood Branching (VNB) [5] heuristics. It uses FP to obtain a near-feasible solution vector, which is then passed as a starting vector to VNB local search, which attempts to locate the feasible solution of the original problem. If VNB fails to detect the feasible solution due to the time or neighbourhood size limitations, a pseudo-cut is added to the current subproblem in order to change the linear relaxation solution, and the process is iterated. The pseudo-code of the modified constructive VNB heuristic which is applied to a solution vector passed from the FP pumping cycle is given in Figure . Statement $y =$ `MIPSolve`(P, x) denotes a call to a generic MIP solver, with x as a starting solution and y as an output solution. For a given MIP problem P, $P(k, x')$ denotes a problem derived from P by adding the constraint $\delta(x, x') \geq k$ to P, where δ is a Hamming distance in the solution space X.

```
VNB(P, x', k_min, k_step, k_max)
  k = k_min; status = ''noFeasibleSolFound'';
  while (k <= k_max && (status == ''noFeasibleSolFound'') do
      x'' = MIPSolve(P(k, x'), x');
      status = getSolutionStatus(P(k, x'));
      if (status == ''noFeasibleSolFound'') then
          Add (reverse last) pseudo-cut (into) δ(x', x) >= k + k_step;
          k = k + k_step;
      else
          x' = x'';
      endif
  end
  return x'.
```

Fig. 1: Constructive VNB.

The second heuristic, called Variable Neighbourhood Search Diving (VNS Diving for short), performs systematic hard variable fixing according to the rules of Variable

Neighbourhood Decomposition Search (VNDS) [4], in order to generate smaller subproblems whose feasible solution (if one exists) is also feasible for the original problem. A similar approach was proposed in [6] for optimising 0-1 MIPs starting from a given initial MIP feasible solution. Pseudo-cuts are added during the search process in order to prevent the exploration of already visited search space areas. In fact, VNS Diving represents a simple modification of the original VNDS for 0-1 MIPs, adjusted to address the MIP feasibility. The original VNDS pseudo-code can be found in [6].

Fig.2: Solution quality of the first feasible solution as obtained by CPLEX, VNP and VNS Diving, respectively - part I.

Proposed heuristics were tested on an established benchmark of 83 instances and compared with the CPLEX 11.1 MIP solver. Solution quality results are summarised in

Figures 2 and 3. Based on the average best solution gap and average rank values, we can conclude that both methods significantly outperform the CPLEX MIP solver regarding the solution quality. Regarding the computational time, the difference between the methods is not that remarkable. Still, VNS Diving has the smallest average computational time of 78.26 seconds, VNP is the second best method with average running time 85.77 seconds and the CPLEX MIP solver is the slowest with 90.88 seconds average running time. It is also noteworthy that both of our proposed heuristics successfully solved all of the 83 instances from the benchmark, whereas CPLEX failed to find a feasible solution for one instance.

Fig.3: Solution quality of the first feasible solution as obtained by CPLEX, VNP and VNS Diving, respectively - part II.

In summary, the CPLEX MIP solver is outperformed by both heuristics: significantly regarding the solution quality, and only slightly regarding the computational time. Furthermore, hard variable fixing (VNS Diving) appears to be more effective for finding 0-1 MIP feasible solutions than soft variable fixing (VNS Branching). Our future work regarding the 0-1 MIP feasibility may consist of designing a multi-objective VNS heuristic, which would attempt to tackle both the infeasibility and original objective quality during the search process.

REFERENCES

1. T. Achterberg, T. Berthold. Improving the feasibility pump. Discrete Optimization, 4:77–86, 2007.

2. M. Fischetti, F. Glover, A. Lodi. The feasibility pump. Mathematical Programming, 104:91–104, 2005.

3. M. Fischetti, A. Lodi. Repairing mip infeasibility through local branching. Computers & Operations Research, 35:1436–1445, 2008.

4. P. Hansen, N. Mladenović, D. Perez-Britos. Variable Neighborhood Decomposition Search. Journal of Heuristics, 7(4):335–350, 2001.

5. P. Hansen, N. Mladenović, D. Uroŷsević. Variable neighborhood search and local branching. Computers & Operations Research, 33(10):3034– 3045, 2006.

6. J. Lazić, S. Hanafi, N. Mladenović, D. Uroŷsević. Variable neighbourhood decomposition search for 0–1 mixed integer programs. Computers & Operations Research, 37(6):1055–1067, 2010.

7. N. Mladenović P. Hansen. Variable neighborhood search. Computers & Operations Research, 24(11):1097–1100, 1997.

8. L.A. Wolsey, G.L. Nemhauser. Integer and Combinatorial Optimization, 1999.

Mladenović Nenad, Brunel University, UB8 3PH, UK, phone: +44 (0) 1895266151, fax: +44 (0)1895 251686, e-mail: Nenad.Mladenovic@brunel.ac.uk

УСКОРЕННЫЕ ФЕЙЕРОВСКИЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ И РАВНОВЕСИЯ

Е. А. Нурминский, Н. Б. Шамрай

Проблемы поиска состояний равновесия сложных систем, определения стационарных точек монотонных отображений являются частыми объектами изучения в теории и практике исследования операций [1]. Одним из общих направлений развития алгоритмического аппарата в этих областях являются фейеровские процессы [2], представляющие собой удобный инструмент для изучения сходимости многих численных методов. Особой привлекательностью фейеровских процессов является возможность их комбинации с различными видами декомпозиционных схем и построения методов, удобных для параллельных вычислений. В работе будут представлены результаты исследований фейеровских процессов с малыми возмущениями [3] и предложены новые правила управления шаговым множителем, позволяющие ускорить сходимость процессов. Показано, как предлагаемые итерационные схемы можно адаптировать к решению задач оптимизации и поиска экономических равновесий [5],[6]. Все результаты получены в конечномерном евклидовом пространстве E со скалярным произведением xy и нормой $\|x\| = \sqrt{xx}$.

Фейеровский процесс определяется рекурсивным соотношением

$$x^{k+1} = F(x^k), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

где $F(\cdot)$ — фейеровский оператор, x^0 — некоторая начальная точка. Фейеровский оператор $F : E \to E$ определяется относительно некоторого заданного множества V и обладает следующим свойством

$$\|F(x) - v\| \le \|x - v\|, \quad \forall v \in V. \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что из условия (2) непосредственно следует, что любая точка $v \in V$ является неподвижной для оператора F. Везде далее будем предполагать, что множество V замкнуто и выпукло. В теории фейеровских процессов изучаются условия при которых последовательность (1) в том или ином смысле сходится к множеству V [2]. На самом деле, чтобы гарантировать сходимость (1) к V требуются более сильные условия притяжения, чем (2) и в работе рассматривается следующая модификация свойств фейеровского оператора.

Определение 1. Фейеровский оператор F назовем локально сильно фейеровским, если для любого $\bar{x} \notin V$ существует окрестность нуля U и число $\alpha < 1$ такие, что $\|F(x) - v\| \le \alpha\|x - v\|$ для всех $v \in V$ и $x \in \bar{x} + U$.

С целью развития теории фейеровских процессов и будущих приложений рассматривается следующее обобщение процесса (1):

$$x^{k+1} = F_k(x^k + z^k), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

где z^k — произвольное малое возмущение ($z^k \to 0$), F_k выбирается из некоторого конечного набора $\mathcal{F} = \{\phi_i,\ i = 1, 2, \ldots, M\}$ локально сильно фейеровских операторов относительно множеств V_i соответственно.

Особый интерес представляет случай, когда совокупность множеств V_i в пересечении образует непустое множество $V = \bigcap_{i=1}^{M} V_i$ и каждый оператор ϕ_i является локально сильно фейеровским относительно соответствующего ему множества V_i.

При весьма необременительных предположениях может быть доказана следующая теорема сходимости.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{F} = \{\phi_i,\ i = 1, 2, \ldots, M\}$ — семейство локально сильно фейеровских операторов относительно множеств $V_i,\ i = 1, 2, \ldots, M$ и в (3) оператор F_k выбирается как один из элементов подсемейства $\mathcal{F}_k = \{\phi_(x),\ i : x^k \notin V_i\}$, $z^k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда, если последовательность $\{x^k\}$ ограничена, то любая ее предельная точка принадлежит V.

Приведенная теорема показывает, что исчезающее возмущение z^k не нарушает свойства сходимости процессов типа (3) к множеству V. При этом для решения задач оптимизации и равновесия возмущение z^k можно использовать, чтобы направить процесс к некоторому подмножеству $Z \subset V$, например множеству решений исходной задачи. Для достижения такого рода сходимости необходимо выбирать возмущение z^k исходя из специфики решаемой задачи.

Перепишем процесс (3) в более удобной для исследований форме:

$$x^{k+1} = F_k(x^k + \lambda_k d^k), \quad d^k \in D(x^k), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{4}$$

где $D : E \to 2^E$ — точечно-множественное отображение, λ_k — шаговый множитель. Для сходимости (4) достаточно ввести следующее условие на множество D.

Определение 2. Точечно-множественное отображение $D : E \to 2^E$ называется локально сильным аттрактантом множества $Z \subset V$ если для любого $x' \in V \setminus Z$ найдется окрестность нуля U такая, что

$$g(z - x) \geq \delta > 0$$

для всех $z \in Z,\ x \in x' + U,\ g \in D(x)$ и некоторого $\delta > 0$.

Имеет место следующая теорема сходимости.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{F} = \{\phi_i,\ i = 1, 2, \ldots, M\}$ семейство непрерывных и локально сильно фейеровских операторов относительно соответствующих множеств V_i и для любого $x \notin V = \cap_{i=1}^{M} V_i$ существует номер $\iota \in \{1, 2, \ldots, M\}$ такой, что ϕ_ι — локально сильно фейеровский, $D(\cdot)$ — локально сильный аттрактант множества $Z \subset V$. Тогда, если последовательность $\{x^k\}$ ограничена, то процесс

$$x^{k+1} = F_k(x^k + \lambda_k d^k),\ d^k \in D(x^k), \quad F_k = \phi_{\iota_k},\ \text{где } \iota_k \text{ такой, что } x^k + \lambda_k d^k \notin V_{\iota_k}, \tag{5}$$

сходится к множеству Z при $\lambda_k \to +0$ и $\sum_{k\to\infty} \lambda_k = \infty$.

Основным недостатком теоремы 2 является условия выбора шагового множителя λ_k, которые на практике приводят к медленной сходимости процесса. Поэтому представляет существенный практический и теоретический интерес развитие адаптивных правил управления шаговыми множителями λ_k, позволяющих ускорить алгоритм (4).

Общая идея управления величиной шагового множителя может быть основана на следующем условии стационарности:

$$0 \in D(x) + N_V^+(x), \tag{6}$$

где $N_V^+(x)$ нормальный конус к множеству V в точке x, которое выполняется как для оптимизационных задач в виде необходимых условий экстремума, так и для вариационных неравенств, как характеристика корней проективного уравнения.

Перепишем (4) в виде

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k p^k, \quad p^k = (F_k(x^k + \lambda_k d^k) - x^k)/\lambda_k \tag{7}$$

и обозначим $P(k, m) = \mathrm{conv}\{p^k, p^{k+1}, \dots, p^m\}$.

Для заданной последовательности $\theta_t \to +0$ при $t \to \infty$ определим последовательность индексов $\{k_t\}$ и шаговые множители λ_k такие, что выполнены следующие условия.

1. Для $t = 0$ определим $k_t = 0$ и зафиксируем произвольное положительное λ_0. Выберем $q \in (0, 1)$.

2. Для данных t и k_t определим индекс k_{t+1} такой, что

$$0 \notin P(k_t, s) + \theta_t B, \quad k_t \le s < k_{t+1}, \quad 0 \in P(k_t, k_{t+1}) + \theta_t B \tag{8}$$

   при $\lambda_s = \lambda_{k_t}$ для $k_t \le s < k_{t+1}$.

3. Положим

$$\lambda_{k_{t+1}} = q\lambda_{k_t}. \tag{9}$$

4. Увеличиваем номер итерации $t = t + 1$ и повторяем итерации (7) для текущего значения λ_k.

Другими словами, по условию (8) первый переход к шагу k_{t+1} после k_t осуществляется тогда, когда $0 \in \mathrm{conv}\{p^{k_t}, p^{k_t+1}, \dots, p^{k_{t+1}}\} + \theta_t B$, при этом шаговый множитель уменьшается согласно (9) на величину $q < 1$. Если построенная таким образом последовательность $\{k_t\}$ бесконечна, то, грубо говоря, часть последовательности $\{x^k\}$ при $k_t \le k \le k_{t+1}$ сходится к точке x^*, удовлетворяющей условию стационарности $0 \in D(x^*) + N_V^+(x^*)$.

Доказательство сходимости итерационного процесса (4) с применением описанной выше схемы выбора шагового множителя опирается на методику [8], использующую следующие общие условия типа Ляпунова для последовательности итераций $\{x^k\}$.

A1 Последовательность $\{x^k\}$ ограничена.

A2 Для $\{x^{k_t}\} \to x'$ при $t \to \infty$, где $x' \notin X_*$, существует $\epsilon > 0$ такое, что для любого t выполнено

$$m_t = \inf_{m > k_t} \{m : \|x^{k_t} - x^m\| > \epsilon\} < \infty.$$

A3 Существует непрерывная функция $W(x) : E \to R$ такая, что

$$\limsup_{t\to\infty} W(x^{m_t}) < \lim_{t\to\infty} W(x^{k_t}) = W(x')$$

для любых подпоследовательностей $\{x^{k_t}\}$, $\{x^{m_t}\}$, удовлетворяющих условию **A2**.

A4 Множество $W_* = \{W(x^*),\ x^* \in X_*\}$ такое, что множество $R \setminus W_*$ всюду плотно.

A5 Если $\{x^{k_t}\} \to x^* \in X_*$, то $\|x^{k_t+1} - x^{k_t}\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Если условия **A1–A5** выполнены, то можно показать, что все предельные точки последовательности $\{x^k\}$ принадлежат X_*.

Практическая реализация приведенного правила регулировки шагового множителя требует применения отдельного численного метода для определения того факта, что имеющаяся точка (в нашем случае это начало координат) принадлежит политопу, заданному как выпуклая оболочка конечного числа данных точек. Дополнительным осложняющим обстоятельством является то, что количество таких точек как правило существенно больше, чем размерность пространства переменных, которая в свою очередь также может быть высокой. Для решения таких задач получен достаточно большой опыт использования проективных алгоритмов [8], основанных на последовательных проекциях на аффинные подпространства, порождаемых исходным политопом. Эти алгоритмы имеют глобальную "лучше чем линейную" сходимость, допускают рестарт с предыдущего решения, что значительно уменьшает вычислительные затраты и делает возможным параллелизацию процесса.

В качестве объекта приложений полученных результатов рассмотрены задачи решения вариационных неравенств: найти $x^* \in V$ такой, что

$$G(x^*)(x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in V, \tag{10}$$

где $G : \Omega \to E$ — непрерывное отображение, $\Omega \subseteq E$ — открытое множество, $V \subset \Omega$ — непустое выпуклое замкнутое множество. Одним из общих подходов к поиску точки x^* является решение линеаризованного вариационного неравенства

$$(G(x^k) + \lambda_k^{-1} A_k(x^{k+1} - x^k))(x - x^{k+1}) \geq 0 \quad \forall x \in V,$$

где A_k — положительно определенная матрица. Если A_k единичная матрица, то эта схема переходит в проективный метод решения вариационных неравенств

$$x^{k+1} = \pi_V(x^k - \lambda_k G(x^k)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

где π_V — проекция на множество V. Метод привлекает простотой своей итерационной схемы и не предполагает вычисления градиентов или субградиентов отображения G. Для простых множеств V, например, гиперплоскости, полупространства, сферы, операцию проектирования можно вычислить аналитически. Однако, если множество V имеет сложную структуру, то вычисление проекции эквивалентно решению задачи выпуклого квадратичного программирования, что, очевидно, снижает эффективность алгоритма (11).

В случае экономико-математических задач равновесия, формализуемых в виде вариационного неравенства (10), допустимая область V обычно представима в виде $V = \bigcap_{i=1}^{M} V_i$ пересечения конечного числа выпуклых замкнутых супермножеств V_i

типа полупространств или положительных ортантов, операция проектирования на которые легко реализуема. Тогда для решения (10) может быть использован метод последовательных проекций:

$$x^{k+1} = \pi_{V_i}(x^k - \lambda_k G(x_k)),\ i : x^k - \lambda_k G(x_k) \notin V_i,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

Сходимость процесса (12) обеспечивается теоремами 1, 2 и следующими свойствами.

Утверждение 1. Пусть $\bar{V}$ — произвольное выпуклое замкнутое супермножество V, то есть $V \subseteq \bar{V}$. Если множество V ограничено, то для любой точки $y' \notin \bar{V}$ операция проектирования $\pi_{\bar{V}}(\cdot)$ является локально сильно фейеровским оператором относительно V.

Утверждение 2. Если отображение G вариационного неравенства (10) псевдомонотонно на V, то отображение $-G$ является аттрактантом множества решений вариационного неравенства.

Детали вычислительных экспериментов представлены в докладе.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00042-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Facchinei F., Pang J.-S. Finite dimensional variational inequalities and complementarity problems. Vol. 1-2, Springer Series in Operations Research, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 2003.

2. Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Екатеринбург: УрО РАН, 2005.

3. Нурминский Е.А. Использование дополнительных малых воздействий в фейеровских моделях итеративных алгоритмов // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2008. Т. 48, вып. 12. С. 2121–2128.

4. Nurminski E.A. Envelope stepsize control for iterative algorithms based on Fejer processes with attractants Optimization Methods and Software, Vol. 25(1). 2010. P. 97–108.

5. Нурминский Е.А., Шамрай Н.Б. Алгоритмы последовательного и параллельного проектирования для решения вариационных неравенств // IV Всероссийская конференция "Проблемы оптимизации и экономические приложения": Материалы конференции (Омск, 29.06–4.07.2009). Омск: Полиграфический центр КАН. 2009. С. 186.

6. Нурминский Е.А., Шамрай Н.Б. Моделирование транспортных потоков г. Владивостока на основе теории равновесия // Sisteme de transport si logistica: Materialele Conf. Int., Chisinau, 22-23 octombrie 2009. Red. Resp. Dumitru Solomon. Acad. de Transporturi, Informatica si Comunicatii - Ch.: Evrica, 2009. P. 334–348.

7. Нурминский Е.А. Численные методы выпуклой оптимизации. М.: Наука. 1991.

8. Нурминский Е.А. О сходимости метода подходящих аффинных подпространств для решения задачи о наименьшем расстоянии до симплекса // Журн. вычисл. матем. и матем. физики . 2005, т. 45, вып. 11, С. 1996–2004.

Нурминский Евгений Алексеевич, Шамрай Наталья Борисовна, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, ул. Радио, 5, Владивосток, Россия, тел. (4232) 31-04-04, факс (4232) 31-04-04, e-mail: nurmi@dvo.ru, shamray@dvo.ru

ТЕОРИЯ S-ГИПЕРСЕТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ СЕТЕВОЙ СТРУКТУР

В. К. Попков

В работе рассматриваются основные определения теории S-гиперсетей, приводится классификация математических моделей структур в рамках данной теории. Рассматриваются задачи оптимизации некоторых систем сетевой структуры и их формальные постановки в рамках теории S–гиперсетей. Предлагаются подходы к их решению, и оценивается сложность представленных задач. Сначала приведем определение простой гиперсети, в которой элементы в виде узла, однотипны, а линейные элементы (ветви, ребра) имеют различную природу [1].

Шестерка, состоящая из трех множеств и трех отображений $NS = (X, V, R; P, F, W)$ называется гиперсетью, если $\forall v \in V$ $|P(v)| = 2$, $\forall r \in R$ $|W(r)| = 2$, $\forall r \in R$ множество $F(r) \subseteq V$ составляет маршрут в графе $PS = (X, V)$.

Таким образом, первичная PS и вторичная сети WS гиперсети NS являются графами, а F отображает ребра $WS = (X, R)$ в маршруты графа $PS = (X, V)$. Так как множество $F(r)$ является маршрутом, то отображение F единственным образом определяет отображение W. Действительно, концевые вершины маршрута $F(r)$ являются одновременно концами ребра r, то есть гиперсеть NS можно задать пятеркой $(X, V, R; P, F)$. Теперь приведем формальное определение S–гиперсети. Пусть задано множество графов (гиперграфов) $G_0 = (X^0, V)$, $G_1 = (X^1, U^1)$,…,$G_k = (X^k, U^k)$ и корневое дерево $T_0 = (Z, R)$, где $Z = z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_k$, $R = r_1,\ \ldots,\ r_k$ определяющее вложение графов G_j в G_i, $(i < j)$, которое аналогично вложениям определяемым для гиперсетей, за тем лишь исключением, что вершины x_k^i и x_l^j графов G_i и G_j не тождественны, а инцидентны. Очевидно, что одной и той же вершине x_k^i может быть инцидентно несколько вершин $X_k^j = \{x_{k_1}^{j_1},\ x_{k_2}^{j_2},\ \ldots,\ x_{k_l}^{j_l}\}$ из l графов $\{G_{j_s}\}$, $s = 1, \ldots, l$. На множестве вершин X_k^j определяется $L^j = (X_k^j, E)$. Вершины $x_{k_j}^{j_i}$ и $x_{k_s}^{j_s}$ смежные в L^j, если соответствующие графы G_{j_i} и G_{j_s} вершине x_k^i имеют некоторую системообразующую связь $l(x^{j_i}, x^{j_s})$. В противном случае эти вершины не связаны. Также как в гиперсетях ребру $u_l^j \in G_j$ в графе G_i сопоставляется цепь или некоторая связная часть между соответствующими вершинами из G_i.

S-гиперсеть с помощью нижеприведенных матриц можно задать однозначно с точностью до нумерации вершин и ребер. Графы G_i, $i = 1, \ldots, k$ задаются своими матрицами инцидентности $\{M^i = (c_n^k)\}$. Вложения графов определяются системой матриц инциденций $\{M_j^i(a_t^l)$,$N_j^i(b_p^d)\}$, где в матрице M_j^i, $a_t^l = 1$, если вершина $x_l \in G^i$ инцидентна вершине $x_t \in G^j$, $(i < j)$ и $a_t^l = 0$, в противном случае.

Пусть $N_j^i(b_p^d)$- матрица инциденций ребер, имеем $b_p^d = 1$, если ребро $u_p \in G^j$ - вторичной сети инцидентно ветви $u_d \in G^j$ - первичной сети и $b_p^d = 0$ в противном случае. Представление S-гиперсети заканчивается системой матриц смежности $\tilde{M}_z^i = (s_f^r)$. Пусть вершине $x_z^i \in G^i$ инцидентны вершины $\{X_l^{j_p} \in G^{j_p}\}$, тогда матрицы смежности $\tilde{M}_z^i = (s_f^{r_i})$ определяют смежность этих вершин в $x_{z_i}^i$.

Отсюда следует, что S-гиперсеть $SHN = (G_0, G_1, \ldots, G_k)$ однозначно задается следующей системой матриц:

1. $M^i(c_{p^i}^{l^i})$ — матрица инциденций графов G^i, $i = 0, \ldots, k$; $l^i = 1, \ldots, n^i$; $p^i = 1, \ldots, m^i$, где $k + 1$ — число графов в SHN, n^i — число вершин в графе G^i, m^i — число ребер в графе G^i.

2. $\{M_j^i(a_{t_j}^{l_i}), N_j^i(b_{p_j}^{d_i})\}$, где $i, j = 0, \ldots, k$; $(i < j)$; $l_i = 1, \ldots, n_i$; $t_j = 1, \ldots, n_j$; $d_i = 1, \ldots, m_i$; $p_j = 1, \ldots, m_j$. Матрицы инциденций определяющие вложение графов G_j в граф G_i.

3. $\tilde{M}_{z_i}^i = (s_{f_d}^{r_i})$ — матрицы смежностей вершин графов вторичных сетей в первичной сети. $i = 0, \ldots, k$; $z_i = 1, \ldots, n_i$; $f, d = 1, \ldots, n$, т.е. $s_{f_d}^{r_i} = 1$, если вершины f и d из графов $\{G_j\}$ инцидентны вершине z_i, и они смежные в узле первичной сети, иначе $s_{f_d}^{r_i} = 0$.

Вообще говоря, на сегодняшний день наибольшее число приложений теории гиперсетей и S-гиперсетей падает на электросвязь и транспорт. Поэтому, большая часть задач, рассматриваемая в докладе, посвящена именно этим направлениям. Тем не менее, уже сейчас видно, что данная теория S-гиперсетей применима для анализа и синтеза многих других систем сетевой структуры. Особый интерес вызывают задачи анализа межсетевых структурных взаимодействий сложных систем различной природы.

В ранних работах автора в основном все приложения теории гиперсетей лежали в области телекоммуникаций и связи [2]. В работе [3] рассмотрены некоторые задачи оптимизации транспортных сетей мегаполиса и, которые в настоящее время активно исследуются в ИВМиМГ СО РАН.

В данной работе подробно рассмотрены топологические свойства S-гиперсетей, которые имеют практическое значение для синтеза и анализа транспортной системы города. Для понимания, топологических задач необходимо рассмотреть различные типы вложений вторичных сетей в первичные.

Рассмотрим типы отображений графов вторичных сетей в первичную сеть, необходимых для адекватного описания и анализа реальных систем сетевой структуры.

При отображении графа вторичной сети WS в первичную сеть PS возникают четыре класса вложений ребер WS в ветви PS.

Для гиперсети $H = (PS, WS)$:

1. Ребра вторичной сети WS не отображаются в ребра первичной, т.е. отображаются только вершины WS в вершины PS. Таким образом, матрицы $N_j^i(b_p^d)$ в представлении гиперсети отсутствуют. Здесь имеет место экс-отображения $WS \to^{экс} PS$ и соответственно экс-гиперсеть.

2. Если ребра вторичной сети $WS = (X^1, R)$ идут рядом (параллельно) с ветвями первичной сети $PS = (X^0, V)$, то имеет место пара-отображение $WS \to^{p} PS$, которое порождает пара-гиперсеть $H = (PS, WS)$.

3. В том случае, когда ребра вторичной сети WS располагаются на "плоских" ветвях первичной сети PS, то имеет место экто-отображение $WS \to^{эк} PS$ и соответственно, получаем экто-гиперсети.

4. В последнем случае, ребра вторичных сетей располагаются внутри ветвей первичной сети, т.е. имеет место эндо-отображения $WS \to^{эн} PS$, которое порождает эндо-гиперсеть.

Таким образом, словарь теории гиперсетей увеличили за счет особенности отображения элементов гиперсети на поверхности и разных взаимосвязей между ветвями и инцидентным им ребрам вторичных сетей. Предложенная классификация отображений позволит ставить всевозможные задачи, связанные с описанием, анализом и синтезом сетей различного назначения.

Для экто-гиперсетей практическое значение имеет исследование топологических свойств, и в частности их плоская реализация. Задачи, которые при этом возникают, тесно пересекаются с задачами укладки графов на ориентированные поверхности. Однако специфика гиперсетей и S-гиперсетей влечет за собой появление новых топологических задач в теории S-гиперсетей.

Пусть задана гиперсеть $H = (PS, WS)$, тогда будем говорить, что гиперсеть H PS-планарна, если граф PS первичной сети планарен, и гиперсеть H WS-планарна, если граф WS-планарен.

Данные характеристики интересные, но достаточно изученные в теории графов. Гораздо более интересной является следующая характеристика. Гиперсеть H-планарная, если граф WS может быть реализован в PS без пересечения ребер. Если такая реализация имеет место, то гиперсеть H плоская.

Теорема 1. Если гиперсеть $H = (PS, WS)$ WS-планарна, то она также планарна.

Доказательство. Если граф PS первичной сети не планарен, то его можно сделать планарным путем удаления некоторых ветвей. В оставшейся части PS' можно сделать плоскую реализацию WS. Для доказательства достаточно показать, что первичная плоская сеть PS гомеоморфная некоторому плоскому кругу с отверстиями.

Действительно уменьшая физический размер граней плоской первичной сети до точки (дырки), тогда очевидно, что WS реализуем на поверхности, так как WS-планарен. Обратное утверждение неверно.

Поверхность рода 1 допускает плоскую реализацию, как минимум, полного 5-вершинного графа WS, который, как известно не планарный. Следовательно, из планарности гиперсети не следует планарность WS. Гиперсеть $H = (PS, WS)$ назовем абсолютно плоской, если WS и PS плоские графы.

Строго говоря, для гиперсетей понятие "планарный" не всегда корректно. Действительно, если для PS допускается изменение геометрии рисунка, т.е. из плоского сделать плоский граф PS при этом H и H' остаются изоморфными. Кстати изменяя конфигурацию PS с целью сделать ее плоской, изменяется пространственная конфигурация WS, т.е. граф вторичной сети становится не плоским. Изменяя трассировки ребер WS в PS, мы вообще говоря, получаем другую гиперсеть H' эквивалентную H. Таким образом, изменяя трассировку ребер WS на ветвях PS мы получаем не изоморфное преобразование.

Для практических целей полезно рассмотреть вместо экто-гиперсети, эндо-гиперсеть, тогда нас не интересует пересечение ребер внутри ветвей, а только на узлах первичной сети. Эндо-гиперсеть $SH = (PS, WS)$ назовем WS-квазиплоской, если в каждом узле $PS = (X, V)$ имеем плоскую реализацию фрагментов вторичных гиперсетей $\{WS^i\}$ S-гиперсети, $SH = (PS, WS_1, \ldots, WS_k)$.

Гиперсеть SH называется квазиплоской, если в плоской сети PS WS, является квазиплоской.

В эндо-гиперсети модель узла $\mathbf{y}$ первичной сети представляет собой окружность $O(\mathbf{y})$, разделенную на $S(\mathbf{y})$ дуг, где $S(\mathbf{y})$ - степень узла $\mathbf{y}$. На каждой дуге выделяются *вершины–полюса* являющиеся окончаниями ребер входящих в этот узел. Внутри узла-диска располагаются вершины вторичных сетей связанные с соответствующими полюсами внутриузловыми ребрами. Некоторые полюса связываются между собой непосредственно, так как они принадлежат транзитным ребрам сетей WS_i. Через один (пару) полюс могут проходить несколько ребер вторичных сетей.

Узлы могут быть транзитно-оконечными, транзитными или оконечными. Нестационарная S-гиперсеть называется квазипланарной, если в любой стационарный промежуток времени она является квазипланарной.

В связи свыше сказанным, и исследованием реальных проблем анализа и синтеза сетевой структуры возникают постановки решения следующих задач.

1. Пусть задан граф первичной сети PS и семейство графов вторичных сетей $\{WS_i\}$ и отображения $X^i \to X^0$, надо так провести трассировку ребер в графе PS, чтобы S-гиперсеть была квазиплоской.

2. Найти критерий квазиплоскости S-гиперсети $H = (PS, WS_1, \ldots, WS_k)$.

3. Пусть задана S-гиперсеть H, требуется так составить расписание работы внутризоновых ребер, чтобы нестационарная S-гиперсеть была квазипланарной.

4. Решается предыдущая задача, но среднее число циклов в H было бы минимально возможным.

5. Добавить в H минимальное число ветвей так, чтобы S-гиперсеть стала квазипланарной с учетом изменения трассировки ребер вторичных сетей WS_i. Очевидно, что понятие планарности в S-гиперсетях порождает еще много комбинаторных задач.

Например, рассмотрим следующую операцию над ориентированной гиперсетью $\vec{H} = (PS, WS_1, WS_2)$, в которой граф PS связан, орграф WS_1 имеет для каждой ветви из PS по два противоположно направленных ребра. Введем следующую операцию над ветвями гиперсети H. Для ветви V_i операция $П_Л(V_i)$ разрывает ветвь и инцидентные ему ребра, в него вставляется конфигурация специального вида, которая, фактически является "ручкой" на поверхности. При этом повышается род данной поверхности.

Задача: на графе PS применить минимальное число преобразований типа $П_Л(V_i)$ так, чтобы при соответствующей реализации гиперсеть $\vec{H} = (PS, WS_1, WS_2)$ была квазиплоской.

Легко показать, что всегда существует некоторое число таких преобразований, способных превратить исходную гиперсеть в квазиплоскую.

Следующая задача управления одним перекрестком является практически значимой. Пусть S-гиперсетевая модель любого транзитного перекрестка, т.е. на окружности диска геометрической модель узла y_i располагаются полюса соответствующие входам на перекрестке и пусть пара полюсов соединяется ребром $u_i^j = (x_k^j, x_l^j)$ имеет место поток транспорта из полюса x_k^j в x_l^j. В результате получаем граф $P_i = (X, U)$ соответствующий потокам транспорта через перекресток y_j. Вес $V(u_i^j)$ характеризует величину потока машин за определенный промежуток времени. Если S-гиперсеть не стационарная, то величина $V(u_i^j)$ зависит от времени t. Как правило, сутки можно разделить на несколько частей, в каждой из которых значение $V(u_i^j, t_i)$ изменяется не значительно.

Очевидно, что расписание работы светофоров можно составить для каждого выведенного промежутка. Очевидно, что минимальное число тактов работы светофоров определяется необходимостью пропуска трафика по независимым путям проезда через перекресток. Длительность работы одного такта определяется величиной потока машин, для которых разрешен проезд за данный такт.

Сформулируем постановку задачи управления светофором. Множеству всех дуг $\{u_i^j\}$, $i = 1, \ldots, n_j$ заданного перекрестка сопоставим вершины некоторого графа $G = (U, R)$. Две вершины u_k^j и u_l^j смежны в G, если соответствующие им дуги в орграфе перекрестка y_j $P_j = (X, U)$ независимы.

Очевидно, что в графе P_j любому пустому подграфу P_i^k соответствует независимое множество потоков. В нашем случае такое подмножество может быть максимальным. Понятно, что семейству $\{P_i^k\}$ пустых подграфов таких, что $\cup_k P_i^k = P_i$, определяет расписание работы светофоров, если наряду с открытием полос для движения определить длительность работы каждого такта светофора.

Обозначим через $\widetilde{X}_i^j = (x_1^j, x_2^j, \ldots, x_k^j)$ подмножество вершин из X таких, что подграф $P^j = (\widetilde{X}^j, U^j)$ является пустым, т.е. $u^j = 0$. $V(X_i^j)$ — вес вершины x_i^j и пусть $b_j = \max V(X_i^j)$. Тогда целевая функция задачи будет иметь вид: $\Psi = \sum\limits_{j=1}^{z} b_j \to \min$ при условии $\cup_{i,j} X_i^j = X$. Таким образом семейство подграфов $P = \{P^j\}$ покрывает все вершины графа G и не содержит ни одного ребра из b, т.е. $P \cap G = X$. Очевидно, что Ψ задает некоторое расписание работы светофора, которое получается из решения Ψ следующим образом: для каждого подмножества независимых полос соответствующих P^j время работы на j-м такте будет определяться следующим выражением $\Delta t_j = \frac{T}{\sum\limits_j b^j} b_j$, где T — циклический период работы светофора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попков В.К. Математические модели живучести сетей связи. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск. 1990. стр. 233.

2. Попков В.К. Математические модели связности. ИВМиМГ СО РАН. Новосибирск, 2006. стр. 490.

3. Попков В.К., Кауль С.Б. и др. Методы оптимизации структур зоновых сетей связи. ВЦ СО АН СССР, Новосибирск. 1983. стр. 182.

4. Попков В.К. Математические модели и методы оптимизации городских транспортных систем. // Материалы IV Всероссийской конференции "Проблемы оптимизации и экономические приложения", Омск. 2009. стр. 80—81.

Попков Владимир Константинович, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Пр. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 330-96-43, факс (383) 330-96-43, e-mail: popkov@sscc.ru

LOCAL SEARCH ALGORITHMS FOR SUBMODULAR MAXIMIZATION

M. I. Sviridenko

In this talk, we survey recent results on maximizing submodular functions subject to various constraints. We will make an emphasize on the local search algorithms. Most of the results discussed in this talk are from the three papers [29, 30, 31].

We are given a non-negative submodular function f. A function $f : 2^N \to \mathbb{R}_+$ is *submodular* if for all $S, T \subseteq N$, $f(S \cup T) + f(S \cap T) \le f(S) + f(T)$. Furthermore, all submodular functions that we deal with are assumed to be non-negative. Throughout, we assume that our submodular function f is given by a *value oracle*; i.e., for a given set $S \subseteq N$, an algorithm can query an oracle to find the value $f(S)$. Without loss of generality, we take the ground set N to be $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

We emphasize that in many our results we consider submodular functions that are *not required to be monotone* (i.e., we do *not* require that $f(X) \le f(Y)$ for $X \subseteq Y \subseteq V$). Non-monotone submodular functions appear in several places including cut functions in weighted directed or undirected graphs or even hypergraphs, maximum facility location, maximum entropy sampling, and certain constraint satisfaction problems.

Given a weight vector w for the ground set V, and a knapsack of capacity C, the associated *knapsack constraint* is that the sum of weights of elements in the solution S should not exceed the capacity C, i.e, $\sum_{j\in S} w_j \le C$. In our usage, we consider k knapsack constraints defined by weight vectors w^i and capacities C_i, for $i = 1, \ldots, k$.

We now define the matroid constraint. Briefly, to set our notation, we denote a matroid $\mathcal{M}$ by an ordered pair $(N, \mathcal{I})$, where N is the ground set of $\mathcal{M}$, and $\mathcal{I}$ is the set of independent sets of $\mathcal{M}$. For a given matroid $\mathcal{M}$, the associated *matroid constraint* is: $S \in \mathcal{I}(\mathcal{M})$. In our usage, we deal with k matroids $\mathcal{M}_i = (N, \mathcal{I}_i)$, $i = 1, \ldots, k$, on the common ground set N. We assume that each matroid is given by an *independence oracle*, answering whether or not $S \in \mathcal{I}_i$. It is no coincidence that we use N for the ground set of our submodular function f as well as for the ground set of our matroids $\mathcal{M}_i = (N, \mathcal{I}_i)$, $i = 1, \ldots, k$. Indeed, our optimization problem is

$$\max\left\{f(S) \ : \ S \in \cap_{i=1}^k \mathcal{I}_i\right\}.$$

Matroids is a common way to generalize many standard types of constraints in combinatorial optimization. For example, the cardinality constraint is just a uniform matroid constraint, the condition of S to be a forest in a graph is just a graphic matroid constraint, the condition to choose for each vertex v at most b_v edges incident to that vertex (like in the b-matching problem) is a partition matroid constraint and so on.

Previous Results Optimization of submodular functions is a central topic in combinatorial optimization (see, e.g. [32, 38]). While submodular minimization is polynomially solvable (see [25, 40]), maximization variants are usually NP–hard because they include either Max Cut, variants of facility location, and set coverage problems.

Unlike submodular minimization [40, 25], submodular function maximization is NP–hard as it generalizes many NP–hard problems, like Max-Cut [16, 14] and maximum facility location [11, 12, 1]. Other than generalizing combinatorial optimization problems like Max Cut [16], Max Directed Cut [3, 18], hypergraph cut problems, maximum facility location [1, 11, 12], and certain restricted satisfiability problems [21, 14], maximizing non-monotone submodular functions has applications in a variety of problems, e.g, computing the core value of supermodular games [39], and optimal marketing for revenue maximization over social networks [22].

A classical technique for submodular maximization is the greedy algorithm. The greedy algorithm was first applied to a wide range of submodular maximization problems in the late-70's and early-80's (see [10, 11, 12, 19, 20, 26, 33, 34]). The most relevant result for our purposes is that the greedy algorithm gives a $1/(k+1)$-approximation for the problem of maximizing a monotone submodular function subject to k matroid constraints (see [34]). Due to a simple reduction, this problem also encapsulates the problem of maximizing a linear function subject to $k+1$ matroid constraints. Thus we get a $1/k$-approximation for the problem of maximizing a linear function subject to k matroid constraints, $k \geq 3$. This result appeared first in [19, 20, 26] even in more general setting of k-independence systems. Until recently, the greedy algorithm had the best established performance guarantee for these problems under general matroid constraints.

Recently, improved results have been achieved using the *multilinear extension* of a submodular function and *pipage rounding* (see [2, 7, 42, 8]). In particular, Vondrák [42] designed the continuous greedy algorithm which achieves a $(1-e^{-1})$-approximation for our problem with $k = 1$, i.e. monotone submodular maximization subject to a single matroid constraint (see also [8]). This result is optimal in the oracle model even for the case of a uniform matroid constraint (see [35]), and also optimal unless $P = NP$ for the special case of maximum coverage (see [13]).

Another algorithmic technique that has been used for submodular maximization is local search. Cornuéjols et al. [11] show that a local-search algorithm achieves a constant-factor approximation guarantee for the maximum uncapacitated facility-location problem which is a special case of submodular maximization. Analogously, Fisher, Nemhauser, Wolsey [33] show a similar result for the problem of maximizing a monotone submodular function subject to a single cardinality constraint (i.e. a uniform matroid constraint). We remark that local search in this case is known to yield only a 1/2-approximation, i.e. it performs worse than the greedy algorithm (see [33]).

The maximum k-dimensional matching problem is a problem of maximizing a linear function subject to k special partition matroid constraints. Improved algorithms for maximum k-dimensional matching have been designed using local search. The best known approximation factors are $2/(k+\varepsilon)$ in the unweighted case (i.e., 0/1 weights), and $2/(k+1+\varepsilon)$ for a general linear function, even in the more general cases of weighted set packing (see [24]) and independent set problems in $(k+1)$-claw free graphs (see [5]). The latter result was obtained after a series of improvements over the basic local-search algorithm (see [4, 9, 5]).

However, general matroid constraints seem to complicate the matter. Prior to this work, the best approximation for the problem of maximum independent set in the intersection of $k \geq 3$ matroids was $1/k$ (for a recent discussion, see [37]). On the hardness side, it is known that unless $P = NP$, there is no approximation better than $O(\log k/k)$ for k-dimensional matching (see [23]), and hence neither for the intersection of k general matroids. As we mentioned before the greedy algorithm is a $1/(k+1)$-approximation for submodular maximization subject to k matroids [34]. Local-search algorithms were also designed for non-monotone submodular maximization. The best approximation guarantee known for unconstrained submodular maximization is $2/5 - \varepsilon$ (see [15]).

Algorithm A**:**

1. Set $V_1 = V$.
2. For $i = 1, \cdots, k+1$, do:
   (a) Apply the local search on the ground set V_i to obtain a solution $S_i \subseteq V_i$ corresponding to the problem:
   $$\max\{f(S) \ : \ S \in \cap_{j=1}^{k} \mathcal{I}_j, \ S \subseteq V_i\}. \qquad (1)$$
   (b) Set $V_{i+1} = V_i \setminus S_i$.
3. Return the solution corresponding to $\max\{f(S_1), \cdots, f(S_{k+1})\}$.

Рис. 1: Approximation algorithm for submodular maximization under k matroid constraints.

Our Results and Techniques In this paper we analyze a natural local-search algorithm: Given a feasible solution, i.e. a set S that is independent in each of the k matroids, our local-search algorithm tries to add at most p elements and delete at most kp elements from S. If there is a local move that generates a feasible solution and improves the objective value, our algorithm repeats the local-search procedure with that new solution, until no improvement is possible. Our main result is that for $k \geq 2$, every locally-optimal feasible solution S satisfies the inequality

$$\left(k + \frac{1}{p}\right) \cdot f(S) \ \geq \ f(S \cup C) + \left(k - 1 + \frac{1}{p}\right) \cdot f(S \cap C),$$

for every feasible solution C. We also provide an approximate variant of the local-search procedure that finds an approximate locally-optimal solution in polynomial time, while losing a factor of $1+\varepsilon$ on the left-hand side of the above inequality. Therefore, for any fixed $k \geq 2$ and $\varepsilon > 0$, we obtain a polynomial-time algorithm with approximation guarantee $1/(k+\varepsilon)$ for the problem of maximizing a monotone non-decreasing submodular function subject to k matroid constraints. This algorithm gives a $1/(k-1+\varepsilon)$-approximation in the case when the objective function is linear. These results are tight for our local-search algorithm, which follows from [4].

It is not hard to see that the simple local search algorithm does not have a good performance guarantee for the non-monotone submodular maximization subject to a single matroid constraint. For example, for Maximum directed cut problem with cardinality constraint (or uniform matroid constraint) the gap between the optimal solution and the local optimum is $\Omega(|N|)$. Surprisingly, but applying the local search iteratively, as in Figure 1, one can obtain an approximation algorithm with performance guarantee of $1/(k+1+\frac{1}{k-1}+\varepsilon)$ for $k \geq 2$. For $k = 1$, the analysis in [29] gives a $1/(4+\epsilon)$-approximation; this result has been recently improved to a factor of roughly 0.309, using multilinear relaxation and continuous local search algorithm (see [43]).

Another natural problem is maximizing a submodular function subject to the matroid base constraint, i.e. we are asking a feasible solution to be the maximal independent set in a matroid. The difference between matroid and matroid base constraints can be illustrated by cardinality constraint and max cut objective. In the problem with matroid constraint we are asked to find a max cut with at most p vertices on one side and in the problem with matroid base constraint we are asked to find a max cut with exactly p vertices. It appears that this problem is substantially more complicated. We show that for matroids that have at least two disjoint bases there is a modification of local search algorithm that achieves 6-approximation [29]. Recently, Vondrak [43] showed how to generalize and tighten this result, he also showed that there is no constant factor approximation for this problem, to achieve constant factor approximation one must assume some sort matroid base packing condition.

Finally, we consider the problem of maximizing a general submodular function subject to k knapsack constraints. In the case of monotone submodular function this problem admits a $(1 - e^{-1})$-approximation under a single knapsack constraint [41] and multiple knapsack constraints [27]. In general case we design a $(1/5 - \varepsilon)$-approximation [29] by utilizing the local search algorithm for a continuous relaxation with Vondrak's multilinear extension of submodular functions.

Список литературы

[1] A. Ageev and M. Sviridenko. An 0.828 Approximation algorithm for the uncapacitated facility location problem, *Discrete Applied Mathematics* 93(2-3): 149–156 (1999).

[2] A. Ageev, M. Sviridenko. Pipage rounding: A new method of constructing algorithms with proven performance guarantee, *J. Comb. Opt.* 8(3) (2004), 307–328.

[3] P. Alimonti. Non-oblivious local search for MAX 2-CCSP with application to MAX DICUT, In *Proceedings of the 23rd International Workshop on Graph-theoretic Concepts in Computer Science, 1997.*

[4] E. Arkin, R. Hassin. On local search for weighted k-set packing, *Math. of Oper. Research* 23(3) (1998), 640–648.

[5] P. Berman. A $d/2$ approximation for maximum weight independent set in d-claw free graphs, *Nordic J. Comput.* 7(3) (2000), 178–184.

[6] T. Brylawski. Some properties of basic families of subsets, *Disc. Math.* 6 (1973), 333–341.

[7] G. Calinescu, C. Chekuri, M. Pál, J. Vondrák. Maximizing a monotone submodular set function subject to a matroid constraint, *IPCO 2007*, 182–196.

[8] G. Calinescu, C. Chekuri, M. Pál, J. Vondrák. Maximizing a monotone submodular set function subject to a matroid constraint, to appear in the *SIAM J. on Comp.*

[9] B. Chandra, M. Halldórsson. Greedy local improvement and weighted set packing approximation, *J. Algorithms* 39(2) (2001), 223–240.

[10] M. Conforti, G. Cornuéjols. Submodular set functions, matroids and the greedy algorithm: Tight worst-case bounds and some generalizations of the Rado-Edmonds theorem, *Disc. Appl. Math.* 7(3) (1984), 251–274.

[11] G. Cornuéjols, M. Fischer, G. Nemhauser. Location of bank accounts to optimize float: An analytic study of exact and approximation algorithms, *Management Sci.*, 23 (1977), 789–810.

[12] G. Cornuéjols, M. Fischer, G. Nemhauser. On the uncapacitated location problem, *Annals of Disc. Math.* 1 (1977), 163–178.

[13] U. Feige. A threshold of $\ln n$ for approximating set cover. *J. of ACM* 45 (1998), 634–652.

[14] U. Feige and M. X. Goemans. Approximating the value of two-prover systems, with applications to MAX-2SAT and MAX-DICUT. *Proc. of the 3rd Israel Symposium on Theory and Computing Systems*, Tel Aviv (1995), 182–189.

[15] U. Feige, V. Mirrokni, J. Vondrák. Maximizing non-monotone submodular functions, *FOCS 2007*, 461–471.

[16] M. X. Goemans and D. P. Williamson. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming, *Journal of ACM* 42 (1995), 1115–1145.

[17] C. Greene. A multiple exchange property for bases, *Proc. Amer. Math. Soc.* 39 (1973), 45–50.

[18] E. Halperin and U. Zwick. Combinatorial approximation algorithms for the maximum directed cut problem. *Proc. of 12th SODA* (2001), 1–7.

[19] D. Hausmann, B. Korte. K-greedy algorithms for independence systems, *Z. Oper. Res. Ser. A-B* 22(5) (1978).

[20] D. Hausmann, B. Korte, T. Jenkyns. Worst case analysis of greedy type algorithms for independence systems, *Math. Prog. Study* 12 (1980), 120–131.

[21] J. Håstad. Some optimal inapproximability results. *Journal of ACM* 48 (2001): 798–869.

[22] J. Hartline, V. Mirrokni and M. Sundararajan. Optimal marketing strategies over social networks, World Wide Web Conference (WWW), 2008, 189–198.

[23] E. Hazan, S. Safra, O. Schwartz. On the complexity of approximating k-set packing, *Computational Complexity* 15(1) (2006) 20–39.

[24] C. Hurkens, A. Schrijver. On the size of systems of sets every t of which have an SDR, with an application to the worst-case ratio of heuristics for packing problems, *SIAM J. Disc. Math.* 2(1) (1989), 68–72.

[25] S. Iwata, L. Fleischer, S. Fujishige. A combinatorial, strongly polynomial-time algorithm for minimizing submodular functions, *J. of ACM* 48 (2001), 761–777.

[26] T. Jenkyns. The efficacy of the greedy algorithm, *Cong. Num.* 17 (1976), 341–350.

[27] A. Kulik, H. Shachnai and T. Tamir. Maximizing submodular functions subject to multiple linear constraints. *Proc. of SODA, 2009.*

[28] F. Lazebnik, V. Ustimenko, A. Woldar. A new series of dense graphs of high girth, *Bulletin of the AMS* 32(1) (1995), 73–79.

[29] J. Lee, V. Mirrokni, V. Nagarajan, M. Sviridenko. Maximizing non-monotone submodular functions under matroid and knapsack constraints, SIAM J. Discrete Math. 23(4), 2053-2078, (2010), preliminary version appeared in *STOC 2009.*

[30] J. Lee, M. Sviridenko, and J. Vondrák. Submodular maximization over multiple matroids via generalized exchange properties. *Proc. of APPROX*, Springer LNCS, 244–257, 2009.

[31] J. Lee, M. Sviridenko, and J. Vondrák. Matroid Matching: The Power of Local Search. to appear in*Proc. of STOC10.*

[32] L. Lovász. Submodular functions and convexity. In: A. Bachem et al., eds, *Mathematical Programmming: The State of the Art*, 235–257.

[33] G. Nemhauser, L. Wolsey, M. Fisher. An analysis of approximations for maximizing submodular set functions I. *Math. Prog.* 14 (1978), 265–294.

[34] M. Fisher, G. Nemhauser, L. Wolsey. An analysis of approximations for maximizing submodular set functions II. *Math. Prog. Study* 8 (1978), 73–87.

[35] G.L. Nemhauser, L. Wolsey. Best algorithms for approximating the maximum of a submodular set function, *Math. Oper. Res.*, 3(3) (1978), 177–188.

[36] J. Oxley. Matroid theory, Oxford University Press, New York, 1992.

[37] J. Reichel, M. Skutella. Evolutionary algorithms and matroid optimization problems, Proc. of GECCO'07, 947–954, 2007.

[38] A. Schrijver. Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency. Springer, 2003.

[39] A. Schulz, N. Uhan, Encouraging Cooperation in Sharing Supermodular Costs, APPROX-RANDOM 2007: 271–285

[40] A. Schrijver. A combinatorial algorithm minimizing submodular functions in strongly polynomial time, *J. Comb. Theory, Ser. B* 80 (2000), 346–355.

[41] M. Sviridenko. A note on maximizing a submodular set function subject to knapsack constraint. *Operations Research Letters* 32 (2004), 41–43.

[42] J. Vondrák. Optimal approximation for the submodular welfare problem in the value oracle model, *STOC 2008*, 67–74.

[43] J. Vondrák. Symmetry and approximability of submodular maximization problems. To appear in *Proc. of IEEE FOCS*, 2009.

[44] D. Woodall. An exchange theorem for bases of matroids, *J. Comb. Theory, Ser. B* 16 (1974), 227–228.

Sviridenko Maxim Ivanovich, IBM T.J. Watson Research Center, 1101 Kitchawan rd., Yorktown, NY 10598, USA. phone: (914)-945-1217, fax:(914)-945-3434,
e-mail: sviri@us.ibm.com

ОЦЕНКИ ШОРА В КВАДРАТИЧНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

П. И. Стецюк

Многие из задач комбинаторной оптимизации могут быть сформулированы с помощью многоэкстремальных квадратичных моделей с булевыми переменными. Условие булевости переменной $x \in \{0,1\}$ представляется квадратичным равенством $x^2 - x = 0$. При разработке алгоритмов решения таких задач можно использовать предложенную Н.З. Шором [1,2] методику лагранжевых двойственных оценок для оптимального значения целевой функции в экстремальной квадратичной задаче. Условимся такие оценки называть оценками Шора. В квадратичных задачах на минимум они будут оценками снизу для минимального значения целевой функции, а в квадратичных задачах на максимум – оценками сверху для максимального значения целевой функции.

Методика верхних (нижних) оценок Шора включает два важных аспекта. Первый аспект связан с алгоритмами нахождения оценок с помощью методов минимизации недифференцируемых выпуклых функций. Второй аспект связан с использованием функционально избыточных квадратичных ограничений (не изменяют множества допустимых решений исходной квадратичной задачи) для улучшения точности оценок. Он придает оценкам Шора замечательное свойство, благодаря которому можно обосновать алгоритмы решения ряда комбинаторных задач за полиномиальное время.

В работе рассмотрим методику верхних оценок Шора на примере квадратичной задачи на максимум (с целью упрощения будем рассматривать только ограничения-равенства). Дадим примеры двух верхних оценок для NP–трудной задачи о числе независимости неориентированного графа.

1. Оценка Ψ^*. Пусть R^n – евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Рассмотрим квадратичную экстремальную задачу:

$$\text{найти} \quad Q^* = \max_{x \in R^n} Q_0(x) \quad \text{при ограничениях} \quad Q_i(x) = 0,\ i = 1,\dots,m. \tag{1.1}$$

Здесь $Q_i(x)$ – квадратичные функции вида $Q_i(x) = (K_i x, x) + (b_i, x) + c_i$, где K_i – симметричные вещественные матрицы размера $n \times n$, b_i – n-мерные векторы из R^n, c_i – вещественные числа, $i = 0,\dots,m$. Некоторые из функций $Q_i(x), i = 0,1,\dots,m$ могут быть и линейными. В общем случае задача (1.1) многоэкстремальна и относится к классу NP–трудных задач.

Оценки сверху для Q^* можно получить путем следующей лагранжевой релаксации. Пусть $u \in R^m$ – вектор множителей Лагранжа, соответствующий ограничениям задачи (1.1). Функция Лагранжа для задачи (1.1) имеет следующий вид

$$L(x,u) = Q_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i Q_i(x) \equiv (K(u)x,x) + (b(u),x) + c(u),$$

$$\text{где} \qquad K(u) = K_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i K_i, \quad b(u) = b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i, \quad c(u) = c_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i c_i.$$

Рассмотрим функцию

$$\Psi(u) = \max_{x \in R^n} L(x,u) \equiv \max_{x \in R^n} \left[(K(u)x,x) + (b(u),x) + c(u)\right].$$

Пусть $\lambda_1(K)$ – максимальное собственное число симметричной $n\times n$-матрицы K.

Функция $\Psi(u)$ является выпуклой функцией от переменных u (как результат взятия операции максимума по переменным x для семейства линейных по переменным u функций). Эффективное множество функции $\Psi(u)$ обозначим $\mathrm{dom}\Psi$. Оно состоит из $\Omega^- = \{u \in R^m : \lambda_1(K(u)) < 0\}$ (подмножество точек из R^m, для которых матрица $K(u)$ отрицательно определена) и подмножества тех точек $u \in \Omega^0 = \{u \in R^m : \lambda_1(K(u)) = 0\}$, для которых имеет решение система линейных уравнений $2K(u)x + b(u) = 0$. Для всех других точек $\Psi(u) = +\infty$.

Если $\mathrm{dom}\Psi \neq \emptyset$, то для любого $u \in \mathrm{dom}\,\Psi$ значение функции $\Psi(u)$ служит нетривиальной (т.е. неравной $+\infty$) оценкой сверху для Q^* – оптимального значения целевой функции в задаче (1.1). Оценка Шора Ψ^* является наилучшей оценкой сверху для Q^* в классе лагранжевых оценок вида $\Psi(u)$ и связана с решением задачи негладкой оптимизации $\Psi^* = \min\limits_{u\in\mathrm{dom}\,\Psi} \Psi(u)$ (точки негладкости функции $\Psi(u)$ являются точками границы множества Ω^-, где система линейных уравнений $2K(u)x + b(u) = 0$ имеет неединственное решение). Оценку Ψ^* с любой заданной точностью можно найти за полиномиальное время методом эллипсоидов, итерация которого требует $O(m^2) + O(n^3)$ арифметических операций. Из них $O(m^2)$ операций связано с растяжением пространства двойственных переменных (множителей Лагранжа), а $O(n^3)$ операций требуются для вычисления вектора субградиентного поля при фиксированных значениях множителей Лагранжа (решение системы линейных уравнений с симметричной $n\times n$-матрицей, нахождение максимального собственного числа симметричной $n\times n$-матрицы и соответствующего этому числу собственного вектора).

Оценка Ψ^* обладает следующими свойствами. Если Ψ^* достигается на $u^* \in \Omega^-$, то $\Psi^* = Q^*$ (т. е. оценка точная). При этом находится и точка глобального минимума. Иначе Ψ^* достигается на границе области Ω^-, при этом может существовать так называемый "разрыв двойственности" $\Delta^* = \Psi^* - Q^* > 0$. Один из способов уменьшения Δ^* связан с введением функционально избыточных ограничений (при этом может увеличиться и количество переменных в задаче).

2. Улучшенная оценка Ψ_1^*. Функционально избыточными ограничениями являются ограничения, добавление которых оставляет множество допустимых решений начальной задачи неизменным. Однако при этом изменяется функция Лагранжа, что в некоторых случаях разрешает уменьшить Δ^*. Если к исходной задаче (1.1) прибавить r функционально избыточных квадратичных ограничений $Q_{m+1}(x) = 0$, $\ldots$, $Q_{m+r}(x) = 0$, $r \geq 1$, то новая квадратичная задача примет вид:

$$\text{найти} \quad Q^* = \max_{x\in R^n} Q_0(x) \quad \text{при ограничениях} \quad Q_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, m + r. \tag{2.1}$$

Лемма 1. Пусть Ψ_1^* – оценка вида Ψ^* для задачи (2.1). Тогда $\Psi_1^* \leq \Psi^*$.

Доказательство. Задаче (2.1) соответствует вектор множителей Лагранжа $U \in R^{m+r}$ и функция Лагранжа для нее имеет следующий вид:

$$L_1(x, U) = Q_0(x) + \sum_{i=1}^{m+r} u_i Q_i(x) = L(x, u) + \sum_{i=m+1}^{m+r} u_i Q_i(x).$$

Поскольку $L_1\Bigg(x,(\{u\}, 0, \ldots, 0)\Bigg) = L(x, u)$ и $\Psi_1(\{u\}, 0, \ldots, 0) = \Psi(u)$, то

$$\Psi_1^* = \min_{U\in\mathrm{dom}\,\Psi_1} \Psi_1(U) \leq \min_{u\in\mathrm{dom}\,\Psi} \Psi(u) = \Psi^*,$$

откуда следует доказательство леммы 1.

Добавление функционально избыточных ограничений, которые являются нетривиальными следствиями из условий задачи, в ряде случаев приводит к тому, что верхняя оценка Ψ_1^* даже может стать точной для Q^* [2,3]. Ограничения, которые являются линейными комбинациями уже существующих ограничений, не отражаются на точности оценки Ψ_1^*. Вклад таких ограничений в функцию Лагранжа эквивалентен лишь определенному изменению множителей Лагранжа при существующих ограничениях. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $Q_{m+k}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_{ki} Q_i(x), k = 1, \ldots, r$. Тогда $\Psi_1^* = \Psi^*$.

Лемма 2 помогает в решении двух вопросов. Во-первых, если в квадратичной задаче имеется ограничение, которое является линейной комбинацией других ограничений, то его можно убрать, уменьшив тем самым число множителей Лагранжа, а значит, и трудоемкость метода эллипсоидов для нахождения оценки вида Ψ^*. Во-вторых, с ее помощью для комбинаторных задач легко строится аппроксимация целочисленного многогранника допустимых решений с помощью неполиномиального количества линейных неравенств. Ниже рассмотрим такую аппроксимацию на примере обоснования одной из верхних оценок для числа независимости графа.

3. Число независимости графа. Пусть $G{=}(V,E)$ – неориентированный граф без петель с множеством вершин V и множеством ребер E. Подмножество вершин $S{\subseteq}V$ называется независимым множеством графа G, если для любых $i,j{\in}S$ ребро $e=(i,j)$ не принадлежит E. Число независимости графа принято обозначать $\alpha(G)$ и оно характеризует мощность максимального по числу входящих в него вершин независимого множества в графе G. В общем случае задача нахождения $\alpha(G)$ принадлежит к NP-трудным задачам [4].

Задача о нахождении $\alpha(G)$ может быть сформулирована в форме следующей квадратичной булевой задачи [1,2]:

$$\text{to find} \quad \alpha(G) = \max \sum_{i \in V} x_i \quad \text{subject to} \quad x_i x_j = 0\ \forall (i,j) \in E,\ x_i^2 - x_i = 0\ \forall i \in V. \quad (3.1)$$

Здесь булевая переменная $x_i \in \{0,1\}$ равна единице, если вершина $i \in V$ включается в независимое множество, и нулю – в противоположном случае. Квадратичные ограничения для ребер графа G означают, что две вершины, связанные ребром в графе G, не могут одновременно принадлежать независимому множеству.

Задаче (3.1) соответствует оценка $\Psi^*(G)$ и ее нахождение связано с решением задачи негладкой оптимизации с $(|E| + |V|)$ двойственными переменными. Оценка $\Psi^*(G)$ аппроксимирует сверху число независимости графа $\alpha(G)$, т.е. $\Psi^*(G) \geq \alpha(G)$. Н.З.Шор доказал [2], что $\Psi^*(G) = \vartheta(G)$, где $\vartheta(G)$ – известное число Ловаса [4]. Другими словами, оценка Шора $\Psi^*(G)$ имеет такие же свойства, как и число Ловаса $\vartheta(G)$. Так, например, если граф G принадлежит семейству совершенных графов, то $\Psi^*(G) = \alpha(G)$, т.е. оценка является точной.

Покажем, как обосновать этот же факт с помощью леммы 2. Пусть Q – произвольная клика (полный подграф) в графе G и $V(Q)$ – соответствующее ей подмножество вершин из V. Клике Q соответствует линейная комбинация ограничений задачи (3.1)

$$\sum_{i \in V(Q)} \left(x_i^2 - x_i\right) + 2 \sum_{i,j \in V(Q), i<j} x_i x_j = 0,$$

которую можно записать в форме квадратичного равенства

$$\Big(\sum_{i\in V(Q)} x_i\Big)^2 - \sum_{i\in V(Q)} x_i = 0. \tag{3.2}$$

Ограничение вида (3.2) справедливо и для ребра графа G, которое можно рассматривать как клику из двух вершин.

Если ограничения в задаче (3.1) заменить на ограничения

$$\Big(\sum_{i\in V(Q)} x_i\Big)^2 - \sum_{i\in V(Q)} x_i = 0\ \forall Q \in G, \quad x_i^2 - x_i = 0\ \forall i \in V, \tag{3.3}$$

то согласно лемме 2 новой квадратичной задаче будет соответствовать оценка $\Psi^*(G)$. В общем случае, новая задача может содержать неполиномиальное количество квадратичных равенств, учитывая, что с их помощью описываются все возможные клики в графе, в том числе и ребра графа. Оценка $\Psi^*(G)$ для новой задачи аппроксимируется сверху величиной $\alpha^*(G)$, которая равна оптимальному значению целевой функции в задаче линейного программирования

$$\text{to find } \ \alpha^*(G) = \max \sum_{i\in V} x_i \ \text{ subject to } \ \sum_{i\in V(Q)} x_i \le 1\ \forall Q \in G,\ \ 0 \le x_i \le 1\ \forall i \in V, \tag{3.4}$$

полученной релаксацией квадратичных ограничений-равенств (3.3). В общем случае задача (3.4) может содержать неполиномиальное количество линейных неравенств.

Теорема 1. Для произвольного графа G имеем $\alpha^*(G) \ge \Psi^*(G) \ge \alpha(G)$.

Система ограничений в задаче (3.4) задает многогранник, который называют кликовым многогранником $QSTAB(G)$. Он аппроксимирует сверху многогранник независимых множеств $STAB(G)$ (stable set polytope), определяемый как выпуклая оболочка булевых индикаторных векторов независимых множеств S в графе G:

$$STAB(G) = \text{conv}\{x^S, S \text{ — независимое множество в графе } G.\}$$

Индикаторный вектор множества S определяется как $x^S = (x_i^S, i \in V) \in \{0,1\}^{|V|}$, где $x_i^S = 1$, если $i \in S$ и $x_i^S = 0$ в противном случае.

Граф G называют совершенным, если кликовый многогогранник $QSTAB(G)$ и многогранник независимых множеств $STAB(G)$ совпадают. Если граф G – совершенный, то задача (3.4) связана с максимизацией линейной функции на многограннике $QSTAB(G) = STAB(G)$ и, следовательно, величина $\alpha^*(G)$ совпадает с величиной $\alpha(G)$. Из теоремы 1 для совершенного графа G имеем $\alpha^*(G) = \Psi^*(G) = \alpha(G)$, откуда следует, что оценка $\Psi^*(G)$ является точной оценкой для числа независимости совершенных графов.

Более сильные свойства имеет оценка Н.З.Шора (условимся ее обозначать $\Psi_1^*(G)$), которая соответствует квадратичной задаче, полученной из (3.1) прибавлением семейства функционально избыточных ограничений

$$x_i x_k + x_j x_k \le x_k,\ \ \forall i,j,k : (i,j) \in E, k \ne i,j. \tag{3.5}$$

Они получаются умножением линейных неравенств $x_i + x_j \le 1$ для ребер $e = (i,j) \in E$ на неотрицательную переменную $x_k = x_k^2 \ge 0$, $k \ne i,j$.

Наличие ограничений (3.5) придает оценке $\Psi_1^*(G)$ ряд замечательных свойств, которые связаны со специальными семействами графов. Так, например, в [2] показано, что оценка $\Psi_1^*(G)$ является точной для $\alpha(G)$, когда граф G есть t-совершенным. В [5] найдены новые семейства линейных неравенств для аппроксимации многогранника $STAB(G)$, которые связаны с подструктурами в графе, полученными определенной комбинацией клик, нечетных циклов и дополнений к нечетным циклам (odd-antihole). В частности, эти семейства включают известные колесные и p-колесные неравенства (wheel и p-wheel constraints). Это позволяет дополнить семейства графов из [4], для которых задача нахождения числа независимости $\alpha(G)$ может быть решена за полиномиальное время. Как частный случай сюда попадает и известное семейство W-совершенных графов, для которого полиномиальный алгоритм обоснован с помощью метода эллипсоидов.

Линейные неравенства для p-колес использованы в итерационном алгоритме для нахождения эффективных (по типу Ловаса-Шора) ЛП-ориентированных верхних оценок для числа независимости неориентированных графов с тысячами вершин [6]. Алгоритм реализован программой LPWSTAB, где использована известная ЛП-програма SoPlex-1.4.1. С ее помощью найдены верхние оценки для размера максимальной клики в графах keller6 (3361 вершин и 4,619,898 ребер) и keller7 (14190 вершин и 87,091,347 ребер), которые связаны с доказательством гипотезы Келлера (Keller's conjecture). Численные эксперименты проводились на 64-разрядных компьютерах Института автоматики и процессов управления ДВО РАН. Для графа keller7 на компьютере с 36Гб оперативной памяти програма LPWSTAB работала 13 часов (сделала 8 итераций, каждая из которых была связана с решением ЛП-задач с 14190 переменных и максимально 13,593,798 ограничений).

Работа поддержана совместным украинско-российским проектом ДФФД Украины – Ф28.1/005 и РФФИ – 09-01-90413-Укр.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.З. Шор, С.И. Стеценко. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. Киев: Наукова думка, 1989.
2. N.Z. Shor. Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. Boston; Dordrecht; London: Kluwer Academic Publishers, 1998.
3. N.Z. Shor, P.I. Stetsyuk. Lagrangian bounds in multiextremal polynomial and discrete optimization problems. // J. of Global Optimization. 2002. V. 23. P. 1–41.
4. M. Grotschel, L. Lovasz, A. Schrijver. Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization. – Berlin: Springer-Verlag, 1988.
5. П.И.Стецюк. О новых свойствах оценок Шора для взвешенного числа устойчивости графа // Праці міжнародної конференції "50 років Інституту кібернетики ім.В.М.Глушкова НАН України", К: Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, 2008. С. 164–173
6. П.И. Стецюк, А.П. Лиховид. Об ЛП-ориентированных верхних оценках для взвешенного числа устойчивости графа // Кибернетика и системный анализ. 2009. № 1. С. 157–170.

Стецюк Петр Иванович, Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, проспект Академика Глушкова, 40, Киев-187, 03680, Украина, тел. (38-044) 526-21-68, факс (38-044) 526-74-18, e-mail:stetsyukp@gmail.com

ВОПРОСЫ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ, ИНДУЦИРОВАННЫХ ПРОЦЕДУРАМИ ОБУЧЕНИЯ РАСПОЗНАВАНИЮ

М. Ю. Хачай

Задача обучения распознаванию образов в простейшем случае двух классов эквивалентна вариационной задаче минимизации функционала среднего риска

$$\min\{\int\limits_{X\times\Omega}(\omega-f(x))^2\,dP(x,\omega)\;:\;f\in F\}\tag{1}$$

на множестве $F\subset\{X\to\Omega\}$ допустимых решающих правил. Здесь X — пространство результатов измерений, по результатам которых классифицируются объекты, $\Omega=\{0,1\}$ — множество номеров (меток) классов, а вероятностная мера P определена с точностью до конечной выборки

$$(x_1,\omega_1),\ldots,(x_m,\omega_m).\tag{2}$$

Традиционный ERM-подход к обучению распознаванию образов связан с аппроксимацией неполностью формализованной задачи (1) задачей минимизации эмпирического риска

$$\min\left\{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\omega_i-f(x_i))^2\;:\;f\in F\right\}.\tag{3}$$

При этом точность аппроксимации (обобщающая способность результирующего решающего правила $f^*=\arg\max(3)$) монотонно убывает с ростом емкости класса правил ($VCD(F)$).

В рамках широко известного алгебраического подхода к решению задач распознавания рассматриваются классы F, содержащие корректные решающие правила (например, комитетного типа), для которых оптимальное значение задачи (3) равно нулю. Для таких классов повышение качества обучения непосредственно связано с задачей

$$\min\left\{VCD(F')\;:\;\min\{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\omega_i-f(x_i))^2\;:\;f\in F'\}=0,F'\subset F\right\}.\tag{4}$$

К сожалению, задача (4) является труднорешаемой задачей комбинаторной оптимизации. Труднорешаемы и многие ее частные случаи [1-3]. Поэтому актуальными являются вопросы разработки приближенных полиномиальных алгоритмов ее решения и получения оценок порогов ее эффективной аппроксимируемости.

В сообщении рассматривается частный случай задачи (4), в которой F является классом комитетных кусочно-линейных решающих правил. Приводятся новые результаты в области вычислительной и аппроксимационной сложности этой задачи, полученные, в частности, с использованием современного комбинаторного аппарата [4], развитого при доказательстве PCP-теоремы.

Пусть $X\subset R^n$, $f_1,\ldots,f_q:X\to R$ — аффинные функции. Комитетным кусочно-линейным решающим правилом с элементами $f_1,\ldots,f_q$ называется частичная функция $\varphi : X \to \Omega$, задаваемая формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^{q} \operatorname{sign}(f_i(x)) > 0, \\ 0, & \text{если } \sum_{i=1}^{q} \operatorname{sign}(f_i(x)) < 0, \\ \Lambda, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Комитетное правило φ корректно на выборке (2), если

$$\varphi(x_i) = \omega_i \quad (i \in N_m = \{1, 2, \dots m\}).$$

Сопоставим выборке множества $A = \{x_i : \omega_i = 1\}$ и $B = \{x_i : \omega_i = 0\}$. Известно [5], что класс комитетных кусочно-линейных решающих правил содержит корректное на выборке (2) правило тогда и только тогда, когда $A \cap B = \emptyset$.

Обозначим через F_q класс комитетных решающих правил, состоящих из не более чем q элементов.

Теорема 1. Емкость класса F_q, $VCD(F_q)$, удовлетворяет соотношениям

$$VCD(F_q) \le q(n+1), \quad q \le 2\left\lceil \frac{\lfloor (VCD(F_q) - n)/2 \rfloor}{n} \right\rceil + 1.$$

Таким образом, задача (4) в классе комитетных кусочно-линейных решающих правил эквивалентна задаче поиска корректного на выборке (2) правила с наименьшим возможным q, которую удобно формулировать в терминах аффинных разделяющих комитетов.

Определение 1. Пусть $f_1, \dots, f_q : R^n \to R$ — аффинные функции, и A, B — конечные подмножества R^n. Конечная последовательность $K = (f_1, \dots, f_q)$ называется *аффинным комитетом, разделяющим* A *и* B, если

$$\begin{aligned} |\{i \in N_q : f_i(a) > 0\}| &> \frac{q}{2} \quad (a \in A), \\ |\{i \in N_q : f_i(b) < 0\}| &> \frac{q}{2} \quad (b \in B). \end{aligned}$$

Число q называется числом элементов комитета K, а множества A и B — *отделимыми* этим комитетом.

Задача «Минимальный аффинный разделяющий комитет (MASC)». Для заданных конечных множеств $A, B \subset Q^n$ требуется найти аффинный комитет K, разделяющий эти множества, с наименьшим числом элементов.

Здесь и ниже договоримся символом Q обозначать множество рациональных чисел. Сложность и аппроксимируемость задачи MASC в общем случае определяются в приведенной ниже теореме.

Теорема 2 ([6]). 1. Задача MASC NP-трудна и сохраняет труднорешаемость при дополнительном ограничении $A \cup B \subset \{x \in \{0, 1, 2\}^n : \|x\|_2 \le 2\}$.
2. Если $P \ne NP$, задача MASC не принадлежит классу Apx. Более того, если не выполнено условие $NP \subset DTIME(2^{poly(\log n)})$, то существует константа $D > 0$ такая, что точность r произвольного полиномиального приближенного алгоритма задачи MASC удовлетворяет неравенству $r \ge D \log\log\log m$.

Договоримся использовать обозначение MASC(n) для задачи MASC, сформулированной в пространстве фиксированной размерности n. Известно, что задача MASC(n) полиномиально разрешима при $n = 1$. При произвольном $n > 1$ задача NP–трудна. Справедливость этого факта следует из труднорешаемости следующей задачи.

Задача «Аффинный разделяющий комитет на плоскости (PASC)». Заданы множества $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$, $A, B \subset Q^2$, и натуральное число t. Существует ли аффинный комитет K с не более чем t элементами, разделяющий множества A и B?

Видно, что задача PASC является модификацией задачи MASC(2) в виде задачи верификации свойства, и принадлежит NP. Доказательство ее труднорешаемости следует из полиномиальной сводимости (к ней) известной NP–полной задачи о покрытии конечного множества (точек) на плоскости множеством прямых линий, известной в литературе как задача PC.

Задача «Покрытие прямыми множества на плоскости (PC)». Заданы конечное подмножество P плоскости, содержащее точки с целочисленными координатами, и натуральное число s. Существует ли такое покрытие L множества P прямыми, что $|L| \leq s$?

Если множество P находится в общем положении, т.е. никакие три точки из P не лежат на одной прямой, то ответ в задаче PC может быть получен тривиально («Да», если $s \geq \lceil |P|/2 \rceil$ и «Нет», в противном случае) за полиномиальное от логарифма размера задачи время. Тем не менее, в общем случае задача PC, как известно [7], NP–полна в сильном смысле.

Справедлива следующая

Теорема 3 ([6]). Произвольному конечному целочисленному подмножеству P плоскости за полиномиальное время можно сопоставить число $\varepsilon > 0$, вектор σ и множества $A = P$ и $B = (P - \varepsilon\sigma) \cup (P + \varepsilon\sigma)$ так, что P обладает покрытием из s прямых тогда и только тогда, когда A и B отделимы аффинным комитетом из $2s + 1$ элемента.

Следствие. Задача PASC NP–полна в сильном смысле. Задача ASC(n)[1] при произвольном $n > 1$ — также NP–полна в сильном смысле. Задача MASC(n) NP–трудна при произвольном $n > 1$.

Доказательство теоремы 3 существенно опиралось на неявное допущение о возможности рассмотрения «вырожденных» условий задачи PASC, задаваемых множеством $A \cup B$ не находящимся в общем положении. Ниже приводится аналогичный результат, полученный без этого допущения.

Определение 2. Множество $Z \subset R^n$, $|Z| > n$, находится *в общем положении,* если для каждого его подмножества Z', $|Z'| = n+1$, справедливо равенство $\dim \operatorname{aff}(Z') = n$.

Задача «PASC для множеств в общем положении (PASC-GP)». Заданы множества $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$, $A, B \subset Q^2$, так, что множество $A \cup B$ находится в общем положении, и натуральное число t. Существует ли аффинный комитет K с не более, чем t элементами, разделяющий множества A и B?

Труднорешаемость задачи PASC-GP также может быть обоснована полиномиальным сведением к ней задачи PC.

[1]ASC(n) — версия задачи MASC(n) в виде задачи верификации свойства.

Теорема 4 ([3]). Произвольному конечному целочисленному подмножеству P плоскости за полиномиальное от его размера время могут быть сопоставлены положительные числа M, $\varepsilon(p)$, ортогональные векторы σ и τ и множества

$$A = \{p \pm \frac{\varepsilon(p)}{M}\tau : p \in P\} \text{ и } B = \{p \pm \varepsilon(p)\sigma : p \in P\}$$

так, что $A \cup B$ находится в общем положении и P обладает покрытием из s прямых тогда и только тогда, когда множества A и B отделимы аффинным комитетом из $2s + 1$ элемента.

Следствие. Задача PASC-GP NP–полна в сильном смысле. Задачи MASC-GP(n) и MASC-GP — NP–трудны[2].

Заметим, что из теорем 3 и 4 следует полиномиальная сводимость задачи MinPC[3] к задачам MASC(2) и MASC-GP(2), соответственно, *сохраняющая точность аппроксимации* (произвольный полиномиальный приближенный алгоритм задачи MASC(2) или MASC-GP(2) индуцирует полиномиальный приближенный алгоритм для задачи MinPC с такой же точностью аппроксимации).

В работе [7] доказательство труднорешаемости задачи PC было получено как следствие полиномиальной сводимости к ней известной задачи 3SAT. Проведя аналогичные рассуждения для задачи Gap-3SAT$(5)_{1,\rho}$, труднорешаемость которой следеует из известной PCP–теоремы [4], получим результат, касающийся аппроксимируемости задачи MinPC.

Задача Gap-3SAT$(5)_{1,\rho}$**.** Для заданной 3КНФ, в которой каждая переменная используется не более чем в 5 дизъюнктах, необходимо дать ответ «Да», если найдется разрешающий ее набор истинности, ответ «Нет», если для произвольного набора истинности, доля разрешаемых им дизъюнктов меньше ρ. В противном случае ответ не определен.

Теорема 5. Задача MinPC Max-SNP–трудна.

Следствие Задача MASC-GP(n) Max-SNP–трудна при произвольном $n > 1$.

Как известно, принадлежность NP–трудной задачи классу Max-SNP–трудных задач влечет невозможность (при условии $P \neq NP$) построения для такой задачи полиномиальной приближенной схемы (PTAS). Наилучший (по гарантированной оценке точности) известный приближенный алгоритм ('Greedy Committee') для задачи MASC-GP(n) описан в работе [3] и обладает следующими свойствами.

Теорема 6. 1. Пусть множество $Z = A \cup B \subset Q^n$, $|Z| = m$, задает условие задачи MASC-GP(n). Сложность алгоритма 'Greedy Committee' составит $O\left(\binom{m}{n}^3 + \Theta m\right)$, где Θ — сложность подзадачи нахождения решения совместной системы из не более чем m линейных неравенств от $n+1$ переменной. Точность алгоритма $O(m/n)$.

2. Пусть для множества Z найдутся число t и максимальные по включению аффинно разделимые подмножества $Z'_0, Z'_1, \ldots, Z'_{2t} \subset Z$ (не обязательно различные), что

$$Z'_{2j-1} \cup Z'_{2j} = Z \quad (j \in N_t)$$

[2]Подобно PASC-GP, задачи MASC-GP(n) и MASC-GP являются модификациями задачи MASC и MASC(n) с дополнительным ограничением общности положения разделяемых множеств.

[3]MinPC — оптимизационная версия задачи PC.

и, для произвольных пар (c_i, d_i) таких, что

$$c_i^T a - d_i > 0, \quad (a \in A \cap Z_i')$$
$$c_i^T b - d_i < 0, \quad (a \in B \cap Z_i')$$

последовательность $K = (c_0^T x - d_0, c_1^T x - d_1, \ldots, c_{2t}^T x - d_{2t})$ является минимальным аффинным комитетом, разделяющим множества A и B. Тогда точность алгоритма не превосходит $O(\log m)$.

Условие, приведенное в пункте 2 теоремы, может показаться излишне строгим. Тем не менее, согласно результатам численных экспериментов, случайно выбранное условие задачи MASC-GP(n) с высокой вероятностью ему удовлетворяет. Кроме того, справедливо

Утверждение. Формулировки задач PASC и PASC-GP, построенные на этапе полиномиального сведения задачи PC при доказательстве теорем 3 и 4, удовлетворяют условию п. 2 теоремы 6.

Работа поддержана грантами РФФИ 10-07-00134 и 10-01-00273, а также проектами Президиума УрО РАН 09-П-1-1001 и 09-С-1-1010.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Lin, J. Vitter. Complexity Results on Learning by Neural Nets // Machine Learning. 1991. no. 6. P. 211–230.

2. M. Khachay. On the Computational Complexity of the Minimum Committee Problem // J. of Math. Model. and Algor. 2007. V. 6, no. 4. P. 547–561.

3. M. Khachai, and M. Poberii. Complexity and Approximability of Committee Polyhedral Separability of Sets in General Position // Informatica. 2009. V. 20., no. 2. P. 217–234.

4. I. Dinur. The PCP Theorem by Gap Amplification // J. of the ACM. 2007. V. 54(3).

5. Вл.Д. Мазуров. Комитеты систем неравенств и задача распознавания образов // Кибернетика. 1971. № 3. С. 140–146.

6. M. Khachai. Computational and Approximational Complexity of Combinatorial Problems Related to the Committee Polyhedral Separability of Finite Sets // Pattern Recognition and Image Analysis. 2008. Vol.18. №2. P. 237–242.

7. N. Megiddo, and A. Tamir. On the complexity of locating linear facilities in the plane // Operations research letters. 1982. Vol. 1. № 5. P. 194–197.

Хачай Михаил Юрьевич, Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, г. Екатеринбург, 620990, Россия, тел. (343) 375-35-05, факс (343) 374-25-81, e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ МАРШРУТИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А. Г. Ченцов

Рассматривается экстремальная задача маршрутизации перемещений, осложненная ограничениями в виде условий предшествования и необходимостью выполнять некоторые работы по мере посещения целевых множеств (имеется в виду абстрактный аналог задачи о посещении мегаполисов с дополнительными ограничениями). Основное внимание уделяется модификациям метода динамического программирования (МДП), которые используются в двух вариантах:

1) для поиска глобального экстремума;

2) в качестве инструмента реализации метода итераций с перестраиваемой моделью задачи курьера [1].

Возможные приложения связаны, в частности, с весьма актуальной задачей минимизации дозовой нагрузки ремонтного персонала атомной электростанции (АЭС) при выполнении работ в помещениях АЭС с повышенным уровнем радиации (в этой связи см. [2 - 4]).

1. Пусть: X — непустое конечное множество; $N \in \mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$ ($\triangleq$ — равенство по определению), $N \geqslant 2$; $M_1, \cdots, M_N$ — непустые подмножества (п/м) X. Множества $M_1, \ldots, M_N$ рассматриваем в качестве целевых; полагаем их попарно не пересекающимися;

$$x^o \in X \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{N} M_i\Big)$$

есть фиксированный начальный пункт (база). Рассматривается вопрос о построении системы перемещений

$$x^o \longrightarrow \big(x_1 \in M_{\alpha(1)} \rightsquigarrow x^{(1)} \in M_{\alpha(1)}\big) \to \ldots \to \big(x_N \in M_{\alpha(N)} \rightsquigarrow x^{(N)} \in M_{\alpha(N)}\big), \qquad (1)$$

где α — перестановка в $\overline{1,N} \triangleq \{i \in \mathbb{N} \,|\, i \leqslant N\}$, выбор которой стеснён условиями предшествования. Прямые стрелки в (1) соответствуют внешним перемещениям, а «волнистые» — внутренним, т. е. перемещениям в пределах целевых множеств — мегаполисов, что связано с выполнением работ, именуемых далее внутренними (см. [5,6]). Условимся через $\mathbb{P}$ обозначать множество всех перестановок в $\overline{1,N}$. Фиксируем множество $\mathbf{K}$, $\mathbf{K} \subset \overline{1,N} \times \overline{1,N}$, элементы которого именуем адресными парами (случай $\mathbf{K} = \emptyset$ не исключается). Каждой перестановке $\alpha \in \mathbb{P}$ сопоставляем обратную $\alpha^{-1}: \alpha^{-1} \in \mathbb{P}$,

$$\alpha^{-1}\big(\alpha(i)\big) = \alpha\big(\alpha^{-1}(i)\big) = i \quad \forall i \in \overline{1,N}.$$

Через $\mathbb{A}$ условимся обозначать множество всех перестановок $\alpha \in \mathbb{P}$, для каждой из которых $\forall i \in \overline{1,N} \ \ \forall j \in \overline{1,N}$

$$\big((i,j) \in \mathbf{K}\big) \Longrightarrow \big(\alpha^{-1}(i) < \alpha^{-1}(j)\big). \qquad (2)$$

Тогда $\mathbb{A}$ — множество всех допустимых маршрутов (маршруты отождествляем с перестановками из $\mathbb{P}$), а совокупность импликаций (2) определяет условия предшествования: «отправитель» каждой адресной пары должен посещаться раньше соответствующего «получателя». В дальнейшем предполагается, что для всякого непустого множества $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} \subset \mathbf{K}$, существует такая адресная пара $(p,q) \in \mathbb{K}$, что $p \neq j \ \ \forall (i,j) \in \mathbb{K}$. Более подробное обсуждение условий см. в [7, гл. 2]. В частности, существенна теорема 2.2.1 монографии [7], содержательный смысл которой состоит в следующем.

Введём оператор $\mathbf{I}$, действующий в семействе $\mathfrak{N}$ всех непустых п/м $\overline{1,N}$ по правилу [7, (2.2.28)]: если дан список заданий $K \in \mathfrak{N}$, то из него следует удалить вторые компоненты всех адресных пар из $\mathbf{K}$, «полностью укладывающихся» (по первой и второй компонентам) в K; оставшееся множество индексов обозначается через $\mathbf{I}(K)$. Получаем правило вычёркивания, которое порождает новое понятие допустимости маршрутов; оказывается, однако, что $\mathbb{A}$ совпадает с множеством маршрутов, допустимых в «новом» смысле: $\mathbb{A}$ есть множество всех $\alpha \in \mathbb{P}$ таких, что

$$\alpha(t) \in \mathbf{I}\big(\{\alpha(l) : \, l \in \overline{t,N}\}\big) \ \ \forall t \in \overline{1,N}. \tag{3}$$

В виде (3) имеем ограничение на текущие переходы с множества на множество в системе внешних перемещений (см. (1)). Полагаем заданными функции

$$\mathbf{c} : \, X \times X \longrightarrow [0,\infty[, \ \mathbf{f} : \, X \longrightarrow [0,\infty[;$$

$$c_1 : \, X \times X \longrightarrow [0,\infty[, \ldots, c_N : \, X \times X \longrightarrow [0,\infty[,$$

которые используются при аддитивном способе агрегирования для оценивания перемещений вида (1):

$$\mathbf{c}(x^o, x_1) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(x^{(i)}, x_{i+1}) + \sum_{i=1}^{N} c_{\alpha(i)}(x_i, x^{(i)}) + \mathbf{f}(x^{(N)}) \in [0,\infty[\tag{4}$$

есть сумма затрат на реализацию перемещений в (1). При этом значения $c_j(y,z)$ соответствуют содержательно экстремуму внутренних затрат при выполнении работ на M_j с фиксацией точек входа $y \in M_j$ и выхода $z \in M_j$; здесь $j \in \overline{1,N}$. Значение (4) следует минимизировать выбором $\alpha \in \mathbb{A}$ и кортежей $(x_i)_{i \in \overline{1,N}}$, $(x^{(i)})_{i \in \overline{1,N}}$, согласованных с α подобно (1). Используя эквивалентное представление $\mathbb{A}$ (см. (3)) упомянутой экстремальной задаче сопоставляется расширение в виде системы «укороченных» задач: имеется в виду возможное изменение базы и замена полного списка $\overline{1,N}$ частичным $K \in \mathfrak{N}$ с сохранением способа описания затрат в виде, подобном (4); что касается ограничений в «укороченных» задачах, то используются условия, подобные (3). Точные определения соответствуют [5,6]. На основе упомянутого расширения конструируется функция Беллмана v,

$$(x,K) \longmapsto v(x,K) : \, X \times \mathbf{N} \longrightarrow [0,\infty[,$$

где $\mathbf{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{N} \cup \{\emptyset\}$, для которой $v(y,\emptyset) = \mathbf{f}(y) \ \ \forall y \in X$. Пусть $\mathbf{V} \stackrel{\triangle}{=} v(x^o, \overline{1,N})$.

Предложение. Если $x \in X$ и $K \in \mathfrak{N}$, то

$$v(x,K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \ \min_{y \in M_j} \ \min_{z \in M_j} \big[\mathbf{c}(x,y) + c_j(y,z) + v(z, K \setminus \{j\})\big]. \tag{5}$$

2. Представление (5) («полное» уравнение Беллмана) имеет теоретический характер; для его реализации в виде вычислительной процедуры осуществляется «усечение» посредством конструкции раздела 4.9 монографии [7]; см. также [5,6]. Если $s \in \overline{1,N}$, то через $\mathfrak{N}_s$ обозначаем семейство всех s-элементных множеств из $\mathfrak{N}$,

$$\mathcal{G}_s \stackrel{\triangle}{=} \{K \in \mathfrak{N}_s \,|\, \forall (i,j) \in \mathbf{K} \ \ (i \in K) \Longrightarrow (j \in K)\}. \tag{6}$$

Элементы (6) интерпретируем как существенные списки заданий мощности s. На основе (6) конструируем слои пространства позиций $X \times \mathbf{N}$. Определяем $\mathbf{M}$ в виде объединения всех множеств M_i, $i \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1$, где $\mathbf{K}_1$ есть def множество всех первых компонент адресных пар из $\mathbf{K}$. Определяем «крайние» слои: $D_o \overset{\triangle}{=} \{(x, \emptyset) :\ x \in \mathbf{M}\}$ и $D_N \overset{\triangle}{=} \{(x^o, \overline{1,N})\}$ (одноэлементное множество).

Если $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$, то конструируем множество

$$\mathcal{I}_s(K) \overset{\triangle}{=} \{i \in \overline{1,N} \setminus K \mid \{i\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}\}$$

всех K-существенных индексов, реализующих продолжение существенного списка мощности s до аналогичного списка мощности $s+1$; тогда «регулярный» слой

$$D_s \overset{\triangle}{=} \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s} \{(x, K) :\ x \in \bigcup_{i \in \mathcal{I}_s(K)} M_i\}$$

соответствует использованию s-элементных существенных списков заданий. При этом $D_s \neq \emptyset \ \ \forall s \in \overline{0,N}$. Это позволяет ввести сужения функции Беллмана на каждый из слоев. Итак, при $s \in \overline{0,N}$ полагаем

$$\mathcal{V}_s \overset{\triangle}{=} \big(v(z)\big)_{z \in D_s},$$

получая (в виде $\mathcal{V}_s$) функцию

$$(x, K) \longmapsto v(x, K) :\ D_s \longrightarrow [0, \infty[.$$

Слои обладают свойством: при $s \in \overline{1,N}$, $(x,K) \in D_s$, $j \in \mathbf{I}(K)$ и $y \in M_j$ непременно $(y, K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}$. Упомянутое свойство назовём инвариантностью (оно подобно в логическом отношении свойству стабильности мостов Н.Н. Красовского в теории дифференциальных игр; см. [8,9]). С учетом инвариантности слоёв построение системы сужений функции Беллмана можно осуществить, «не выходя» за пределы упомянутых слоёв.

Теорема[5,6]. Если $s \in \overline{1,N}$ и $(x,K) \in D_s$, то

$$\mathcal{V}_s(x,K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \ \min_{y \in M_j} \ \min_{z \in M_j} \big[\mathbf{c}(x,y) + c_j(y,z) + \mathcal{V}_{s-1}(y, K \setminus \{j\})\big]; \qquad (7)$$

при этом $\big(\mathcal{V}_o(y, \emptyset) = \mathbf{f}(y) \ \ \forall y \in \mathbf{M}\big) \,\&\, \big(\mathcal{V}_N(x^o, \overline{1,N}) = \mathbf{V}\big)$.

Теорема позволяет построить функции $\mathcal{V}_o, \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_N$. Если $s \in \overline{1, N-1}$ и $\mathcal{V}_{s-1}$ построена, то конструируем $\mathcal{V}_s$ по правилу (7). Получаем усечённый массив значений v.

3. На основе (7) традиционным для МДП способом конструируется оптимальное решение в виде пары маршрут-трасса.

Алгоритм на основе МДП подробно изложен в [5]. На его основе А.А. Ченцовым и П.А. Ченцовым была построена программа для ПЭВМ и проведен обширный вычислительный эксперимент (использовался компьютер Notebook, процессор Intel CoreDuo T2500 с частотой 2 ГГц и объемом оперативной памяти 1Гб).

Типичные для оптимальной процедуры числовые данные: $N = 27$, $|M_i| \equiv 12$, $|\mathbf{K}| = 25$, время счета порядка 55 минут (для построения критерия обычно использовалось евклидово расстояние на плоскости).

4. Конструкции на основе МДП применялись для решения основной задачи методом итераций (см. [6,10]), в котором используются элементы декомпозиции. В основе метода — редукция к экстремальной задаче с независимыми переменными: система «городов» (кортеж пар точек на целевых множествах в априорной нумерации) и маршрут. Соответственно

$$\mathfrak{M} \triangleq \prod_{i=1}^{N} (M_i \times M_i)$$

и $\mathbb{A}$ реализуют пространство решений в виде $\mathfrak{M} \times \mathbb{A}$. Целевая функция вспомогательной задачи конструируется следующим образом: если

$$(y_1, y^{(1)}) \in M_1 \times M_1, \ldots, (y_N, y^{(N)}) \in M_N \times M_N$$

и $\alpha \in \mathbb{A}$, то решение $h \triangleq \Big(\big((y_1, y^{(1)}), \ldots, (y_N, y^{(N)}) \big), \alpha \Big)$ оценивается величиной

$$w(h) \triangleq \mathbf{c}(x^o, y_{\alpha(1)}) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(y^{(\alpha(i))}, y_{\alpha(i+1)}) + \sum_{i=1}^{N} c_i(y_i, y^{(i)}) + \mathbf{f}(y^{(\alpha(N))}),$$

которая оптимизируется посредством выбора h на произведении $\mathfrak{M} \times \mathbb{A}$. Данная задача эквивалентна исходной (см. [6,10]), реализуя в сочетании с ней двойственность, в терминах которой конструируется итерационная процедура, допускающая аналогию с методом покоординатного спуска: с w естественно связать две экстремальные задачи, одна из которых — задача курьера [1] при выбранной системе «городов», а вторая — задача оптимизации этой системы при заданном маршруте. Первая из упомянутых задач сводится к виду

$$\mathbf{c}(x^o, y_{\alpha(1)}) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(y^{(\alpha(i))}, y_{\alpha(i+1)}) + \mathbf{f}(y^{(\alpha(N))}) \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbb{A}, \tag{8}$$

где $y_1 \in M_1, y^{(1)} \in M_1, \ldots, y_N \in M_N, y^{(N)} \in M_N$ заданы, а вторая (задача реконструкции) эквивалентна по результату задаче оптимизации трассы при выбранном маршруте: имеется в виду задача на минимум выражения (4) при заданной перестановке $\alpha \in \mathbb{A}$.

Метод итераций конструируется следующим образом. Сначала рассматривается вспомогательная начальная задача курьера. Мы полагаем $M_o \triangleq \{x^o\}$ и конструируем матрицу минорант

$$\mathbb{A} = \big(\mathbb{A}(i,j) : \, i \in \overline{0,N}, \, j \in \overline{1,N}\big)$$

по правилу: при $p \in \overline{0,N}$ и $q \in \overline{1,N}$ $\mathbb{A}(p,q)$ есть наименьшее из чисел $\mathbf{c}(x,y)$, $x \in M_p, y \in M_q$. Кроме того, при $k \in \overline{1,N}$ определяется $\mathbf{f}^{(k)}$ как наименьшее из чисел $\mathbf{f}(y)$, $y \in M_k$. Значение задачи

$$\mathbb{A}\big(0, \alpha(1)\big) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{A}\big(\alpha(i), \alpha(i+1)\big) + \mathbf{f}^{(\alpha(N))} \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbb{A}, \tag{9}$$

оценивает $\mathbf{V}$ снизу, а маршрут ω_o, оптимальный в задаче (9), принимается за начальный. Далее оптимизируется трасса посещения целевых множеств, которая преобразуется затем в систему «городов» (см. $[10, (4.11)]$). Затем для данной системы решается задача (8), доставляя (с точностью до известного слагаемого) экстремум соответствующего сечения w. Найденный маршрут используем для нумерации множеств, после чего оптимизируем трассу и, тем самым, уточняем верхнюю оценку $\mathbf{V}$. Далее процедура повторяется. В настоящее время для решения задачи (8) и задачи оптимизации трассы используются варианты МДП, но возможно применение и других методов. Вычислительный эксперимент для задач размерности, упомянутой в п. 3, показал, что при «небольшом» (до 5 %) ухудшении результата время счета уменьшалось примерно в 1,5 раза (см. раздел 7 в [10]).

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00436 и программой фундаментальных исследований Президиума РАН «Математическая теория управления».

ЛИТЕРАТУРА

1. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.

2. Сесекин А.Н., Ташлыков О.Л., Щеклеин С.Е., Куклин М.Ю., Кадников А.А., Ченцов А.Г. Использование метода динамического программирования для оптимизации траекторий перемещения работников в радиационно опасных зонах с целью минимизации облучения // Изв. вузов. Ядерная энергетика. 2006. № 2. С. 41–48.

3. Ташлыков О.Л., Сесекин А.Н., Щеклеин С.Е., Ченцов А.Г. Разработка оптимальных алгоритмов вывода АЭС из эксплуатации с использованием методов математического моделирования // Изв. вузов. Ядерная энергетика. 2009. № 2. С. 115–120.

4. Ташлыков О.Л., Сесекин А.Н., Щеклеин С.Е., Балушкин Ф.А., Хомяков А.П., Ченцов А.Г. Возможности методов математического моделирования в решении проблемы снижения облучаемости персонала // Вопросы радиационной безопасности. 2009. № 4. С. 39–49.

5. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Экстремальная задача маршрутизации с внутренними потерями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т.14, № 3. С. 182–201.

6. Ченцов А.Г. Об оптимальной маршрутизации в условиях ограничений // ДАН. 2008. Т. 423, № 3. С. 303–307.

7. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2008. 238с.

8. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука. 1970. 420с.

9. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука. 1974. 456с.

10. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Метод итераций в задаче маршрутизации с внутренними потерями // Тр. Ин–та математики и механики УрО РАН. 2008. Т.15, № 4. С. 270–289.

Ченцов Александр Георгиевич, Институт математики и механики, ул. С. Ковалевской, 16, г. Екатеринбург, Россия, тел. (8-343-375-34-57), факс (8-343-374-25-81), e-mail: chentsov@imm.uran.ru

ТРИАНГУЛЯЦИИ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ И РЕАЛИЗАЦИЯ ИХ f-ВЕКТОРОВ

В. Н. Шевченко

Рассматриваются два класса (геометрических) симплициальных комплексов (с. к.): граничный комплекс ∂P симплициального политопа P и комплекс $\Delta(T(V))$ триангуляции $T(V)$ политопа $P = convV$, где через $convV$ обозначена выпуклая оболочка точек $v_1, ..., v_n$ множества V. Множество всех симплексов комплекса K (называемых гранями с. к. K) разбивается на подмножества K_k k-мерных граней $(k = -1, ..., d)$. Вектор $f(K) = (1, f_0(K), ..., f_d(K))$, где $f_k(K) = |K_k|$ есть число k-мерных граней с. к. K, называется f-вектором с. к. K. Вектор $f = (f_0, ..., f_d)$ называется реализуемым (в соответствующем классе с. к.), если найдется K такой, что $f = f(K)$. Критерий реализуемости для первого класса известен. Известен также ряд условий реализуемости (как необходимых, так и достаточных) во втором классе. Здесь подводится итог попыткам получения критерия для второго класса.

1. Пусть P – множество решений (называемое далее *полиэдром*) системы линейных неравенств (над полем $\mathbf{Q}$ рациональных чисел)

$$a_{i0} + \sum_{k=1}^{d} a_{ik}x_k \geq 0, i = 1, ..., m. \tag{1}$$

Под *размерностью* P $(dimP)$ понимают максимальное число аффинно независимых решений системы (1) без единицы, если она совместна, и считают $dimP = -1$ в противном случае. Ограниченный полиэдр называют *выпуклым многогранником*. Будем называть его также *политопом* или r-*политопом*, если $dimP = r$. Рассмотрим такую линейную функцию ax, для которой достигается $\max_{x\in P} ax = \alpha$. Множество $P_a = \{x \in P/ax = \alpha\}$ называют *гранью* полиэдра P, в частности при $a = 0$ получим, что P является (единственной) r-мерной гранью r-политопа P. Удобно также считать пустое множество (-1)-мерной гранью любого политопа P. Хорошо известно (см., например, [2, 4, 5, 12, 19]), что любой политоп P можно задать как выпуклую оболочку своих вершин (т. е. 0-мерных граней) $P = conv(v_1, v_2, ..., v_n)$, где

$$conv(v_1, ..., v_n) = \{x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j / \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, ..., n\}, \tag{2}$$

а каждая его грань $P_a = conv(v_j, j \in J_a)$, где $J_a = \{j/av_j = \alpha\}$. В частности, положив $a_i = (a_{i1}, ..., a_{id})$, с i-м неравенством системы (1) свяжем грань

$$F_i = \{x \in P/a_{i0} + \sum_{k=1}^{d} a_{ik}x_k = 0\}. \tag{3}$$

Если $dimF_i = dimP - 1$, то грань F_i называют *фасетой* политопа P. Обозначим через $\Gamma_k(P)$ множество k-мерных граней политопа P и положим $\Gamma(P) = \bigcup_{k=-1}^{r} \Gamma_k(P)$, $\partial P = \Gamma(P) \setminus \{P\}$, $f(P) = (f_{-1}(P), f_0(P), ..., f_r(P))$, где $f_k(P) = |\Gamma_k(P)|$ – число k-мерных граней политопа P,

$$f(\lambda, P) = \sum_{k=-1}^{r} f_k(P)\lambda^{k+1}, \tag{4}$$

и $f(\lambda, \partial P) = f(\lambda, P) - \lambda^{r+1}$.

Известно также, что если $r = d$ и система (1) *неприводима*, т. е. не содержит неравенств-следствий, то $f_{d-1}(P) = m$, $\Gamma_{d-1}(P) = \{F_1, ..., F_m\}$ и множество

$$\Gamma(P) = \bigcup_{k=-1}^{r} \Gamma_k(P)$$

с естественным частичным упорядочиванием $F \subseteq G$ является *градуированной* решёткой (определение и свойства *решетки* см. в [1]), в частности $\inf(P_a, P_b) = P_a \bigcap P_b = P_{a+b}$. Она называется *граневой решеткой* политопа P, а множество ∂P называется *граничным комплексом* политопа P.

Политоп P называется r-*симплексом*, если $dimP = f_0(P) - 1 = r$. Нетрудно видеть, что для него $\Gamma_k(P)$ составляет $(k+1)$-мерный слой $(r+1)$-мерного булева куба, $f_k(P) = \binom{r+1}{k+1}$, $f(\lambda, P) = (1+\lambda)^{r+1}$.

Политоп называется *симплициальным*, если любая его фасета является симплексом. Если P симплициальный, то его граничный комплекс ∂P является с. к.

Пример 1. Пусть $P = conv(v_1, v_2, ..., v_n)$ – d-политоп в R^{d+1} и v_0 не принадлежит аффинной оболочке $\Gamma_0(P)$. *Пирамидой с основанием* P и *апексом* v_0 называется [4, 12, 19] $(d+1)$ - политоп $Q = conv(v_0, v_1, ..., v_n)$. Тогда $f(\lambda, Q) = (1+\lambda) f(\lambda, P)$.

Естественно возникает

Задача 1 (о реализации f-вектора): перечислить необходимые и достаточные условия, которыми должен обладать целочисленный вектор f для того, чтобы он совпадал с $f(P)$ для некоторого d-политопа P.

Со времён Штейница, решившего Задачу 1 при $d = 3$ в 1922 г. (см. например, [4]), прогресс невелик. В общем случае известно лишь необходимое условие Эйлера-Пуанкаре

$$f(-1, P) = \sum_{k=-1}^{d} f_k(P)(-1)^{k+1} = 0 \tag{5}$$

и весьма полезная концепция разворачиваемости (shellability)[11 - 13, 19].

Продемонстрируем ее, считая для простоты, что $dimP = d$, система (1) неприводима и $a_{i0} < 0$. Пусть вектор $q = (q_1, ..., q_d) \in Q^d$ такой, что при $i = 1, ..., m$ $\sum_{k=1}^{d} a_{ik} q_k \neq 0$, а числа $\lambda_i = a_{i0} / \sum_{k=1}^{d} a_{ik} q_k$ различны и среди них есть как положительные, так и отрицательные. Переупорядочим фасеты $F_1, ..., F_m$ неравенствами

$$\frac{1}{\lambda_1} > ... > \frac{1}{\lambda_m}. \tag{6}$$

Теорема 1 [11]. Если фасеты $F_1, ..., F_m$ упорядочены в соответствии с неравенствами (6) (говорят, что эта последовательность дает *линейную развертку* с. к. ∂P), то при $i = 1, ..., m-1$ множество

$$F_{i+1} \bigcap (\bigcup_{j=1}^{i} F_j)$$

является объединением фасет грани F_{i+1}.

Определение общего понятия *развертки* политопиального (и, в частности, симплициального) комплекса можно найти в [2, 19].

Следующее понятие является одним из основных в комбинаторной геометрии [2-4, 18]. Политоп P' называется *комбинаторно эквивалентным* политопу P ($P \sim P'$), если существует взаимно однозначное отображение множества $\Gamma(P)$ на множество $\Gamma(P')$, сохраняющее отношение включения (при этом решётки называют *изоморфными* и пишут $\Gamma(P) \approx \Gamma(P')$).

2. Рассмотрим класс $P^s(d,n)$ симплициальных d-политопов с n вершинами.

Граничный комплекс ∂P симплициального политопа P удовлетворяет условию:

$$\text{если } F \in \partial P \text{ и } G \in \Gamma(F), \text{ то } G \in \partial P, \tag{7}$$

и, следовательно, является *симплициальным комплексом* [3, 4, 19].

Пусть P описывается неприводимой системой (1). Известно, что фасеты $F_1, ..., F_m$ можно упорядочить так, что

$$\partial P = \bigcup_{i=1}^{m} [G_i, F_i], \tag{8}$$

где $[G, F] = \{H \in \Gamma(P)/G \subseteq H \subseteq F\}$, G_{l+1} - наименьшая по включению грань фасеты F_{l+1}, не принадлежащая подкомплексу $(\partial P)_l = \bigcup_{i=1}^{l}[G_i, F_i]$, $G_1 = \oslash$, и $G_m = F_m-$ последовательность $(F_1, ..., F_m)$ называется разверткой с. к. ∂P. В частности, это можно сделать по теореме 1, воспользовавшись неравенствами (6).

Разбиение (8) позволяет вычислить многочлен $f(\lambda, (\partial P)_l)$, зная при $i = 1, ..., l$ число элементов $\sigma_i = dimG_i + 1$ в множестве G_i (называемом i-м *разделителем* развертки (8))

$$f(\lambda, (\partial P)_l) = \sum_{i=1}^{l} \lambda^{\sigma_i}(1+\lambda)^{d-\sigma_i}, \quad l = 1, ..., m \tag{9}$$

Заметим, что $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 1, \sigma_m = d$ и $1 \leq \sigma_i \leq d-1$ при остальных значениях i.

Лемма 1. Если

$$f(\lambda, (\partial P)_l) = \sum_{k=0}^{d} \gamma_{k,l}\lambda^k(1+\lambda)^{d-k}, \qquad (10),$$

то $\gamma_{k,l} = |\{i/\sigma_i = k, i = 1, ..., l\}|$,

$\gamma_{k,l} = \gamma_{k,l-1} + 1$, если $\sigma_l = k$, и $\gamma_{k,l} = \gamma_{k,l-1}$ в противном случае.

Отсюда следует, что для любого политопа $P \in P^s(d,n)$, многочлен $f(\lambda, \partial P)$ можно представить в виде

$$f(\lambda, \partial P) = \sum_{k=0}^{d} h_k(P)\lambda^k(1+\lambda)^{d-k}, \tag{11}$$

$$f(\lambda, \partial P) = \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} g_k(P)(\lambda^k(1+\lambda)^{d+1-k} - \lambda^{d+1-k}(1+\lambda)^k), \tag{12}$$

где $g_0(P) = 1$ и $g_k(P) = h_k(P) - h_{k-1}(P)-$ целые неотрицательные числа, а $\lfloor d/2 \rfloor = \delta-$ наибольшее целое число, не превосходящее числа $d/2$.

Заметим, что (12) влечет равенство $f(-1-\lambda, \partial P) = (-1)^d f(\lambda, \partial P)$, равносильное следующим *уравнениям Дена-Соммервилля* (см., например, [3, 18])

$$h_k(P) = \sum_{i=0}^{k} g_i(P) = h_{d-k}(P), \quad k = 0, ..., \delta. \tag{13}$$

Для того, чтобы полностью охарактеризовать f-векторы симплициальных политопов нам понадобится следующее определение. Для любых натуральных чисел a и i существует единственное *биномиальное* i-*разложение числа* $a = \binom{a_i}{i} + \binom{a_{i-1}}{i-1} + ... + \binom{a_j}{j}$, где $a_i > a_{i-1} > ... > a_j \geq j \geq 1$. Тогда число $a^{<i>} = \binom{1+a_i}{1+i} + ... + \binom{1+a_j}{1+j}$ называется *i-й псевдостепенью числа a*. Положим $0^{<i>} = 0$.

Многочлен

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{d} h_k \lambda^k (1+\lambda)^{d-k} = \sum_{k=0}^{\delta} g_k (\lambda^k (1+\lambda)^{d+1-k} \ - \ \lambda^{d+1-k}(1+\lambda)^k) \qquad (14)$$

назовем реализуемым в классе $P^s(d,n)$, если существует политоп $P \in P^s(d,n)$ такой, что $f(\lambda) = f(\lambda, \partial P)$, и обозначим множество соответствующих векторов $h = (h_0, ..., h_d)$ через $H^s(d,n)$, а множество соответствующих векторов $g = (g_0, ..., g_\delta)-$ через $G^s(d,n)$.

Теорема 2 (g-теорема). Целочисленный вектор $g \in G^s(d,n)$ тогда и только тогда, когда выполняются два условия:

а) $g_k \geq 0,\ k = 1, ..., \delta, g_0 = 1$,

б) $g_{k+1} \leq g_k^{<k>},\ k = 1, ..., \delta - 1$.

Эта формулировка критерия была предложена в виде гипотезы П. Макмюлленом в 1971 г. [16] и доказана в 1980 г. (Л. Биллера и К. Ли - достаточность [10], Р. Стенли - необходимость [18]).

Определение: Последовательность целых чисел $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_l, ...)$, в которой $\gamma_0 = 1, \gamma_l > 0, \gamma_{l+1} = ... = 0$ и $0 \leq \gamma_{i+1} \leq \gamma_i^{<i>}$ при $i = 1, ..., l-1$, называется *M-вектором.* По существу g-теорема означает, что g-вектор образует M-последовательность, если его дополнить нулями.

Лемма 2. Если $P \in P^s(d,n)$, то

$$h_{d-k} = h_k = \gamma_{k,m} = |\{i/\sigma_i = k\}|,\ k = 1, ..., \delta.$$

3. Множество $V = \{v_1, ..., v_n\}$, где $v_j \in \mathbf{Q}^d$, назовём *(d,n)-точечной конфигурацией*, если $P = convV$ есть d-политоп. *Триангуляцией политопа P с узлами из множества V* назовём множество $T(V) = \{S_1, ..., S_t\}$ таких d-симплексов S_τ, для которых выполнены три следующие условия:

1)$\Gamma_0(S_\tau) \subseteq V$,

2)$\bigcup_{\tau=1}^{t} S_\tau = P$ и

3) пересечение любых двух d-симплексов является гранью каждого из них.

Множество $\triangle(T(V)) = \bigcup_{\tau=1}^{t} \Gamma(S_\tau)$ даёт ещё один пример с. к. Будем писать $\triangle$ вместо $\triangle(T(V))$, если это не приводит к недоразумениям. При $k = -1, 0, ..., d$ обозначим через $\triangle_k = \bigcup_{\tau=1}^{t} \Gamma_k(S_\tau)$ множество k-мерных граней с. к. $\triangle$, через $\partial\triangle$ его граничный подкомплекс, положим $f_k(\triangle) = |\triangle_k|$, $f(\triangle) = (f_{-1}(\triangle), ..., f_d(\triangle))$ и определим многочлены $f(\lambda, \triangle)$, $f(\lambda, \partial\triangle)$ аналогично прежнему.

Пример 2. Пусть $Q = pyr_{v_0} P -$ пирамида с апексом v_0 и основанием $P = conv(v_1, ..., v_n)$ (см. пример 1), $T(V) = \{S_1, S_2, ..., S_t\}-$ триангуляция политопа P с узлами из $V = \{v_1, ..., v_n\}$ и $S'_\tau = pyr_{v_0} S_\tau$ $(\tau = 1, ..., t)$. Тогда $T(V') = \{S'_1, ..., S'_t\}$ $-$ триангуляция Q с узлами из $V' = \{v_0, v_1, ..., v_n\}$ и, если Δ и $\Delta'-$ соответствующие с. к., то $f(\lambda, \Delta') = (1+\lambda) f(\lambda, \Delta)$.

Попытки перенести результаты п. 2 на с. к. $\triangle(T(V))$ наталкиваются на серьезные трудности, главная из которых состоит в том, что $\triangle(T(V))$, вообще говоря, не является разворачиваемым [17]. Однако, в рассматриваемом случае свойство разворачиваемости удается заменить разбиваемостью.

Пусть $\triangle = \bigcup_{\tau=1}^{t} \Gamma(S_\tau)$ – с. к. и $S_1, S_2, ..., S_t$ – его фасеты (т. е. максимальные по включению элементы). Если для каждого $\tau = 1, ..., t$ в $\Gamma(S_\tau)$ можно указать такое J_τ, что

$$\Delta = \bigcup_{\tau=1}^{t} [J_\tau, S_\tau], \tag{15}$$

где объединение дизъюнктно, т. е. $[J_\tau, S_\tau] \bigcap [J_\sigma, S_\sigma] = \oslash$ при $\tau \neq \sigma$, то $\triangle$ называется *разбиваемым.*

Теорема 3 (П. Кляйншмидт и З. Смилански [13]). Для любой триангуляции $T(V)$ любой точечной конфигурации V симплициальный комплекс $\triangle(T(V))$ разбиваем.

Следствие 1. Если для $\Delta = \Delta(T(V))$ выполнено соотношение (15), то

$$f(\lambda, \triangle) = \sum_{k=0}^{d+1} \gamma_k(\triangle)\lambda^k(1+\lambda)^{d+1-k}, \tag{16}$$

где $\gamma_k(\triangle) = |\{\tau/dimJ_\tau = k-1\}|$– целое неотрицательное число, не зависящее от порядка следования симплексов $S_1, ..., S_t$, $\gamma_0(\triangle) = 1$ и $\gamma_{d+1}(\triangle) = 0$.

Из определения триангуляции следует, что любая $F \in \triangle_{d-1}$ не может принадлежать трём различным симплексам, но обязана принадлежать хотя бы одному. Если она принадлежит единственному симплексу, то назовём её *граничной*, а если двум, то – *внутренней.* Пусть F_i граничная при $i = 1, 2, ..., m_1$, и внутренняя при $i = m_1+1, ..., m_1+m_2$. Тогда $\partial\triangle = \bigcup_{i=1}^{m_1} \Gamma(F_i)$, а для остальных граней из $\triangle$ несложно доказать, что

$$\triangle \setminus \partial\triangle = \bigcup_{\tau=1}^{t} [\overline{J_\tau}, S_\tau], \tag{17}$$

где объединение дизъюнктно и $\overline{J_\tau}$– множество вершин симплекса S_τ, дополнительное к J_τ. Тогда из теоремы 3 следует, что

$$f(\lambda, \triangle \setminus \partial\triangle) = \sum_{k=0}^{d+1} \gamma_k(\triangle)\lambda^{d+1-k}(1+\lambda)^k, \tag{18}$$

$$f(\lambda, \partial\triangle) = \sum_{k=0}^{\delta} (\gamma_k(\triangle) - \gamma_{d+1-k}(\triangle))(\lambda^k(1+\lambda)^{d+1-k} - \lambda^{d+1-k}(1+\lambda)^k). \tag{19}$$

Далее, воспользовавшись Леммой 2, несложно получить

Следствие 2. Если $P \in P^s(d, n)$, $\Delta = \Delta(T(V))$, $\Gamma_0(\Delta) = \Gamma_0(P)$, то $g_k(P) = \gamma_k(\Delta) - \gamma_{d+1-k}(\Delta)$, $k = 1, ..., \delta$.

Будем считать, что $\gamma_k(\Delta) = 0$, если $k \notin \{0, 1, ..., d\}$ и при $l = 0, 1, ...$ положим $g_{kl}(\Delta) = \gamma_k(\Delta) - \gamma_{d+1+l-k}(\Delta)$. Воспользовавшись конструкцией из примера 2, получаем следующее утверждение.

Лемма 3. Если $P \in P^s(d, n)$, $\Delta = \Delta(T(V))$, $\Gamma_0(\Delta) = \Gamma_0(P)$, то последовательность $g_l = (g_{0l}, g_{1,l}, ...)$ является M-последовательностью.

Рассмотрим множество всевозможных триангуляций $T(V)$ всевозможных (d, n)-точечных конфигураций и обозначим множество соответствующих многочленов $f(\lambda, \Delta)$

через $F(\lambda, d, n)$, а векторов $\gamma(\triangle) = (\gamma_0(\triangle), ..., \gamma_d(\triangle))$ – через $H(d, n)$. Назовем их (d, n)-реализуемыми. Назовем многочлен $f(\lambda)$ (и соответствующий ему вектор γ) *реализуемым*, если существуют d и n такие, что $f(\lambda) \in F(\lambda, d, n)$, и *нереализуемым* в противном случае.

В теории линейных неравенств [5, 19] известен алгоритм (назовем его алгоритмом Фурье-Моцкина), позволяющий переходить от описания политопа в виде (1) к виду (2) и обратно. В [8] он модифицирован так, чтобы на каждом шаге получалась триангуляция $T_n = T(v_1, ..., v_n)$, и соответствующие ей с. к. $\triangle_n$ и $\partial\triangle_n = \bigcup_{i=1}^m \Gamma(F_i)$. Появление новой точки v_{n+1} дает линейную развертку с. к. $\partial\triangle_n = \bigcup_{i=1}^m [H_i, F_i]$. Положим $m_- = |I_-|$, $m_+ = |I_+|$, $\triangle_n^- = \bigcup_{i=1}^{m_-}[H_i, F_i]$ $\triangle_n^+ = \bigcup_{i=1}^{m_+}[H_{m+1-i}, F_{m+1-i}]$. Тогда, добавляя к развертке $S_1, ..., S_t$ с. к. Δ_n развертку с. к. $pyr\Delta_n^- = \bigcup_{i\in I_-} pyrF_i$, где $pyrF_i$ – пирамида с основанием F_i и апексом v_{n+1}, получаем продолжение развертки с. к. Δ_{n+1}. Назовём такие триангуляции *ФМ-триангуляциями*, а соответствующие им γ-векторы ΦM*-реализуемыми.* Ясно, что с. к. $\triangle_{n+1}$, $\triangle_n^-$, $\triangle_n^+$ являются линейно разворачиваемыми (ср. [14]),

$$f(\lambda, \Delta_{n+1}) = f(\lambda, \Delta_n) + \lambda f(\lambda, \Delta_n^-). \tag{20}$$

Несложно проверить также, что

$$f(\lambda, \partial\Delta_{n+1}) = f(\lambda, \Delta_n) \ + \ \lambda f(\lambda, \partial\Delta_n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor} (\gamma_k(\Delta) \ - \ \gamma_{d+2-k}(\Delta))(\lambda^k(1+\lambda)^{d+2-k} \ - \ \lambda^{d+2-k}(1+\lambda)^k). \tag{21}$$

Множество ФМ-реализуемых γ из $H(d, n)$ обозначим через *ФМ (d, n)*.

Если применять алгоритм из [8] к циклическим многогранникам (см. о них, например, в [2-4, 12, 19]), то получается индуктивная (по d и n) процедура получения γ-векторов, из которой следует

Теорема 4 Если $\gamma_{k+1} \le \gamma_k^{<k>} (k = 1, ..., m-1)$ и $\gamma_m \ne 0, \gamma_{m+1} = 0$ то $\gamma \in \Phi M(2m + 1, \gamma_1 + 2m)$

Основным результатом предлагаемого доклада является неоднократно (см [7] и имеющиеся там ссылки) выдвигаемая автором как гипотеза

Теорема 5. Множества $H(d, n)$ и $\Phi M(d, n)$ совпадают.

Теорема 6. *Для того, чтобы целочисленный вектор* $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots)$ *принадлежал* $H(d, n)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*
1. $\gamma_0 = 1$, $\gamma_i \ge 0$ *при* $i = 1, \dots, d$ *и* $\gamma_k = 0$ *при целых* $k \ge d + 1$,
2. $\gamma_{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor} \ge \gamma_{\lfloor \frac{d+1}{2} \rfloor + 1} \ge \dots \ge \gamma_d$ *и* $\gamma_i - \gamma_{d+1-i} \ge 0$ *при* $i = 1, \dots, \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$,
3. $\gamma_{i+1} - \gamma_{j-i} \le (\gamma_i - \gamma_{j+1-i})^{<i>}$ *при* $j = d, \dots, 2d$ *и* $i = 1, \dots, \lfloor \frac{j}{2} \rfloor - 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-00545а)

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г. Теория решёток. М.: Наука, 1984.

2. Брёнстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников. М. : Мир, 1988.

3. Бухштабер В. М., Панов Т. Е. Торические действия в топологии и комбинаторике М.: МЦНМО, 2004.

4. Емеличев В. А., Ковалёв М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.

5. Черников С. Н. Линейные неравенства. М.: Наука 1968.

6. Шевченко В. Н. О разбиении выпуклого политопа на симплексы без новых вершин // Известия ВУЗ. Математика. 1997, № 12 (427), 89–99.

7. Шевченко В. Н. Триангуляции выпуклых многогранников и их булевы функции. /Математические вопросы кибернетики. Вып. 16: Сборник статей.-М.: Физматлит, 2007, 43 – 56.

8. Шевченко В. Н. Груздев Д. В. Модификация алгоритма Фурье-Моцкина для построения триангуляции и её звёздной развёртки. // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 2006. т.13, № 1. 77–94.

9. Barnette D. The minimum number of vertices of a simple politope // Israel J. Math. 1971 V.10 P. 121–125.

10. Billera L., Lee C. Sufficiency of Mc Mullens conditions for f-vectors of simplicial polytopes // Bull. AMS. 1980, V.2, N1, 181–185.

11. Bruggesser H., Mani P. Shellable decompositions of cells and spheres. // Math Scand, 1971, 29, 197–205.

12. Grunbaum B. Convex polytopes. N-Y: Wiley and Sons, 1967.

13. Kleinschmidt P., Smilansky Z. New results for simplicial spherical polytopes / Discrete and Computation Geometry. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, V.6, AMS, 1991, 187–197.

14. Lee C. Regular triangulations of convex politopes // Applied Geometry and Discrete Mathematics - The Victor Klee Festschrift. DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. 1991. V.4 AMS P. 443–456.

15. F. S. Macaulay, Some Properties of Enumeration in the Theory of Modular Systems, Proc. London Math. Soc. 26 (1927), 531–555.

16. McMullen P. The numbers of faces of simplicial polytops //Israel J.Math. 1971. V.9 P. 559–570.

17. Rudin M. E. An unshellable triangulation of a tetrahedron // Bulletin AMS. 1958. V. 64, 90–91.

18. Stanley R. The number of faces of simplicial convex polytope // Advances in Math. 1980, V.35, N.3, 236–238.

19. Ziegler G. Lectures on polytopes. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

Шевченко Валерий Николаевич, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, пр. Гагарина, 23, г. Нижний Новгород, 603950, Россия, тел. (8-831) 462-33-60, e-mail: shev@uic.nnov.ru

МАТРИЧНЫЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ В ПОСТРОЕНИИ КРИТЕРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ

Н.Н. Астафьев

Для матриц $A = (a_{ij})_{m\times n}$, c (строка), b (колонка) выпишем пару двойственных задач в матричной записи

$$\max\{c\cdot x|A\cdot x\leq b\} \qquad \min\{u\cdot b|uA=c \;\; u\geq 0\}.$$

Рассмотрим матрицы $x\cdot\, = (x_i c_j)_{n\times n}$, $b\cdot u = (b_i u_j)_{m\times m}$. Тогда выписанная пара задач может быть записана в виде

$$\max\{tr(x\cdot c)|Ax\leq b\} \qquad \min\{tr(b\cdot u)|uA=c \;\; u\geq 0\}.$$

Известно, что $tr(M)$ совпадает с сумой собственных чисел матрицы M. Очевидно, что для матрицы $x\cdot c$ одно собственное число равно $c\cdot x$ остальные нулевые, аналогично для матрицы $b\cdot u$ — одно собственное число $u\cdot b$ и остальные нулевые. Отсюда из теоремы двойственности получаем характеристику оптимальности в терминах собственных чисел выписанных матриц. На основе введенных матриц ниже будут сформулированы новые задачи. Для матрицы $x\cdot c$ вычислим для i строки $D_i = \sum_{j=1}^n x_i c_j = x_i\sum_{j=1}^n c_j$ — стоимость продукции x_i по суммарной цене и вычислим для i-колонки $K_i = \sum_{j=1}^n x_j c_i$ — стоимость всех видов продукции по единой цене c_i. Обозначим через $\triangle(x_i) = D_i - K_i \;\; (i\in\overline{1,n}$ и сформулируем задачу: $\min\{\sum_{i=1}^n|\triangle_i(x)|\,|Ax\leq b\}$, которая обычным образом сводится к задаче линейного программирования. Для матрицы $b\cdot u$, аналогично, вводятся $D_i^* = b_i\sum_{j=1}^m u_j$ — стоимость всех ресурсов по суммарной цене $\triangle_i^*(x) = D_i^* - K_i^* \;\; i\in\overline{1,m}$ и формулируется задача $\min\{\sum_{j=1}^m|\triangle_i^*(x)|\,|uA=c \;\; u\geq 0\}$, которая так же сводится к задаче линейного программирования. Таким образом формируются два критерия оптимизации (матричные) по матрицам $x\cdot c$; $b\cdot u$.

Рассмотрим классическую транспортную задачу

$$\min\left\{\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}|\sum_{i=1}^m x_{ij}=a_i \qquad i\in\overline{1,m} \;\; \sum_{i=1}^m x_{ij}=b_j \qquad i\in\overline{1,n} \;\; x_{ij}\geq 0\right\}.$$

Обозначим $C = (c_{ij})_{m\times n}$, $X = (x_{ij})_{m\times n}$, $e^{(n)} = (1 \;\ldots\; 1_n)^T$ $e^m = (1 \;\ldots\; 1_m)$ $a = (a_1 \;\ldots\; a_m)^T$ $b = (b_1 \;\ldots\; b_n)$. Тогда транспортная задача в матричном виде запишется так:

$$\min\{tr(C\cdot X^T)|Xe^n = a, e^{(m)}X = b, \;\; X\geq 0\}.$$

Здесь матрица $C\cdot X^T\geq 0$ (или $C^T\cdot X$) квадратная и допускает оптимизацию по собственным числам Фробениуса.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (10-01-00273 и НШ (4008.2010).

Астафьев Николай Николаевич, Институт математики и механики УрО РАН, ул. С. Ковалевской, 16. Екатеринбург, 620219, Россия. тел. (343) 375-34-28,
e-mail: astnn@imm.uran.ru

РЕШЕНИЕ ОДНОГО ТИПА ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ ПУТЕМ РЕДУКЦИИ К СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

З. Р. Габидуллина

Доказанная в [1] теорема сильной отделимости нуля евклидова пространства R_n от выпуклого многогранника

$$L = \Big\{ z \in R_n : z = \sum_{i\in I} \alpha_i z_i,\ \sum_{i \in I} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \ge 0,\ i \in I = \{1, 2, \dots m\} \Big\}$$

имеет много различных приложений. К числу таких приложений относится ее применение для установления взаимосвязи решений задачи сильного отделения нуля пространства от многогранника L (и том числе, решений задачи проектирования нуля пространства на многогранник L) с решениями следующего конечномерного вариационного неравенства:

$$\langle y, z - y \rangle \ge 0 \ \ \forall z \in L. \tag{1}$$

Математическое обоснование данной взаимозависимости решений осуществляется на основании результатов, полученных в [1]–[3].

Здесь изучается возможность решения вариационнго неравенства (1) путем сведения к решению следующей системы линейных неравенств:

$$\langle y, z_i \rangle \ge 1,\ i = \overline{1, m}. \tag{2}$$

Пусть $\hat{y}$ – решение системы (2), тогда в [1] доказано, что $\bar{y} = \hat{y}/\|\hat{y}\|^2 \in \Omega^L = \Big\{ y \in R_n : \langle z_i, y \rangle \ge \|y\|^2 \ \ \forall i \in I \Big\}$. Тогда вектор $\bar{y}$ является решением неравенства (1). В [1] также доказано, что если система неравенств (2) несовместна, то $\Omega^L = \{\mathbf{0}\}$, где $\mathbf{0}$ –нуль евклидова пространства. А это применительно к исследуемой задаче означает, что вариационное неравенство (1) имеет единственное решение $y = \mathbf{0}$.

Что касается методов решения системы (2), то она может быть решена либо алгебраическими методами; либо путем сведения к различным оптимизационным задачам, например, к задаче минимизации функции $\|y\|^2$ на области, заданной системой (2). При этом процесс оптимизации можно не доводить до оптимального плана, его можно остановить в любой точке допустимого множества задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габидуллина З.Р. Теорема отделимости выпуклого многогранника от нуля пространства и ее приложения в оптимизации. Известия Вузов. Математика, N12, сс.21–26, 2006 (Engl.trasl. Russian Mathematics (Iz.VUZ) Vol.50, N.12, pp.18–23, 2006).
2. Габидуллина З.Р. Конечные методы нахождения проекции нуля пространства на выпуклый многогранник. Тезисы конференции "Метематическое программирование и приложения". Екатеринбург: УрО РАН, 2007.
3. Габидуллина З.Р. Взаимосвязь решений конечномерного вариационного неравенства и задачи сильного отделения нуля пространства от выпуклого многогранника. Тезисы III Международной конференции "Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования". Воронеж, 2009.

Габидуллина Зульфия Равилевна. Казанский государственный университет, ул. Кремлевская, 18, Казань, 420008, Россия, тел.: (843) 231-54-53,
e-mail: zgabid@mail.ru

ВЫПУКЛЫЕ ЗАДАЧИ БЕЗУСЛОВНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ДВОЙСТВЕННОСТЬ

А. И. Голиков

Формально задачи безусловной минимизации не имеют функцию Лагранжа и, следовательно, для них нельзя непосредственно построить двойственную задачу. Тем не менее с помощью дополнительных переменных можно ввести искусственные ограничения и получить эквивалентную задачу нелинейного программирования, для которой уже стандартным образом определяется двойственная задача. Существует класс таких задач оптимизации, для которых взаимно двойственные задачи являются задачами безусловной оптимизации и решение любой из этих двух задач выражается через решение другой. Это задачи квадратичного программирования, которые возникают при регуляризации систем линейных уравнений и/или неравенств. Так как взаимно двойственные задачи отличаются размерностью, то естественно решать задачу безусловной оптимизации меньшей размерности. Приведем один типичный результат, возникающий при регуляризации системы уравнений с неотрицательными неизвестными и в svm-методе распознавания образов.

Теорема 1. *При любом $\varepsilon > 0$ решение $x(\varepsilon)$ задачи*

$$F(x(\varepsilon)) = \min_{x \in R^n_+} \frac{1}{2}\{\|b - Ax\|^2 + \varepsilon\|x\|^2\} \tag{1}$$

и решение $u(\varepsilon)$ задачи

$$H(u(\varepsilon)) = \max_{u \in R^m} \{b^\top u - \frac{1}{2\varepsilon}\|(A^\top u)_+\|^2 - \frac{1}{2}\|u\|^2\} \tag{2}$$

связаны между собой соотношениями

$$x(\varepsilon) = \frac{1}{2}(A^\top u(\varepsilon))_+,$$
$$u(\varepsilon) = b - Ax(\varepsilon)$$

и имеет место $F(x(\varepsilon)) = H(u(\varepsilon))$.

Из теоремы следует, что если в матрице A размерности $m \times n$ число строк $m < n$, то вместо задачи минимизации (1) целесообразно решать двойственную задачу (2), которая является вогнутой кусочно-квадратичной задачей безусловной максимизации. Для решения (2) весьма эффективен обобщенный метод Ньютона, который позволяет эффективно решать задачи при $n \approx 10^6$ и $m \approx 10^4$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 08-01-00619), гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект № НШ - 4096.2010.1) и программы ОМН-3.

Голиков Александр Ильич, ВЦ РАН, ул. Вавилова, д.40, Москва, 119333, Россия, тел. (8-499)135-00-20, факс (8-499)135-61-59, e-mail:gol@ccas.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАВНОВЕСИЯ, ОБЛАДАЮЩЕЙ ВЫПУКЛОЙ СТРУКТУРОЙ

Е. Г. Гольштейн

Пусть $G \subset \mathbf{E}$ — непустой выпуклый компакт, $\mathbf{E}$ — евклидово пространство, функция $\Phi(u, w)$ задана на $G \times G$. Рассмотрим задачу $\mathcal{P}(\Phi, G)$ определения такой точки $u^* \in G$, что $\Phi(u^*, u^*) = \max_{u \in G} \Phi(u, u^*)$. Задача отыскания точки Нэша произвольной игры многих лиц является частным случаем задачи $\mathcal{P}(\Phi, G)$.

Условимся говорить, что задача $\mathcal{P}(\Phi, G)$ *обладает выпуклой структурой*, если функция Φ непрерывна на $G \times G$, вогнута и супердифференцируема по $u \in G$ при любом фиксированном $w \in G$, $\partial_u \Phi(u, v) \cap C_R \neq \emptyset \; \forall (u, w) \in G \times G$ при некотором $R > 0$, где $C_R \subset \mathbf{E}$ — шар радиуса R с центром в нуле, точечно-множественное отображение T_Φ точек $u \in G$ в подмножества $\mathbf{E}$, задаваемое соотношением $T_\Phi(u) = -\partial_u \Phi(u, u)$, $u \in G$, является монотонным.

Задача $\mathcal{P}(\Phi, G)$, обладающая выпуклой структурой, не только разрешима, но и допускает эффективное решение на основе методов, которые разработаны для численного анализа вариационных неравенств, определяемых монотонными отображениями.

Теорема 1. Пусть функция Φ удовлетворяет условию Липшица на $G \times G$, вогнута по $u \in G$ при любом фиксированном $w \in G$, выпукла по $w \in G$ при любом фиксированном $u \in G$, причем функция $\Phi(u, u)$, $u \in G$, является вогнутой. В таком случае задача $\mathcal{P}(\Phi, G)$ обладает выпуклой структурой.

Рассмотрим антагонистическую игру $\Gamma(\Phi, G)$, в которой первый игрок выбирает стратегию $u \in G$, второй игрок — стратегию $w \in G$, а выигрыш первого игрока задается функцией $\Phi(u, w) - \Phi(w, w)$, $(u, w) \in G \times G$.

Теорема 2. Пусть функция Φ удовлетворяет требованиям, перечисленным в формулировке теоремы 1. В таком случае седловое множество игры $\Gamma(\Phi, G)$ имеет вид $U^* \times U^*$, где U^* — множество решений задачи $\mathcal{P}(\Phi, G)$, цена игры $\Gamma(\Phi, G)$ равно нулю.

Работа поддержана РФФИ, проект № 09-01-00516.

Гольштейн Евгений Григорьевич, ЦЭМИ РАН, Нахимовский проспект, 47, Москва, 117418, Россия, тел. (499) 724-24-63, факс (495) 718-96-15, e-mail:golshtn@cemi.rssi.ru

МАТРИЧНАЯ КОРРЕКЦИЯ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. И. Ерохин

Рассмотрим двойственную пару задач линейного программирования (ЛП) вида

$$\begin{array}{l} L:\ Ax = b, x \geq 0, c^\top x \to \max, \\ L^*: u^\top A \geq c^\top, b^\top u \to \min, \end{array} \tag{1}$$

С (1) естественным образом связана система линейных уравнений и неравенств

$$\begin{cases} Ax = b, x \geq 0, \\ u^\top A \geq c^\top, \end{cases} \tag{2}$$

совместность которой в силу теории двойственности необходима и достаточна для собственности задач L, L^*.

Рассмотрим **обратную задачу** $\mathbf{Z}$ следующего вида: *"При заданных векторах x, c, b, u, где $x \neq 0, u \neq 0, x \geq 0$, найти матрицу A, являющуюся решением системы* (2)*"*. Решение задачи $\mathbf{Z}$ и проблемы, обратной к (1), предоставляет следующая

Теорема. *Задача $\mathbf{Z}$ разрешима тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$b^\top u \geq c^\top x. \tag{3}$$

Решение задачи $\mathbf{Z}$ имеет вид $A = \hat{A} + \Delta A$, где

$$\hat{A} = \frac{bx^\top}{x^\top x} + \frac{u\tilde{c}^\top}{u^\top u} - \left(b^\top u\right) \cdot \frac{ux^\top}{u^\top u \cdot x^\top x};\ \tilde{c} = \underset{q^\top x = b^\top u,\ q \geq c}{\operatorname{argmin}} \left\{q^\top q\right\};\ \Delta A \left| u^\mathrm{T} \Delta A = 0,\ \Delta A x = 0 \right. .$$

Матрица $\hat{A}$ является единственным решением задачи $\mathbf{Z}$ с минимальной евклидовой нормой, а для евклидовых норм векторов и матриц справедливы соотношения

$$\|A\|^2 = \left\|\hat{A}\right\|^2 + \|\Delta A\|^2,\ \left\|\hat{A}\right\|^2 = \frac{\|b\|^2}{\|x\|^2} + \frac{\|\tilde{c}\|^2}{\|u\|^2} - \frac{\left(b^\top u\right)^2}{\|x\|^2 \cdot \|u\|^2}.$$

Если условие (3) выполняется как равенство, то в этом и только в этом случае описанная выше матрица A (и только она) обеспечивает принадлежность заданных векторов x, u множеству решений задач L и L^* соответственно.

Задача $\mathbf{Z}$ и приведенная выше теорема, являясь дальнейшим развитием результатов работы [1], оказываются удобными инструментами для численного (а в некоторых случаях и аналитического) решения разнообразных обратных задач и проблем матричной коррекции собственных или несобственных задач L и L^*, поскольку позволяют сводить указанные проблемы, сформулированные в пространстве элементов матрицы A, к дробно-квадратичным задачам математического программирования в пространстве координат векторов x и u.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерохин В.И. Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 4. С. 587–601.

Ерохин Владимир Иванович, СПбГТИ(ТУ), Московский пр., 26, Санкт-Петербург, 190013, Россия, тел. (812) 316-22-61, факс(812) 316-22-61, e-mail:erohin_v_i@mail.ru

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ДВУХШАГОВОГО ЭКСТРАГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

А. В. Зыкина, Д. Н. Запорожец, Н. В. Меленьчук

Множество интересных с точки зрения практики и вместе с тем сложных задач сводятся к вариационным неравенствам. Градиентные методы при решении вариационных неравенств применимы, однако, они сходятся лишь при наличии жестких предположений. Ослабить эти условия позволяют экстраполяционные методы [1-3].

В данной работе тестируется новый экстраградиентный метод [3], заключающийся в том, что из исходной точки делается два пробных шага по градиенту и значение градиента во второй точке используется в качестве направления движения из исходной точки. Двухшаговый экстраградиентный метод для решения вариационного неравенства $(H(z^*), v - z^*) \geq 0, \ \forall\, v \in \Omega$ задается следующими рекуррентными соотношениями

$$\overline{z}^k = P_\Omega(z^k - \alpha H(z^k)), \quad \widetilde{z}^k = P_\Omega(\overline{z}^k - \alpha H(\overline{z}^k)), \quad z^{k+1} = P_\Omega(z^k - \alpha H(\widetilde{z}^k)),$$

где выпуклое, замкнутое множество $\Omega \subset R^l$, оператор $H : \Omega \to \Omega$, $\alpha > 0$ – числовой параметр, P_Ω – оператор проектирования на множество Ω.

Полученные в ходе численных исследований результаты отвечают главной цели работы: доказательство эффективности двухшагового экстраградиентного метода, сходящегося за меньшее число вычислений. Важно отметить, что каждая итерация двухшагового метода в полтора раза больше по вычислениям в сравнении со стандартным экстраградиентным [1], что не мешает получить решение вариационного неравенства новым методом, затратив в среднем в два раза меньше вычислений, чем стандартным экстраградиентным.

Работа поддержана аналитической ведомственной целевой программой «Развитие научного потенциала высшей школы», код проекта 2.1.1/2763.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корпелевич Г.М. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач. // Экономика и математические методы. 1976. Т. 12, №4. С. 747–756.

2. Зыкина А.В. Обратная дополнительность в модели управления ресурсами // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 11. С. 1968–1978.

3. Зыкина А.В., Меленьчук Н.В. Двухшаговый экстраградиентный метод для задачи управления ресурсами // Моделирование и анализ информационных систем. 2010. Т. 17, № 1. С. 64–73.

Зыкина Анна Владимировна, Запорожец Дмитрий Николаевич, Меленьчук Николай Владимирович, Омский государственный технический университет, пр. Мира 11, Омск, 644050, Россия, тел. (3812) 65-22-08, e-mail: avzykina@mail.ru

АЛГОРИТМ ВНУТРЕННИХ ТОЧЕК С КВАДРАТИЧНЫМИ АППРОКСИМАЦИЯМИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

С. М. Пержабинский

Рассмотрим задачу выпуклого программирования

$$f_0(x) \to \min_{x\in X},\ X = \{x \in R^n :\ \overline{x} \geq x \geq \underline{x}\ ,\ \ f_i(x) \leq 0,\ i = 1,\ \ldots,\ m\} \tag{1}$$

здесь функции f_i дважды дифференцируемые. В докладе приводится алгоритм внутренних точек с квадратичными аппроксимациями для решения задачи (1). Особенность этого алгоритма состоит в том, что при нахождении поиска направления корректировки учитываются не только линейные, но и квадратичные составляющие аппроксимаций целевой функции и функций-ограничений с весами, равными оценкам множителей Лагранжа ограничений исходной задачи (1), вычисленным на предыдущей итерации. Излагаются результаты сравнения метода внутренних точек с квадратичными аппроксимациями с методом внутренних точек, основывающимся на линеаризации [1]. Экспериментальные расчеты показали, что нахождение оптимального решения задачи (1) алгоритмом внутренних точек с квадратичными аппроксимациями происходит за меньшее время, чем методом внутренних точек, использующим только линейные аппроксимации.

В докладе рассматривается модель оценки дефицита мощности электроэнергетической системы с квадратичными потерями в линиях электропередач [2]. Данная модель используется при анализе надежности электроэнергетических систем (ЭЭС). При помощи метода Монте-Карло многократно "разыгрываются" случайные состояния ЭСС, для которых затем необходимо определить дефицит мощности в системе. Поэтому особую актуальность приобретает сокращение времени вычислений на стадии оценки дефицита моощности. Модель оценки дефицита мощности описывается задачей невыпуклого нелинейного программирования. Приводится способ преобразования исходной невыпуклой задачи к виду (1). В докладе представлены результаты применения алгоритма внутренних точек, основывающегося на линеаризации, и алгоритма внутренних точек с квадратичными аппроксимациями для нахождения минимального дефицита мощности ЭЭС.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00306а.

ЛИТЕРАТУРА

1. И.И. Дикин, В.И. Зоркальцев Итеративное решение задач математического программирования (алгоритмы метода внутренних точек). Новосибирск: Наука, 1980.

2. В.И. Зоркальцев, Г.Ф. Ковалев, Л.М. Лебедева Модели оценки дефицита мощности электроэнергетических систем./ Препринт. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2000, с.17–22.

Пержабинский Сергей Михайлович, Институт систем энергетики им Л.А. Мелентьева СО РАН, ул. Лермонтова, д. 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (395-2) 42-97-64, факс (3952) 42-67-96, e-mail:sergey_per85@mail.ru

БАРЬЕРНЫЕ ФУНКЦИИ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 1–ГО РОДА

Л. Д. Попов

Рассмотрим несобственную (некорректную, противоречивую, не имеющую решения в обычном смысле [1]) задачу математического программирования 1-го рода

$$\sup\{f_0(x):\ f_j(x)\le 0\ (j=1,...,m),\ x\ge 0,\ x\in \mathbf{R}^n\}. \tag{1}$$

Пусть функции $-f_0(x),\ f_1(x),\ \ldots,\ f_m(x)$ всюду конечны, выпуклы и дважды непрерывно дифференцируемы. Введем параметры коррекции $u=(u_1,\ldots,u_m)$ и обозначим

$$M(u)=\{x:\ f_j(x)\le u_j\ (j=1,...,m),\ x\ge 0,\ x\in \mathbf{R}^n\}.$$

Напомним, что задача называется несобственной 1-го рода, если ее можно превратить в обычную, собственную, разрешимую путем коррекции одних лишь правых частей ее ограничений (общего вида). В докладе обсуждаются условия, при которых точки максимума $(\bar x_\epsilon, \bar u_\epsilon)$ расширенной штрафной функции

$$B_\epsilon(x,u)=f_0(x)+\epsilon\sum_{j=1}^{m}\ln(u_j-f_j(x))+\epsilon\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)-\frac{1}{2\epsilon}||u||^2,\quad \epsilon>0, \tag{2}$$

существуют и асимптотически сходятся (при $\epsilon\to+0$) к обобщенному решению задачи (1) в следующем смысле:

$$\bar u_\epsilon \to \bar u = \operatorname{argmin}\{||u||:\ M(u)\ne\emptyset\}\ge 0,$$

$$f_0(\bar x_\epsilon)\to \sup\{f_0(x):\ f_j(x)\le \bar u_j+\epsilon\ (j=1,...,m),\ x\ge 0,\ x\in \mathbf{R}^n\},$$

$$\max\{0, f_j(\bar x_\epsilon)-\bar u_j\}\to 0\ \ (j=1,...,m).$$

Подчеркнем, что при наших предположениях функция (2) является гладкой, и при ее максимизации можно применять методы второго порядка.

Работа поддержана РФФИ (грант 10-01-00273) и Программой государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ–4008.2010.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. И.И. Еремин, Вл.Д. Мазуров, Н.Н. Астафьев. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983.

Попов Леонид Денисович, Институт математики и механики Уральского Отделения РАН, ул.С.Ковалевской, 16, г. Екатеринбург, 620099, Россия, тел. 8(343) 375-34-23, факс 8(343) 375-25-81, e-mail: popld@imm.uran.ru.ru

ОБ ОДНОМ ОБЩЕМ МЕТОДЕ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. Д. Скарин

Рассматривается задача выпуклого программирования (ВП)

$$\min\{f_0(x) : x \in X\}, \tag{1}$$

где $X = \{x : f(x) \le 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — выпуклые на $\mathbb{R}^n$ функции $(i = 0, 1, \dots, m)$. Предполагается, что (1) может быть несобственной задачей ВП [1].

В зависимости от пустоты или непустоты множеств X и $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+ : \inf\limits_x \{L(x, \lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x))\} > -\infty\}$ различают [1] три рода несобственности задач ВП:

$$1)\ X = \varnothing,\ \Lambda \ne \varnothing; \qquad 2)\ X \ne \varnothing,\ \Lambda = \varnothing; \qquad 3)\ X = \varnothing,\ \Lambda = \varnothing.$$

Наиболее исследованы задачи 1-го рода [1,2]. Они характеризуются тем, что после коррекции системы ограничений задачи (1) по правым частям (т.е. после замены в (1) $X = \varnothing$ на $X_\xi = \{x : f(x) \le \xi\}$, $\xi \ge 0$, $X_\xi \ne \varnothing$) в задаче (1) будет $\inf f_0(x) > -\infty$. К задачам 2-го рода относятся задачи ВП, у которых $\inf\limits_{x \in X} f_0(x) = -\infty$. Интерес представляет проблема построения таких универсальных методов коррекции несобственных задач, которые бы не зависили от характера несобственности исходной задачи.

Предлагаемый в работе метод характеризуется задачей (P^r_σ) нахождения седловых точек функции

$$L_\sigma(x, \lambda) = L(x, \lambda) + \alpha \, \|x\|^2 - \beta \, \|\lambda\|^2, \quad \sigma = [\alpha, \beta] > 0,$$

в области $S_r \times \mathbb{R}^m_+$, где $S_r = \{x : \|x\|^2 \le r\}$, $r > 0$. Показано, что если множество X в задаче (1) непусто, то (P^r_σ) аппроксимирует задачу

$$\min\{f_0(x) : x \in X \cap S_r\}, \tag{2}$$

в противном случае — задачу

$$\min\{f_0(x) : x \in X_{\bar{\xi}_r} \cap S_r\}, \tag{3}$$

где $\bar{\xi}_r = \arg\min\{\|\xi\| : \xi \in E_r\}$, $E_r = \{\xi \in \mathbb{R}^m_+ : X_\xi \cap S_r \ne \varnothing\}$. Если (1) — разрешимая задача ВП, то при достаточно большом r задачи (1)–(3) совпадают.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 10-01-00273) и программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4008.2010.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. И.И. Еремин, В.Д. Мазуров, Н.Н. Астафьев. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983.
2. В.Д. Скарин. О методе регуляризации для противоречивых задач выпуклого программирования // Изв вузов. Математика, 1995. № 12. С. 81–88.

Скарин Владимир Дмитриевич, Институт математики и механики УрО РАН, ул. С.Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620219, Россия, тел. (343) 375-34-23, факс (343) 374-25-81, e-mail: skavd@imm.uran.ru

МИНИМИЗАЦИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ В n-МЕРНОМ ОКТАЭДРЕ

П. А. Чертищева

Рассматривается задача: найти

$$x^* = \operatorname{argmin} \{ f(x) : \ x \in D \} , \tag{1}$$

где $f(x)$ — положительно определенная квадратичная функция, а D — n-мерный октаэдр:

$$D = \left\{ x \in \mathbf{R}^n : \ \sum_{i=1}^{n} |x_i| \le \beta \right\} .$$

Данная задача является обобщением линейной задачи о наименьших квадратах [1] и появляется в различных приложениях. Предлагается свести данную задачу к задаче нахождения вектора минимальной длины в симплексе:

$$x^* = \operatorname{argmin} \left\{ \|x\|^2 : \ x \in \mathbf{S} \right\} , \tag{2}$$

где S — телесный симплекс в $\mathbf{R}^N$. Е.А. Нурминский [2] для решения задачи (2) предложил метод последовательных проекций на аффинные подпространства, содержащие подходящие грани исходного симплекса, монотонно уменьшающий длину соответствующей проекции.

Задача (1) сводится к задаче (2) путем замены переменных $x_i = x_i^+ - x_i^-$, $x_i^+ \ge 0$, $x_i^- \ge 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В результате получаем промежуточную $2n$-мерную задачу минимизации неотрицательно определенной квадратичной функции на симплексе. Доказано, что полуопределенность функции не влияет на линейную сходимость алгоритма решения задачи (2), доказанную в [3], и для нее можно использовать разработанные модификации метода последовательных проекций.

Предложенный алгоритм реализован на языке MATLAB. Результаты численных экспериментов показывают превосходство по времени работы данного алгоритма над стандартными средствами MATLAB для решения задач более общего типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1983.

2. Е.А. Нурминский. Метод последовательных проекций для решения задачи о наименьшем расстоянии для симплексов // Электронный журнал «Исследовано в России». 2004. Т. 160. С. 1732–1739.

3. Е.А. Нурминский. О сходимости метода подходящих аффинных подпространств для решения задачи о наимеьшем расстоянии до симплекса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45, № 11. С. 1991–1999.

Чертищева Полина Александровна, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, пр. Гагарина, 23, г. Нижний Новгород, 603950, Россия, тел. (8-831) 462-33-60, e-mail: chertpolina@mail.ru.

О СВЕДЕНИИ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ЦЛП К ЗАДАЧЕ О РАНЦЕ

С. И. Веселов

В работе рассмотрены способы уменьшения числа ограничений–равенств, задающих множество допустимых решений задачи целочисленного линейного программирования. Историю вопроса, известные методы и библиографию можно найти в [1]–[4].

Пусть A матрица размеров $m \times n$ с неотрицательными целыми элементами, $b = (b_1, .., b_m)^T$ – целый вектор, M – множество неотрицательных целых решений системы уравнений

$$Ax = b,$$

$f = (1, b_1 + 1, .., \prod_{i=1}^{m-1}(b_i + 1))$, N – множество неотрицательных целых решений уравнения

$$fAx = fb.$$

Теорема Если для данного вектора–строки c существует $y \in M$ такой, что $cy = max\{cx,\ x \in M\}$, то с полиномиальной трудоемкостью вычисляется c' такой, что $c'y = max\{c'x,\ x \in N\}$.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00545-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. К. Кравцов. Многогранники, графы, оптимизация. Москва.: Наука, 1981.

2. В. Н. Шевченко. Качественные вопросы целочисленного программирования. Москва.: Наука-Физматлит, 1995.

3. С. И. Веселов. Об агрегации линейных целочисленных уравнений. // Кибернетика. 1985. № 4. С. 58–60.

4. Д. А. Бабаев, С. С. Марданов. Последовательная и одновременная агрегация диофантовых уравнений. // Дискретная математика. 1995. Т. 7. Вып. 3. С. 69–80.

Веселов Сергей Иванович, Нижегородский госуниверситет, пр. Гагарина, 23, Нижний Новгород, 603950, Россия, тел. (8-831) 62-33-60, e-mail:veselov@vmk.unn.ru

К ЗАДАЧЕ О МАКСИМАЛЬНОЙ ВЗВЕШЕННОЙ КЛИКЕ КАК НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ

Т. В. Груздева

В работе рассматривается известная задача поиска максимальной взвешенной клики в графе $G(V,E,w)$ в непрерывной постановке в виде оптимизационной задачи с невыпуклым ограничением-неравенством с параметрами $\alpha \neq \gamma$ [1]:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i} x_i^2 \downarrow \min, \quad x \in S, \\ sign(\alpha-\gamma)\Phi_{\alpha,\gamma}(x) \leq 0, \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P})$$

где $S \triangleq \left\{x \geq 0 \,|\, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}$, $\Phi_{\alpha,\gamma}(x) \triangleq \left\langle x, [\alpha\overline{B} + \gamma(B+D)]x\right\rangle - \gamma\left\langle d, x\right\rangle$, $d \in I\!R^n$, $d_i = \frac{1}{w_i}$, $i = 1,\ldots,n$, $D = diag\{d_1,\ldots,d_n\}$ — диагональная матрица $(n \times n)$. Компоненты вектора $w \in I\!R^n_+$ задают веса вершин V графа G. Матрицы $B = ||b_{ij}||_{(n\times n)}$ и $\overline{B} = ||\overline{b_{ij}}||_{(n\times n)}$ построены по следующим правилам:

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2w_i} + \frac{1}{2w_j}, & \text{если } (i,j) \in E; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\overline{b_{ij}} = \begin{cases} \frac{1}{2w_i} + \frac{1}{2w_j}, & \text{если } i \neq j, \quad (i,j) \notin E; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для решения задачи $(\mathcal{P})$ применяется стратегия глобального поиска для задач с d.c. ограничением [2], основными этапами которой являются локальный поиск [1,3,4], решение линеаризованных задач и построение аппроксимаций поверхности уровня выпуклой функции.

Разработанный алгоритм протестирован [1] на задачах о максимальной взвешенной клике из библиотеки DIMACS и применен для нахождения оценок в задаче размещения с предпочтениями клиентов [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Груздева Т.В. Решение задачи о клике сведением к задаче с d.c. ограничением. // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т. 15. № 6. С. 20–34.

2. Стрекаловский А.С. Минимизирующие последовательности в задачах с d.c. ограничениями. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. № 3. С. 435–447.

3. Kuznetsova A.A., Strekalovsky A.S. On solving the maximum clique problem. // Journal of Global Optimization. 2001. V. 21. № 3. P. 265–288.

4. Груздева Т.В., Стрекаловский А.С. Локальный поиск в задачах с невыпуклыми ограничениями. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 3. С. 397–413.

5. Васильев И.Л., Климентова К.Б., Кочетов Ю.А. Новые нижние оценки для задачи размещения с предпочтениями клиентов. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т.49. № 6. С. 1055–1066.

Груздева Татьяна Владимировна, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, ул. Лермонтова 134, Иркутск, 664033, Россия, тел. (8-395-2) 45-30-82, факс (8-395-2) 51-16-16, e-mail: gruzdeva@icc.ru

НЕКОТОРЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНО РАЗРЕШИМЫЕ В СРЕДНЕМ КЛАССЫ ЗАДАЧ ОБ УПАКОВКЕ МНОЖЕСТВА

Н. Г. Гофман, Л. А. Заозерская

Рассматривается задача об упаковке множества в следующей постановке:

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ \mid \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1, i = 1, ..., m; \ x_j \in \{0, 1\}, \ j = 1, ..., n \right\}, \tag{1}$$

где $a_{ij} \in \{0, \ 1\}, \ i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$ являются независимыми случайными величинами. В [3] представлен класс задач вида (1), для которого предложенный там же алгоритм динамического программирования является полиномиальным в среднем. Этот результат базируется на полученной в [3] верхней оценке среднего числа допустимых решений задач.

В [2] показано, что алгоритм ветвей и границ типа Лэнд и Дойг, некоторые алгоритмы отсечения и алгоритм перебора L-классов также являются полиномиальными в среднем на указанном классе задач. Эти результаты получены в рамках предложенного ранее подхода к построению полиномиальных верхних оценок среднего числа итераций ряда алгоритмов целочисленного линейного программирования. Подход основан на использовании полиномиальных верхних оценок средней мощности множества допустимых решений задач и метода регулярных разбиений. В [1] построено расширение класса из [3].

В данной работе описан новый класс $\mathcal{S}$ задач вида (1), для которого средняя мощность множества их допустимых решений имеет более высокий порядок по сравнению с классом из [3]. Для класса $\mathcal{S}$ получены полиномиальные верхние оценки среднего числа итераций указанных алгоритмов. Представлены результаты экспериментальных исследований.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 10-01-00598).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.А. Заозерская, Д.А. Борисенко, Н.Г. Гофман. О числе допустимых решений задачи об упаковке множества. // Материалы VII Международной научно-технической конференции "Динамика систем, механизмов и машин". Омск.: Издательство ОмГТУ, 2009. Кн. 3. С. 31–35.

2. Л.А. Заозерская, А.А. Колоколов. Оценки среднего числа итераций для некоторых алгоритмов решения задачи об упаковке множества. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 2. С. 242–248.

3. Н.Н. Кузюрин. Полиномиальный в среднем алгоритм в целочисленном линейном программировании. // Сибирский журнал исследования операций. 1994. Т. 1, № 3. С. 38–48.

Гофман Нина Гельмудовна, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (381-2) 64-42-38, e-mail:rgk7@treasury.ru

Заозерская Лидия Анатольевна, Омский филиал Института математики СО РАН им. С.Л. Соболева, ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (381-2) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84, e-mail:zaozer@ofim.oscsbras.ru

АНАЛИЗ И РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОБ УПАКОВКЕ МНОЖЕСТВА

А. А. Колоколов, М. Ф. Рыбалка

В данной работе продолжается исследование задач об упаковке множества с матрицами блочной структуры на основе L–разбиения [1, 2]. Рассматривается следующая задача об упаковке. Пусть дано множество $I = \{1, ..., m\}$ и семейство его подмножеств
$\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_n\}$. Упаковкой множества I называется совокупность попарно непересекающихся подмножеств из $\mathcal{S}$. Требуется найти упаковку множества I максимальной мощности. Если известны веса подмножеств $c_j > 0$, $j = \overline{1, n}$, то задача состоит в отыскании упаковки множества наибольшего веса.

Модель целочисленного линейного программирования для этой задачи имеет вид:

$$\max\{cx : Ax \leq e, x \in \{0, 1\}^n\}.$$

Здесь $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$, $a_{ij} \in \{0, 1\}$, причем $a_{ij} = 1$, если $i \in S_j$, иначе $a_{ij} = 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$; переменные задачи: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, где

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если } S_j \text{ включается в упаковку} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \ j = \overline{1, n}.$$

С использованием результатов из [3] получены новые нижние оценки мощности L–накрытий задач блочной структуры. Выделен широкий класс задач, которые требуют экспоненциального числа итераций алгоритма перебора L–классов (LCE)[1] и некоторых алгоритмов отсечения.

Для сравнения алгоритма LCE и его модификации, учитывающей блочную структуру задачи [3], реализовано приведение произвольной матрицы к блочному виду. Выполнено экспериментальное сравнение алгоритмов на задачах со случайными исходными данными, на основе которого можно сделать вывод о перспективности предложенной модификации.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 10-01-00598).

ЛИТЕРАТУРА

1. Колоколов А. А. Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании. // Сибирский журнал исследования операций, 1994. Т. 1. №2. С. 18–39.

2. Сайко Л.А. Исследование мощности L–накрытий некоторых задач о покрытии // Дискретная оптимизация и анализ сложных систем. Новосибирск: ВЦ СОАН СССР, 1989. С. 76–97.

3. Колоколов А. А., Рыбалка М.Ф. Исследование и решение задачи об упаковке множества блочной структуры // Динамика систем, механизмов и машин: материалы VII Международной научно-технической конференции. Омск: ОмГТУ, 2009. Кн. 3. С. 55–59.

Колоколов Александр Александрович, Рыбалка Мария Федоровна Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 236739, факс (3812) 234584. E-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru, rybalka_maria@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ L-СТРУКТУРЫ ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ

А. А. Колоколов, Т. Г. Орловская

В работе рассматривается следующая задача о рюкзаке: найти лексикографически максимальную точку множества $M \cap \mathbb{Z}^n$, где

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b,\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}\}.$$

Предполагается, что $a_i, b \in \mathbb{N},\ i = \overline{1,n}$.

Изучаются возможности использования унимодулярных преобразований с целью уменьшения мощности L-структуры данной задачи, т.е. множества M/L, и ускорения работы ряда алгоритмов при ее решении. Такие преобразования оказываются полезными, например, в методе перебора L-классов [1] и некоторых алгоритмах отсечения. Вопросы применения унимодулярных преобразований в алгоритмах решения задач целочисленного программирования исследовались в [1,2].

Нами получен ряд теоретических результатов в указанном направлении. В частности, для класса унимодулярных преобразований, соответствующих перестановкам переменных задачи, доказано, что при соотношении коэффициентов

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$$

L-структура релаксационного многогранника M обладает минимальной мощностью. Аналогичный результат установлен и для булевого варианта рассматриваемой задачи.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 10-01-00598).

ЛИТЕРАТУРА

1. Девятерикова М.В., Колоколов А.А., Колосов А.П. Унимодулярные преобразования и некоторые алгоритмы целочисленного программирования // Российская конференция "Дискретная оптимизация и исследование операций": материалы конференции (Владивосток, 7 – 14 сентября 2007). Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2007. С. 124.

2. Колоколов А.А., Орловская Т.Г. О регулярности одного алгоритма решения задач целочисленного программирования // VII Международная научно-техническая конференция "Динамика систем, механизмов и машин": материалы конференции (Омск, 10–12 ноября 2009). Омск: Изд-во ОмГТУ, 2009. Кн.3. С. 51 – 55.

Колоколов Александр Александрович, Орловская Татьяна Геннадьевна, Омский филиал Института математики им С.Л.Соболева СО РАН, ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84. E-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru, torlovskaya@gmail.com

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ПРАВОСТОРОННЕГО ВЕТВЛЕНИЯ МЕТОДА ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ МНОГОПРОЦЕССОРНЫХ КОМПЬЮТЕРОВ

У. Х. Малков

Предлагается следующая *схема ветвления* для 8-процессорного компьютера.

```
         Threads      Levels

               1. ---------- 1
  Parents    /  \
            /    \
          2.     |\-------- 2
         / |     | \
        /  |     |  \
      4.   |    3.   \----- 3
     /|   / \   / \   |\
    / |   | |   | |   | \
   8  4   6 2   7 3   5  1 - 4
  /  /   /  |   |   \   \   \
16 12  14  10  15   11  13   9

           Children
```

На первой ветви (на уровне 1) создается нить 2; на ветвях 1 и 2 (на уровне 2) создаются нити 3 и 4; на ветвях 1, 2, 3 и 4 (на уровне 3) создаются нити 5, 6, 7 и 8; и далее на ветвях 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 создаются дочерние нити 16, 12, 14, 10, 15, 11, 13 и 9.

На нитях 1–8 параллельно запускается программа алгоритма правостороннего ветвления метода ветвей и границ с параметром, равным номеру процессора. Если какая-нибудь нить, скажем, 5-я, завершает свою работу, то она переключается на нить, которая еще не кончила работу, например, на 2-ю нить. При этом переключенная нить ветвится налево по переменной, выбранной для ветвления на уровне 5 на 2-й нити.

Объем работы на разных нитях отличается, и переключение между нитями может дать ощутимый эффект. Кроме переключения между нитями, слежение за общим рекордом может значительно ускорить достижение оптимума, сокращая просмотр неперспективных ветвей.

Во время построения дерева ветвления каждая нить на очередном уровне выбирает переменную ветвления и ветвиться направо, одновременно создавая дочернюю нить ветвлением налево. Информация для дочерней нити записывается в файл с номером этой нити. Номер дочерней нити задается как 2 в степени номер следующего уровня — 2, т.е. номера растут с добавлением 1, 2, 4, 8, ..., к текущему номеру.

Как правило, некоторые ветви значительно длиннее остальных, и не следует ожидать, что если увеличить количество процессоров в два раза, то время решения тоже сокращается в два раза.

К настоящему времени реализованы две версии параллельного алгоритма метода ветвей и границ для многопроцессорных компьютеров на языке фортран: для персональных компьютеров с двумя и четырьмя процессорами, используя технологию программирования OpenMP и транслятор Microsoft Visual Fortran 9.1; для многопроцессорного суперкомпьютера МВС-15000, в среде параллельного программирования MPI и транслятора Intel(R) Fortran Compiler 10.1 for Linux.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00156.

Малков Устав Херманович, ЦЭМИ РАН, Нахимовский проспект, 47, Москва, 117418, Россия, тел. (495) 779-13-56, факс (495) 718-96-15, e-mail:ustav-malkov@yandex.ru

ПОКРЫТИЯ С УПОРЯДОЧЕННЫМ ОХВАТЫВАНИЕМ С МИНИМАЛЬНОЙ ДЛИНОЙ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПОСТРОЕНИЙ

Т. А. Панюкова

Одним из критериев оптимальности последовательности цепей с упорядоченным охватыванием [1] является длина дополнительных построений [2]. Алгоритм [1] построения покрытия с упорядоченным охватыванием использует лексикографический порядок формирования маршрута и в нем не решается задача оптимизации рассматриваемого критерия. В [3] приведен алгоритм, в котором начальная вершина следующей цепи является ближайшей к текущей вершиной нечетной степени, имеющей максимальный уровень вложенности. Численные эксперименты показывают, что построенное таким образом решение имеет меньшую длину, нежели решение, найденное с помощью алгоритма из [1]. Предложим еще один алгоритм, который строит покрытие с длиной дополнительных построений не больше, чем алгоритм из [3].

Алгоритм

Шаг 1. Выполнить процедуры "Инициализация" и "Упорядочение" как в алгоритме из [1]. В результате для $\forall v \in V$ будет определено значение $\mathrm{kmark}(v)$, численно равное ее уровню вложенности.

Шаг 2. Построить множество вершин нечетной степени V_{odd}, упорядоченное по уровню вложенности. На данном множестве найти минимальное паросочетание M.

Шаг 3. Пусть $v_0 = \arg\min_{v \in V_{odd}} \mathrm{kmark}(v)$. Пусть $(v_0, v_1) \in M$. $V_{odd} = V_{odd} \setminus \{v_1\}$, $M = M \setminus \{(v_0, v_1)\}$. Сделать v_1 текущей вершиной.

Шаг 4. Выполнять построение маршрута с помощью процедуры "Формирование" алгоритма из [1] до тех пор, пока вершина $v_2 \in V_{odd}$ не станет текущей.

Шаг 5. Если $M = \emptyset$, перейти на шаг 8. Иначе выполнить шаг 6.

Шаг 6. Если $\exists (v_2, v_3) \in M$ перейти на шаг 7, иначе перейти на шаг 3.

Шаг 7.Если $\mathrm{kmark}(v_3) \leq \mathrm{kmark}(v_2)$, то перейти на шаг 4 (продолжить построение цепи из текущей вершины). Иначе, закончить построение текущей цепи: $V_{odd} = V_{odd} \setminus \{v_2, v_3\}$, $M = M \setminus \{(v_2, v_3)\}$ принять v_3 за текущую вершину следующей цепи и перейти на шаг 4 (начать построение новой цепи из вершины v_3).

Шаг 8. Если v_2 смежна внешней грани, останов. Иначе, перейти на шаг 9.

Шаг 9. Найти вершину v_1, смежную внешней грани, и выполнить процедуру "Формирование" для построения цепи, начинающейся в вершине v_1. Останов.

В докладе будет показана результативность приведенного алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Panyukova T. Cover with Ordered Enclosing for Flat Graphs// Electronic Notes in Discrete Mathematics, No. 28 (2007), p.17–24.

2. Панюкова Т.А. Некоторые критерии оценки раскройных планов// IV Всероссийская конференция "Проблемы оптимизации и экономические приложения": Материалы конференции. Омский филиал Ин-та матем. СО РАН. — Омск, 2009. с. 238.

3. Panyukov A.V., Panyukova T.A. Decreasing of Length for Routes with Ordered Enclosing// Дискретная математика, алгебра и их приложения: Тез. докл. междунар. науч. конф. - Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 2009. С. 155–157.

Панюкова Татьяна Анатольевна, Южно-Уральский государственный университет, пр. Ленина, 76, г. Челябинск, 454080, Россия, тел. (351) 267-90-39, e-mail:kwark@mail.ru

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ВЕТВЛЕНИЙ В МЕТОДЕ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. Н. Половинкин

В работе рассматривается задача целочисленного линейного программирования в стандартной форме: $\left\{\max\,(c,x)\colon Ax \leqslant b, x \in \mathbb{Z}_+^n\right\}$, $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$.

Исследуется модификация стандартной процедуры ветвления в методе ветвей и границ [1]. Если в классическом алгоритме выбирается нецелочисленная компонента $\tilde{x}_i$ оптимального вектора $\tilde{x}$ ЛП-релаксации текущей задачи, и подзадачи порождаются добавлением неравенств $x_i \leqslant \lfloor \tilde{x}_i \rfloor$ и $x_i \geqslant \lceil \tilde{x}_i \rceil$, то в предлагаемом подходе предлагается строить подзадачи путем добавления произвольных неравенств вида $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}x_i \leqslant b_1$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}x_i \geqslant b_2$, таких, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}\tilde{x}_i > b_1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}\tilde{x}_i < b_2$ и $\forall x\colon Ax \leqslant b, x \in \mathbb{Z}_+^n \Rightarrow \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{1i}x_i \leqslant b_1\right) \vee \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}x_i \geqslant b_2\right)$. Построение неравенств осуществляется на основе подхода, предложенного В.Н. Шевченко в [2].

Проведено экспериментальное сравнение классического и модифицированного подходов. На ряде примеров задач целочисленного линейного программирования данный метод требует меньшего количества итераций.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Land., A. Doig. An automatic method of solving descrete programming problems // Econometrica, 1960, V. 28, № 3, P. 497–520.

2. В.Н. Шевченко. Качественные вопросы целочисленного программирования. Москва: Физматлит, 1995.

Половинкин Алексей Николаевич, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, пр. Гагарина 23, Нижний Новгород, 603950, Россия, тел. (831) 465-78-81, e-mail: alexey.polovinkin@gmail.com

ПЕРЕБОР СУБОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

И. В. Романовский

Цель сообщения — привлечь внимание коллег к работам, которые мы проводили в СПбГУ 10–15 лет тому назад. В них речь шла об организации перебора допустимых решений в задачах дискретной оптимизации в порядке ухудшения значений целевой функции. Заведомо нужно было перебирать не все решения, на что обычно надежды нет, а лишь сравнительно небольшую окрестность экстремума целевой функции.

Рассматривается первоначальная экстремальная задача поиска в конечном множестве M элемента, на котором достигается (для определенности) минимум заданной на M целевой функции $f : M \to \mathbb{R}_+$. Но требуется не только найти минимум, а организовать вычисление последовательности элементов множества $a_0, a_1, a_2, \ldots$, с монотонным неубыванием значений целевой функции: $f(a_0) = f_{\min} \leqslant f(a_1) \leqslant a_2, \ldots$, причем не было ни одного «пропущенного» элементов: ни одного такого $a^* \in M$, который сам не входит в последовательность, но для какого-то индекса r выполняется $f(a_r) \leqslant f(a^*) \leqslant f(a_{r+1})$.

Итак, нашей целью является построение вычислительного процесса, при каждом обращении к которому вырабатывается очередной элемент искомой последовательности. Назовем такой процесс **перечислителем**.

В [1, 2] был предложен следующий подход: рассматривается множество всевозможных перечислителей и вводятся операции над ними, позволяющие из имеющихся перечислителей строить новые. При таком подходе искомый перечислитель нужно построить с помощью имеющихся операций из некоторых базовых перечислителей.

Был предложен набор таких операций и рассмотрены способы удобной их реализации в разных вычислительных средах. В дальнейшем список операций и способы их реализации несколько раз совершенствовались.

Планируется рассказать об одном приложении этого подхода в задаче вычисления так наз. корреляционной размерности временно́го ряда, применяемой при анализе случайных шумов [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Романовский, Л. Скурина. k-Оптимальные решения в задачах дискретного и динамического программирования. //Исслед. операций и стат. моделирование, Изд-во С.-Петерб. ун-та, вып. 6, 1994, 95–110.

2. И. Романовский, Субоптимальные решения, Петрозаводск: Изд-во Петрозавод. ун-та, 1998.

3. И. Романовский, Л. Евдокимов. Расчет корреляционной размерности временного ряда с помощью процессов перебора субоптимальных решений.//Труды С.-Петерб. математического общества, 2001. Том 9. 180–190.

Романовский Иосиф Владимирович, С.-Петербургский государственный университет, Старый Перергоф, Университетский пр-т, 28, Россия, тел. (812) 542-75-54, e-mail:jvr_bhp@yahoo.com

ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННАЯ ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИИ

Э. Х. Гимади, В. Т. Дементьев

В работе [1] рассмотрена децентрализованная транспортная задача (ДТЗ) с $m \times n$-матрицей (c_{ij}), объемами спроса (b_j), предложения (a_i) и условием балланса $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. Обобщенной децентрализованной задачей о назначении (ДОЗН) назовем частный случай ДТЗ с предложениями $a_i = 1,\ i = \overline{1,m}$, и объемами спроса — натуральными числами $b_1, \dots, b_n$. В ДОЗН при выбранной очередности потребителей, задаваемой перестановкой столбцов $\pi_1, \dots, \pi_n$, сначала из исходной матрицы (c_{ij}) выбираются b_{π_1} наибольших элементов столбца π_1, после чего этот столбец и строки с выбранными элементами из матрицы удаляются. Далее в сокращенной матрице выбираются очередные b_{π_2} наибольших элементов в столбце π_2, после чего столбец и соответствующие строки также удаляются. Аналогичные действия повторяются до тех пор, пока в качестве выбранных не окажутся оставшиеся элементы последнего столбца π_n.

В [1] рассматривался также частный случай задачи — ДОЗН(k), когда для всякого $j = \overline{1,n}$ объем спроса b_j одинаков и равен натуральному числу $k > 1$. Из условия баланса следует $m = kn$. С использованием известной NP–полной задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ показано, что NP–полным является распознавательный вариант задачи ДОЗН(2). Понятно, из NP–полноты ДОЗН(2) следует NP–трудность задач ДОЗН(k) при $k > 2$, и, тем более, задач ДОЗН. В той же работе представлен полиномиальный приближенный алгоритм решения для ДОЗН(k). Алгоритм за время $O(kn^3)$ гарантирует получение решения не более, чем в k раз худшего оптимального. Более того, показано, что константа в оценке точности этого алгоритма неулучшаема.

В данном сообщении рассматривается задача ДОЗН(k) в случае, когда элементы матрицы являются случайными независимыми величинами с одинаковой функцией равномерного распределения. Предложен приближенный алгоритм решения задачи и приведено обоснование его временной сложности и асимптотической точности.

Теорема. Задача ДОЗН(k), $k \geq 2$, на классе случайных входов (элементов матрицы (c_{ij})) с равномерным распределением на отрезке $[0, 1]$ решается асимптотически точно за время $O(kn^2)$ с оценками относительной погрешности $\varepsilon_n = (1+\lambda)(\ln n)/n$ и вероятности несрабатывания $\delta_n = n^{-3\lambda/4}$, где $\lambda > 0$.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (№ 08-01-00516 и № 10-01-00149), целевой программы № 2 Президиума РАН (проект № 227), а также целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 44).

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Т. Дементьев, А.В. Пяткин. О децентрализованной транспортной задаче // Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т. 15, № 3. С. 22–30.

Гимади Эдуард Хайрутдинович, Дементьев Владимир Тихонович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр-т Ак. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 3634624, факс (383) 3332598, e-mail: gimadi@math.nsc.ru; demvt@math.nsc.ru

ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАНДОМИЗИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ОТЫСКАНИЯ ПОДМНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ С МАКСИМАЛЬНОЙ НОРМОЙ СУММЫ В МНОГОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Э. Х. Гимади, И. А. Рыков

Задача ПОДМНОЖЕСТВО ВЕКТОРОВ (mПВ) состоит в выборе из последовательности V, состоящей из n векторов в многомерном евклидовом пространстве $\mathcal{R}^k$, подпоследовательности U заданной мощности $m < n$ с максимальной нормой суммы $F(U) = \| \sum_{v \in U} v \|$. В работе [1] показана NP-трудность задачи и дан алгоритм A решения с гарантированной относительной погрешностью, не превышающей $\frac{1}{8}(k-1)/L^2$, и временной сложностью $O\Big(nk(k+\log m)(2L+1)^{k-1}\Big)$, где L — параметр алгоритма. Алгоритм A основан на просмотре детерминированно заданного вспомогательного множества направлений (векторов) $W = (W_1, \dots W_L)$, $W_i \in \mathcal{R}^k$. Для каждого такого направления W_i определяется набор из m векторов в V с максимальной суммой проекций на W_i, после чего в качестве приближенного решения задачи mПВ принимается набор векторов, дающий наибольшую норму вектора-суммы. В работе [2] показано, что при фиксированном k задача mПВ решается точно за время $O(n^{2k})$.

В отличие от [1] предлагается более простой в реализации алгоритм A' с использованием рандомизированного семейства векторов $W = (W_i)(i = 1, \dots, L)$, когда очередной вектор W_i определяется лучом из начала координат в произвольно выбранную точку на поверхности единичной сферы k-мерного шара в $\mathcal{R}^k$. Далее, как и в случае детерминированного семейства направлений W, алгоритм находит m-набор векторов из V с максимальной суммой проекций на W_i. В качестве решения задачи mПВ полагается m-набор векторов из V с наибольшей нормой суммы.

Утверждение. При фиксированной размерности k пространства $\mathcal{R}^k$ посредством рандомизированного алгоритма A' с временной сложностью $O(n \ln^{k-1} n)$ может быть получено асимптотически точное решение задачи mПВ с оценками относительной погрешности $\varepsilon_{A'} = 0,5/\ln^2 n$ и вероятности несрабатывания $\delta_{A'} = 1/n$.

Аналогичный подход применим и к задаче ПОДМНОЖЕСТВО ВЕКТОРОВ с УСРЕДНЕНИЕМ, где требуется максимизировать функцию $F(U) = \| \sum_{v \in U} v \|^2 / |U|$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 08-01-00516 и 10-07-00195).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабурин А. Е., Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Пяткин А. В. Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом // Дискрет. анализ и исслед. операций, Сер. 2, 2007. Т. 14, № 1. С. 22–32.

2. Гимади Э.Х., Пяткин А.В., Рыков И.А. О полиномиальной разрешимости некоторых задач выбора подмножества векторов в евклидовом пространстве фиксированной размерности // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2008. Т. 15. № 6. С. 11–19.

Гимади Эдуард Хайрутдинович, Рыков Иван Александрович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проспект Ак. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 3634624, факс (383) 3332598, e-mail: gimadi@math.nsc.ru; rykov@ngs.ru

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

В. Т. Дементьев, Ю. В. Шамардин

Рассматривается децентрализованная транспортная задача (ДТЗ), сформулированная в [1], для случая, когда $a_i = 2$, $b_j = 1$, $(i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, 2n)$, а матрица (c_{ij}) размерности $n \times 2n$ имеет вид (для $n = 6$)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & c & c & c & c & c & c & c & c & b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & a_{21} & a_{22} & c & c & c & c & c & c & c & c \\ c & c & b_{31} & b_{32} & a_{31} & a_{32} & c & c & c & c & c & c \\ c & c & c & c & b_{41} & b_{42} & a_{41} & a_{42} & c & c & c & c \\ c & c & c & c & c & c & b_{51} & b_{52} & a_{51} & a_{52} & c & c \\ c & c & c & c & c & c & c & c & b_{61} & b_{62} & a_{61} & a_{62} \end{pmatrix}$$

Здесь a_{ik}, b_{ik} $(i = 1, \dots, n,\ k = 1, 2)$ — произвольные неотрицательные числа, c — достаточно большое отрицательное число.

Показано, что оптимальное решение ДТЗ для этого случая может быть одного из двух типов. Решение первого типа легко находится путем сравнения пар (a_{i1}, a_{i2}) и (b_{i1}, b_{i2}). Для получения решения второго типа вводится понятие выигрышей на элементарной матрице

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \\ b_{i+1,1} & b_{i+1,2} \end{pmatrix}$$

По исходной матрице (c_{ij}) специальным образом строится ориентированный граф, вершины которого соответствуют строкам матрицы. Дугам графа приписываются веса, равные выигрышам. Затем находится остовный подграф без ориентированных циклов, имеющий максимальный суммарный вес дуг. Этот подграф задает частичный порядок на множестве строк. Любая перестановка строк, согласованная с этим частичным порядком, является оптимальным решением второго типа. Сравнение решений первого и второго типов дает окончательный ответ. Трудоемкость алгоритма составляет $O(n^2)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10-01-00149-а), целевой программы № 2 Президиума РАН (проект № 227), а также целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 44).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дементьев В. Т., Пяткин А. В. О децентрализованной транспортной задаче // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2008. Т. 15, № 3. С. 22–30.

Дементьев Владимир Тихонович, Шамардин Юрий Владиславович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Ак. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8383)3634622, факс (8383) 3332598, e-mail: demvt@math.nsc.ru; orlab@math.nsc.ru

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ ГРАФА

В. П. Ильев, С. Д. Ильева

Задачи аппроксимации графов, как и задачи о минимальных разрезах в графах, являются математическими моделями задач классификации взаимосвязанных объектов. Однако, в отличие от задачи о минимальном разрезе, в задаче аппроксимации графа минимизируется не только число "лишних" связей между классами, но также и количество "недостающих" связей внутри классов.

Рассматриваются *обыкновенные* графы, т. е. неориентированные графы без петель и кратных ребер. Следуя Р. И. Тышкевич [1], обыкновенный граф будем называть *M-графом*, если каждая его компонента связности есть полный граф. Обозначим через $\mathcal{M}_k^1(V)$ класс всех M-графов на множестве вершин V, имеющих не более k компонент связности.

Расстояние между графами $G_1 = (V, E_1)$ и $G_2 = (V, E_2)$ на одном и том же множестве вершин V определяется следующим образом:

$$\rho(G_1, G_2) = |E_1 \triangle E_2| = |(E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)|,$$

т. е. $\rho(G_1, G_2)$ – число несовпадающих ребер в графах G_1 и G_2.

Рассмотрим следующий вариант задачи аппроксимации графа.

Задача $\mathbf{A_k^1}$. Дан граф $G = (V, E)$. Требуется найти такой граф $M_O \in \mathcal{M}_k^1(V)$, что $\rho(G, M_O) = \min\limits_{M \in \mathcal{M}_k^1(V)} \rho(G, M)$.

В работе [2] доказано, что задача $\mathbf{A_k^1}$ является NP-трудной для любого $k \geq 2$, причем при $k = 2$ она NP-трудна на кубических графах.

В данной работе для приближенного решения задачи $\mathbf{A_k^1}$ предложен алгоритм, полиномиальный при любом фиксированном k. Доказано, что для любого графа $G = (V, E) \notin \mathcal{M}_k^1(V)$ этот алгоритм находит такой граф $M \in \mathcal{M}_k^1(V)$, что расстояние от графа G до M-графа M превосходит расстояние от графа G до оптимально аппроксимирующего графа $M_O \in \mathcal{M}_k^1(V)$ не более, чем в 3^{k-1} раз.

Тем самым показано, что задача аппроксимации графа $\mathbf{A_k^1}$ принадлежит классу APX при любом фиксированном $k \geq 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р.И. Тышкевич. Матроидные разложения графа // Дискрет. математика. 1989. Т. 1. Вып. 3. С. 129–139.

2. А.А. Агеев, В.П. Ильев, А.В. Кононов, А.С. Талевнин. Вычислительная сложность задачи аппроксимации графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13. N 1. С. 3–15.

Ильев Виктор Петрович, Омский государственный университет, пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (381-2) 22-56-96, e-mail: iljev@mail.ru

Ильева Светлана Диадоровна, ООО «Омсктелеком», 1-я Заводская, 23, Омск, 644040, Россия, тел. (381-2) 56-70-88, e-mail: iljeva@mail.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ ОПТИМАЛЬНЫХ МАРШРУТОВ В ЗАДАЧЕ КОММИВОЯЖЕРА ПРИ ДОБАВЛЕНИИ И УДАЛЕНИИ ВЕРШИН

Е. Е. Иванко

В настоящей работе предложены условия, в которых добавление новой вершины к оптимальному маршруту или удаление вершины из существующего оптимального маршрута обхода n вершин не нарушает его оптимальности. При этом, если достаточные условия выполнены, то в случае добавления новый оптимальный маршрут обхода $n+1$ вершины получается из существующего вставкой новой вершины между некоторыми двумя последовательными вершинами существующего оптимального маршрута обхода n вершин; в случае удаления вершины новый оптимальный маршрут обхода $n-1$ вершины получается из существующего заменой двух ребер, инцидентных удаленной вершине на одно, соединяющее предшествующую удаленной и следующую за удаленной вершины напрямую (в порядке следования, диктуемом существующим оптимальным маршрутом). Следует отметить полиномиальную вычислительную сложность методов проверки рассматриваемых достаточных условий.

Полученные результаты являются отправным пунктом для новых исследований. Так, обладая условиями устойчивого добавления и удаления вершины, можно, например, говорить о перемещении вершины внутри пересечения областей устойчивого добавления и удаления. Также можно ставить задачу последовательного (полиномиального по времени) повышения размерности решенной задачи.

Примеры областей устойчивости оптимального маршрута при добавлении новой вершины. Каждой паре последовательных в смысле существующего оптимального маршрута вершин соответствует своя область устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ченцов А. Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. — Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2008.

2. Bökenhauer H.-J., Hromkovic J., Klasing R., Seibert S., Unger W. Towards the Notion of Stability of Approximation for hard Optimization Tasks and the Traveling Salesman Problem // Computer Science. 1999. Vol. 285. P. 3–24.

3. Poort E. S. Aspects of sensitivity analysis for the traveling salesman problem: PhD dissertation, University of Groningen. Groningen, 1997.

Иванко Евгений Евгеньевич, ИММ УрО РАН, С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620219, Россия, тел. (343) 375-34-38, e-mail:viatore@ya.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ МУЛЬТИПРОЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ С ОДНИМ ОГРАНИЧЕННЫМ РЕСУРСОМ НА СЛУЧАЙНЫХ ВХОДАХ

Н. Ю. Моторина, И. А. Рыков

Мультипроектная задача календарного планирования описывается ориентированным ациклическим графом, состоящим из m компонент связности (проектов). Работы $j = 1, \dots, n$ определены продолжительностью $h_j = 1, \dots, H$ и интенсивностью $w_j = 1, \dots, W$ потребления общего ресурса, выделяемого в количестве W в каждом единичном интервале времени. Предполагается, что h_j и w_j — случайные независимые величины с дискретной функцией распределения $\big(p_{wh}\big)$.

Целью работы является доказательство асимптотической точности алгоритма, основанного на упаковке групп независимых работ-прямоугольников, являющийся модификацией алгоритма решения задачи упаковки в полосу из работы [1].

Используется следующая двухэтапная процедура формирования входа. Сначала задается мультипроектный граф предшествования: каждому прямоугольнику j назначается номер проекта $i(j)$, затем внутри каждого из проктов задается орграф предшествования без циклов, а прямоугольникам присваиваются порядковые номера от 1 до M_i, где M_i — число прямоугольников в проекте. Порядковые номера назначаются таким образом, что внутри проекта $n_j < n_k \Longrightarrow$ дуга (k, j) не принадлежит транзитивному замыканию графа. На втором этапе каждой работе независимо назначаются длина и ширина в соответствии с дискретной функцией распределения $\big(p_{wh}\big)$. Отсюда следует, что если уложены все прямоугольники с номером, меньшим k, то можно укладывать и прямоугольник с номером k. Это приводит нас к следующему алгоритму: для каждого номера $j = 1, \dots, \max\big\{M_1, \dots, M_m\big\}$ упаковать все прямоугольники с номером j. Правую границу полученной упаковки считать основанием для упаковки прямоугольников со следующим номером.

Утверждение. Пусть имеется m проектов, и число работ-прямоугольников в каждом из них одинаково и равно k. Тогда при W-асимметричности матрицы $\big(p_{wh}\big)$ и условии

$$WHk^2 = o\left(\frac{m}{\ln m}\right)$$

предложенный алгоритм полиномиален и асимптотически точен.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 08-01-00516 и 10-07-00195).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э. Х., Залюбовский В.В., Шарыгин П.И. Задача упаковки в полосу: асимптотически точный подход // Известия высших учебных заведений. Казань, 1997. № 12. С. 37–49.

Моторина Надежда Юрьевна, Рыков Иван Александрович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проспект Ак. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 3634624, факс (383) 3332598, e-mail: nad2549@yandex.ru; rykov@ngs.ru

ОЦЕНКА АППРОКСИМАЦИОННОЙ СЛОЖНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ НАСЛЕДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

А. А. Навроцкая, В. П. Ильев

Пусть V – непустое конечное множество, $\mathcal{A} \subseteq 2^V$ – непустое семейство его подмножеств, удовлетворяющее *аксиоме наследственности*: $A_1 \in \mathcal{A},\ A_2 \subseteq A_1 \Rightarrow A_2 \in \mathcal{A}$. Множества семейства $\mathcal{A}$ называются *независимыми*, все остальные подмножества V – *зависимыми*. Семейство всех зависимых множеств обозначим $\mathcal{D}$.

Определим *наследственную систему* $\boldsymbol{S}$ на множестве V как разбиение семейства 2^V всех подмножеств V на два непересекающихся семейства $\mathcal{A}$ и $\mathcal{D} = 2^V \setminus \mathcal{A}$. *Циклы* наследственной системы $\boldsymbol{S}$ – это минимальные по включению зависимые множества. Семейство всех циклов системы $\boldsymbol{S}$ будем обозначать через $\mathcal{C}$. Наследственная система называется *матроидом*, если семейство ее циклов обладает следующим свойством:

$$C_1, C_2 \in \mathcal{C}, C_1 \neq C_2, c \in C_1 \cap C_2 \Rightarrow \exists C \in \mathcal{C} : C \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{c\}.$$

Наследственная система $\boldsymbol{S}$ называется *линейной*, если любые два её цикла имеют не более одного общего элемента. Матроид с таким свойством будем называть *линейным матроидом*. Обозначим через $\mathcal{M}(V)$ класс всех линейных матроидов на множестве V. *Расстоянием* $\rho(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)$ между двумя наследственными системами $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$ на множестве V назовем число несовпадающих циклов этих систем.

Задача аппроксимации линейных наследственных систем. Для произвольной наследственной системы $\boldsymbol{S}$ найти такой матроид $\boldsymbol{M}^* \in \mathcal{M}(V)$, что

$$\rho(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{M}^*) = \min_{\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}(V)} \rho(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{M}) \stackrel{dn}{=} \tau(\boldsymbol{S}).$$

Задача аппроксимации линейных наследственных систем является непосредственным обобщением известной задачи аппроксимации графа, в которой требуется для заданного обыкновенного графа G найти ближайший к нему граф на том же множестве вершин, каждая компонента связности которого является полным графом. Расстояние между двумя графами на множестве вершин V равно числу несовпадающих ребер этих графов. Известна [1] следующая оценка аппроксимационной сложности произвольного n-вершинного графа G: $\tau(G) \leq \lfloor (n-1)^2/4 \rfloor$. Для задачи аппроксимации линейных наследственных систем получена аналогичная оценка.

Теорема. Пусть $\boldsymbol{S}$ – линейная наследственная система на множестве V, $|V| = n$. Тогда

$$\tau(\boldsymbol{S}) \leq \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{3} \right\rfloor.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Ш. Фридман. Об одном неравенстве в задаче аппроксимации графов // Кибернетика. 1974. N 3. С. 151.

Навроцкая Анна Александровна, Ильев Виктор Петрович, Омский государственный университет, пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (381-2) 64-42-38, e-mail: nawrocki@yandex.ru, iljev@mail.ru

О ТОЧНОСТИ ЖАДНОГО АЛГОРИТМА НА СТРУКТУРАХ ЖОРДАНА–ДЕДЕКИНДА

А. Б. Рамазанов

Исследование дискретных экстремальных задач на структурах Жордана–Дедекинда является актуальным, как для общего развития теории дискретных экстремальных задач, так и для получения новых более точных оценок погрешности алгоритмов жадного типа (см., напр., [1, 2]). В работе рассматривается задача максимизации порядково-выпуклой функции на конечных структурах Жордана–Дедекинда. Для этой задачи получено апостериорная гарантированная оценка точности жадного алгоритма, который уточняет и дополняет ранее известные оценки из [1, 2].

Рассматривается следующая задача A дискретной оптимизации: найти

$$\max\{f(x)|x = (x_1, ..., x_n) \in H\},$$

где функция $f(x)|H \to R$ – неубывающая порядково-выпуклая функция на H [1, 2], т.е. $f(y) - f(x) \geq f(z) - f(y)$, $\forall x \triangleright y \triangleright z$, $x, y, z \in H$, запись $x \triangleright y$ означает, что элемент y непосредственно следует за элементом x, H – конечное частично упорядоченное множество, содержащее нуль θ (единственный минимальный элемент) и удовлетворяющее цепному условию Жордана–Дедекинда [3].

Пусть x^* – оптимальное решение задачи A, а x^g – решение, полученное с помощью жадного (градиентного) алгоритма [1, 2].

Теорема. *Справедлива следующая оценка*

$$\frac{f(x^*) - f(x^g)}{f(x^*) - f(\theta)} \leq \left(1 - \frac{1}{1 + (1 - c)(h - 1)}\right)^r,$$

где $h = \max\{h(x)|x \in H\}$, $r = \min\{h(x)|x \in H^{\max}\}$, $h(x)$ *– длина максимальной цепи между* θ *и* x *в* H, $H^{\max}$ *– множество максимальных элементов в* H, $c = \min\{(\Delta f(x) - \Delta f(y))/\Delta f(x)|(x, y) \in I\}$, *если* $I = \{(x, y)|\Delta f(x) > \Delta f(y) > 0,\ x \triangleright y,\ x, y \in H\} \neq \emptyset$ *и* $c = 0$, *если* $I = \emptyset$, $\Delta f(x) = \max\{f(y) - f(x)|x \triangleright y,\ x, y \in H\}$.

Замечание. Оценка из теоремы улучшает оценку, ранее полученные в [1] (см. теоремы 11.1) при $c > 0$ и совпадает с оценкой из [1], если $c = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.М. Ковалев. Матроиды в дискретной оптимизации. Бел. Гос. Ун-т, 1987.

2. V.A. Emelichev , M.M. Kovalev, A.B. Ramazanov // J. Discrete Mathematic and Applications. 1992. V.2. P. 113–131.

3. М. Айгнер. Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982.

Рамазанов Али Багдаш оглы, Бакинский государственный университет, ул. З. Халилова, 23, г.Баку, AZ-1148, Азербайджан, e-mail: rab-unibak@rambler.ru

МОДИФИЦИРОВАНННЫЙ ТОЧНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧИ О $(r|p)$–ЦЕНТРОИДЕ

Е. В. Алексеева, Н. А. Кочетова

В работе рассматривается дискретная задача о (r,p)-центроиде [2]. Имеется множество клиентов и множество предприятий. Известны попарные расстояния между клиентами и предприятиями. Два игрока, Лидер и Конкурент, по очереди открывают предприятия, при этом каждый старается захватить как можно больше клиентов. Лидер открывает p предприятий первым. Затем Конкурент открывает r предприятий из оставшихся. Каждый клиент из открытых $(p+r)$ предприятий выбирает ближайшее в качестве своего поставщика. Задача состоит в том, чтобы выбрать за Лидера p предприятий так, чтобы после наилучшего ответного хода Конкурента Лидер получил максимальную долю рынка.

Рассматриваемая задача принадлежит классу Σ_2^P-трудных задач [3], т.е. является более сложной, чем любая задача из класса NP. В данной работе представлена модификация точного итерационного метода изложенного в [1]. Исходная задача формулируется в виде задачи смешанного целочисленного программирования с большим числом переменных и ограничений. Сократив множество ограничений и переменных в модели до некоторого небольшого семейства, получим верхнюю оценку. Последовательно пополняя это семейство, можно найти оптимальное решение задачи. При этом на каждой итерации метода решается вспомогательная подзадача. Если она имеет допустимое решение, то семейство пополняется, иначе утверждается, что наилучшее найденное решение является оптимальным. Для увеличения скорости сходимости генерируются наборы допустимых решений подзадачи. Для порождения этих наборов разработана специализированная метаэвристика.

Метод тестировался на примерах из электронной библиотеки [4]. Исследовалось влияние параметров p и r на сложность задачи и поведение метода. Наиболее сложным оказался случай, когда параметры p и r совпадают и составляют около трети от общего числа предприятий.

Работа поддержана РФФИ (грант 08–07–00037) и АВЦП Рособразования (проект 2.1.1/3235).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Alekseeva, N. Kochetova, Y. Kochetov, A. Plyasunov A heuristic and exact methods for the discrete $(r|p)$-centroid problem. In: P. Cowling and P. Merz (Eds.): EVOCOP 2010, LNCS 6022, Springer, 2010. P. 11–22

2. Hakimi, S.L.: Locations with spatial interactions: competitive locations and games // P. B. Mirchandani and R. L. Francis (Eds.) Discrete Location Theory. Wiley & Sons, 1990. P. 439–478.

3. Noltermeier, H., Spoerhose, J., Wirth, H.C.: Multiple voting location and single voting location on trees. European J. Oper. Res. 181. 2007. P. 654–667.

4. http://math.nsc.ru/AP/benchmarks

Алексеева Екатерина Вячеславовна, Кочетова Нина Арнольдовна, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-90, e-mails: ekaterina2@math.nsc.ru, nkochet@math.nsc.ru

АЛГОРИТМЫ ЛОКАЛЬНОГО ПОИСКА ПО ОБОБЩЕННОЙ ОКРЕСТНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОНКУРЕНТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

В. Л. Береснев, А. А. Мельников

Задача конкурентного размещения предприятий может быть представлена [1], как задача максимизации псевдобулевой функции $f(x), x \in B^m$, для отыскания приближенного решения которой может быть использована стандартная процедура локального поиска по некоторой заданной окрестности $N(x)$. В [1] рассматриваются такие алгоритмы, использующие окрестность специального вида $N_0(x)$, включающую m элементов, которые можно рассматривать как наиболее перспективные варианты изменения текущего решения x.

В настоящей работе предлагаются аналогичные алгоритмы, но использующие обобщенную окрестность $\widetilde{N}_0(x_0)$, определяемую для локально-оптимальных решений x_0 по окрестности $N_0(x)$. Приближенное решение $\widetilde{x}_0$, получаемое в результате работе такого алгоритма является не только локально-оптимальным решением, но и наилучшим среди локально-оптимальных решений "окружающих" $\widetilde{x}_0$. Проведенные вычислительные эксперименты показывают, что локально-оптимальное решение $\widetilde{x}_0$ по обобщенной окрестности $\widetilde{N}_0(x_0)$ в среднем существенно лучше локально-оптимального решения $\widetilde{x}_0$ по окрестности $N_0(x)$ и для многих рассмотренных примеров является оптимальным.

Работа поддержана РФФИ (грант 08–07–00037) и АВЦП Рособразования (проект 2.1.1/3235).

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Л. Береснев, А.А. Мельников Приближенные алгоритмы для задачи конкурентного размещения предприятий // Дискретный анализ и исследование операций. В печати.

Береснев Владимир Леонидович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 333-29-91, e-mail:beresnev@math.nsc.ru

Мельников Андрей Андреевич, Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, e-mail: konstruktor@gorodok.net

RATIONAL PLACEMENT OF BOXES IN THE CONTAINER WITH THE REQUIREMENTS OF THE POSITION OF CENTER OF GRAVITY BASED ON ROBOTIC COMPLEX

R.Valeev, B.Hein, H.Woern

Important problem in the location of various cargoes in containers (pallets, shelves) in the multimodular complexes — hubs, is the placement, taking into account the center of gravity of the container. It is necessary to fulfill the requirements for transport and storage of goods in the warehouse. Another important aspect of this problem is the need for dense placement of goods in order to optimize the area of placement. In this connection the following two-criteria optimization problem of objects placement (product units) is considered.

We consider the following solution of this problem. First, objects must be placed in containers so that the area occupied by them was minimal. Secondly, the shift of the center of gravity of the loaded container must be within the permissible range (should be minimal).

The algorithm of two-criteria optimization problem of objects placement (product units) is considered: (1) dense placement on the basis of heuristic algorithms. For designing admissible placements the algorithm next fit (NF) is used with search of the best decisions in L-vicinity, where L is a bottom border. It can be found by solving the problem of one-dimensional cutting with additional restrictions. For search of the best decision the updating of the algorithm (0–1)-knapsack is proposed; (2) center of gravity of the container is determined. If the offset center of gravity beyond the permissible, the redistribution of objects in the container based on an evolutionary algorithm (1+1)–EA to achieve the second criterion is satisfied.

Algorithm for determining the displacement of the center of gravity placement of goods on the pallet is considered. Displacement of the center of gravity measurements are performed using force-moment sensor which installed on a robot manipulator transporting cargo. As an example, the problem of objects placement on the basis of KUKA robotic complex is discussed.

The project was supported by RFBR 10-07-91330-HHUO-a.

Valeev Ruslan Sagitovich, Ufa State Aviation Technical University, K. Marx Str., 12, Ufa, 450000, Russia, e-mail: ruslan_valeev@inbox.ru

Dr.-Ing. Bjoern Hein, Prof. Dr.-Ing. Heinz Woern, Institute for Process Control and Robotic (IPR), KIT, Karlsruhe, Germany, e-mail: bjoern.hein@kit.edu, woern@kit.edu

ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ОЦЕНКИ В ЛОКАЛЬНОМ ПОИСКЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ О (r,p)–ЦЕНТРОИДЕ

И. А. Давыдов

В работе рассматривается дискретная задача о (r,p)–центроиде. Заданы два конечных множества — множество клиентов и множество мест для размещения предприятий. Две фирмы — Лидер и Конкурент последовательно открывают p и r предприятий соответственно. Затем каждый клиент выбирает одно из открытых предприятий согласно своим предпочтениям. Каждая фирма стремится максимизировать свою долю рынка. Задача состоит в том, чтобы найти множество из p предприятий, позволяющее максимизировать долю рынка Лидера. Данная задача является Σ_2^p–трудной [1].

Для решения задачи разработан эвристический алгоритм поиска с запретами [2]. Для повышения эффективности работы алгоритма используются вероятностные окрестности. Существенную сложность представляет вычисление значений целевой функции на допустимых решениях, т.к. для этого необходимо найти оптимальное решение задачи Конкурента. Эта задача NP–трудна. Поэтому при оценке соседних решений используются приближенные значения целевой функции. Проведено сравнение алгоритмов, использующих два вида оценок. Рассматриваются верхняя оценка на основе лагранжевых релаксаций и нижняя оценка на основе поиска с запретами. Решение релаксированной задачи находится методом субградиентной оптимизации. Значительное уменьшение трудоемкости вычисления нижних оценок достигается за счет применения специализированной структуры данных [3]. Алгоритмы с применением обоих подходов тестировались на численных примерах из электронной библиотеки «Дискретные задачи размещения» [4]. Второй подход, использующий нижние оценки задачи Конкурента, оказывается предпочтительным. Он требует меньше времени на одну итерацию и приводит к решениям с меньшей погрешностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Noltemeier et al. Multiple voting location and single voting location on trees problems // European J. Oper. Res. 2007. V.181, P. 654–667.

2. И.А. Давыдов. Вероятностный поиск с запретами для задачи о (r,p)–центроиде. // Сборник трудов ИВМиМГ СО РАН, серия Информатика, Выпуск 9, Новосибирск 2009, с.157–162.

3. M.G.C. Resende, R.F. Wernek. A Fast Swap-based Local Search Procedure for Location Problems. // Annals of Operations Research. 2007. V.150, P. 205–230.

4. http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/Competitive/p_med_comp.html

Давыдов Иван Александрович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Ак. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, E-mail: vann.davydov@gmail.com

О РАДИУСЕ КВАЗИУСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ БУЛЕВОЙ ЗАДАЧИ С КРИТЕРИЯМИ СЭВИДЖА

В. А. Емеличев, В. В. Коротков

Пусть $R = [r_{ijk}] \in \mathbf{R}^{m\times n\times s}$ – матрица рисков (матрица упущенных возможностей), $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in X \subseteq \{0,1\}^n$, $N_n = \{1, 2, ..., n\}$. Под векторной (s–критериальной) булевой задачей $Z^s(R),\ s \geq 1$, с критериями минимаксного риска (крайнего пессимизма) Сэвиджа [1]

$$\max_{i\in N_m} \sum_{j\in N_n} r_{ijk}\ x_j \to \min_{x\in X}, \quad k \in N_s,$$

будем понимать задачу поиска множества Парето $P^s(R)$. Следуя [2], радиусом квазиустойчивости задачи $Z^s(R)$ назовем число

$$\rho^s(R) = \begin{cases} \sup\ \Xi, & \text{если } \Xi \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Xi = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Xi = \{\varepsilon > 0 :\ \forall R' \in \Omega(\varepsilon)\ \ (P^s(R) \subseteq P^s(R + R'))\},$$

$$\Omega(\varepsilon) = \{R' \in \mathbf{R}^{m\times n\times s} :\ \parallel R' \parallel < \varepsilon\},$$

$$\parallel R' \parallel = \max\{|r'_{ijk}| :\ (i, j, k) \in N_m \times N_n \times N_s\}, \quad R' = [r'_{ijk}].$$

Теорема.

$$\min_{x\in P^s(R)}\ \min_{x'\in X\setminus\{x\}}\ \max_{k\in N_s}\ \min_{i\in N_m}\ \max_{i'\in N_m} \frac{R_{i'k}\ x' - R_{ik}\ x}{\parallel x' + x \parallel^*} \leq \rho^s(R) \leq$$

$$\leq \min_{x\in P^s(R)}\ \min_{x'\in X\setminus\{x\}}\ \max_{k\in N_s}\ \min_{i\in N_m}\ \max_{i'\in N_m} \frac{R_{i'k}\ x' - R_{ik}\ x}{\parallel x' - x \parallel^*}, \quad s \geq 1.$$

Здесь $R_{ik} = (r_{i1k}, r_{i2k}, ..., r_{ink})$, $\parallel z \parallel^* = \sum\limits_{j\in N_n} |z_j|$, $z = (z_1, z_2, ..., z_n)^T$.

ЛИТЕРАТУРА

1. L.J. Savage. The foundation of statistics. New York.: John Wiley and Sons, 1954.

2. В.А. Емеличев, Д.П. Подкопаев. Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования. // Дискрет. анализ и исслед. опер. 2001. Сер. 2. Т. 8, № 1. С. 47–69.

Емеличев Владимир Алексеевич, Коротков Владимир Владимирович, Белорусский государственный университет, пр-т Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь, тел. (+37517) 2-62-37-50, e-mail: emelichev@bsu.by

КОМПАКТНОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЯХ

Г. Г. Забудский, И. В. Амзин

В работе рассматривается задача размещения объектов на параллельных линиях, которая формулируется следующим образом. Имеется n прямоугольных объектов, которые имеют длину $l_j \in Z^+$ и ширину $h_j \in Z^+$, $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$. Кроме того, задано m параллельных осевых линий, вдоль которых размещаются объекты, $M = \{1, 2, \dots, m\}$ – множество номеров этих линий. Необходимо разместить объекты на линиях таким образом, чтобы длина и ширина прямоугольной области, занятой объектами, были минимальными [1].

Вводятся булевы переменные z_{jk} такие, что $z_{jk} = 1$, если объект с номером j расположен на линии с номером k, иначе $z_{jk} = 0$ и $z = (z_{jk})$, $j \in J$, $k \in M$. Тогда указанная задача записывается в виде двухкритериальной модели нелинейного булева программирования следующего вида:

$$Q_1(z) = \max_{k \in M} \left\{ \sum_{j \in J} l_j z_{jk} \right\} \to \min,$$

$$Q_2(z) = \sum_{k \in M} \max_{j \in J} \{h_j z_{jk}\} \to \min,$$

$$\sum_{k \in M} z_{jk} = 1, \quad j \in J,$$

$$\sum_{j \in J} z_{jk} \geq 1, \quad k \in M,$$

$$z_{jk} \in \{0, 1\}, \quad j \in J, k \in M.$$

Для поиска Парето–оптимальных решений сформулированной задачи предложены алгоритмы с использованием целочисленного и динамического программирования. Проведен вычислительный эксперимент.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Г. Забудский, И.В. Амзин. Задача оптимального размещения прямоугольных объектов на параллельных линиях // VII Международная научно-техническая конференция "Динамика систем, механизмов и машин". Омск. 2009. Кн. 3. С. 27–30.

Забудский Геннадий Григорьевич, Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84, e-mail:zabudsky@ofim.oscsbras.ru

Амзин Игорь Викторович, Омский государственный технический университет, пр. Мира, 11, Омск, 644050, Россия, тел. (3812) 65-34-23, e-mail:igoryan28@mail.ru

О ДВУХ ТИПАХ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ С КРИТЕРИЯМИ ВИДА MINMIN

К. Г. Кузьмин, О. В. Карелкина

Пусть A_i – i-я строка матрицы $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $n \geq 1$, $m \geq 2$, T – непустая система непустых подмножеств множества $N_m = \{1, 2, \ldots, m\}$ (называемых траекториями), т. е. $T \subseteq 2^{N_m} \setminus \{\emptyset\}$, причем $|T| \geq 2$. Пусть компонентами вектор-функции $f(t, A) = (f_1(t, A_1), f_2(t, A_2), \ldots, f_n(t, A_n))$, заданной на множестве траекторий T, являются критерии вида MINMIN:

$$f_i(t, A_i) = \min_{j\in t} a_{ij} \to \min_{t\in T}, \quad i \in N_n.$$

Под лексикографической задачей $Z^n(A)$ будем понимать задачу нахождения множества лексикографически оптимальных траекторий $L^n(A) = \{t \in T : \forall t' \in T\ (t \,\overline{\succ}\, t')\}$, где $\overline{\succ}$ – как обычно, отрицание бинарного лексикографического отношения $\succ$, определяемого на множестве T формулой

$$t \succ t' \;\Leftrightarrow\; \exists p \in N_n \ \big(f_p(t, A_p) > f_p(t, A_p) \ \ \& \ \ p = \min\{k \in N_n : f_k(t, A_k) \neq f_k(t', A_k)\}\big).$$

В соответствии с определениями [1] задачу $Z^n(A)$ назовем устойчивой, если

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall A' \in \Omega(\varepsilon) \ \ (L^n(A + A') \subseteq L^n(A)),$$

и сильной устойчивой, если

$$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall A' \in \Omega(\varepsilon) \ \ (L^n(A + A') \cap L^n(A) \neq \emptyset),$$

где $\Omega(\varepsilon) = \{A' \in \mathbf{R}^{n\times m} \ : \ \ \|A'\| < \varepsilon\}$, $\|A'\|$ – некоторая норма матрицы A'.

Теорема. Для лексикографической задачи $Z^n(A)$, $n \in \mathbf{N}$, следующие утверждения эквивалентны:
(i) задачи $Z^n(A)$ устойчива,
(ii) задачи $Z^n(A)$ сильно устойчива,
(iii) $\forall t \in L^n_1(A) \ \ \forall v \in V(t, M(t), A) \ \ \exists t^* \in L^n(A) \qquad (v \in V(t^*, M(t), A))$.

Здесь

$$V(t, M(t), A) = \prod_{i\in M(t)} \operatorname{Arg}\min\{a_{ij} : j \in t\},$$

$M(t) = \{i \in N_n : \ t \in L^n_i(A_i)\}$, $L^n_i(A) = \operatorname{Arg}\min\{f_i(t, A_i) : \ t \in L^n_{i-1}(A)\}$, $L^n_0(A) = T$.

ЛИТЕРАТУРА

1. V.A. Emelichev, E. Girlich, Yu.V. Nikulin, D.P. Podkopaev. Stability and regularization of vector problem of integer linear programming // Optimization. 2002. V. 51, No. 4. P. 645–676.

Кузьмин Кирилл Геннадьевич, Карелкина Ольга Владимировна, Белорусский государственный университет, пр-т Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь, e-mail: kuzminkg@mail.ru, olga.karelkina@gmail.com

АЛГОРИТМ ПОИСКА ГАРАНТИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ КВАДРАТИЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ДВУХУРОВНЕВОЙ ЗАДАЧИ

А. В. Малышев

В работе рассматривается квадратично–линейная задача двухуровневого программирования

$$\left.\begin{array}{c} \sup\limits_y\{\frac{1}{2}\langle x, Cx\rangle + \langle c, x\rangle - \frac{1}{2}\langle y, C_1 y\rangle + \langle c_1, y\rangle \mid y \in Y_*(x)\} \downarrow \min\limits_x, \\ x \in X,\ \ Y_*(x) \stackrel{\triangle}{=} \operatorname*{Argmin}\limits_y\{\langle d, y\rangle \mid y \in Y(x)\}, \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{BP})$$

где $X \stackrel{\triangle}{=} \{x \in I\!R^m \mid Ax \le a, x \ge 0\}$, $Y(x) \stackrel{\triangle}{=} \{y \in I\!R^n \mid A_1x + B_1y \le b, y \ge 0\}$, $A \in I\!R^{p\times m}$, $A_1 \in I\!R^{q\times m}$, $B_1 \in I\!R^{q\times n}$, $C \ge 0$, $C_1 \ge 0$, a, b, c, c_1, d — векторы соответствующих размерностей.

Далее осуществляется редукция задачи $(\mathcal{BP})$ к параметрическому семейству одноуровневых задач

$$\left.\begin{array}{c} \Phi(x,y,v) \stackrel{\triangle}{=} \frac{1}{2}\langle x, Cx\rangle + \langle c, x\rangle - \frac{1}{2}\langle y, C_1y\rangle + \langle c_1, y\rangle + \mu h(x,y,v) \downarrow \min\limits_{x,y,v}, \\ (x,y,v) \in D \stackrel{\triangle}{=} \{(x,y,v) \mid Ax \le a,\ \ x \ge 0,\ \ A_1x + B_1y \le b,\ \ y \ge 0, \\ d - \nu c_1 + \nu C_1 y + vB_1 \ge 0,\ \ v \ge 0\}, \end{array}\right\} \qquad (\mathcal{P}(\mu,\nu))$$

где $h(x,y,v) \stackrel{\triangle}{=} \nu\langle y, C_1y\rangle + \langle d - \nu c_1, y\rangle + \langle b - A_1x, v\rangle$, $\nu > 0$, $\mu > 0$ — параметры штрафа.

Отметим, что задача $(\mathcal{P}(\mu,\nu))$ является задачей невыпуклого квадратичного программирования, поэтому для отыскания ее решения требуется некий алгоритм глобального поиска.

Для проведения глобального поиска в задаче $(\mathcal{P}(\mu,\nu))$ был разработан приближенный алгоритм, основанный на стратегии глобального поиска в задачах d.c. программирования [1]. Основными этапами этого алгоритма являются:
a) локальный поиск, приводящий в критическую точку;
b) процедуры выхода из критической точки, основанные на условиях глобальной оптимальности [1].

Разработаны два варианта алгоритма локального поиска, развивающих идею последовательной минимизации по группам переменных [2] на случай связанных переменных. Предварительное численное тестирование на серии случайно сгенерированных задач показало эффективность разработанных алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003.
2. Стрекаловский А.С., Орлов А.В. Биматричные игры и билинейное программирование. М.: Физматлит, 2007.

Малышев Антон Валентинович, ИДСТУ СО РАН, ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 45-30-63, факс (3952) 51-16-16, e-mail:anton@irk.ru

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

А. А. Панин

В рассматриваемой задаче первым принимает решение производитель, который устанавливает цены на каждом из своих предприятий, выпускающих однородную продукцию. Затем каждый из покупателей выбирает то предприятие, на котором транспортные затраты и затраты на приобретение продукции в сумме минимальны. Покупка совершается в том случае, когда это позволяет его бюджет. Требуется определить такие цены на каждом предприятии, при которых доход производителя максимален. Известно, что данная задача является NP–трудной в сильном смысле и не принадлежит классу APX [1].

В [1] был разработан алгоритм генетического локального поиска для данной задачи. Одно из достоинств данного алгоритма заключается в том, что он позволяет относительно быстро находить приемлемые по качеству приближённые решения [1]. Однако, это наблюдение в основном базируется на вычислительном эксперименте. Поэтому необходимы исследования для разработки достаточно быстрых алгоритмов вычисления верхних оценок, которые позволяют оценивать качество приближённых решений и которые можно было бы интегрировать с генетическим локальным поиском.

В настоящей работе предлагается алгоритм вычисления верхних оценок, использующий декомпозицию Бендерса. Предварительно в задаче релаксируются условия булевости переменных. К получившейся непрерывной квадратичной задаче применяется декомпозиция. В итоге возникает итерационный алгоритм, который порождает невозрастающую последовательность верхних оценок. На каждой итерации алгоритма решаются релаксированная координирующая задача с конечным числом ограничений и подзадача, каждая из которых является задачей линейного программирования. Приводятся результаты вычислительного эксперимента.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 09–06–00032) и АВЦП Рособразования (проект 2.1.1/3235).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Панин. Генетический алгоритм для одной задачи ценообразования. // Труды ИВМиМГ СО РАН. 2009. серия Информатика. вып. 9. Р. 190–196.

Панин Артём Александрович, Новосибирский государственный университет, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 36-34-687, факс (383) 333-25-98,
e-mail: arteam1897@gmail.com

ТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

А. В. Плясунов

В работе рассматривается задача ценообразования, постановка которой приведена в [1]. Для этой задачи известны как точные алгоритмы решения, основанные на динамическом программировании [2], так и приближённые малотрудоёмкие алгоритмы решения на основе метаэвристик [3]. В данной работе предлагается новый точный алгоритм решения декомпозиционного типа. Интерес к подобному сорту алгоритмов, связан с успешным применением декомпозиции для решения весьма сложной в вычислительном отношении задачи о (r, p)–центроиде [4].

При декомпозиции получается координирующая задача с бесконечным числом ограничений. Предлагаемый алгоритм использует релаксированную координирующую задачу с конечным числом ограничений, в которой одна переменная является непрерывной, а остальные переменные булевы. Проверка ограничений исходной координирующей задачи осуществляется методами линейного программирования. На каждой итерации метода получаем верхние и нижние оценки оптимума. При их совпадении алгоритм завершает свою работу и предъявляет оптимальное решение. Приводятся результаты вычислительного эксперимента.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 09–06–00032) и АВЦП Рособразования (проект 2.1.1/3235).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Панин. Верхние оценки для одной задачи ценообразования. // Российская конференция "Дискретная оптимизация и исследование операций": материалы конференции (см. данный выпуск).

2. В. Т. Дементьев, Ю. В. Шамардин. Задача о выборе цен на продукцию при условии обязательного удовлетворения спроса. // Дискретный анализ и исследование операций.2002. Серия 2. Том 9, № 2, С. 31–40.

3. А. А. Панин. Генетический алгоритм для одной задачи ценообразования. // Труды ИВМиМГ СО РАН. 2009. серия Информатика. вып. 9. P. 190—196.

4. E. Alekseeva, N. Kochetova, Y. Kochetov, A. Plyasunov. Heuristic and Exact Methods for the Discrete (r | p)-Centroid Problem // P. Cowling and P. Merz (Eds.): EvoCOP 2010, LNCS 6022, Springer, Heidelberg, 2010. pp. 11–22.

Плясунов Александр Владимирович, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-87, e-mail: apljas@math.nsc.ru

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МОНОТОННОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

А. И. Поспелов

В работе рассматриваются многокритериальные целочисленные задачи следующего типа.

$$f\left(x\right) \rightarrow \min, \quad x \in X = \left\{ x \in X_0 | w_l\left(x\right) \leq 0,\, l = \overline{1,k} \right\},$$

где $X_0 = \{0, ..., K\}^n$ — целочисленный куб, $f(\cdot) : X_0 \rightarrow R^m$ — векторный критерии, $w(\cdot) : X_0 \rightarrow R^k$ — ограничения. Рассматривается случай монотонных критериев и ограничений, т.е. предполагается, что

$$f\left(x\right) = \left(u\left(x\right), v\left(x\right)\right), \quad x \in X_0,$$

где $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — такие векторнозначные функции, что $u(\cdot) : X_0 \rightarrow R^t$ и $v(\cdot) : X_0 \rightarrow R^{m-t}$ для некоторого целого t, $0 \leq t \leq m$, и при этом $\forall x',\ x'' \in X_0 : x'_s \geq x''_s,\ s = \overline{1,n}$,

$$u_i(x') \geq u_i(x''),\ i = \overline{1,t}, \quad v_j(x') \leq v_j(x''),\ j = \overline{1,m-t}, \quad w_l(x') \leq w_l(x''),\ l = \overline{1,k}.$$

К такому виду могут быть сведены многие дискретные многокритериальные прикладные задачи.

Для решения этой задачи предлагается использовать идеи метода разумных целей [1]. В рамках метода пользователю предоставляется визуализация оболочки Эджворта-Парето выпуклой оболочки множества критериальных точек, формально определяемой как $Y_C^* = conv(f(X)) + R^m$. На границе Y_C^* пользователь выбирает цель, по которой отбираются решения, критериальные точки которых близки к цели. В случае, когда альтернатив в задаче много и построение и поиск близких решений не может быть осуществлёны напрямую, возникает проблема аппроксимации множества Y_C^* задачи и поиска решений без явного вычисления и обработки всех критериальных точек.

Решение задачи аппроксимации может быть осуществлено алгоритмом, описанным в [2], основанным на синтезе методов полиэдральной аппроксимации выпуклых тел и идей метода ветвей и границ, строящим последовательности внешних и внутренних многогранных множеств, аппроксимирующих Y_C^* с заданной точностью.

Решение задачи поиска может быть осуществлено алгоритм, основанным на применении концепции ветвей и границ к многокритериальным монотонным целочисленным задачам, позволяющим по заданной цели находить эффективные по Парето решения, критериальные точки которых близки к цели.

Работа поддержана грантом РФФИ 10-01-00199.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. V. Lotov, V. A. Bushenkov, G. K. Kamenev. Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto frontier. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004.
2. А. И. Поспелов. Аппроксимация выпуклой оболочки Эджворта-Парето в многокритериальных задачах с монотонными критериями. Журн. вычисл. матем. и матем. физ.2009. Т. 49, № 10. С. 1765–1778.

Поспелов Алексей Игоревич, Учреждение Российской академии наук Институт системного программирования РАН, ул. А. Солженицына, дом 25, г. Москва, 109004, Россия, тел. +7(495) 912-56-59 (доб. 4432), факс +7(495) 912-15-24, e-mail:ap@ispras.ru

О МОЩНОСТЯХ МНОЖЕСТВ КОМБИНАТОРНЫХ ТИПОВ ТРИАНГУЛЯЦИЙ ИЗ ПОДКЛАССОВ ОПРЕДЕЛЁННОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВА ВСЕХ ТРИАНГУЛЯЦИЙ ТОЧЕЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Д. В. Груздев

Для d-мерного выпуклого многогранника (политопа) $M \subset \mathrm{R}^d$ через $\Gamma_i(M)$ обозначим множество его i-мерных граней, $i = -1, \ldots, d$, через $\partial(M)$ обозначим его границу и положим $\Gamma(M) = \bigcup_{i=-1}^{d} \Gamma_i(M)$ и $\Gamma^{\partial}(M) = \bigcup_{i=-1}^{d-1} \Gamma_i(M)$.

Конечное множество точек $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset \mathrm{R}^d$, выпуклая оболочка $[A]$ которого есть d-мерный политоп, называется *d-мерной точечной конфигурацией. Триангуляцией* d-мерной точечной конфигурации A называется такое множество $T = \{S_1, \ldots, S_t\}$ d-мерных симплексов $S_1, \ldots, S_t$ с вершинами из A, что их объединение есть политоп $[A]$ и пересечение любых двух симплексов из T является их общей гранью (возможно, пустой). Положим $M(T) = \bigcup_{j=1}^{t} S_j = [A]$, $\Gamma(T) = \bigcup_{j=1}^{t} \Gamma(S_j)$ и $\Gamma^{\partial}(T) = \{F \in \Gamma(T) \ : \ F \subseteq \partial([A])\}$, $\Gamma_i(T) = \bigcup_{j=1}^{t} \Gamma_i(S_j)$, $\Gamma_i^{\partial}(T) = \{F \in \Gamma_i(T) \ : \ F \in \Gamma^{\partial}(T)\}$, $\Gamma_i^{int}(T) = \Gamma_i(T) \backslash \Gamma_i^{\partial}(T)$ при $i = -1, \ldots, d$. Через $\mathcal{T}'_d$ обозначим множество всех триангуляций d-мерных точечных конфигураций, и положим $\mathcal{T}' = \bigcup_{d=0}^{+\infty} \mathcal{T}'_d$.

Триангуляция $T \in \mathcal{T}'$ называется *слаборегулярной* (weakly regular) [1], если существует такая регулярная (regular, правильная, см., например, [1]) триангуляция $T' \in \mathcal{T}'$, что симплициальные комплексы $\Gamma(T)$ и $\Gamma(T')$ изоморфны. Триангуляция T называется *разворачиваемой* (shellable), если существует такая последовательность ее симплексов $(S_1, \ldots, S_t)$, что $T = \{S_1, \ldots, S_t\}$ и при $l = 2, \ldots, t$ множество $\Gamma(S_l) \backslash \bigcup_{i=1}^{l-1} \Gamma(S_i)$ имеет единственный минимальный по включению элемент. Триангуляцию $T \in \mathcal{T}'$ назовём *симплициально политопиальной*, если для неё существует такой симплициальный политоп P, что симплициальные комплексы $\Gamma^{\partial}(T)$ и $\Gamma^{\partial}(P)$ изоморфны.

Через $\mathcal{T}^{WR}$, $\mathcal{T}^{Sh}$ и $\mathcal{T}^{SP}$ обозначим соответственно множества слаборегулярных, разворачиваемых и симплициально политопиальных триангуляций из $\mathcal{T}'$. Положим $\mathcal{T}^{int} = \{T \in \mathcal{T}' \ : \ \Gamma_0^{int}(T) \neq \emptyset\}$ и $\mathcal{T}'^{\partial} = \{T \in \mathcal{T}' \ : \ \Gamma_0^{\partial}(T) \backslash \Gamma_0(M(T)) \neq \emptyset\}$. При $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ положим $\mathcal{T}^0 = \mathcal{T}' \backslash \mathcal{T}$ и $\mathcal{T}^1 = \mathcal{T}$. Тогда $\mathcal{T}'$ разбивается на 32 попарно непересекающихся подкласса $\mathcal{T}_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} = (\mathcal{T}^{WR})^{i_1} \cap (\mathcal{T}^{Sh})^{i_2} \cap (\mathcal{T}^{SP})^{i_3} \cap (\mathcal{T}^{int})^{i_4} \cap (\mathcal{T}'^{\partial})^{i_5}$, где $i_1, \ldots, i_5 \in \{0, 1\}$. Триангуляции $T_1 \in \mathcal{T}'$ и $T_2 \in \mathcal{T}'$ называются *комбинаторно эквивалентными*, если симплициальные комплексы $\Gamma(T_1)$ и $\Gamma(T_2)$ изоморфны. *Множеством комбинаторных типов* триангуляций из $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ назовём такое множество триангуляций $C_{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}'$, что любые две триангуляции из $C_{\mathcal{T}}$ являются комбинаторно неэквивалентными, для каждой триангуляции из $\mathcal{T}$ существует комбинаторно эквивалентная ей триангуляция из $C_{\mathcal{T}}$ и для каждой триангуляции из $C_{\mathcal{T}}$ существует комбинаторно эквивалентная ей триангуляция из $\mathcal{T}$.

Теорема. *Для каждого из 20 подклассов $\mathcal{T}_{0,i_2,i_3,i_4,i_5}$, $\mathcal{T}_{1,1,1,i_4,i_5}$, где $i_2, \ldots, i_5 \in \{0, 1\}$, множество комбинаторных типов триангуляций данного подкласса является счётным. Подклассы $\mathcal{T}_{1,0,0,i_4,i_5}$, $\mathcal{T}_{1,0,1,i_4,i_5}$, $\mathcal{T}_{1,1,0,i_4,i_5}$ при $i_4, i_5 \in \{0, 1\}$ являются пустыми.*

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00545-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. C.W. Lee Regular triangulations of convex polytopes // DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. 1991. V. 4. P. 443–456.

Груздев Дмитрий Валентинович, Нижегородский гос. университет, пр. Гагарина, 23, Н.Новгород, 603950, Россия, тел. (831)462-33-60, e-mail: gruzdevdv@mail.ru

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД АНАЛИЗА ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

А. А. Заславский, А. Н.Шевлякова

Рассматривается следующая задача. Даны N матриц $X^1, \ldots, X^N \subset R^{n\times n}$ парных сравнений n объектов:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & i \succ^k j \\ \frac{1}{2} & i \sim^k j \\ 0 & j \succ^k i, \end{cases}$$

$i \succ^k j$, если по мнению k-го эксперта i-й объект лучше j-го, $i \sim^k j$, если объекты равноценны. Пусть $\widetilde{X}$ — матрица, построенная по правилу большинства:

$$\widetilde{x}_{ij} = \begin{cases} 1 & \sum_{l=1}^N x_{ij}^l > \sum_{l=1}^N x_{ji}^l \\ \frac{1}{2} & \sum_{l=1}^N x_{ij}^l = \sum_{l=1}^N x_{ji}^l \\ 0 & \sum_{l=1}^N x_{ij}^l < \sum_{l=1}^N x_{ji}^l. \end{cases}$$

Требуется найти матрицу X, ближайшую в некотором смысле к $\widetilde{X}$ и транзитивную, т.е. не содержащую подматриц вида

$$\begin{pmatrix} - & 1 & 0 \\ 0 & - & 1 \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1 & 1/2 \\ 0 & - & 1 \\ 1/2 & 0 & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - & 1/2 & 1 \\ 1/2 & - & 1/2 \\ 0 & 1/2 & - \end{pmatrix}.$$

Каждой матрице парных сравнений X сопоставим точку в R^n с координатами $(s_1, \ldots, s_n)$, где $s_i = \sum_j x_{ij}$ — сумма очков i-го объекта, $s_1 \le s_2 \le \cdots \le s_n$. Пусть M — выпуклая оболочка всех таких точек. В работе [1] доказана следующая

Теорема. M является $(n-1)$-мерным многогранником, комбинаторно эквивалентным соответствующему кубу, а его вершины соответствуют транзитивным матрицам. Этот многогранник вписан в сферу, центр O которой задается условиями $s_2 - s_1 = s_3 - s_2 = \cdots = s_n - s_{n-1} = 1/2$, а две его вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда одно из соответствующих им разбиений получается из другого "склеиванием" двух соседних классов в один.

Построим точку $P \in M$, соответствующую матрице $\widetilde{X}$, и будем искать ближайшую к P вершину M. Доказанная теорема позволяет свести задачу к максимизации линейной функции на M. Причем алгоритм ее решения имеет линейную по n сложность.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00156.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А.Заславский. Геометрия парных сравнений. // Автоматика и телемеханика. 2007. №3. С. 181–186.

Заславский Алексей Александрович, ЦЭМИ РАН, Нахимовский пр., д. 47, Москва, 117418, Россия, тел. (8-499) 724-24-48, факс (495) 718-96-15, e-mail:zasl@cemi.rssi.ru

Skeleton: ПРОГРАММА ДЛЯ РАБОТЫ С ПОЛИЭДРАМИ

Н. Ю. Золотых, С. С. Лялин

Хорошо известно, что любой выпуклый полиэдр $P \subseteq \mathbf{R}^d$ может быть представлен любым из следующих двух способов: как сумма линейной, конической и выпуклой оболочек конечных систем векторов (явное описание) и как множество решений системы линейных уравнений и неравенств (неявное описание). Аналогично, произвольный полиэдральный конус $C \subseteq \mathbf{R}^d$ может быть представлен как сумма линейной и конической оболочек конечных систем векторов и как множество решений системы линейных однородных уравнений и неравенств. Задача перехода от явного описания полиэдра к неявному и обратно является одной из центральных в теории систем линейных неравенств. Заметим, что указанная задача для полиэдров стандартным образом сводится к соответствующей задаче для конусов.

Один из известных и хорошо зарекомендовавших себя алгоритмов, решающих поставленные задачи, — метод двойного описания (double description method) [1], известный также как алгоритм Моцкина–Бургера. Существует несколько известных программ, реализующих различные модификации этого метода, например, [2], [3].

Ускоренная модификация метода двойного описания, а также ее программная реализация Skeleton `http://www.uic.nnov.ru/~zny/skeleton` представлена в [3]. Текущая версия программы поддерживает арифметику чисел с плавающей запятой двойной точности `double`, целочисленную арифметику `long int` и целочисленную арифметику произвольной точности. Разработан интерфейс с системами Matlab и Python. Также среди новых возможностей — построение списков инциденций и смежности. Skeleton использует библиотеку Arageli `http://www.arageli.org`. На сайте библиотеки доступна возможность удаленного вызова программы. В [4] описана параллельная реализация программы Skeleton.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00545-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моцкин Т.С., Райфа Х., Томпсон Дж.Л., Тролл Р.М. Метод двойного описания // Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С. 81–109.

2. Fukuda K., Prodon A. Double description method revisited // Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag: 1996. V. 1120. P. 91–111.

3. Золотых Н.Ю. Новая модификация метода двойного описания для построения остова многогранного конуса // III Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения»: Материалы конференции. Омск: изд-во ОмГТУ, 2006. С. 140.

4. Золотых Н.Ю., Лялин С.С. Параллельный алгоритм нахождения общего решения системы линейных неравенств // Вестник Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. 2009. № 5. С. 193–199.

Золотых Николай Юрьевич, Лялин Сергей Сергеевич, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, пр. Гагарина, 23, г. Нижний Новгород, 603950, Россия, тел. (8-831) 462-33-60, e-mail: Nikolai.Zolotykh@gmail.com, Sergey.Lyalin@gmail.com

МНОГОГРАННИКИ ЗАДАЧИ ВЫПОЛНИМОСТЬ ЯВЛЯЮТСЯ ГРАНЯМИ МНОГОГРАННИКА КОММИВОЯЖЕРА

А. Н. Максименко

Пусть дано множество $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_d\}$ булевых переменных и некоторая булева формула C в конъюнктивной нормальной форме (КНФ). Набор значений переменных из U называется выполняющим C, если при их подстановке формула C становится истинной. Рассмотрим множество $X \subset R^d$ характеристических векторов всех выполняющих C наборов значений переменных. Выпуклая оболочка, натянутая на X, обычно называется многогранником задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ. Обозначим его $P(U, C)$.

Теорема. *Каждый многогранник $P(U, C)$ является гранью многогранника T_n асимметричной задачи коммивояжера, где $n = |U| + 2 \cdot len(C)$ — число городов в задаче коммивояжера, $len(C)$ — длина формулы C в литералах.*

Из того, что любая булева функция может быть выражена в КНФ, следует, что любой d-мерный 0/1-многогранник является многогранником задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ и, следовательно, гранью многогранника коммивояжера. Заметим здесь, что длина формулы C в литералах может достигать экспоненциальной величины $d2^d$. Таким образом, одним из следствий сформулированной теоремы является результат Биллера и Сарангараяна [1] о том, что любой 0/1-многогранник есть грань многогранника коммивояжера.

Другое, существенно более полезное, следствие может быть получено, если учесть, что для многогранников задач из класса NP длина формулы C полиномиальна. При этом, правда, могут потребоваться дополнительные переменные. То есть, чтобы остаться в рамках полиномиального роста размерности, нам следует рассматривать не только сами многогранники $P(U, C)$, но и их проекции.

Следствие. *Многогранник любой задачи из класса NP является проекцией некоторой грани многогранника коммивояжера. При этом размерность последнего ограничена сверху полиномом от размерности первого.*

Работа проводилась при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы.

ЛИТЕРАТУРА

1. L.J. Billera, A. Sarangarajan. All 0-1 polytopes are travelling salesman polytopes // Combinatorica. 1996. V. 16. P. 175–188.

Максименко Александр Николаевич, Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Союзная, д. 144, г. Ярославль, 150008, Россия,
тел. (4852) 24-82-03, e-mail: maksimenko_a_n@mail.ru

ПОДГРУППА ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МНОГОГРАННИКА ПАРОСОЧЕТАНИЙ

Р. Ю. Симанчёв

Паросочетанием в графе $G = (VG, EG)$ будем, как обычно, называть любое множество попарно несмежных ребер. Семейство всех паросочетаний графа G обозначим через $\mathcal{M}(G)$.

Пусть $\mathbf{R}^G$ – пространство векторов, компоненты которых индексированы элементами множества EG. Для всякого $R \subseteq EG$ определим его вектор инциденций $x^R \in \mathbf{R}^G$ по правилу: $x^R_e = 1$ при $e \in R$, $x^R_e = 0$ при $e \notin R$. Многогранник

$$MP(G) = conv\{x^H \in \mathbf{R}^G \mid H \in \mathcal{M}(G)\}$$

назовем многогранником паросочетаний. Так как всякое ребро графа G является паросочетанием, то $\dim MP(G) = |EG|$.

Непрерывное преобразование $\varphi : \mathbf{R}^G \to \mathbf{R}^G$, обладающее свойством $\varphi(MP(G)) = MP(G)$, называется симметрией многогранника $MP(G)$. Очевидно, что множество всех симметрий образует группу относительно композиции преобразований.

В настоящей работе излагаются следующие результаты.

1. Всякая симметрия многогранника $MP(G)$ является невырожденным аффинным преобразованием пространства $\mathbf{R}^G$, то есть представима в виде $\varphi(x) = Ax + h$, где A – невырожденная квадратная матрица порядка $|EG|$, $h \in \mathbf{R}^G$.

2. Симметрии могут эффективно использоваться:

– при построении новых фасетных неравенств многогранников [1], а именно, если $\varphi : \mathbf{R}^G \to \mathbf{R}^G$ – симметрия многогранника $MP(G)$ и $F \subset MP(G)$ – фасета, то $\varphi(F)$ тоже фасета многогранника $MP(G)$;

– при разработке алгоритмов понижения размерности задачи [2].

3. Симметрия вида $\varphi(x) = Ax$ (то есть $h = 0$) называется линейной. Ясно, что линейные симметрии образуют подгруппу в группе всех симметрий многогранника. В работе показано, что подгруппа линейных симметрий многогранника $MP(G)$ изоморфна группе автоморфизмов графа G.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bolotashvili G., Girlich E., Kovalev M. New Facets of the Linear Ordering Polytope. // SIAM Jornal on Discrete Mathematics. 1999. V. 12. P. 326–336.

2. Червяков О.В. Афинные симметрии многогранника системы независимости с единичным сдвигом.//Дискретный анализ и исследование операций. Новосибирск, 1999. Серия 1. Том 6. №2. с. 82–96.

Симанчев Руслан Юрьевич, Омский государственный университет, пр-т Мира, 55-а, Омск, 644010, Россия, тел. (83812) 22-56-96, e-mail:osiman@rambler.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ МИНОРОВ МАТРИЦЫ ИНЦИДЕНТНОСТИ d-МЕРНОГО КУБА

Е. Б. Титова

Рассмотрим матрицу ограничений d–индексной аксиальной транспортной задачи $T = T_{d-1,d}(2)$ при $n = 2$ (обозначения и определение см., например, [1]). Ее можно интерпретировать как матрицу инцидентности d–мерного куба, 2^d столбцов которой задают все вершины куба, $2d$ строк — грани максимальной размерности (фасеты), 1 ставим в том и только том случае, когда вершина инцидентна фасете, и 0 в противном случае. Удалим из матрицы T, например, все четные строки (то же можно проделать и с нечетными) и добавим строку, состоящую из единиц; полученную матрицу с рангом $r = d + 1$ обозначим T_d. Таким образом, зададим конус, соответствующий выпуклой оболочке куба, заданного неравенствами $0 \leq x_j \leq 1$ $(1 \leq j \leq d)$. С другой стороны матрицу T_d можно задать следующим образом: $T_d = \left(\frac{\mathbf{1}^{1\times 2^d}}{B_d}\right)$, где $\mathbf{1}^{1\times k}$ — строка, состоящая из k единиц, B_d — матрица, столбцами которой являются всевозможные различные векторы, содержащие 0 и 1, длины d.

В [2] был получен характеристический многочлен матрицы $T_dT_d^\top$:

$$\det(\lambda E_{d+1} - T_dT_d^\top) = (\lambda - 2^{d-2})^{d-1}(\lambda^2 - (5+d)2^{d-2}\lambda + 4^{d-1}).$$

Обозначим сумму квадратов миноров порядка j матрицы T_d через $\sigma_j(d)$, тогда среднее значение квадрата минора $\delta_j(d) = \sigma_j(d)/\binom{2^d}{j}\binom{d+1}{j}$. Ранее автором рассматривалось поведение величины $\delta_j(d,n)$ матрицы $T_{s,d}(n)$ при фиксированном d, $1 \leq s \leq d$ и $n \to \infty$ (см., напр., [1]).

Теорема. Если $j = r$, то $\delta_r(d) = \sqrt{2\pi}/e(d+1)^{3/2}((d+1)/4e)^{d+1}(1+o(1))$ при $d \to \infty$.

Если $j < r$, $C = const$, то $\delta_j(d) = C(d^2/j)2^{(d-2)(d-1-2j)}(j/e)^j(1+o(1))$ при $d \to \infty$.

Следствие. Среднее значение суммы квадрата минора матрицы инцидентности d–мерного куба $\delta_j(d) \to \infty$ с экспоненциальной скоростью при $d \to \infty$ и $3 \leq j \leq r$.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00545-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Титова Е.Б., Шевченко В.Н. Среднее значение квадрата минора матрицы ограничений аксиальной транспортной задачи. //Автоматика и телемеханика, №2, 2004. С.113–117.

2. Титова Е.Б., Шевченко В.Н. Сингулярный многочлен матрицы инциденцмй d-мерного куба. // Материалы IX Международного семинара "Дискретная математика и ее приложения"(Москва, МГУ, 18-23 июня 2007 г.) – М.: Изд-во мехмата МГУ, 2007. С.250–253.

Титова Елена Борисовна, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, пр. Гагарина 23, Нижний Новгород, 603950, Россия, тел. (831) 462-33-60, e-mail: Helen_tit@rambler.ru

МАТРИЧНАЯ АНАЛОГИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ

Р. Т. Файзуллин

В работе установлена аналогия между задачей 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ и основными задачами линейной алгебры. Показано, что задача 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ может быть сведена к системе линейных алгебраических уравнений:

$$Ax = f$$

относительно вектора вещественных переменных, принимающих значения 0 или 1, с симметричной матрицей A, и правой частью, компоненты которой могу принимать целочисленные значения в известном дипазоне. Доказана теорема о соответствии минимума функционала специального вида, относительно неизвестных коэффициентов по базису собственных векторов матрицы решению задачи 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ.

Показано, что задача 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ может быть сведена к задаче нахождения точек (с целочисленными координатами) пересечения гиперплоскости, определяемой расширенной, включением компонент неизвестных правых частей, системой уравнений и овоидами, поверхность которых описывается суммами компонент неизвестных решений и правых частей. Предложен алгоритм поиска целочисленных точек на пересечении и представлена процедура распараллеливания по вариантам для решения поставленной задачи, для каждого из возможных овоидов.

В результате численных экспериментов проведенных для трудно решаемых КНФ, ассоциированных с задачами факторизации установлено, что соответствующие матрицы не только симметричны, но и всегда положительно определены.

Оказалось, что, используя это обстоятельство, и одновременно применяя процедуру минимизации функционалов из [1], удается с вероятностью превышающей 0.8 определять до четверти нулевых битов решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.И. Дулькейт, Р.Т. Файзуллин, И.Г. Хныкин Алгоритм минимизации функционалов ассоциированных с 3-SAT и его практические применения // Компьютерная оптика. Самара – Москва, ИСОИ РАН, СГАУ, 2008. Т. 32, № 1. С. 68–73.

Файзуллин Рашит Тагирович, ГОУ ВПО Омский государственный технический университет, Проспект Мира, 11, Омск, 644050, Россия, тел. (83122) 62-87-07, факс (83812) 65-33-89, e-mail:ftr@omgtu.ru

О МИНИМАЛЬНЫХ РЕБЕРНЫХ 1-РАСШИРЕНИЯХ НАПРАВЛЕННЫХ ЗВЕЗД

М. Б. Абросимов

Звездой называется полный двудольный граф $K_{1,n}$, в котором одна вершина смежна с n несмежными вершинами. *Направленной звездой* назовём диграф, симметризация которого является звездой. Направленную звезду будем обозначать $Z_{m,n}$, где m и n — число вершин с соответственно исходящей и входящей дугой. Вершину, являющуюся концом или началом каждой дуги звезды, будем называть *центральной.*

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным реберным k-расширением* (k — натуральное) n-вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

1. G^* является реберным k-расширением G, то есть граф G допускает вложение в каждый граф, получающийся из G^* удалением любых его k ребер;
2. G^* содержит n вершин, то есть $|V^*| = |V|$;
3. α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

В работе [1] дается полное описание минимальных вершинных и реберных k-расширений звезд. Основной результат данной работы устанавливает вид минимальных реберных 1-расширений для направленных звезд. Обозначим через $ZK_{m,n,p}$ — семейство графов, получающихся из звезды $Z_{m,n}$ добавлением $p-1$ центральной вершины, соединением их между собой и центральной вершиной звезды $Z_{m,n}$ парами встречных дуг. Каждая из добавленных центральных вершин соединяется m входящими и n исходящими дугами с произвольными источниками и стоками звезды $Z_{m,n}$. По описанной схеме для заданной звезды в общем случае может быть построено много графов.

Теорема. Относительно минимальных реберных 1-расширений направленных звезд $Z_{m,n}$ справедливо следующее:
1) при $m = n = 1$ звезда $Z_{1,1}$ имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное реберное 1-расширение, которым является циклическая тройка;
2) при $mn > 1$ звезда $Z_{m,n}$ имеет минимальные реберные 1-расширения вида $K_{1,m+n}$, и графы, построенные по схемам $ZK_{m-1,n,2}$ и $ZK_{m,n-1,2}$;
3) при $m > 0, n = 0$ звезда $Z_{m,n}$ имеет минимальные реберные 1-расширения вида $ZK_{m-1,n,2}$;
4) при $m = 0, n > 0$ звезда $Z_{m,n}$ имеет минимальные реберные 1-расширения вида $ZK_{m,n-1,2}$;
5) при $m = 2, n = 1$ звезда $Z_{2,1}$ имеет еще одно минимальное реберное 1-расширение — турнир, получающийся из циклической тройки добавлением одной вершины и дуг от нее во все остальные вершины;
6) при $m = 2, n = 1$ звезда $Z_{2,1}$ имеет еще одно минимальное реберное 1-расширение — турнир, получающийся из циклической тройки добавлением одной вершины и дуг в нее из всех остальных вершин.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.Б. Абросимов. Минимальные расширения неориентированных звезд. // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов: СГУ. 2006. Вып 7. С. 3–5.

Абросимов Михаил Борисович, Саратовский государственный университет, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия, тел. (8452) 21-36-19, факс (8452) 27-85-29, e-mail: mic@rambler.ru

ОБОБЩЕНИЯ ГИПОТЕЗ СТЕЙНБЕРГА И ХАВЕЛА О 3-РАСКРАШИВАЕМОСТИ ПЛОСКИХ ГРАФОВ

О. В. Бородин, А. Н. Глебов

Две известные гипотезы о 3-раскрашиваемости плоских графов состоят в том, что любой плоский граф, не содержащий циклов длины 4 и 5, является 3-раскрашиваемым (гипотеза Стейнберга, 1976), и что существует такое число $d > 0$, что любой плоский граф с минимальным расстоянием между 3-циклами не менее d является 3-раскрашиваемым (гипотеза Хавела, 1970). В 2005 г. Бородин высказал предположение о том, что любой плоский граф, в котором 3-циклы не имеют общих ребер с циклами длины 4 и 5, является 3-раскрашиваемым (новосибирская гипотеза о 3-раскраске). Ясно, что новосибирская гипотеза усиливает гипотезу Стейнберга и не вводит жестких запретов на длины циклов в графе.

В 2007-09 гг. авторами доклада были получены результаты, объединяющие черты трех указанных гипотез и позволяющие приблизиться к решению каждой их них. Во-первых, было доказано, что любой плоский граф без 5-циклов, в котором любые два 3-цикла находятся на расстоянии не меньше 2, является 3-раскрашиваемым. Во-вторых, была установлена 3-раскрашиваемость плоских графов, в которых 3-циклы не имеют общих ребер с циклами длины от 4 до 7, что явилось усилением ранее полученных результатов о том, что любой плоский граф, не содержащий циклов длины от 4 до 7, является 3-раскрашиваемым [1], и что плоские графы, в которых 3-циклы не имеют общих ребер циклами длины от 4 до 9, также 3-раскрашиваемы [2]. Еще один полученный нами результат состоит в том, что если в плоском графе 5-циклы не имеют общих ребер с 3-циклами, и любые два 3-цикла находятся на расстоянии не меньше 4, то такой граф 3-раскрашиваем. Целью настоящего доклада является усиление последнего результата, а именно, теорема о том, что любой плоский граф, в котором 5-циклы не имеют общих ребер с 3-циклами, а любые два 3-цикла находятся на расстоянии не меньше 3, является 3-раскрашиваемым.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00516 и 09-01-00244).

ЛИТЕРАТУРА

1. Borodin O. V., Glebov A. N., Raspaud A., Salavatipour M. R. Planar graphs without cycles of length from 4 to 7 are 3-colorable. JCTB 93 (2005) 303–311.

2. Borodin O. V., Glebov A. N., Jensen T. R., Raspaud A. Planar graphs without triangles adjacent to cycles of length from 3 to 9 are 3-colorable. // Сибирские электронные математические известия (http://semr.math.nsc.ru). 2006. Т. 3. С. 428–440.

Бородин Олег Вениаминович, Глебов Алексей Николаевич, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383)363-45-46, факс (383)333-25-98,
E-mail: brdnoleg@math.nsc.ru, angle@math.nsc.ru

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УРАВНОВЕШЕННОСТИ ГИПЕРГРАФА И БУЛЕВОЙ МАТРИЦЫ

В. В. Быкова

Рассматривается одна из проблем полиэдральной комбинаторики — задача распознавания уравновешенности $(0,1)$–матриц. Булева $(n \times m)$–матрица A называется уравновешенной, если она не содержит квадратных подматриц нечетного порядка с суммами элементов в каждой строке и каждом столбце, равным 2. Известно, что если A — уравновешенная матрица, то многогранник $M = \{x : Ax \leq e, x \geq 0\}$ для единичного вектора e является целочисленным [1]. До сих пор открыт вопрос о сложности задачи распознавания уравновешенности $(0,1)$-матриц [2]. В настоящей работе получены полиномиальные тесты для данной задачи. Они основаны на свойствах гиперграфов.

Пусть X — конечное множество и U — семейство непустых подмножеств множества X, где $|X| = n$, $|U| = m$. Пару $H = (X, U)$ называют (n,m)-гиперграфом. Всякий (n,m)-гиперграф однозначно определен своей $(n \times m)$-матрицей инциденций A и геометрически описывает комбинаторную структуру семейства U. Двойственным к H считают гиперграф H^* с матрицей инциденций A^T. Гиперграф H полагают уравновешенным, если его матрица инциденций A уравновешенная. В [3] установлено, что уравновешенные гиперграфы необходимо бикомплектные и наследственно бихроматические. В данной работе доказаны следующие высказывания.

Утверждение 1. Гиперграф H уравновешен тогда и только тогда, когда он бикомплектен, а его реберный граф $L(H)$ совершенный.

Следствие 2. Если гиперграфы H и H^* одновременно М-ацикличны, то H уравновешен.

Следствие 3. Если гиперграфы H и H^* одновременно являются древовидными, то H уравновешен.

Критерий, определяемый утверждением 1, трудно проверяем. Между тем, вытекающие из него следствия 2 и 3 дают эффективные достаточные условия уравновешенности, поскольку классы М-ациклических и древовидных гиперграфов легко распознаются на основе полиномиальных элиминационных алгоритмов, приведенных в [4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.К. Кравцов. Многогранники, графы, оптимизация. М.: Наука, 1981.
2. В.А. Бондаренко, А.Н. Максименко. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. М.: Изд–во ЛКИ, 2008.
3. А.А. Зыков. Гиперграфы // УМН. 1974. Т. 29. Вып. 6. С. 89–154.
4. В.В. Быкова. Полиномиальные достаточные условия бихроматичности гиперграфа // Вестник КрасГУ, серия физ.–мат. науки. 2006. № 7 С. 98–106.
5. О.И. Мельников. Реализации гиперграфа деревьями минимального диаметра // Дискретная математика. 1997. Т. 9. Вып. 4. С. 91–97.

Быкова Валентина Владимировна, Институт математики, Сибирский федеральный университет, пр-т Свободный, 79, Красноярск, 660041, Россия, тел. (3912) 448222, факс (3912) 448626. E-mail: bykvalen@mail.ru

ЭФФЕКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ С ГАРАНТИРОВАННЫМИ ОЦЕНКАМИ ДЛЯ МЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДВУХ КОММИВОЯЖЕРОВ НА МАКСИМУМ

А. Н. Глебов, А. В. Гордеева

В докладе рассматривается задача о двух коммивояжерах на максимум (далее 2–PSP–max), являющаяся обобщением классической задачи коммивояжера (TSP–max), и состоящая в нахождении двух реберно–непересекающихся гамильтоновых циклов с максимальным суммарным весом ребер в полном неориентированном графе. Отдельно исследованы случаи, когда весовые функции ребер для обоих циклов одинаковы, и когда эти функции различны. В обоих случаях предполагается, что веса ребер удовлетворяют метрическому ограничению (неравенству треугольника).

Для метрической задачи одного коммивояжера на максимум Косточкой и Сердюковым [1] в 1985 г. был предложен полиномиальный приближенный алгоритм с оценкой точности 5/6. В 2009 г. Ковалик и Муха [3] для этой же задачи построили эффективный алгоритм с оценкой 7/8. Для задачи 2–PSP–max с произвольной весовой функцией, одинаковой для обоих циклов, Агеев, Бабурин и Гимади [2] получили эффективный приближенный алгоритм с оценкой 3/4.

Основываясь на идеях из [1], нами построен полиномиальный приближенный алгоритм с асимптотической оценкой точности 5/6 для метрического случая задачи 2–PSP–max с одинаковыми весовыми функциями. Для случая, когда весовые функции различны, благодаря использованию на определенном этапе алгоритма из [3] с последующим перестроением найденного решения, нам удалось получить эффективный алгоритм, имеющий асимптотическую оценку 11/16.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00516 и 09-01-00244).

ЛИТЕРАТУРА

1. Косточка А. В., Сердюков А. И. Полиномиальные алгоритмы с оценками 3/4 и 5/6 для задачи коммивояжера на максимум // Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1985 г., вып. 26. С. 55–59.
2. Агеев А. А., Бабурин А. Е., Гимади Э. Х. Полиномиальный алгоритм с оценкой 3/4 для нахождения двух реберно–непересекающихся гамильтоновых циклов максимального суммарного веса // Дискретный анализ и исследование операций, Сер. 1. 2006. Т. 13, № 2, С. 11–20.
3. Kowalik L., Mucha M. Deterministic 7/8-approximation for the metric maximum TSP. Theoretical Computer Science. 2009. V. 410. Is. 47–49. P. 5000–5009.

Глебов Алексей Николаевич, Институт математики им.С.Л.Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-45-46, факс (383) 333-25-98. E-mail: angle@math.nsc.ru
Гордеева Анастасия Васильевна, Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. 8-923-131-64-48.
E-mail: anast.gordeeva@gmail.com

ЗАДАЧА О ДВУХ КОММИВОЖЕРАХ НА МИНИМУМ В ПОЛНОМ ГРАФЕ С РАЗЛИЧНЫМИ ВЕСОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

А. Н. Глебов, Д. Ж. Замбалаева

В последнее время в работах многих авторов рассматривается задача о двух коммивояжерах, состоящая в поиске в полном графе двух реберно-непересекающихся гамильтоновых циклов минимального или максимального суммарного веса. Задача исследуется как в случае произвольной или метрической весовой функции, так и для более специального класса графов с весами ребер один и два. Для задачи о двух коммивояжерах на минимум с одинаковыми весовыми функциями, принимающими значения 1 и 2 (задача 2–PSP–min(1,2)), Гимади, Глазковым и Глебовым в работе [1] был получен ряд полиномиальных приближенных алгоритмов, наилучший из которых имеет оценку точности 6/5.

Нами рассматривалась задача 2–PSP–min(1,2) в случае, когда весовые функции для двух циклов различны. Для этой задачи был получен полиномиальный приближенный алгоритм с оценкой точности 4/3. В основу алгоритма положена идея метода из [2], заключающаяся в построении и последовательном "улучшении" двух реберно-непересекающихся туров (наборов цепей и циклов) из ребер единичного веса для двух весовых функций, и последующем замыкании этих туров в непересекающиеся гамильтоновы циклы. Под "улучшением" туров понимается такое их локальное преобразование, при котором уменьшается либо общее число цепей и циклов, составляющих туры, либо число одновершинных цепей (синглов). Для того чтобы гарантировать возможность улучшающего преобразования в случае, если нужное качество решения еще не достигнуто, применяется введенная в [2] техника так называемых зарядов вершин, то есть чисел, определяемых для каждой вершины графа на основе туров оптимального решения, и последующего перераспределения этих зарядов между вершинами графа с сохранением их суммы.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 08-01-00673 и 08-01-00516)

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э.Х., Глазков Ю.В., Глебов А.Н. Приближенные алгоритмы решения задачи о двух коммивояжерах в полном графе с весами ребер 1 и 2 // Дискретный анализ и исследование операций, Сер. 2. 2007. Т. 14, № 2. С. 41–61.

2. Berman P., Karpinski M. 8/7 approximation algorithm for (1,2)–TSP. // Proc. 17th ACM–SIAM SODA, 2006. P. 641–648.

Глебов Алексей Николаевич, Замбалаева Долгор Жамьяновна, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (8-383-2) 363-45-46, e-mail: angle@math.nsc.ru, dolgor@ngs.ru

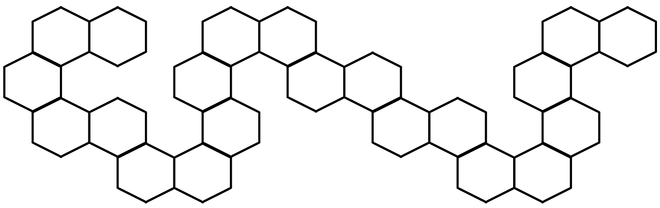
ИНДЕКС ВИНЕРА ФИБОНАЦЕНОВ

А. А. Добрынин

Рассматривается инвариант связных неориентированных графов G, равный сумме расстояний между всеми парами вершин графа в естественной метрике:

$$W(G) \; = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} d(u,v).$$

Этот инвариант, называемый индексом Винера, интенсивно изучается в теории графов и имеет многочисленные приложения. Фибонацены образуют класс плоских графов, каждая внутреняя грань которых ограничена шестиугольником. Каждая неконцевая грань графа имеет в точности две смежных с ней грани, и любые три грани в фибонаценах не могут соединяться линейно, образуя зигзаг (см. рис.).



Этот класс включает в себя молекулярные графы ароматических углеводородов. Числа совершенных паросочетаний в фибонаценах при возрастании числа граней являются числами Фибоначчи (отсюда название графов).

Традиционно свойства инвариантов исследуются для индивидуальных графов. В докладе рассказывается об изучении так называемых коллективных свойств индекса Винера для фибонаценов. Под этим пониматся изучение сумм значений индекса для подмножеств графов. В частности, получены факты о строении множеств вырождения индекса (множеств графов с одинаковым значением инварианта), описаны подмножества $\mathcal{G}$ фибонаценов с h гранями, для которых

$$W(\mathcal{G}) = \sum_{G\in\mathcal{G}} W(G) = |\,\mathcal{G}|\,(4h^3 + 16h^2 + 6h + 1).$$

Работа поддержана грантом РФФИ 8–01–00673.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Добрынин, И. Гутман. Индекс Винера для деревьев и графов гексагональных систем. Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1998. Т. 5, №2. С. 34-60.
2. A.A. Dobrynin, I. Gutman, S. Klavžar, P. Zigert. Wiener index of hexagonal systems. Acta Appl. Math. 2002. V. 72. P. 247–294.
3. I. Gutman, S. Klavžar. Chemical graph theory of fibonacenes. MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 2006. V. 55. P. 39–54.
4. N. Trinajstić. Chemical graph theory. Boca Raton: CRC Press, 1992.

Добрынин Андрей Алексеевич, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Ак. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-11, факс (383) 333-25-98, e-mail: dobr@math.nsc.ru

К ВОПРОСУ О ТОЧНЫХ ВЕРШИННЫХ k-РАСШИРЕНИЯХ ГРАФОВ ПРИ $k > 1$

А. А. Долгов

Граф H называется *точным вершинным k-расширением* (ТВ-kР) графа G, если граф G изоморфен каждому подграфу H, получающемуся путем удаления любых его k вершин и всех связанных с ними дуг (ребер).

На данный момент известно всего три бесконечных семейства ТВ-kР графов при любом $k > 0$. Первые два семейства были указаны Харари и Хейзом в статье 1996 года [3], это семейство вполне несвязных графов O_n и семейство полных неориентированных графов K_n. Позже М.Б. Абросимовым среди диграфов было выделено семейство ТВ-kР при любом $k > 0$, это семейство транзитивных турниров T_n [2]. Кроме того, М.Б. Абросимовым было показано, что среди неориентированных графов не существует других графов, кроме O_n и K_n, имеющих ТВ-kР при $k > 1$ [1]. Также удалось установить, что симметризация ТВ-kР орграфа, всегда является ТВ-kР подходящего неориентированного графа [2].

Удалось доказать следующее утверждение:

Теорема. Если орграф $G = (V, \alpha)$ является ТВ-kР, тогда и его части $G^* = (V, \alpha^*)$, где

$$\alpha^* = \{(x, y)|x, y \in V, (x, y) \in \alpha \& (y, x) \in \alpha\}$$

и $G^{**} = (V, \alpha^{**})$, где

$$\alpha^{**} = \{(x, y)|x, y \in V, (x, y) \in \alpha \& (y, x) \notin \alpha\}$$

также должны являються ТВ-kР.

Из теоремы неспосредственно следует, что среди орграфов, имеющих встречные дуги, не может быть графов, имеющих ТВ-kР при $k > 1$.

Для случая диграфов удалось показать, что T_n — это единственное семейство ТВ-kР, все представители которого являются бесконтурными графами. Любое другое ТВ-kР обязательно будет сильносвязным графом. Также удалось доказать, что среди сильносвязных турниров не может существовать графа, являющегося ТВ-kР при любом $k > 1$.

Такие образом, существует только три семейства точных вершинных k-расширений графов при любом $k > 0$. Это полные и вполне несвязные графы в неориентированном случае и транзитивные турниры для случая ориентированных графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.Б. Абросимов. Минимальные расширения дополнений графов. // Теоретические задачи информатики и ее приложений. Саратов:СГУ. 2001. Вып.4. С.11–19.

2. М.Б. Абросимов. Минимальные расширения транзитивных турниров. // Вестник ТГУ. Приложение. 2006. № 17. С. 187–190.

3. F. Harary, J.P. Hayes. Node fault tolerance in graphs.//Networks. 1996. V. 27. P. 19–23.

Долгов Александр Алексеевич, Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия,
тел. (845-2) 21-36-19, e-mail: Dolgov.A.A@gmail.com

ЭФФЕКТИВНЫЕ ДОМИНИРУЮЩИЕ МНОЖЕСТВА БЛИНЧИКОВОГО ГРАФА

Е. В. Константинова, М. М. Киселькова

Независимое множество D вершин в графе называется эффективным доминирующим множеством, если каждая вершина не из D смежна ровно с одной вершиной в D. Эффективные доминирующие множества графов Кэли на симметрической группе исследовались в [1], где было показано существование таких множеств в блинчиковом графе. Также известно, что блинчиковые графы широко используются для представления компьютерных сетей (the pancake networks), а эффективные доминирующие множества находят свое применение в алгоритмах на сетях [2].

Блинчиковый граф определяется следующим образом. Рассмотрим симметрическую группу S_n перестановок $\pi = [\pi_1\pi_2 \dots \pi_n]$, где $\pi_i = \pi(i)$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$, и ее порождающее множество $R = \{r_i \in S_n,\ 1 < i \leq n\}$ всех префикс–реверсалов r_i, меняющих порядок элементов внутри интервала $[1, i]$, $1 < i \leq n$, перестановки π при умножении на нее справа: $[\pi_1 \dots \pi_i\pi_{i+1} \dots \pi_n]r_i = [\pi_i \dots \pi_1\pi_{i+1} \dots \pi_n]$. Тогда граф P_n, $n \geq 2$, определяется как граф Кэли $P_n = (S_n, R)$ на симметрической группе S_n с порождающим множеством R. Он является вершинно–транзитивным $(n-1)$–регулярным неориентированным графом без петель и кратных ребер порядка $n!$. Данный граф получил свое имя благодаря нерешенной "блинчиковой" проблеме (the pancake problem) [3], состоящей в определении диаметра данного графа [4].

В настоящей работе дается характеризация эффективных доминирующих множеств блинчикового графа. В частности, доказывается следующий факт.

Теорема. В графе P_n, $n \geq 3$, имеется ровно n эффективных доминирующих множеств, причем следующего вида: $D_k = \{[k\,\pi_2 \dots \pi_n],\ \pi_j \in \{1, \dots, n\} \backslash \{k\},\ 2 \leq j \leq n\}$, где $k = 1, \dots, n$, $|D_k| = (n-1)!$.

Также приводится описание всех кратчайших путей между вершинами некоторого D_k, $k = 1, \dots, n$. В частности, показывается, что две перестановки $\pi, \tau \in D_k$ находятся на расстоянии три друг от друга в P_n тогда и только тогда, когда 1) либо $\tau = \pi\, r_j\, r_i\, r_j$, где $2 \leq i < j \leq n$; 2) либо $\tau = \pi\, r_j\, r_i\, r_{i-j+1}$, где $2 \leq j < i \leq n$.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00244.

ЛИТЕРАТУРА

1. I.J. Dejter, O. Serra. Efficient dominating sets in Cayley graphs.// Discrete Appl. Math. 2003. V. 129. P. 319–328.
2. Ke Qiu. Optimal broadcasting algorithms for multiple messages on the star and pancake graphs using minimum dominating sets.// Congress. Numerantium. 2006. V. 181. P. 33–39.
3. H. Dweighter, E 2569 in: Elementary problems and solutions.// Amer. Math. Monthly. 1975 V. 82. N. 1. P. 1010.
4. E. Konstantinova. Some problems on Cayley graphs.// Linear Algebra and its Applications. 2008 V. 429. N. 11-12. P. 2754–2769.

Константинова Елена Валентиновна, ИМ СО РАН, пр. Ак. Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-30, факс (383) 333-25-98, e-mail: e_konsta@math.nsc.ru
Киселькова Мария Максимилиановна, НГУ, ул. Пирогова 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-40-20, факс (383) 330-22-37, e-mail: kiselkova_mm@mail.ru

РАСКРАСКА БЛИНЧИКОВОГО ГРАФА

Е. В. Константинова, М. М. Киселькова

В настоящей работе предлагается простой алгоритм раскраски вершин блинчикового графа P_n, $n \geq 3$, определенного в [1]. Граф P_n является вершинно–транзитивным $(n-1)$–регулярным неориентированным графом без петель и кратных ребер порядка $n!$. Известно [2,3], что в этом графе имеются циклы длины l, где $6 \leq l \leq n!$. Кроме этого, данный граф имеет иерархическое строение, т. е. P_n состоит из n копий P_{n-1}, причем любые две копии соединяются $(n-2)!$ ребрами. Напомним, что хроматическое число $\chi(\Gamma)$ графа Γ определяется как наименьшее k, для которого граф Γ имеет k–раскраску. Граф называется k–хроматическим, если $\chi(\Gamma) = k$. Верхняя оценка хроматического числа определяется теоремой Брукса: $\chi(\Gamma) \leq \Delta(\Gamma)$, где Γ является обыкновенным связным графом (за исключением полных графов и циклов нечетной степени), а $\Delta(\Gamma)$ есть максимальная степень его вершин [4]. Поэтому

$$\chi(P_n) \leq n-1, \text{ для всех } n \geq 3. \tag{1}$$

При $n = 3$ имеем $P_3 \cong C_6$ и, следовательно, граф является 2–хроматическим. При $n = 4$, граф P_4 является 3–хроматическим. В самом деле, поскольку в P_n, $n \geq 4$, имеются циклы длины семь, следовательно, $\chi(P_4) \neq 2$. С другой стороны, из (1) имеем $\chi(P_4) \leq 3$. Таким образом, $\chi(P_4) = 3$. Хроматический полином графа P_4, вычисленный системой Maple 10, дает 113760 различных способов его 3–раскраски. Также известно [5], что $\chi(P_5) = 3$. При $n \geq 6$ хроматическое число графа P_n неизвестно. Предлагаемый алгоритм имеет полиномиальную трудоемкость и позволяет раскрасить P_n в $(n-1)$ цветов. Данный алгоритм основан на эффективных доминирующих множествах блинчикового графа, описанных в [1], и его иерархическом строении.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00244.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е.В. Константинова, М.М. Киселькова. Эффективные доминирующие множества блинчикового графа.// Российская конференция "Дискретная оптимизация и исследование операций": материалы конференции (см. данный выпуск).
2. A. Kanevsky, C. Feng. On the embedding of cycles in pancake graphs.// Parallel computing. 1995. Vol. 21. P. 923–936.
3. J.J. Sheu, J.J.M. Tan, K.T. Chu. Cycle embedding in pancake interconnection networks. // Proc. 23rd Workshop on Combinatorial Mathematics and Computation Theory, Taiwan. 2006. pp.85–92.
4. R.L. Brooks. On coloring the nodes of a network.// Proc. Cambridge Phil. Soc. 1941. Vol. 37. P. 194–197.
5. Е.В. Константинова, О хроматическом числе некоторых графов Кэли.// Труды VIII Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем"; ФВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 6–9 Апреля. 2009. С. 149–155.

Константинова Елена Валентиновна, ИМ СО РАН, пр. Ак. Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-30, факс (383) 333-25-98, e-mail: e_konsta@math.nsc.ru
Киселькова Мария Максимилиановна, НГУ, ул. Пирогова 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-40-20, факс (383) 330-22-37, e-mail: kiselkova_mm@mail.ru

СОВМЕСТНОЕ ВЛИЯНИЕ КОЛИЧЕСТВА РЕБЕР И КОМПОНЕНТ СВЯЗНОСТИ В ГРАФАХ НА СЛОЖНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЧИСЛА НЕЗАВИСИМОСТИ

Д. С. Малышев

В данной публикации для некоторого семейства классов графов исследуется граница между полиномиально разрешимыми и NP–полными случаями для такой классической задачи на графах, как задача о независимом множестве (далее, задача НМ).

Рассматриваются классы графов, для которых количество компонент связности любого графа с n вершинами не превосходит $C(n)$, где $C(n)$ — функция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Такие классы называем $C(n)$*-классами*. Предположим, что функция $C(n)$ задана. Среди множества всех $C(n)$-классов будем рассматривать классы графов вида $\mathcal{X}_f^C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{G : |V(G)| = n, |E(G)| \leq f(n)\}$, где $f(n)$ — произвольная функция из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел). Функция $f(n)$ называется *функцией числа ребер* (далее, просто ф.ч.р.) класса $\mathcal{X}_f^C$.

Естественный способ решения задачи разграничения в рассматриваемом семействе состоит в поиске специальной функции $f(n)$, в некотором смысле разделяющей полиномиальную разрешимость и NP-полноту. Таким разделителем будем считать понятие разграничивающей функции. Функция числа ребер $f(n)$ называется $C(n)$-*разграничивающей*, если для любого $\epsilon > 0$ задача НМ полиномиально разрешима в классе $\mathcal{X}_{[(1-\epsilon)f]}^C$, а класс $\mathcal{X}_{[(1+\epsilon)f]}^C$ является классом с NP–полной задачей НМ.

Назовем функцию $C(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *правильной*, если выполняются следующие два условия:

- существует константа L, что для любого натурального n существует такое целое неотрицательное число $k(n)$, для которого справедливо неравенство $k(n)+1 \leq C(n+k(n)) \leq k(n)+L$.
- существует такое $\alpha > 0$, что $k(n) \in O(n^{\alpha})$.

Теорема [1]. *Пусть $C(n)$ — правильная функция. Тогда функция $f(n) = n - C(n) + L$ является $C(n)$-разделяющей.*

ЛИТЕРАТУРА

1. D. S. Malyshev. The combined effect of edges and components of connectivity number on the complexity of the independent set problem. // Theoretical Computer Science (submitted).

Малышев Дмитрий Сергеевич, Нижегородский университет им. Н.И. Лобачевского, пр. Гагарина 23, г. Н.Новгород, 603950, Россия, тел. (831) 462-33-60, e-mail:dsmalyshev@rambler.ru

О НОВОМ ПОЛНОМ ИНВАРИАНТЕ АЦИКЛИЧЕСКИХ ГРАФОВ

А. В. Пролубников

Определенное на множестве $\mathbf{G}$ графов с одинаковым числом вершин отображение $I : \mathbf{G} \to \mathbf{S}$ на некоторое множество $\mathbf{S}$ — инвариант графа, если для изоморфных графов $G, H \in \mathbf{G}$ выполняется равенство $I(G) = I(H)$. Если из $I(G) = I(H)$ следует изоморфизм G и H, то I — полный инвариант. Так как любой алгоритм решения задачи проверки изоморфизма графов представляет собой проверку равенства инвариантных относительно изоморфизма количественных характеристик графов, неясный статус задачи проверки изоморфизма графов в иерархии теории сложности непосредственно связан со сложностью вычисления полного инварианта графа. Единственным известным полным инвариантом является канонический код графа — максимальное число, двоичная запись которого может быть получена путем некоторой конкатенации строк верхне-(нижне-)треугольной подматрицы матрицы смежности графа [1], с экспоненциальной сложностью его нахождения. Полиномиально вычислимые инварианты могут быть построены для тех классов графов, для которых задача проверки изоморфизма графов полиномиально разрешима. Так, в [2] представлен полный инвариант ациклических графов, в работе [3] — планарных графов. В этих работах полный инвариант ищется как результат канонизации графа. Нами предлагается алгебраический полный инвариант ациклических графов, который не получается в результате канонизации графа, а представляет собой модификацию характеристического многочлена $\det(A - \varepsilon J)$, где A — матрица смежности графа, J — единичная матрица, $\varepsilon \in \mathbf{R}$. Рассматривается многочлен $\det(A + D_{\overline{\varepsilon}})$, где $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathbf{R}^n$, а $D_{\overline{\varepsilon}}$ — диагональная матрица с компонентами $\overline{\varepsilon}$ на диагонали. $\det(A - \varepsilon J)$ не является полным инвариантом ациклического графа, поскольку однозначно определяется спектром, который для деревьев, как и в целом для ациклических графов, не является полным инвариантом. Минимальный по числу вершин пример коспектральных деревьев приведен в [4]. Однако многочлены $\det(A + D_{\overline{\varepsilon}} J)$ от n переменных для этих графов не равны. В докладе предлагается доказательство полноты инварианта для ациклических графов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Balasubramanian, K., Parthasarathy, K.R. In search of a complete invariant for graphs // Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin/Heidelberg, Vol. 885/1981, P. 42–59.

2. Lindell, S. A Logspace Algorithm for Tree Canonization // Proceedings of the 24th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing. 1992, P. 400–404.

3. Datta, S., Limaye, N., Nimbhorkar, P., Thierauf, T., Wagner, F., Planar Graph Isomorphism is in Log-Space // 2009 24th Annual IEEE Conference on Computational Complexity. Paris, France, July 15-July 18.

4. L. Collatz, U. Sinogowitz, Spektren endlicher Grafen, Abh. Math. // Sem. Univ. Hamburg 21. 1957. P. 63–77.

Пролубников Александр Вячеславович, Омский государственный университет, пр. Мира, 55, Омск, 644077, РФ, тел. (3812) 64-42-38, e-mail:a.v.prolubnikov@mail.ru

КАЛЕНДАРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВА С НЕПРЕРЫВНЫМ ПОСТУПЛЕНИЕМ СЫРЬЯ

А. В. Еремеев, Ю. В. Коваленко

Рассматривается задача календарного планирования следующего вида. Имеется n параллельных машин. Для каждой машины i задана последовательность работ $J_i = \{j_i^1, \ldots, j_i^{m_i}\}$, которые должны быть выполнены на данной машине в указанном порядке. Множество всех работ обозначим через J. Взаимосвязь между работами как на одной, так и на различных машинах задается отношениями вида $l \to j$, где работа j не может начаться до завершения работы l. Данная структура может быть представлена ориентированным ациклическим графом $G = (J, E)$, где $J = \{J_1, \ldots, J_n\}$ – множество вершин, а $E = \{(l, j) | l, j \in J, l \to j\}$ – множество дуг. При выполнении работ используется один тип возобновимого ресурса (сырья). Функция $R : (0, H] \to R^+$ задает количество ресурса, имеющееся в каждый момент времени $t \in (0, H]$, где H – длительность горизонта планирования. Каждая работа $j \in J$ характеризуется длительностью $p_j \in R^+$ и интенсивностью потребления ресурса, заданной функцией $r_j : (0, p_j] \to R^+$, в продолжении этой работы. Прерывание выполнения работ не допускается. Пусть s_j – время начала выполнения работы j, $j \in J$. Необходимо построить такое расписание $S = \{s_j\}$ выполнения работ с учетом технологического порядка E и ограничений по ресурсу, при котором минимизируется общее время завершения работ.

Рассматриваемая задача является NP–трудной в сильном смысле. В настоящей работе предложена модель частично целочисленного линейного программирования для случая вещественного времени, кусочно-постоянной функции $R(t)$ и постоянных функций $r_j(\tau)$, $j \in J$. Для случая целочисленного времени, когда функция $R(t)$ задана при $t \in \{1, \ldots, H\}$, а функции $r_j(\tau)$, $j \in J$ заданы при $\tau \in \{1, \ldots, p_j\}$, используя идею из [1], разработан алгоритм динамического программирования, являющийся полиномиальным, если число машин ограничено константой.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 10-01-00598).

ЛИТЕРАТУРА

1. В.В. Сервах. Эффективно разрешимый случай задачи календарного планирования с возобновимыми ресурсами // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2000. Сер. 2. Т. 7. № 1. С. 75–82.

Еремеев Антон Валентинович, Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84. E-mail: eremeev@ofim.oscbras.ru

Коваленко Юлия Викторовна, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: juliakoval86@mail.ru

MEASURES OF FINAL RESULT IN SINGLE AND TWO–SIDED ASSEMBLY LINES BALANCING PROBLEM

W. Grzechca

The manufacturing assembly line was first introduced by Henry Ford in the early 1900's. It was designed to be an efficient, highly productive way of manufacturing a particular product. The basic assembly line consists of a set of workstations arranged in a linear fashion, with each station connected by a material handling device. The basic movement of material through an assembly line begins with a part being fed into the first station at a predetermined feed rate. A station is considered any point on the assembly line in which a task is performed on the part. These tasks can be performed by machinery, robots, and/or human operators.

Once the part enters a station, a task is then performed on the part, and the part is fed to the next operation. The time it takes to complete a task at each operation is known as the process time. The cycle time of an assembly line is predetermined by a desired production rate. This production rate is set so that the desired amount of end product is produced within a certain time period. In order for the assembly line to maintain a certain production rate, the sum of the processing times at each station must not exceed the stations cycle time. If the sum of the processing times within a station is less than the cycle time, idle time is said to be present at that station. One of the main issues concerning the development of an assembly line is how to arrange the tasks to be performed. This arrangement may be somewhat subjective, but has to be dictated by implied rules set forth by the production sequence.

For the manufacturing of any item, there are some sequences of tasks that must be followed. The assembly line balancing problem (ALBP) originated with the invention of the assembly line. Helgeson et. al were the first to propose the ALBP, and Salveson was the first to publish the problem in its mathematical form. However, during the first forty years of the assembly line's existence, only trial-and-error methods were used to balance the lines. Since then, there have been numerous methods developed to solve the different forms of the ALBP. Salveson provided the first mathematical attempt by solving the problem as a linear program. Gutjahr and Nemhauser showed that the ALBP problem falls into the class of NP–hard combinatorial optimization problems. This means that an optimal solution is not guaranteed for problems of significant size. Therefore, heuristic methods have become the most popular techniques for solving the problem. Nowadays, a good balanced assembly line is a very important factor in modern manufacturing companies.

The line efficiency, time of the line and smoothness index are the basic measures in estimation of final results. The problem of balance in single assembly line is discussed. Also a problem of the last station is shown and a modified smoothness index is presented. In the second part of the paper two-sided assembly line is considered. The two-sided structure consists of mated-stations and the solution depends on the precedence graph and position constraints. In a one-sided assembly line, if precedence relations are considered appropriately, all the tasks assigned to a station can be carried out continuously without any interruption. However, in a two-sided assembly line, some tasks assigned to a station can be delayed by the tasks assigned to its companion. In other words, idle time is sometimes unavoidable even between tasks assigned to the same station. In this case it is important to introduce additionally measures because the existed smoothness index is to general to describe the final result of the balance. Author of the paper introduces modified smoothness index for each position of the line and discuss about the efficiency of mated stations. The new measures allow to get a detailed knowledge of the balanced line. As a conclusion, a comparison of final results of single and two-sided assembly line is given.

LITERATURE

1. Bartholdi J.J., 1993. Balancing two-sided assembly lines: a case study, International Journal of Production Research, 23, 403–421.

2. Baybars, I., 1986. A survey of exact algorithms for simple assembly line balancing problem, Management Science, 32, 11–17.

3. Eral, Erdal, Sarin S.C., 1998. A survey of the assembly line balancing procedures, Production Planning and Control, 9, 34–42.

4. Forteca D.J., Guest C.L., Elam M., Karr C.L., 2005. A fuzzy logic approach to assembly line balancing, Mathare & Soft Computing, 57–74.

5. Grzechca, W. 2007. Quality of results of assembly line balancing problem, Proceedings of International Conference on Modeling and Optimization of Structures, Processes and Systems Durban, CD Version ISBN ICMOSPS 1-86840-643-1.

6. Grzechca, W. 2008, Two-sided assembly line. Estimation of final results, Proceedings of Fifth International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics Funchal, CD Version ISBN ICINCO 978-989-8111-35-7.

7. Gutjahr, A.L., Neumhauser G.L., 1964. An algorithm for the balancing problem, Management Science, 11, 23–35.

8. Halgeson W. B., Birnie D. P., 1961. Assembly line balancing using the ranked positional weighting technique, Journal of Industrial Engineering, 12, 18–27.

9. Kao, E.P.C., 1976. A preference order dynamic program for stochastic assembly line balancing, Management Science, 22, 19–24.

10. Lee, T.O., Kim Y., Kim Y.K., 2005. Two-sided assembly line balancing to maximize work relatedness and slackness, Computers & Industrial Engineering, 40, 273–292.

11. Salveson, M.E., 1955. The assembly line balancing problem, Journal of Industrial Engineering, 62–69.

12. Scholl, A., 1998. Balancing and sequencing of assembly line, Physica- Verlag.

13. Sury, R.J., 1971. Aspects of assembly line balancing, International Journal of Production Research, 9, 8–14.

Waldemar Grzechca, The Silesian University of Technology, Institute of Automatic Control, Gliwice, Poland, (0048)0322372198, Waldemar.grzechca@polsl.pl

К ГИПОТЕЗЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ НА m ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МАШИНАХ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПИСАНИЯ С НЕ БОЛЕЕ ЧЕМ $m-1$ МИГРАЦИЕЙ

А. С. Козлов

В работе [1] рассматривалась задача $Pm\,|\,pmtn(delay = d)\,|\,C_{max}$, где заданное конечное число работ требуется выполнить на m идентичных параллельных машинах за наименьшее время (C_{max}). Поскольку разрешены прерывания работ, исполнение каждой работы может быть разбито на конечное число фрагментов, причём каждый такой фрагмент может исполняться на любой из машин. При этом требуется, чтобы никакие два фрагмента на одной машине и никакие два фрагмента одной работы не исполнялись одновременно. Если исполнение работы переносится с одной машины на другую (работа *мигрирует*), то до момента возобновления этой работы должно пройти не менее d единиц времени. Задача NP–трудна. В работе [1] была сформулирована гипотеза о существовании такого оптимального расписания, в котором число миграций не превосходит $m-1$. Эта гипотеза была подтверждена авторами для случаев двух и трёх машин. В нашей работе гипотеза доказана для четырёх машин. Другими словами доказана следующая

Теорема 1. *Для любого примера задачи $P4\,|\,pmtn(delay = d)\,|\,C_{max}$ существует оптимальное расписание с не более чем тремя миграциями.*

ЛИТЕРАТУРА

1.Aleksei V. Fishkin, Klaus Jansen, Sergey V. Sevastyanov, and Rene Sitters, Preemptive Scheduling of Independent Jobs on Identical Parallel Machines Subject to Migration Delays// in: “Algorithms - ESA 2005: 13th Annual European Symposium, Palma de Mallorca, Spain, October 3-6, 2005. Proceedings”. G.S. Brodal and S. Leonardi (Eds.) *Lecture Notes in Comp. Sci.*, 2005, V. 3669, P. 580–591.

Козлов Александр Сергеевич, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр-т Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, e-mail: sanya_k@gorodok.net

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ С ОБОРОТНЫМ РЕСУРСОМ: ОБЗОР НОВЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ И ОТКРЫТЫХ ПРОБЛЕМ

А. В. Кононов

Задачи, связанные с построением расписания работ, делятся в русскоязычной литературе на две большие группы: задачи теории расписаний и задачи календарного планирования.

В задачах теории расписаний при составлении плана работ учитываются, как правило, их технологические особенности. Например, заданный порядок выполнения работ на разных машинах, времена поступления работ, возможность их одновременного обслуживания и многое другое. Первые задачи теории расписаний были сформулированы и исследованы еще в 50-х годах прошлого столетия. За это время в теории расписаний накоплен огромный опыт и разработаны различные подходы к их решению. В частности, для многих NP–трудных расписательных задач построены приближенные алгоритмы с гарантированными оценками точности или полиномиальные приближенные схемы.

Задачи календарного планирования моделируют, как правило, крупномасштабные проекты и характеризуются наличием различного вида ресурсов для их выполнения, правилами их потребления и заданным частичным порядком на множестве работ. Наличие разнородного ресурса делает многие задачи календарного планирования непреодолимо трудными даже для построения гарантированных приближенных решений.

В последнее десятилетие становятся популярными задачи теории расписаний, в которых присутствует дополнительный ресурс, который может быть учтен при составлении эффективного или "разумного" расписания.

В задачах с оборотным ресурсом задано множество работ $\{J_1, \dots, J_n\}$ и некоторое количество общего ресурса Ω_0. Обозначим через s_i и C_i моменты начала и завершения работы J_i, соответственно. Работа J_i в момент s_i потребляет α_i единиц ресурса и возвращает β_i единиц ресурса в момент C_i. Соотношение между величинами α_i и β_i для разных работ может быть произвольным.

Заметим, что понятие оборотного ресурса обобщает понятия возобновимого и невозобновимого ресурсов. Действительно, в случае $\beta_i = 0$ для всех работ, мы имеем дело с невозобновимым ресурсом, и в случае $\alpha_i = \beta_i$, мы получаем классический возобновимый ресурс.

В последние годы для задач с оборотным ресурсом был получен ряд новых интересных результатов, которые и будут изложены в предлагаемом обзоре.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00059, совместным Российско-Тайваньским грантом 08-06-92000 и грантом АВЦП Рособразования 2.1.1/3235.

Кононов Александр Вениаминович, Институт Математики им. С.Л. Соболева, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 36-34-686, факс (383)333-2598, e-mail:alvenko@math.nsc.ru

АЛГОРИТМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЖОНСОНА С БУФЕРОМ НА ВТОРОЙ МАШИНЕ

П. А. Кононова

Медиа объекты (файлы) загружаются в определенном порядке из удаленной базы данных и затем воспроизводятся. Для каждого файла заданы время загрузки и воспроизведения. При загрузке файл поступает в буфер транслирующего устройства и покидает его сразу после завершения воспроизведения. Известен размер буфера. Размеры файлов известны и пропорциональны времени загрузки. Воспроизведение файла не может начаться раньше окончания его загрузки. Если файл начал загрузку или воспроизведение, то этот процесс не прерывается. Требуется так задать порядок загрузки и обработки файлов, чтобы минимизировать время окончания воспроизведения последнего файла.

Сформулированная задача является обобщением классической задачи Джонсона на двух машинах. Она NP–трудна в сильном смысле, так как задача о 3-разбиении является ее частным случаем [1]. Для решения задачи разработан метод ветвей и границ. В качестве нижней оценки используется решение задачи Джонсона без буфера, а также точное решение вспомогательной задачи о рюкзаке [2]. Верхняя оценка вычисляется методами локального поиска. При ветвлении в каждой вершине дерева рассматриваются расписания вида $(\sigma j_1,\ j_2\gamma)$, где σ и γ непересекающиеся подмножества работ, задающие начало и конец расписания, а работы j_1, j_2 не принадлежат подмножествам σ и γ, $j_1 \neq j_2$. Проведены численные эксперименты на случайно порожденных данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-06-92000) и АВЦП Рособразования (проект 2.1.1/3235).

ЛИТЕРАТУРА

1. A. V. Kononov, P. A. Kononova, J.-S. Hong. Two-stage multimedia scheduling problem with an active prefetch model // Preprints of the 13th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing, Moscow, Russia, June 3 - 5. 2009. P. 1997–2002.

2. F.-C. Lin, J.-S. Hong, B.M.T. Lin. A two-machine flow shop problem with processing time-dependent buffer constraints – An application in multimedia problem // Computers and Operations Research. 2009. V. 36. N. 4. P. 1158–1175.

Кононова Полина Александровна, Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова 2, Новосибирск, 630090, Россия, E-mail: polinusik@gorodok.net

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ К NP-ТРУДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ $1 \mid r_j \mid \varphi_{\max}$

А. А. Лазарев

Рассмотрим общую постановку NP–трудной задачи теории расписаний $1 \mid r_j \mid \varphi_{\max}$. Через μ^* будем обозначать оптимальное значение целевой функции:

$$\mu^* = \min_{\pi\in\Pi(N)} \max_{k=\overline{1,n}} \varphi_{j_k}(C_{j_k}(\pi)), \tag{1}$$

где $\varphi_{j_k}(C_{j_k}(\pi))$ – произвольные неубывающие функции штрафа, $C_{j_k}(\pi)$ – момент окончания обслуживания требования j при расписании π, $\Pi(N)$ – множество всех расписаний обслуживания требований множества N, $|\Pi(N)| = n!$. Прерывания и обслуживание более одного требования одновременно на приборе запрещены.

Сформулируем двойственную задачу. Необходимо найти

$$\nu^* = \max_{k=\overline{1,n}} \min_{\pi\in\Pi(N)} \varphi_{j_k}(C_{j_k}(\pi)). \tag{2}$$

Для удобства введём обозначения, учитывающие место требования в расписании. Пусть расписание $\pi \in \Pi(N)$ имеет вид $\pi = (j_1, j_2, \dots, j_n)$. Для требования, обслуживаемого k-ым, $k = 1, 2, \dots, n$, по порядку при расписании π будем обозначать:

$$\nu_k = \min_{\pi\in\Pi(N)} \varphi_{j_k}(C_{j_k}(\pi)), k = 1, 2, \dots, n. \tag{3}$$

Очевидно, $\nu^* = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \nu_k$.

Лемма. Пусть все $\varphi_j(t), j = 1, 2, \dots, n$, произвольные неубывающие функции штрафа задачи $1 \mid r_j \mid \varphi_{\max}$, тогда для всех $k = 1, 2, \dots, n$ выполняется $\nu_n \geq \nu_k$, т.е. $\nu^* = \nu_n$.

Решение двойственной задачи сводится к нахождению ν_n. Так как величина $\nu_n = \min\limits_{\pi\in\Pi(N)} \varphi_{j_n}(C_{j_n}(\pi))$, то на последнее ($n$-ое) место поочерёдно будем ставить каждое из требований j множества N. Оставшиеся $(n-1)$ требований множества $N \setminus \{j\}$ упорядочим в порядке поступления на обслуживание,– такой порядок даёт наименьшее значение момента окончания обслуживания требований множества $N \setminus \{j\}$.

Алгоритм. Построим расписание $\pi^r = (i_1, i_2, \dots, i_n)$, при котором требования упорядочены в порядке неубывания моментов поступления: $r_{i_1} \leq r_{i_2} \leq \dots \leq r_{i_n}$.

Для расписания $\pi_k = (\pi^r \setminus i_k, i_k), k = 1, 2, \dots, n$, вычислим $\varphi_{i_k}(C_{i_k}(\pi_k))$.

Найдём $\nu^* = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \varphi_{i_k}(C_{i_k}(\pi_k))$.

Для построения расписания π^r требуется $O(n \log n)$ операций. Для нахождения $\varphi_{i_k}(C_{i_k}(\pi_k))$ необходимо $O(n)$ операций. Таких значений n. Следовательно, для нахождения ν^* и соответствующего требования i_k потребуется не более $O(n^2)$ операций.

Теорема. Пусть все $\varphi_j(t), j = 1, 2, \dots, n$, произвольные неубывающие функции штрафа NP-трудной задачи $1 \mid r_j \mid \varphi_{\max}$, тогда $\mu^* \geq \nu^*$.

Полученная оценка может быть эффективно использована при построении схем метода ветвей и границ решения задачи $1 \mid r_j \mid \varphi_{\max}$ и для оценки погрешности приближённых решений.

Работа выполнена в рамках программ 15 и 29 РАН.

Лазарев Александр Алексеевич, Институт проблем управления, Профсоюзная, 65, Москва, 117997, Россия, тел. (495) 334-87-51, e-mail: jobmath@mail.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОЕКТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРЕДИТОВ

Е. А. Мартынова, В. В. Сервах

Под инвестиционным проектом будем понимать множество взаимосвязанных работ $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, выполнение которых направлено на получение прибыли. Взаимосвязь задается технологией выполнения работ проекта и определяется частичным порядком E на множестве V. Рассматривается единственный ресурс – финансовый. Работа $j \in V$ характеризуется длительностью $p_j \in Z^+$ и потоком платежей $(c_j(0), c_j(1), \ldots)$, где $c_j(\tau)$ – баланс платежей, то есть разница между поступлениями и расходами в момент времени τ, считая от начала выполнения работы. Если $c_j(\tau) < 0$, то в момент времени τ для выполнения работы требуются соответствующие капиталовложения, а если $c_j(\tau) > 0$, то выполнение работы приносит доход. Величина $NPV_j = \sum\limits_{\tau=0}^{\infty} \frac{c_j(\tau)}{(1+r_0)^\tau}$ называется чистой прибылью работы $j \in V$, приведенной к началу ее выполнения. Здесь r_0 – ставка рефинансирования, а $\frac{1}{1+r_0}$ – коэффициент дисконтирования. Предполагается, что каждая работа выполняется без прерываний. Вектор $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, где s_j – время начала выполнения работы j, называется расписанием выполнения работ проекта. Необходимо построить такое расписание, при котором чистая приведенная прибыль проекта

$$NPV(S) = \sum_{j \in V} \frac{NPV_j}{(1+r_0)^{s_j}}$$

будет максимальным.

Ограничениями на сроки выполнения работ являются частичный порядок E и капиталовложения. Предполагается, что для выполнения проекта в момент времени t поступают финансовые ресурсы в объеме $K(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots, T-1$, где T – горизонт планирования проекта. Как правило, выделенных средств недостаточно для реализации проекта, и разница между потребностью и наличием капитала покрывается за счет кредитов.

В работе доказана NP–трудность в сильном смысле задачи календарного планирования с учетом возможности использования различных форм кредитов, построена математическая модель, предложен алгоритм решения, основанный на методе динамического программирования, выделены полиномиально и псевдополиномиально разрешимые случаи.

Мартынова Евгения Андреевна, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, пр. Мира, 55А, Омск, 644077, Россия, тел. +7 (904) 582-28-01.
E-mail: martynova87@mail.ru
Сервах Владимир Вицентьевич, Омский филиал Института математики им С.Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 30-19-97, факс (3812) 23-45-84. E-mail: svv_usa@rambler.ru

О СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ОБЩЕГО ВРЕМЕНИ ОБРАБОТКИ ОДНОТИПНЫХ ДЕТАЛЕЙ

М. А. Межецкая

На производственной линии, состоящей из m различных машин, требуется за минимальное время обработать партию из N однотипных деталей. Обработка детали заключается в последовательном выполнении n операций. Операция j выполняется на машине с номером m_j непрерывно в течение p_j единиц времени, $j = 1, 2, \ldots, n$. Машина не может выполнять более одной операции одновременно.

Для обработки партий больших размеров традиционно использовалась конвейерная линия, расписание выполнения операций для которой строится за полиномиальное время. Однако современная экономика отличается высокой мобильностью, и номенклатура изделий постоянно меняется. Это требует перестройки конвейера, что приводит к высокому уровню издержек. Поэтому на производстве активно используется универсальное оборудование, позволяющее выполнять различные операции. В такой ситуации допускается возможность использования одной и той же машины при обработке различных операций одной детали. Если машины в последовательности $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ могут повторяться, то такую задачу будем называть задачей со сложным технологическим маршрутом [1,2]. В работе показано следующее.

Теорема. Задача минимизации общего времени обработки партии однотипных деталей со сложным технологическим маршрутом NP–трудна.

В [3] при условии, что число деталей N ограничено сверху константой, предлагается псевдополиномиальный алгоритм решения задачи. Его трудоемкость полиномиально зависит от числа операций n. Таким образом, показано, что NP–трудность задачи обусловлена длительностями операций. Сложность задачи в зависимости от числа деталей N неизвестна. Для данной задачи разработан асимптотически точный алгоритм полиномиальной трудоемкости. Относительная погрешность построенного решения с ростом числа деталей стремится к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Межецкая М.А., Сервах В.В. О задаче минимизации общего времени выпуска партии однотипных деталей // Материалы XIV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения", Иркутск–Северобайкальск, 2008. Т.1. С. 468–474.

2. Сервах В.В. О сложности задачи построения расписаний с фиксированным числом однотипных деталей // Материалы Международной конференции "Дискретная математика, алгебра и их приложения", Минск 2009. С. 111.

3. Сервах В.В. Эффективно разрешимый случай задачи календарного планирования с возобновимыми ресурсами // Дискретный анализ и исследование операций, Сер.2, 2000. Т.7, N 1. С. 75–82.

Межецкая Мария Александровна, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, пр. Мира, 55А, Омск, 644077, Россия, тел. +7 (913) 652-55-55, e-mail: mezhetska@mail.ru

СЛОЖНОСТЬ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ЦИКЛИЧЕСКОГО РАСПИСАНИЯ

А. А. Романова

Рассматривается задача построения циклического расписания для производственной линии, состоящей из m различных машин. На этой линии необходимо обработать большую партию однотипных деталей. Все детали проходят одинаковый технологический маршрут обработки, состоящий из n операций. Операция j требует $p_j \in Z^+$ единиц времени выполнения на машине m_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Машины в технологическом порядке могут повторяться. На каждой машине не может одновременно выполняться более одной операции. Прерывания выполнения операций недопустимы.

В ситуации большого количества одинаковых деталей удобно использовать циклические расписания. В таких расписаниях одни и те же операции любых двух последовательных деталей начинают выполнение через равные промежутки времени. Это время называется временем цикла и характеризует производительность линии.

Задача минимизации времени цикла является полиномиально разрешимой. Производительность линии в таком случае максимальна, однако расписание может получиться затратным с точки зрения других важных характеристик. Одной из таких характеристик является время нахождения детали в системе. При больших значениях этой величины возникает необходимость транспортировки и промежуточного хранения деталей, обработка которых еще не завершилась, что приводит к увеличению потребности в оборотных ресурсах.

Одним из способов ограничения времени нахождения детали в системе является задание верхней границы H для числа одновременно обрабатываемых деталей. С таким ограничением задача минимизации времени цикла становится NP–трудной в сильном смысле [2]. При фиксированном H эта задача псевдополиномиально разрешима [1]. Вопрос о полиномиальной разрешимости задачи минимизации времени цикла при фиксированной верхней границе H числа одновременно обрабатываемых деталей до сих пор оставался открытым. В настоящей работе доказана NP–трудность данной задачи при $H \geq 3$. К ней сведена трехмашинная задача Job-Shop с тремя деталями [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Романова А.А., Сервах В.В. Оптимизация выпуска однотипных деталей на основе циклических расписаний // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т. 15, № 5. С. 47–60.

2. Hanen C. Study of a NP-hard cyclic scheduling problem: The recurrent job-shop // European Journal of Operational Research. 1994. V. 72. P. 82–101.

3. Sotskov Y. N., Shakhlevich N. V. NP-hardness of shop-scheduling problems with three jobs // Discrete Appl. Math. 1995. V. 59, № 3.P. 237–266.

Романова Анна Анатольевна, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, пр. Мира, 55а, Омск, 644077, Россия, тел. (3812) 22-56-96.
E-mail: romanova_ann@bk.ru

ЗАДАЧА С ОБОРОТНЫМИ РЕСУРСАМИ: АНАЛИЗ СЛОЖНОСТИ И АЛГОРИТМЫ

С. В. Севастьянов, Б. М. Т. Лин, Ш. Л. Хуанг

Рассматривается задача минимизации длины расписания в одно-машинной системе с n неодновременно прибывающими работами при наличии ограниченных ресурсов оборотного типа. Каждая работа потребляет определённое количество ресурса из общего ресурсного пула в момент её начала и возвращает заданное количество ресурса в пул в момент окончания работы. В этом смысле ресурсные ограничения, рассматриваемые в данной задаче, обобщают известные *возобновимые ресурсы*, где указанные величины (потребляемого и возвращаемого количества ресурса) совпадают для каждой работы. Задача возникла впервые в 80-х годах прошлого века при создании проекта реконструкции жилого фонда г. Бостон (США). В процессе реконструкции того или иного городского (микро-) района требуется сначала снести старые постройки (при этом требуется разместить часть проживающих там людей во временное жильё). После возведения на этом месте нового жилья и переселения в него людей освобождается какая-то часть временного жилого фонда.

Вскоре, однако, стало ясно, что построенная модель с ресурсными ограничениями такого типа является достаточно общей и применима для гораздо более широкой области прикладных задач.

В данной работе мы предпринимаем первый анализ сложности данной задачи в постановке, когда работы имеют **различные** моменты поступления. В качестве первого шага мы разрабатываем алгоритм, основанный на технике многопараметрического динамического программирования. (Последнее отличается от обычного одно- или двух-параметрического ДП тем, что число параметров, чьи значения перебираются в алгоритме, может быть сколь угодно велико.) Показано, что алгоритм имеет псевдо-полиномиальное время счёта в случае, когда число m различных моментов поступления работ ограничено константой. Показано, что такая трудоёмкость точного решения задачи является наилучшей возможной в том смысле, что (1) псевдополиномиальный алгоритм решения нельзя обобщить на случай, когда параметр m является частью входа (поскольку в этом случае задача NP–трудна в сильном смысле) и (2) алгоритм нельзя улучшить до полиномиального по времени для фиксированного $m > 1$, поскольку задача остаётся NP–трудной начиная со значения $m = 2$.

Помимо общего случая рассмотрены два частных (в некотором смысле — противоположных) случая задачи: (а) когда вклад каждой работы в ресурсный пул неотрицателен, и (б) когда вклад каждой работы отрицателен. Для первого случая построен полиномиальный по времени алгоритм, тогда как для противоположного случая показано, что задача становится NP–трудной в сильном смысле.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 08-01-00370, 08-06-92000-ННС) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0429)

Севастьянов Сергей Васильевич, Новосибирский государственный университет, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр-т Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383)3634618, факс (383)3332598, e-mail: seva@math.nsc.ru;
Бертран М.Т. Лин, Шао-Лан Хуанг, Государственный Чао-Тонг Университет, Институт управления информацией, г. Синь-Чжу, Тайвань, e-mail: bmtlin@iim.nctu.edu.tw

ВАРЬИРОВАНИЕ ДИРЕКТИВНОГО СРОКА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

И. В. Уразова

В настоящей работе рассматривается следующая задача теории расписаний [1]. Заданы множество V требований единичной длительности и частичный порядок $\lhd$ на V. Расписанием называется функция $\sigma : V \to D = \{1, 2, \dots d\}$, удовлетворяющая условиям: 1) соотношение $i \lhd j$ влечет неравенство $\sigma(i) < \sigma(j)$; 2) для любого $k \in D$ имеется не более m заданий $i \in V$, таких, что $\sigma(i) = k$. При относительно малых значениях d множество расписаний может оказаться пустым. Множество всех расписаний, определенных условиями 1)-2), обозначим через Σ_d. Задача заключается в минимизации общего времени обслуживания всех требований, то есть $\max\limits_{i \in V} \sigma(i) \to \min\limits_{\sigma \in \Sigma_d}$. В силу того, что при $d < d'$ имеет место включение $\Sigma_d \subset \Sigma_{d'}$, рассматриваемая задача заключается в нахождении минимального $d_{\min}$, при котором множество Σ_d не пусто.

В работе [2] был описан релаксационный полиэдр M_d для выпуклой оболочки векторов инциденций расписаний множества Σ_d. В настоящей работе для функции вида $h(x) = \sum\limits_{k=1}^{d} \lambda_k \sum\limits_{i \in V_k} x_{ik} \to \min\limits_{x \in M_d}$ получены условия на λ_k, при которых она может служить целевой функцией для рассматриваемой задачи. Кроме того, получены оценки значения $d_{\min}$, зависящие от характеристик орграфа, задающего частичный порядок на множестве требований, и оценки для оптимального значения целевой функции $h(x)$ при различных значениях d.

Анализ полученных результатов подтвержден вычислительным экспериментом, который проводился по двум направлениям. Первое направление касалось структуры полиэдра M_d, соответствующего задаче, а именно, условий его непустоты. Второе направление заключалось в непосредственном решении задачи с целевой функцией $h(x)$ и значением общего времени обслуживания $d_{\min} < d < n$, где n – число требований. В эксперименте рассмотрено более 70 случайных ациклических орграфов с числом вершин до 25, количество приборов не превышало 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М: Мир, 1982, 416 с.

2. Симанчёв Р.Ю., Уразова И.В. Класс опорных неравенств для многогранника расписаний обслуживания единичных требований параллельными процессорами. Математическое программирование: Труды XIV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения", Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2008. Т.1. С. 530–536.

Уразова Инна Владимировна, Омский государственный университет, пр-т Мира, 55а, Омск, 644010, Россия, тел. (83812) 22-56-96, e-mail:urazovainn@mail.ru

О СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ СО СКЛАДИРУЕМЫМИ РЕСУРСАМИ И РЕИНВЕСТИРОВАНИЕМ ДОХОДА

Т. А. Щербинина

Пусть $V = \{1, 2, \ldots, N\}$ — множество работ проекта. Взаимосвязь между работами задается отношениями вида $i \to j$, где работа j не может начаться до завершения работы i. Данная структура может быть представлена ориентированным ацикличным графом $G = (V, E)$, где V – множество вершин, а $E = \{(i, j) | i, j \in V, i \to j\}$ – множество дуг. При выполнении работ используется один тип складируемого ресурса – финансовый. На период планирования T в момент времени t поступает q_t единиц финансового ресурса, $t = 0, 1, 2, \ldots, T - 1$. Каждая работа $j \in V$ выполняется непрерывно в течение $p_j \in Z^+$ единиц времени. Работа как потребляет финансовые ресурсы, так и генерирует их. Обозначим через $c_j(\tau)$ баланс платежей работы j в момент времени $\tau = 0, 1, 2, \ldots, p_j$. Причем, если $c_j(\tau) < 0$, то в момент τ для выполнения работы j требуются соответствующие капиталовложения, а если $c_j(\tau) > 0$, то выполнение данной работы приносит доход. Последовательность величин $(c_j(0), c_j(1), c_j(2), \ldots, c_j(p_j))$ называется потоком платежей работы $j \in V$. Прерывание выполнения работ не допускается.

Пусть s_j – время начала выполнения работы $j \in V$. Необходимо построить такое расписание $S = \{s_j\}$ выполнения работ с учетом технологического порядка E и ограничений на ресурсы, при котором минимизируется общее время завершения работ:

$$C_{\max} = \max_{j \in V} (s_j + p_j) \to \min$$

$$\sum_{t'=1}^{t} q_{t'} + \sum_{t'=1}^{t} \sum_{j \in N_{t'}} c_j(t' - s_j) \geq 0, \quad t = 0, 1, 2, \ldots, T - 1;$$

$$s_i + p_i \leq s_j, \quad (i, j) \in E,$$

где $N_t = \{j \in V | s_j < t \leq s_j + p_j\}$ – множество работ, выполняемых на интервале $[t - 1, t)$.

Задача календарного планирования с критерием $C_{\max}$ и складируемыми ресурсами полиномиально разрешима [1]. В настоящей работе показано, что, если для рассматриваемой задачи учитывать реинвестирование полученного дохода, то задача становится NP–трудной в сильном смысле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э.Х. Гимади, В.В. Залюбовский, С.В. Севастьянов. Полиномиальная разрешимость задач календарного планирования со складируемыми ресурсами и директивными сроками // Дискретный анализ и исследование операций, Сер. 2, 2000. Т. 7, N. 1. С. 9–34.

Щербинина Татьяна Александровна, Омский государственный технический университет, пр. Мира, 11, Омск, 644050, Россия, тел: 8-960-985-15-36,
e-mail: shcherbinina@bk.ru

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ ЭФФЕКТИВНОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ m–PSP НА МАКСИМУМ В МНОГОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. Е. Бабурин, Э. Х. Гимади

Задача отыскания m реберно-непересекающихся маршрутов коммивояжера (гамильтоновых циклов) известна также под названием m-PSP (m-Peripatetic Salesman Problem) [1]. В задаче m-PSP задан полный n-вершинный неориентированный граф $G = (V, E)$, где $V = \{1, \dots, n\}$ — множество вершин и $E = \{(i, j) : i, j \in V, i < j\}$ — множество ребер. На E задана неотрицательная весовая функция $w : E \to \mathbf{R}_+$. Требуется найти m непересекающихся по ребрам гамильтоновых циклов $H_1, \dots, H_m \subset E$ с экстремальным (минимальным или максимальным) суммарным весом входящих в них ребер. Область применения задачи включает поиск маршрута сторожей с повышенным уровнем безопасности, при дизайне сетей, защищенных от сбоев, в теории расписаний. Частным случаем задачи (при $m = 1$) является известная задача коммивояжера.

В сообщении рассматривается задача m-PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^k$. Задача NP–трудна в сильном смысле.

В классическом случае одного коммивояжера А.И. Сердюковым [2] был построен асимптотически точный алгоритм с временной сложностью $O(n^3)$.

Авторами данного сообщении представлен приближенный полиномиальный алгоритм решения задачи в общем случае многих реберно-непересекающихся маршрутов.

Проведено обоснование корректности работы алгоритма. Показано, что относительная погрешность алгоритма не превышает величины $c_k(m/n)^{\frac{2}{k+1}}$, где константа c_k зависит только от размерности пространства $\mathbf{R}^k$. Отсюда следует, что алгоритм асимптотически точен при числе машршрутов $m = o(n)$.

При $m \le n^{1/2}$ алгоритм выдает асимптотически точное решение за время $O(n^3)$.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 08-01-00516 и 10-07-00195), целевой программы № 2 Президиума РАН (проект № 227), а также целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 44).

ЛИТЕРАТУРА

1. Krarup J. The peripatetic salesman and some related unsolved problems // Combinatorial programming: methods and applications (Proc. NATO Advanced Study Inst., Versailles, 1974), 1975. P. 173–178.
2. А.И. Сердюков. Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // Методы целочисленной оптимизации (Управляемые системы). Новосибирск, 1987. вып. 27. С. 79–87.

Бабурин Алексей Евгеньевич, Гимади Эдуард Хайрутдинович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проспект Ак. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 3634624, факс (383) 3332598, e-mail: ababur@arqa.ru; gimadi@math.nsc.ru

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДВУХ КОММИВОЯЖЕРОВ

Е. В. Ивонина

Естественной модификацией задачи коммивояжера является задача отыскания в графе двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов экстремального суммарного веса. Задача известна также как 2-PSP (Peripatetic Salesman Problem).

Одним из исследуемых подклассов этой задачи является задача в евклидовом пространстве (то есть случай, когда вершинам заданного графа сопоставлены точки R^k, а длины дуг между вершинами определяются как расстояния между точками). В сообщении представлен асимптотически точный алгоритм для 2-PSP на максимум в евклидовом пространстве, основанный на идеях работ [1] и [2].

Рассматривается также задача 2-PSP$_{max}$ с произвольными весами ребер на отрезке $[1, q]$. Для задачи 2-PSP$_{max}$ с произвольной весовой функцией известен полиномиальный алгоритм с оценкой точности $3/4$ [3]. Для задачи 2-PSP$_{min}$ в полном графе с весами ребер на отрезке $[1, q]$ известен алгоритм с оценкой точности $(q + 4)/5$ [4]. Можно показать, что для такой задачи, но на максимум, из той же работы следует возможность построения алгоритма с оценкой $5/(q+4)$. Совместное использование результатов построения приближенных алгоритмов решения задачи 2-PSP, полученных в [3, 4], позволяет построить полиномиальный алгоритм решения задачи 2-PSP$_{max}$ в полном графе с весами ребер на отрезке $[1, q]$ с оценкой точности $(3q + 2)/(4q + 1)$. Для задачи 2-PSP$_{max}$ с весами ребер на отрезке $[1, 2]$ получаем оценку точности $8/9$.

Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00516, целевой программы № 2 Президиума РАН (проект № 227), а также целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 44).

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Х. Гимади. Асимптотически точный алгоритм отыскания одного и двух реберно непересекающихся маршрутов коммивояжера максимального веса в евклидовом пространстве // Труды института математики и механики УрО РАН, 2008, С. 23–32.

2. А. Е. Бабурин, Э. Х. Гимади. Об асимптотической точности одного алгоритма решения евкидовой задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. Новосибирск, 2002. Т. 9. № 4. С. 23–32.

3. А.А. Агеев, А.Е. Бабурин, Э.Х. Гимади. Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 3/4 для отыскания двух непересекающихся гамильтоновых циклов максимального веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2006. Т. 13, № 2. С. 11–20.

4. Э.Х. Гимади, Ю.В. Глазков, А.Н. Глебов. Приближенные алгоритмы решения задачи о двух коммивояжерах в полном графе с весами ребер 1 и 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2007. Т. 14. № 2. С. 41–61.

Ивонина Евгения Викторовна, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр-т Ак. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. 8-923-124-2188, факс (383) 3332598, email: evivonina@gmail.com

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ПЛАНИРОВАНИЯ В НЕФТЕДОБЫЧЕ

С. М. Лавлинский, А. С. Руднев

Как правило, большая часть залежей нефтегазового предприятия расположена на значительном расстоянии от магистрального трубопровода, а добытая нефть собирается автомобилями на залежах и отвозится в фиксированный пункт учета, находящийся на магистральном трубопроводе. Дорожная сеть в общем случае достаточно сложна, разные скважины имеют различные суточные дебиты, изменяющиеся с течением времени, может использоваться неоднородный по характеристикам грузоподъемности, скорости и удельным затратам автопарк. Эти обстоятельства делают нетривиальной задачу оптимизации процесса сбора нефти с удаленных залежей и предполагают существенные резервы в энергосбережении, достигаемые за счет рациональной организации технологического процесса. Каким образом может быть поставлена задача оптимизации такого транспортного процесса?

Для фиксированного состава автопарка эта задача на содержательном уровне может быть сформулирована следующим образом. Предположим, что на всех залежах имеются резервуары с объемом, достаточным для того, чтобы вместить суточный дебит скважин залежи. Процесс сбора, транспортировки и слива в магистральный нефтепровод должен быть организован таким образом, чтобы вся добытая нефть в течение суток была собрана, а суммарные затраты топлива автопарком оказались минимальными из всех возможных. При этом при некоторых соотношениях между дебитами скважин, расстояниями в дорожной сети и характеристиками автомобильного парка, каждый из автомобилей может делать несколько ходок, и, в общем случае, нефть конкретной залежи разбирается несколькими автомобилями.

Сформулированная задача — важный компонент системы поддержки процесса принятия решений в нефтедобыче, а ее решение, генерирующее ежесуточный план поездок, позволяет в рамках имеющейся на предприятии системы мониторинга строить оперативные планы рациональным образом. Периодически решая такую задачу, транспортное подразделение компании получает возможность автоматизировать процесс генерации набора путевых листов для каждого из автомобилей оптимальным с точки зрения энергосбережения образом.

В докладе описывается опыт практического решения такой задачи, которая является NP–трудной задачей целочисленного программирования и уже при небольших размерностях (10 автомобилей, 20 залежей) не может быть решена стандартными пакетами GLPK и GAMS в обозримое время. Проведенный анализ возможных эвристических алгоритмов решения задачи технологического планирования позволяет построить эффективную метаэвристику и, на ее основе, практически значимый генератор путевых листов для нефтяной компании с сотнями машин и залежей.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-06-00032.

Лавлинский Сергей Михайлович, Руднев Антон Сергеевич, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, просп. Ак. Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия тел. (383)36-34-688, факс (383)333-25-98, e-mail: lavlin@math.nsc.ru, anton.rudnev@gmail.com

ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ, ОРИЕНТИРОВАННЫЕ НА ПРИМЕНЕНИЕ В АТОМНОЙ ЭНЕРГЕТИКЕ

А. Н. Сесекин, А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов

Рассматривается задача маршрутизации с ограничениями в виде условий предшествования, в которой функция стоимости перемещений явным образом зависит от списка заданий. Упомянутые особенность и ограничения мотивированы интересами решения прикладной задачи о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации. В этой задаче функция стоимости имеет смысл дозы облучения за счет элементов оборудования, не демонтированных на момент перемещения. В общей постановке предполагаются заданными непустые попарно пересекающиеся подмножества (п/м) $M_1, ..., M_N$ фиксированного конечного множества X, где $N \geq 2$. Задана начальная точка $x^0 \in X: \ x^0 \notin M_1, ..., x^0 \notin M_N$. Мы располагаем возможностью выбора перестановки α в $\overline{1, N}$ (маршрута) и точек $x_1 \in M_{\alpha(1)}, ..., x_N \in M_{\alpha(N)}$. Выбор α стеснен условиями предшествования, определяемыми посредством множества $\mathbf{K}$, $\mathbf{K} \subset \overline{1, N} \times \overline{1, N}$, адресных пар отправитель - получатель; требуется, чтобы маршрут обеспечивал посещения отправителя раньше, чем посещение получателя для всякой адресной пары (см. в [1,§2.1]). Заданы функции стоимости $\mathbf{c}: X \times X \times \mathfrak{N} \longrightarrow [0, \infty[, \mathbf{f}: X \longrightarrow [0, \infty[$, где $\mathfrak{N}$ — семейство всех непустых п/м $\overline{1, N}$. Перемещения характеризуются затратами $\mathbf{c}(x^0, x_1, \overline{1, N}) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(x_i, x_{i+1}, \{\alpha(j) : j \in \overline{i+1, N}\}) + \mathbf{f}(x_N)$, где α — $\mathbf{K}$-допустимый маршрут, $x_i \in M_{\alpha(i)}$ при $i \in \overline{1, N}$. Если $k \in \overline{1, N}$, то $\mathbf{c}(x_k, x_{k+1}, \{\alpha(j) : j \in \overline{k+1, N}\})$ интерпретируется как доза облучения работника при перемещении из $x_k \in M_{\alpha(k)}$ в $x_{k+1} \in M_{\alpha(k+1)}$ в условиях, когда еще “не выключены” источники облучения, нумеруемые индексами из множества $\{\alpha(j) : j \in \overline{k+1, N}\}$. Выбором α и $(x_i)_{i \in \overline{1, N}}$ стремимся минимизировать значение (1). Обозначим через V значение (экстремум) возникающей экстремальной задачи. Для использования метода динамического программирования ограничения задачи преобразуются к эквивалентной форме (см. [1, часть 2]). Определяя при $K \in \mathfrak{N}$ множество $\Sigma[K]$ по правилу [1,(2.2.26)], введем правило вычеркивания, сопоставляющее множеству K его п/м $\mathbf{I}(K) \triangleq K \backslash \{q : (p, q) \in \Sigma[K]\}$. Тогда на $X \times \mathbf{N}$ где $\mathbf{N} \triangleq \mathfrak{N} \cup \{\varnothing\}$, определяется функция Беллмана, отвечающая расширению исходной задачи и такая, что 1) $v(x, \varnothing) = \mathbf{f}(x) \, \forall x \in X$, 2) $v(x^0, \overline{1, N}) = V$,

$$v_s(x, K) = \min_{k \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_k} [\mathbf{c}(x, y, K) + v(y, K \backslash \{k\})]. \qquad (1)$$

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00436 и программой фундаментальных исследований Президиума РАН "Математическая теория управления".

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Г. Ченцов. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. Москва – Ижевск.: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика"Ижевск.: Институт компьютерных исследований. 2008.

Сесекин Александр Николаевич, Ченцов Алексей Александрович, Ченцов Александр Георгиевич, Институт математики и механики УрО РАН, С. Ковалевской, д.16, Екатеринбург, 620219, Россия, тел (343) 3753457, факс (343) 3753364, e-mail: sesekin@list.ru; chentsov@imm.uran.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАГРУЗКИ ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЕЙ НА ПРИМЕРЕ г. ВЛАДИВОСТОКА

Н. Б. Шамрай, Е. А. Нурминский

Основную нагрузку на улично-дорожную сеть (УДС) города дают немаршрутизируемые транспортные средства (ТС), управляемые пользователями, имеющими различные цели поездок. При моделировании распределения таких ТС по элементам УДС используют первый поведенческий принцип Вардропа: каждый из водителей выбирает маршрут с наименьшими транспортными издержками.

В УДС выделим множество $W = \{w = (i,j)\}$ пар источник-сток, между которыми есть спрос на перевозку в объемах d_w. Через P_w обозначим множество маршрутов, соединяющих пару w, через G_p — транспортные издержки на прохождение маршрута p, через $x_p \geq 0$ — величину потока по пути $p \in P_w$, при этом для каждой пары $w \in W$ должны быть выполнены условия $\sum_{p\in P_w} x_p = d_w$. Первый принцип Вардропа формализуется следующим образом: для каждой пары $w \in W$ выполнено условие

$$G_p \begin{cases} = \min_{q\in P_w} G_q = u_w, & \text{если } x_p > 0, \\ > u_w, & \text{если } x_p = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Вектор $x = (x_p : p \in P_w,\ w \in W)$, компоненты которого удовлетворяют условию (1), представляет равновесное распределение ТС в рассматриваемой УДС.

В работе изложен опыт моделирования транспортных потоков для УДС г. Владивостока на основе двух кардинально разных подходов. Первый предполагает наличие непрерывной монотонной зависимости транспортных издержек G_p от загрузки УДС. В этом случае условие (1) переписывается в виде вариационного неравенства (см. [1]). Второй подход отрицает такую зависимость, при этом условие (1) переписывается в виде задачи негладкой оптимизации (см. [2]). Для обоих подходов получены численные расчеты распределения ТС в УДС г. Владивостока и проведен сравнительный анализ результатов с натурными замерами транспортных потоков на улицах города. Также освещены вычислительные аспекты используемых при расчетах алгоритмов, основанных на теории фейеровских процессов с малыми возмущениями (см. [3]).

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00042-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dafermos S. Traffic equilibrium and variational inequalities // Transportation science. 1980. № 14. P. 42–54.

2. Nesterov Y., de Palma A. Stationary dynamic solutions in congested transportation networks: summary and perspectives // Networks and spatial economics. 2003. № 3. P. 371–395.

3. Нурминский Е.А. Использование дополнительных малых воздействий в фейеровских моделях итеративных алгоритмов // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2008. т. 48, вып. 12. С. 2121–2128.

Нурминский Евгений Алексеевич, Шамрай Наталья Борисовна, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, ул. Радио, 5, Владивосток, Россия, тел. (4232) 31-04-04, факс (4232) 31-04-04, e-mail: nurmi@dvo.ru, shamray@dvo.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА НА МАКСИМУМ В КОНЕЧНОМЕРНОМ НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. В. Шенмайер

Рассматривается геометрический вариант задачи коммивояжера на максимум (MAX TSP). Вершинами графа являются точки в пространстве $\mathbb{R}^d$, а весами дуг — расстояния между данными точками относительно некоторой произвольной заданной нормы. Предполагается, что выполнены стандартные аксиомы нормы: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$ и $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ для любых $x \in \mathbb{R}^d$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Задача NP–трудна уже в случае пространства $\mathbb{R}^3$ с евклидовой нормой L_2 [3]. Из положительных результатов отметим полиномиальную разрешимость в случае полиэдральной нормы, а также существование аппроксимационной схемы, имеющей в случае произвольной нормы трудоемкость $n^{O(\varepsilon^{-d})}$ [2].

А. Сердюков предложил асимптотически точный алгоритм решения задачи в конечномерном евклидовом пространстве [1]. Относительная погрешность алгоритма равна $\alpha_d n^{-2/(d+1)}$, где α_d — константа, зависящая только от d. Настоящий результат заключается в обобщении данного алгоритма на случай произвольного нормированного пространства. Относительная погрешность алгоритма оценивается величиной $(d+1)/\lfloor n^{1/(d+1)} \rfloor$.

Алгоритм работает по схеме алгоритма А. Сердюкова в упрощающей интерпретации Э. Гимади. Для применения данной схемы вводится понятие угла в произвольном нормированном пространстве и доказывается ряд связанных геометрических фактов, обобщающих (с небольшими потерями) свойства евклидовых пространств. Полученная оценка погрешности может быть сокращена вдвое путем использования более сложной схемы работы алгоритма.

Работа поддержана грантом РФФИ 08-01-00516-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Сердюков. Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве //Методы целочисленной оптимизации (Управляемые системы). Новосибирск, 1987.Вып. 27. С. 79–87.

2. A. I. Barvinok, S. P. Fekete, D. S. Johnson, A. Tamir, G. Woeginger, R. Woodroofe. The geometric maximum traveling salesman problem // J. ACM. 2003. V. 50, N 5. P. 641–664.

3. S. P. Fekete. Simplicity and hardness of the maximum traveling salesman problem under geometric distances // Proc. of the Tenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. New York: ACM, 1999. P. 337–345.

Шенмайер Владимир Владимирович, Институт математики им С.Л.Соболева СО РАН, проспект Ак. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-24, факс (383) 333-25-98, e-mail: shenmaier@mail.ru

ЗАДАЧА О p–МЕДИАНЕ С ПРЕДПОЧТЕНИЯМИ КЛИЕНТОВ ДЛЯ КЛАСТЕРИЗАЦИИ РАКОВЫХ КЛЕТОК

И. Л. Васильев, К. Б. Климентова

Пусть имеется полный взвешенный ориентированный граф $G(V, A)$, где $V = \{1, \ldots, n\}$ — множество вершин графа, $A = \{ij \,:\, i \in V,\ j \in V,\ i \neq j\}$ — множество дуг графа и $c_{ij} = d(i, j)$ — веса дуг (расстояние между объектами). В задаче о p-медиане с предпочтениями клиентов (ЗpМПК) предполагается, что прикрепление немедианных вершин к медианам осуществляется на основании некоторых "предпочтений" g_{ij}: если $g_{i_1 j} < g_{i_2 j}$, то j вершина будет прикреплена к вершине i_1 в случае, если обе вершины i_1 и i_2 являются медианами (в общем случае, $c_{ij} \neq g_{ij}$). Необходимо выбрать в точности заданное число $p \in Z_+$ медианных вершин и прикрепить к ним остальные вершины, минимизируя суммарное расстояние от немедианных вершин к медианам и учитывая при этом "предпочтения" [1]. Сформулированную задачу можно записать в следующей комбинаторной постановке:

$$\min_{Q \subseteq V, |Q| = p} \sum_{j \in V} c_{q_j j},$$

$$q_j \stackrel{\triangle}{=} \operatorname*{argmin}_{q \in Q} g_{qj}, \quad j \in V.$$

Известно, что задачи размещения могут быть использованы для решения задач кластеризации [2]. Действительно, каждая медиана и прикрепленные к ней вершины графа образуют кластер. Присутствие матрицы "предпочтений" в ЗpМПК позволяет учитывать дополнительную информацию об объектах, которые нужно разбить на кластеры. Например, такая задача использовалась для кластеризации раковых клеток, описанных значениями экспрессии генов и значениями уровней белка после действия медикаментов [3]. Матрицы расстояний, вычисленные для этих двух характеристик раковых клеток, использовались на верхнем и нижнем уровнях ЗpМПК.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е.В. Алексеева, Ю.А. Кочетов. Генетический локальный поиск для задачи о p–медиане с предпочтениями клиентов // Дискретный анализ и исследование операций. 2007. Т. 14. N. 1. С. 3–31.

2. P.Hansen, B. Jaumard. Cluster analysis and mathematical programming // Mathematical Programming. 1997. V. 79. P. 191–215.

3. К.Б. Климентова. Приложение задачи о p-медиане с предпочтениями клиентов для кластерного анализа клеток рака // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2009. N. 3(23). С. 33–38.

Васильев Игорь Леонидович, Климентова Ксения Борисовна,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН, ул. Лермонтова 134,
Иркутск, 644033, Россия, тел. (395-2) 45-31-06, факс (395-2) 51-16-16,
e-mail: vil@icc.ru, Xenia.Klimentova@icc.ru

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ

Э. Х. Гимади, А. А. Курочкин

В общем случае задачи размещения NP–трудны. В сообщении рассматриваются три специальные задачи размещения.

1) **Задача размещения с одинаковыми объемами производства на случайных входах**. Предполагается, что элементы матрицы транспортных расходов — независимые случайные величины с равномерной функцией распределения на целочисленном сегменте $[1, r]$. При некоторых специальных ограничениях на объемы спроса клиентов и число открываемых предприятий построен приближенный алгоритм [1] решения задачи и проведен вероятностный анализ его работы. Представлены условия, при которых алгоритм за время $O(n \ln m)$ (n — число клиентов, m — число возможных пунктов производства) находит асимптотически точное решение.

2) **Задача размещения с одинаковыми объемами производства на на цепном графе**. Предлагается точный алгоритм [2] с временной сложностью $O(m^4 n^2)$, где m и n — число предприятий и число клиентов, соответственно. Это на порядок лучше ранее достигнутого результата относительно обоих параметров m и n.

3) **Двухэтапная задача размещения на сети**. Предполагается, что затраты по транспортировке единицы продукта из пункта в пункт равны сумме длин ребер в пути, соединяющем эти пункты. В общем случае сетевая задача размещения NP–трудна даже в одноэтапной постановке. В случае древовидной сети удается построить точный алгоритм с временной сложностью $O(mn^3)$.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (проекты 08-01-00516, 10-07-00195, 09-01-00032), целевой программы № 2 Президиума РАН (проект № 227), а также целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 44).

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Агеев, Э.Х. Гимади, А.А. Курочкин. Полиномиальный алгоритм решения задачи размещения на цепи с одинаковыми ограничениями на объемы производства предприятий // Дискретный анализ и исследование операций. Изд-во ИМ СО РАН им. С.Л. Соболева, Новосибирск. 2009. Т. 16, № 5, С. 3–18.

2. Э.Х. Гимади, А.А. Курочкин. Одна задача размещения с одинаковыми объемами производства на случайных входных данных // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика (принята в печать).

Гимади Эдуард Хайрутдинович, Курочкин Александр Александрович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, проспект Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 3634624, факс (383) 3332598, e-mail: gimadi@math.nsc.ru; alkurochkin@ngs.ru

k-КЛАСТЕРНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧИ ШТЕЙНЕРА НА ГРАФАХ

Д. А. Ейбоженко

В работе рассматривается задача Штейнера в максимально общей постановке — на ориентированных графах. Она формулируется следующим образом:

Рассмотрим ориентированный граф $G(M, N)$ с заданной на дугах функцией $d: N \to \mathbb{R}_+$, начальной вершиной b и множеством терминальных вершин $E \subset M$. Любое ориентированное дерево с корнем в b, связывающее все терминалы, называется *деревом Штейнера. Задача Штейнера на графах* состоит в поиске дерева Штейнера наименьшей длины.

Как известно из [1], задача Штейнера на графах является NP–сложной. В работе представлен эвристический алгоритм для решения этой задачи. Общая идея алгоритма состоит в следующем:

Исходный граф разбивается на не более чем k непересекающихся подграфов, на каждом из которых ставится отдельная задача Штейнера, индуцированная исходной. Задачи Штейнера не более чем с k терминалами решаются с помощью точного метода, основанного на принципе динамического программирования и уравнении Беллмана, представленного в [2]. Подзадачи с более чем k терминалами в свою очередь вновь разбиваются на более мелкие подзадачи. После преобразования исходной задачи с учетом найденных частичных решений, с помощью точного метода находится промежуточное дерево Штейнера, которое затем оптимизируется с помощью алгоритма локальных улучшений.

В работе была доказана теорема о вычислительной сложности данного эвристического алгоритма, которая составляет $O(2^k tn \log m)$. Верхняя оценка коэффициента аппроксимации алгоритма на данный момент не определена, однако на экспериментальных данных отклонение от точного решения составляет в среднем не более 5%.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Гэри, Д. Джонсон. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

2. И. Романовский. Дискретный анализ. СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2003.

3. G. Robins, A. Zelikovsky. Improved Steiner Tree Approximation in Graphs. 11th ACM Symposium on Discrete Algorithms, 2000.

Ейбоженко Дмитрий Анатольевич, СПбГУ, Университетский пр., дом 28, Санкт-Петербург, 198504, Россия, тел. (921) 555-16-60, e-mail:dmitry@eibozhenko.ru

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ МЕДИАН

В. А. Емеличев, О. В. Карелкина

Рассматривается s-критериальная задача $Z^s(A)$ размещения медиан

$$f_k(t, A) = \sum_{j \in N_n} \min_{i \in t} a_{ijk} \to \min_{t \in T}, \ k \in N_s,$$

состоящая в поиске множества Парето

$$P^s(A) = \{t \in T \ : \nexists t' \in T \ (f(t, A) \geq f(t', A) \ \& \ f(t, A) \neq f(t', A))\}.$$

Здесь $f(t, A) = (f_1(t, A), f_2(t, A), \dots, f_s(t, A))$, $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество клиентов, $T \subseteq 2^{N_m}$, N_m – места возможного расположения предприятий, a_{ijk} – затраты предприятия i при обслуживании клиента j по критерию k, $A = (a_{ijk}) \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$.

В частном случае, когда $s = 1$ и всякое подмножество $t \in T$ размещаемых предприятий имеет мощность p $(1 \leq p \leq m-1)$, наша задача становится широко известной минисуммной задачей размещения (p-median problem) [1, 2].

Следуя [3], задачу $Z^s(A)$ назовем квазиустойчивой, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для всякой матрицы $A' = (a'_{ijk}) \in \Omega(\varepsilon)$ выполняется включение $P^s(A) \subseteq P^s(A + A')$, где

$$\Omega(\varepsilon) = \{A' \in \mathbf{R}^{m \times n \times s} \ : \ ||A'|| < \varepsilon\}, \ ||A'|| = \max\{|a'_{ijk}| \ : \ (i, j, k) \in N_m \times N_n \times N_s\}.$$

Теорема. Для того чтобы s-критериальная задача размещения медиан $Z^s(A)$, $s \geq 1$, была квазиустойчива необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall t \in P^s(A) \ \ \forall t' \in Q^s(t, A) \ \ \forall (j, k) \in N_n \times N_s \ \ (N_{jk}(t, A) = N_{jk}(t', A)),$$

где $Q^s(t, A) = \{t' \in T : f(t, A) = f(t', A)\}$, $N_{jk}(t, A) = \operatorname{Arg\,min}\{a_{ijk} \ : \ i \in t\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Discrete location theory. Ed. by P.B. Mirchandani, R.L. Francis. New York: John Wiley and Sons, 1990.

2. M.S. Daskin. Network and discrete location: models, algorithms and applications. New York: John Wiley and Sons, 1995.

3. В.А. Емеличев, О.В. Карелкина. О квазиустойчивости лексикографической минисуммной задачи размещения // Дискрет. анализ и исслед. опер. 2009. Т. 16, № 2. С. 74–84.

Емеличев Владимир Алексеевич, Карелкина Ольга Владимировна,
Белорусский государственный университет, пр-т Независимости, 4, Минск, 220030, Беларусь. e-mail: emelichev@bsu.by, olga.karelkina@gmail.com

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ РЕШЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ НА ДЕРЕВЕ

Г. Г. Забудский, А. Ю. Лагздин

Квадратичная задача о назначениях (КЗН) – это задача размещения взаимосвязанных объектов в дискретной постановке. На практике она возникает при проектировании генеральных планов предприятий, планов цехов, схем радиоэлектронной аппаратуры и т.д. В общем случае КЗН NP–трудна, а для специальных структур связей между объектами предложены полиномиальные алгоритмы [1].

В работе рассматривается КЗН в следующей постановке. Структура связей между объектами задается с помощью неориентированного реберно взвешенного графа $L = (N, E)$. Область, в которой размещаются объекты, представлена в виде сети $M = (V, U)$ (предполагается, что мощности множеств N и V равны). Размещением графа L на сети M называется взаимно однозначное отображение $\pi : N \to V$. Если $N = V = \{1, \ldots, m\}$, то π – это подстановка. Необходимо найти такую подстановку π^*, для которой

$$F(\pi^*) = \min_{\pi} \sum_{(i,j)\in E} w(i,j)\rho(\pi(i), \pi(j)),$$

где $\rho(\pi(i), \pi(j))$ – кратчайшее расстояние между узлами $\pi(i)$ и $\pi(j)$ сети M, $w(i,j) > 0$ – вес ребра $(i,j) \in E$.

Полиномиальный алгоритм решения сформулированной задачи, когда L – невзвешенная цепь, а M – взвешенное дерево, приведен в [1]. Для размещения взвешенного графа L произвольной структуры на невзвешенном дереве M известен алгоритм динамического программирования [2].

В данной работе предложен параллельный алгоритм динамического программирования, построенный на основе алгоритма из [2]. Проведен вычислительный эксперимент.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 10-01-00598).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Г. Забудский, А.Ю. Лагздин. Полиномиальные алгоритмы решения квадратичной задачи о назначениях на деревьях // Материалы IV Всероссийской конференции "Проблемы оптимизации и экономические приложения". Омск, 2009. С. 126.

2. Г.Г. Забудский, В.А. Мотовилов. Оптимальное размещение объектов на дереве с помощью динамического программирования // Труды XII Байкальской конференции "Методы оптимизации и их приложения". Иркутск, 2001. С. 144–149.

Забудский Геннадий Григорьевич, Лагздин Артем Юрьевич, Омский филиал Института математики им С.Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84,
e-mail: zabudsky@ofim.oscsbras.ru, art.lagzdin@gmail.com

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ДВУХСТАДИЙНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ

А. А. Колоколов, Т. В. Леванова, А. С. Федоренко

Исследуется двухстадийная задача размещения [1] с предприятиями нижнего и верхнего уровней (стадии производства и реализации), обеспечивающими потребности клиентов в некотором продукте. Между предприятиями разных уровней существуют технологические связи. Предприятие верхнего уровня считается открытым, если таковыми являются все связанные с ним предприятия нижнего уровня. Известны стоимости открытия предприятий и затраты на удовлетворение спроса каждого клиента. Требуется найти набор предприятий, для которых суммарные затраты на их открытие и обслуживание клиентов минимальны.

В данной работе изучаются различные математические модели указанной задачи, в частности множества их допустимых решений и свойства соответсвующих многогранников. Продолжается анализ алгоритмов декомпозиции Бендерса, предложенных авторами в [3]. В этом подходе решение исходной задачи сводится к её разбиению на подзадачи целочисленного (ЦП) и линейного программирования и их последовательному решению. Связь между подзадачами осуществляется с помощью отсечений Бендерса, исключающих "неперспективные" целочисленные точки и сужающих допустимую область задачи ЦП. Рассматриваемый метод успешно использовался при решении ряда дискретных задач оптимального размещения предприятий [2]. Для одного из предложенных нами алгоритмов решения двухстадийной задачи размещения приводятся семейства трудных задач. Обсуждаются результаты экспериментальных исследований рассматриваемых алгоритмов на различных сериях тестовых примеров.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 10-01-00598).

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Л. Береснев. Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005.

2. А.А. Колоколов, Т.В. Леванова. Алгоритмы декомпозиции и перебора L-классов для решения некоторых задач размещения. // Вестник Омского ун–та. Омск: ОмГУ. 1996. № 1. С. 21–23.

3. А.А. Колоколов, Т.В. Леванова, А.С. Федоренко. Декомпозиция Бендерса для двухстадийной задачи размещения. // Труды XIV Байкальской междунар. школы–семинара "Методы оптимизации и приложения". 2008. Т. 1. С. 435–443.

Колоколов Александр Александрович, Леванова Татьяна Валентиновна, Федоренко Анатолий Сергеевич, ОФ ИМ СО РАН, ул. Певцова, 13, г. Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84, e-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru, levanova@ofim.oscsbras.ru, fas.omsk@mal.ru

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ СПРОСОМ И ПРЕДЛОЖЕНИЕМ

А. А. Колоколов, А. В. Куряченко

В докладе рассматривается задача размещения предприятий с ограничениями на объемы производства и её обобщение на случай интервальных спроса и предложения. Работа является продолжением исследований для указанной задачи с интервальным спросом [1].

Задача размещения предприятий с ограничениями на объемы производства состоит в следующем. Имеется m пунктов возможного размещения предприятий и n клиентов. Для каждого пункта i известны стоимость размещения c_i и объем производства (предложение) a_i, $i = \overline{1,m}$. Для каждого клиента j задана величина потребления (спрос) b_j, $j = \overline{1,n}$. Известны затраты t_{ij} на транспортировку единицы продукции от i-го пункта производства к j-му клиенту, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Требуется разместить предприятия и прикрепить к ним клиентов так, чтобы минимизировать суммарные затраты.

Под задачей размещения с интервальными спросом и предложеним будем понимать семейство задач с фиксированными параметрами, у которых $a_i \in [\underline{a}_i, \overline{a}_i]$ и $b_j \in [\underline{b}_j, \overline{b}_j]$, $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$. Решением интервальной задачи называется пара $\langle \widetilde{z}, \widetilde{x} \rangle$, допустимая для задачи со спросом $\underline{b}$ и предложением $\overline{a}$ и со значением $F(\widetilde{z}, \widetilde{x})$ не больше, чем для любого решения задачи с параметрами $\underline{a}$ и $\overline{b}$.

Для решения интервальной задачи предложены алгоритмы, основанные на методе декомпозиции Бендерса и переборе L–классов [2], с учетом интервальности данных. Проведено экспериментальное исследование, показавшее перспективность использования данных алгоритмов для решения интервальных задач и получения приближенного решения задач с фиксированными значениями спроса и предложения. Кроме того, проведен анализ устойчивости задачи и одного из алгоритмов её решения при малых колебаниях спроса и предложения.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 10-01-00598).

ЛИТЕРАТУРА

1. Колоколов А.А., Куряченко А.В. Разработка алгоритмов решения одной задачи размещения предприятий с интервальными данными // Динамика систем, механизмов и машин: материалы VII Международной научно-технической конференции. Омск: ОмГТУ, 2009. Кн. 3. С. 47–50.

2. Колоколов А.А. Регулярные разбиения и отсечения в целочисленном программировании // Сибирский журнал исследования операций, 1994. Т. 1. № 2. С. 18–39.

Колоколов Александр Александрович, Куряченко Андрей Владимирович Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84.
E-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru, AKuryachenko@gmail.com

НОВАЯ МОДЕЛЬ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА С ПРЕДПОЧТЕНИЯМИ КЛИЕНТОВ

Ю. А. Кочетов

В работах [1, 2] рассматривается дискретная модель размещения производства, в которой каждый потребитель выбирает поставщика согласно собственным предпочтениям. Предполагается, что эти предприятия известны и без ограничения общности можно считать, что поставщик у потребители всегда один. В [3] отмечено, что потребители редко ограничиваются одним поставщиком. Чаще всего потребитель привлекает многих поставщиков. Более предпочтительные поставщики получают больше заказов. Наименее предпочтительные поставщики либо остаются без заказов, либо получают минимальные заказы.

В настоящей работе приводится математическая постановка такой задачи двухуровневого программирования. Считается, что каждый потребитель имеет определенный бюджет и тратит его в открываемых предприятиях пропорционально собственным предпочтениям. Полученная задача является NP–трудной в сильном смысле. Приводится переформулировка задачи в терминах целочисленного линейного программирования. Обсуждаются результаты численных экспериментов с использованием коммерческого программного обеспечения.

Работа поддержана РФФИ (грант 08–07–00037) и АВЦП Рособразования (проект 2.1.1/3235).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеева Е.В., Кочетов Ю.А. Генетический локальный поиск для задачи о p-медиане с предпочтениями клиентов // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2, 2007. Т 14, № 1, С. 3–31.

2. Васильев И.Л., Климентова К.Б., Кочетов Ю.А. Новые нижние оценки для задачи размещения с предпочтениями клиентов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009 т.49, № 6. С. 1055–1066.

3. Drezner T., Drezner Z. The gravity p-median model // European Journal of Operational Research. 2007. V. 179. P. 1239–1251.

Кочетов Юрий Андреевич, Новосибирский госуниверситет, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-89, e-mail: jkochet@math.nsc.ru

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О P-МЕДИАНЕ

А. В. Ушаков, И. Л. Васильев

Рассмотрим модификацию широко известной NP–трудной задачи о p–медиане. Пусть заданы множество возможных пунктов размещения предприятий $I = \{1, \dots, m\}$, множество клиентов $J = \{1, \dots, n\}$, величины c_{ij}, задающие транспортные затраты на обслуживание j-го клиента из пункта i и функцию $\phi(\cdot)$, задающую штраф на количество открытых предприятий. Требуется выбрать p пунктов так, чтобы суммарные затраты на обслуживание всех клиентов были бы минимальными.

Введя переменные

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-е предприятие открывается;} \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-е предприятие обслуживает клиента } j; \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

задача о p–медиане может быть записана в виде следующей задачи целочисленного программирования:

$$\begin{array}{lll} \min\limits_{(x,y)} & \sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{j\in J} c_{ij}x_{ij} + \phi(p), & \\ & \sum\limits_{i\in I} x_{ij} = 1 & \forall j \in J, \\ & x_{ij} \le y_i & \forall i \in I,\ j \in J, \\ & \sum\limits_{i\in I} y_i = p, & \\ & (x,y) \in \{0,1\}^{mn+m},\ p \in \mathbb{Z}_+. & \end{array}$$

В отличие от классической задачи о p–медиане, количество медиан это переменная величина, и присутствует дополнительный член в целевой функции. Если $\phi(\cdot)$ – линейная функция, то мы получаем известную простейшую задачу размещения. Поэтому нас интересует случай нелинейной функции $\phi(\cdot)$. В докладе обсуждается приложение предлагаемой модели при решении задачи кластерного анализа. Изучаются ее свойства в зависимости от вида функции $\phi(p)$, и предлагается эвристический алгоритм ее решения, основанный на релаксации Лагранжа.

Ушаков Антон Владимирович, Васильев Игорь Леонидович, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033, Россия, тел. (3952) 46-31-06, факс (3952) 51-16-16, e-mail:anton.v.ushakov@gmail.com, vil@icc.ru

РЕШЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ С КОЛЬЦЕВИДНОЙ СТРУКТУРОЙ СВЯЗЕЙ НА СЕТИ

Д. В. Филимонов

В работе рассматривается следующая задача оптимального размещения взаимосвязанных объектов на сети. В каждой вершине $v_1, ..., v_m$ связной неориентированной сети N расположен фиксированный объект. Требуется разместить в вершинах сети n объектов, обслуживающих фиксированные. В одной вершине можно размещать произвольное количество объектов. Пусть $I = \{1, ..., m\}$, $J = \{1, ..., n\}$. Обозначим через $d(v_i, v_s)$ длину кратчайшего пути между вершинами v_i и v_s в сети N, $i, s \in I$.

Пусть $w_{ij} > 0$ – удельная стоимость связи между фиксированным объектом i и размещаемым j, $i \in I$, $j \in J$. Структура связей между размещаемыми объектами определяется с помощью неориентированной сети $U = (J, A)$, где J – множество ее вершин и A – множество дуг. Длина дуги $(j, k) \in A$ равна u_{jk} – удельной стоимости связи размещаемых объектов j и k между собой.

Размещением объектов назовем однозначное отображение $\pi : J \to I$, объект j размещается в вершину $v_{\pi(j)}$. Сформулируем дискретную минимаксную задачу размещения следующим образом. Необходимо найти размещение объектов в вершинах сети N, минимизирующее максимальную стоимость связи между объектами:

$$\max(\max_{(j,k)\in A} u_{jk} d(v_{\pi(j)}, v_{\pi(k)}), \max_{i\in I,\ j\in J} w_{ij} d(v_i, v_{\pi(j)})) \to \min_{\pi}. \qquad (1)$$

В работе [1] предложен полиномиальный алгоритм решения данной задачи в случае, когда N является деревом, а структура связей между размещаемыми объектами определяется произвольной сетью U. В [2] изложен полиномиальный алгоритм решения задачи (1) в случае, когда сеть N – произвольная, а U является деревом.

В данной работе предлагается полиномиальный алгоритм решения задачи (1) в случае произвольной сети N и кольцевидной структуры связей между размещаемыми объектами (U является простым циклом).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Г. Забудский, Д.В. Филимонов. Решение дискретной минимаксной задачи размещения на сети. // Изв. вузов. Математика. 2004. № 5. С. 33–36.

2. Д.В. Филимонов. Решение дискретной минимаксной задачи размещения с древовидной структурой связей на сети. // Труды XIII Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения", Иркутск, 2005. Т. 1. С. 595–600.

Филимонов Дмитрий Валерьевич, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, пр. Мира, 55а, г. Омск, 644077, Россия, тел. (381-2) 22-56-96, e-mail: fdvmail@mail.ru

ПОКРЫТИЕ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ СЛУЧАЙНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СЕНСОРАМИ

Т. А. Алдын-оол, А. И. Ерзин, В. В. Залюбовский

В плоской области O случайно равномерно распределено m сенсоров. Областью мониторинга каждого сенсора является круг с центром в месте расположения сенсора и радиусом, который может выбираться из интервала $[0, R_{max}]$. Для заданной величины $Q \in (0,1)$ назначение радиусов мониторинга $C = (R_1, \ldots, R_m)$ является Q-покрытием, если выполнено следующее неравенство:

$$P\left(O \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} D(j, R_j)\right) \geq Q,$$

где $D(j, R_j)$ — круг с центром в месте расположения сенсора j и радиусом R_j, а $P(A)$ — вероятность события A.

Пусть $\mathcal{C}_Q$ — множество всех Q-покрытий. Расписанием сенсорной сети назовём любое множество вида $\mathcal{C} = \{(C_1, t_1), \ldots, (C_l, t_l)\}$, где $C_k = (R_{1k}, \ldots, R_{mk}) \in \mathcal{C}_Q$, а $t_k \geq 0$ — время работы покрытия C_k в этом расписании. Расписание является допустимым, если суммарное потребление энергии каждым сенсором j не превосходит заданного значения E_0:

$$\sum_{k=1}^{l} t_k R_{jk}^2 \leq E_0.$$

Требуется найти допустимое расписание максимальной длительности:

$$\sum_{k=1}^{l} t_k \to \max_{t_k \geq 0,\ \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_Q}.$$

Сформулированная задача является NP-трудной [1]. Предложены способы построения различных допустимых расписаний, основанных на регулярных детерминированных покрытиях [2]. Проведен априорный и апостериорный анализ их качества. В частности, найдены оценки снизу на время жизни сенсорной сети.

Работа поддержана грантом РФФИ 10-07-92650-ИНД_а и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (ГК № 02.740.11.0429).

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Cardei, M.T. Thai,Y. Li, W. Wu. Energy-efficient target coverage in wireless sensor networks. // Proc. 24th conf. of the IEEE com. soc. (INFOCOM), 2005, pp. 1976–1984.

2. Астраков С.Н., Ерзин А.И., Залюбовский В.В. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами // Дискретный анализ и исследование операций, Т. 16, № 3, 2009, с. 3–19.

Алдын-оол Татьяна Андреевна, Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, e-mail: aldynoolt@rambler.ru

Ерзин Адиль Ильясович, Залюбовский Вячеслав Валерьевич, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Ак. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-23, e-mail: adilerzin@math.nsc.ru, slava@math.nsc.ru

ПОКРЫТИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ КРУГАМИ

С. Н. Астраков, А. И. Ерзин

Рассматривается задача покрытия ограниченных плоских областей, удовлетворяющих некоторым свойствам, кругами. Подобные задачи рассматривались авторами в работах [1,2].

Пусть $M(T) = \{m(t) \subset R^2 : t \in T\}$ — некоторый класс плоских областей, имеющих схожие характеристические свойства, определяемые обобщенным параметром t. Множество $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ является покрытием для $m(t)$, если $m(t) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S_i$. Эффективность покрытия S определим отношением

$$E(S, m(t)) = \frac{1}{\mu(m(t))} \sum_{i=1}^{n} \mu(S_i),$$

где μ – мера площади плоской фигуры.

Задача. Для произвольной области $m(t) \in M(T)$ построить такое покрытие S, чтобы величина $E(S, m(t))$ была минимальной.

В качестве $M(T)$ рассматриваются, в частности, правильные многоугольники, прямоугольники и круги. Требования к покрытиям определяются способами расположений кругов, а также их размерами и количеством.

В работе построены новые покрытия низкой плотности для классов областей, которые представляют практический интерес для сенсорных сетей. Приведена методика определения технических характеристик покрытий в зависимости от их стоимостных характеристик.

Работа поддержана грантом РФФИ 10-07-92650-ИНД_а и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0429).

ЛИТЕРАТУРА

1. С.Н. Астраков, А.И. Ерзин, В.В. Залюбовский. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами // Дискретный анализ и исследование операций, т. 16, № 3, 2009, 3–19.

2. С.Н. Астраков, А.И. Ерзин. Покрытие бесконечной полосы кругами одного и двух радиусов // Труды ИВМиМГ СО РАН, Информатика, 9, Новосибирск, 2009, 143–148.

Астраков Сергей Николаевич, Кемеровский институт (филиал) ГОУ ВПО Российский государственный торгово-экономический университет, пр. Кузнецкий, 39, Кемерово, 650992, Россия, тел. (83842)75-33-34, e-mail: astrakov90@gmail.com

Ерзин Адиль Ильясович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-82, e-mail: adilerzin@gmail.com

IMPOSING NON-PREEMPTIVENESS IN RESOURCE-CONSTRAINED PROBLEMS USING LINEAR PROGRAMMING AND THE CONSECUTIVE-ONES PROPERTY

G. Belov

Matrix $A \in \{0,1\}^{m,n}$ is said to have the *consecutive-ones property (for rows) (C1P)* if its columns can be reordered such that in each row, the 1s are consecutive.

In the examples below, the matrix on the left has the C1P because by permuting its columns (labeled c_1–c_4) one can obtain the matrix in the middle where the 1s in each row appear consecutively. The matrix on the right, in contrast, does not have the C1P [cf. 2].

$$\begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} c_3 & c_1 & c_4 & c_2 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

We say that the columns $a_{\cdot j}$ of matrix A are *resource-constrained* if they satisfy the knapsack condition

$$\textstyle\sum_{i=1}^m w_i a_{ij} \ \le\ W, \qquad j = \overline{1,n}$$

for given $w \in \mathbb{Z}_+^m$ and $W \in \mathbb{Z}_+$.

The basic resource-constrained problem we consider is the *cumulative-resource non-preemptive scheduling problem* or, equivalently, the *1D contiguous cutting-stock problem* (CCSP). In terms of scheduling, we have m jobs and a single resource, job i consumes w_i units of the resource for h_i units of time, $i = \overline{1,m}$. Each job should be processed without interruption (*non-preemptiveness*). The resource can be consumed cumulatively, but in any moment of time up to W units. The goal is to minimize the total processing time.

Let there be given a square matrix $A \in \{0,1\}^{m,m}$ with resource-constrained columns so that holds:

$$\{x : Ax = h,\ x \ge 0\} \ \ne\ \emptyset.$$

If A has C1P, any feasible x obviously represents a schedule. Moreover, for $h \in \mathbb{Z}^m$ there exist integral feasible x due to the following

Fact [cf. 3, p. 544]. *Any C1P matrix is totally unimodular.*

Traditional exact algorithms enumerate feasible schedules directly [cf. 1]. We propose a branch-and-price algorithm based on the preemptive relaxation of CCSP (classical 1D stock cutting). The root node solves the LP relaxation of the set-partitioning formulation of the latter problem. In subnodes, branching constraints eliminate the subcolumns of the LP basis prohibiting the C1P. Application to 2D rectangular strip packing is discussed.

The project was supported by the German Research Foundation grant BE 4433/1-1, and RFBR 10-07-91330-HHUO-a.

REFERENCES

1. F. Clautiaux, A. Jouglet, J. Carlier, A. Moukrim. A new constraint programming approach for the orthogonal packing problem. // Comp.& OR. 2008. V. 35. P. 944–959.
2. M. Dom. Recognition, generation, and application of binary matrices with the consecutiveones property. // PhD thesis. Jena University, 2008.
3. G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey. Integer and combinatorial optimization. Wiley, 1988.

Belov Gleb, Dresden University of Technology, Mommsenstr. 13, Dresden, 01062, Germany, tel. +49 351 46335443, fax +49 351 46334268, e-mail:gleb.belov@tu-dresden.de

МАКСИМИЗАЦИЯ ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ СЕНСОРНОЙ СЕТИ В СЛУЧАЕ ЗАДАННОГО МНОЖЕСТВА ПОКРЫТИЙ

А. И. Ерзин, Р. В. Плотников

Пусть имеется множество объектов и задано множество сенсоров J, которые осуществляют мониторинг объектов. Если объект попадает в зону мониторинга некоторого сенсора, то этот сенсор *покрывает* объект. Покрытие – это такое помножество сенсоров $C \subseteq J$, что каждый объект покрыт хотя бы одним сенсором из C. В сенсорных сетях (СС) часто дополнительно требуется, чтобы сенсоры покрытия индуцировали связный граф.

Время жизни сенсора $j \in J$ определяется его энергией $r_j > 0$. Находясь в *активном* состоянии, сенсор осуществляет мониторинг и передачу информации и тратит единицу энергии в единицу времени. В состоянии *сна* потери энергии сенсора пренебрежительно малы. Как правило, количество сенсоров значительно превышает мощности покрытий, поэтому одновременно только часть сенсоров может находиться в активном состоянии, определяя покрытие, давая возможность остальным сенсорам сохранить свою энергию. Т.о. максимизация времени жизни СС – отрезка времени, в течение которого все объекты покрыты активными связными сенсорами, – достигается путем выбора совокупности покрытий и определением их времени жизни с учетом того, что каждый сенсор j находится в активном состоянии в общей сложности не более времени r_j.

Обозначим k-е покрытие как C_k. Введем параметры $b_{jk} = 1$, если $j \in C_k$ и $b_{jk} = 0$ в противном случае, и переменные y_k – время жизни покрытия C_k (в течение этого времени активны все сенсоры из C_k). В [1] поставлена NP–трудная задача

$$\sum_k y_k \to \max_{y_k \geq 0}; \quad \sum_k b_{jk} y_k \leq r_j, j \in J,$$

когда совокупность покрытий *не задана*, а переменные y_k *непрерывные*. Предложен приближенный алгоритм.

В данной работе рассмотрен случай, когда множество покрытий *задано* и переменные y_k принимают *целые* значение, что адекватно отражает природу СС. Доказана NP-трудность такой задачи, а также показано, что существование аппроксимационной схемы влечет равенство $P = NP$. Найдены частные случаи полиномиальной разрешимости задачи, а также условия принадлежности её классу APX.

Работа поддержана грантом РФФИ 10-07-92650-ИНД_а и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0429).

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Berman, G. Galinescu, C. Shan, A. Zelikovsky. Power efficient monitoring management in sensor networks. // Proc. of IEEE Wireless Communications and Networking Conf., Atlanta, USA, 2004, p. 2329-2334.

Ерзин Адиль Ильясович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-82, e-mail:adilerzin@math.nsc.ru

Плотников Роман Викторович, Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. +7-923-146-2486, e-mail:nomad87@ngs.ru

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ МИНИМАЛЬНОГО ВЕКТОРА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В. М. Картак, М. А. Мухачёва

Введем в рассмотрение задачу линейного программирования L:

$$L: \qquad cx \to \min \quad \text{s.t.} \quad Ax \geq b, \quad x \in R$$

В докладе предлагается метод для определения основных компонент вектора решений задачи L, т.е. тех переменных, которые обязательно будут иметь ненулевое значение в любом оптимальном решении.

Алгоритм заключается в следующем. Найдем решение задачи L и обозначим значение целевой функци через z_0, а полученный вектор через $X_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Для каждой ненулевой компоненты вектора X_0 определим, будет ли она содержаться в любом оптимальном решении задачи L. Для этого, всем $x_i > 0$ поставим в соответствие x_i^* — значение целевой функции следующей задачи линейного программирования:

$$L_i: \qquad x_i \to \min \quad \text{s.t.} \quad Ax \geq b, \quad cX_0 \geq z_0, \quad x \in R$$

.

Таким образом, получим **минимальный вектор** $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$.

Каждой из переменных задачи L добавим ограничение $x_i \geq \lceil x_i^* \rceil$, и получим задачу линейного программирования L^*:

$$L^*: \qquad cx \to \min \quad \text{s.t.} \quad Ax \geq b, \quad x_i \geq \lceil x_i^* \rceil, \quad x \in R$$

Значение целевой функции z^* задачи L^* можно рассматривать как нижнюю границу для задачи целочисленного линейного программирования с ограничениями задачи L.

Описанный метод был использован при нахождении нижних границ для задач линейного раскроя [1] и задач о покрытии множества [2].

Работа поддержана грантом РФФИ 10-07-91330-ННUO-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Картак. Достаточные условия невыполнения свойства целочисленного округления для задачи линейного раскроя. // Автоматика и телемеханика. ИПУ РАН 2004, N4 С. 55–62.

2. А. В. Еремеев, Л. А. Заозерская, А. А. Колоколов. Задача о покрытии множества: сложность, алгоритмы, экспериментальные исследования. // Дискретные анализ и исследование операций. Июль-декабрь 2000. Серия 2. Том 7. N2, стр. 22–46.

Картак Вадим Михайлович, Мухачёва Марина Андреевна, Уфимский государственный авиационный технический университет (УГАТУ), ул. К. Маркса, Уфа, 450000, Россия, тел. (347) 2737967. E-mails: kvmail@mail.ru, marina_twins@rambler.ru

ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ ЗАГРУЗКИ N–МЕРНОГО ОРТОГОНАЛЬНОГО РЮКЗАКА

В. М. Картак

В докладе рассмотрена задача загрузки N–мерного ортогонального рюкзака без учета стоимости предметов, которая состоит в следующем: пусть для заданного натурального $N \geq 2$ известен вектор, задающий размеры рюкзака

$\mathbf{S} = (S_1, S_2, \ldots, S_N)$ и набор предметов, состоящий из m штук N–мерных параллелепипедов, заданных размерами $\mathbf{R} = (\mathbf{R_1} = (r_{11}, \ldots, r_{N1}), \ldots, \mathbf{R_m} = (r_{1m}, \ldots, r_{Nm}))$. Вопрос: можно ли все предметы из $\mathbf{R}$ разместить в $\mathbf{S}$?

Эта задача является NP–трудной уже при $N = 2$. Значительную сложность составляют случаи, когда задача не имеет допустимого решения. В общем случае для доказательства отсутствия решения требуется перебрать все допустимые варианты. В докладе представлен подход, зачастую позволяющий показать, что у задачи нет допустимого решения, избегая перебора.

Предложенный метод секущих плоскостей является обобщением подхода, описанного в [1]. Основная идея заключается в рассмотрении сечения рюкзака плоскостями, параллельными всем возможным координатным направлениям. Каждому направлению сечений сопоставляется соответствующая задача линейного программирования (ЛП). В докладе рассмотрены свойства получившихся задач ЛП. Сформулировано и доказано необходимое условие существования допустимого решения для исходной задачи.

Используя данное условие, предложен псевдополиномиальный алгоритм проверки существования допустимого решения. Вычислительный эксперимент подтверждает перспективность предложенного подхода.

Работа поддержана грантами РФФИ 08-07-00495а, 10-07-91330-ННUO-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Belov, V. Kartak, H. Rohling, and G. Scheithauer. One-dimensional relaxations and LP bounds for orthogonal packing. // International Transactions on Operational Research 16(2009) P. 745–766

Картак Вадим Михайлович, Уфимский государственный авиационный технический университет, ул. К.Маркса 12, Уфа, 450000, Россия, тел. (3472) 73-79-67, E-mail: kvmail@mail.ru

RECTANGULAR CUTTING MATERIAL ON THE BASIS OF THE GUILLOTINE CUTTING ALGORITHM

M. O. Kenjebaeva

The goal of this work is to solve the problem of rectangular cutting material that occurs in the furniture manufacturing rectangular items (tables, chairs, cabinets, etc.). We need to find a combination of placing the initial set of pieces (variable) on sheets of given size, in which received orders (constraints) that are satisfied with minimal rests (objective function). In order to solve this problem the guillotine cutting material algorithm was chosen, because this method is easily implemented and directly satisfies all geometrical and technological constraints. Let's consider the application of this method for an exact example. It is necessary to cut on a rectangular area size of $A \times B$ (80×40) in to two rectangles with the dimension of $a \times b$ (30×15) and $c \times d$ (35×25) in the quantity accordingly to r1 (26) and r2 (35), and it is also necessary to have as less area of snips as possible. To solve the problem, we construct a grid of all possible variants of cutting. In this grid, we define only those variants that best fill the given area. Condition when the node belongs to the locality of optimal solution is defined as follows:

$$A - min(a, b, c, d) \leq X1[i] + X2[j] + X3[k] + X4[l] \leq A \ \ or$$

$$B - min(a, b, c, d) \leq X1[i] + X2[j] + X3[k] + X4[l] \leq B,$$

where $X1[i], X2[j], X3[k], X4[l]$ – node coordinates.

There is a program which sorts the variants which maximally filled the cutting area. With the given exact parameters of the problem the program identified the following variants. The program displays it as a problem of integer programming (POIP).

2 12
0 1 2 3 3 5 2 2 3 3 5 5 = 26
3 2 2 1 1 0 2 1 1 1 0 0 = 35
min
575 1000 550 975 975 950 550 1425 975 975 950 950

This POIP is easily solved with the help of add-in program "Search Solutions"in Microsoft Office Excel 2003. The solution is as follows:
I variant (x1 [1] = 0 x2 [1] = 0 x3 [1] = 0 x4 [1] = 75) – 3 pcs. (0.3)
VI variant (x1 [6] = 0 x2 [6] = 30 x3 [6] = 0 x4 [6] = 50) – 7 pcs. (2.2)
XI variant (x1 [11] = 30 x2 [11] = 0 x3 [11] = 0 x4 [11] = 50)– 6 pcs. (2.2)

In the same way one can get a solution for other sets of parameters as well as for more numbers of different elements of the cutting.

REFERENCES

1. P. Bunakov. Algorithm optimal cutting of materials for automated production. www.sapr.ru

Kenjebaeva Merey Omarovna, KazNU after by Al-Farabi, Masanchi str., 39/47, Almaty, 050012, Kazakhstan, tel. +7 (727) 239-05-66, e-mail: k_merey_o87@mail.ru

ПРОЕКТИРОВАНИЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПРЕДМЕТОВ НА МНОГОСВЯЗНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИГОНАХ

Э. А. Мухачева, Э. И. Хасанова

Рассматривается задача размещения прямоугольных предметов сквозными (гильотинными) рядами на многосвязном ортогональном полигоне (МОП). МОП интерпретируется как полигон, содержащий некоторые из объектов (здания, технические объекты и устройства, контейнеры). Требуется разместить новые прямоугольные объекты в свободной от препятствий области полигона. Для обеспечения комфортности загрузки и выгрузки на размещение накладывается дополнительное ограничение – наличие сквозных проходов между предметами. Приведенный в работе алгоритм предполагает решение поставленной задачи в два этапа: декомпозиция свободной области полигона на прямоугольные боксы и сквозное размещения в них заданных предметов.

Согласно декомпозиционному методу заданный МОП представляется в виде прямоугольной области с препятствиями. Область разделяется на элементарные ячейки, каждая из которых либо не содержат препятствий, либо является препятствием или его частью. После этого область представляется в виде бинарной матрицы. На ее основе ячейки объединяются в прямоугольные боксы. При выборе способа объединения используются идеи мультиметодных [1] и уровневых [2] технологий. В основу алгоритма размещения объектов в прямоугольные контейнеры был положен уровневый метод решения задачи гильотинного размещения предметов в полубесконечную полосу (2-Dimensional Guillotine Strip Placing, **2DGSP**). Уровневые алгоритмы позволяют быстро получить достаточно хорошие решения с соблюдением принципа сквозного размещения. В работе представлена их модификация, основанная на включении в метод процедуры заполнения боковых пустот [3]. Проведены численные эксперименты, подтверждающие эффективность предложенных алгоритмов.

Программный комплекс может использоваться при проектировании загрузки транспортных средств для доставки товарной продукции по маршрутам; в процессе проектирования производственных помещений; раскроя материала с дефектами и решения некоторых задач покрытия.

Работа поддержана грантом РФФИ 10-07-91330-ННИО-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Валиахметова Ю.И., Мухачева Э.А., Филиппова А.С., Гильманова Н.А., Карипов У.А. Мультиметодная технология ортогональной упаковки и ее применение в задачах транспортной логистики // М.: Приложение к журналу Информационные технологии, №12. 2009. 31 С.

2. Lodi A., Martello S., Vigo D. Recent advances on two-dimensional bin packing problems // Discrete Applied Mathematics 123, 2002, P. 379–396.

3. Мухачева Э.А., Хасанова Э.И. Гильотинное размещение контейнеров в полосе: комбинирование эвристических технологий. // М.: Информационные технологии. 2009. № 11. С. 8–14.

Мухачева Элита Александровна, Хасанова Элина Ильдаровна, Уфимский государственный авиационный технический университет, ул. К. Маркса 12, Уфа, 450077, Россия, тел. (347) 2725453, e-mail: elitamuh@mail.ru, xasel@mail.ru

ТОЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДВУХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ В ПОЛОСУ

Д. А. Назаров

Рассматривается двумерная задача упаковки в полосу (**2SPP**): требуется в полосу ширины W упаковать множество прямоугольных предметов заданной ширины w_i и высоты h_i, $i = \overline{1, n}$ так, чтобы прямоугольники не перекрывались между собой и не выходили за границы полосы. Необходимо найти допустимую прямоугольную упаковку с минимальной занятой высотой полосы.

Суть предлагаемого метода заключается в генерации двух множеств B и T частичных упаковок, каждый элемент которых состоит из $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ и $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ прямоугольников соответственно. Для каждого элемента b_i множества B находятся все такие элементы t_{ij} множества T, что пара b_i и t_{ij} состоит из различных прямоугольных предметов. Из каждой найденной пары b_i и t_{ij} получается допустимая прямоугольная упаковка путем размещения t_{ij} над b_i. В качестве частичных упаковок достаточно рассматривать только так называемые "лестничные" частичные упаковки [1].

Множества B и T генерируются одинаково и различаются только для нечетных значений n. Генерация начинается с пустой "лестничной" частичной упаковки. Из каждой полученной частичной упаковки генерируются другие частичные упаковки путем размещения одного из доступных прямоугольников на одной из "ступенек". Таким образом, сначала генерируются все "лестничные" частичные упаковки из i прямоугольников и только затем из $(i + 1)$ прямоугольников.

Для каждой полученной частичной упаковки рассчитывается несколько нижних границ, включая непрерывную нижнюю границу и границу на основе задачи $0 - 1$ рюкзак. Если хотя бы одна из границ превышает или равна текущему минимуму занятой высоты полосы, то соответствующая частичная упаковка отбрасывается.

Также предлагается принцип *доминирования* одной "лестничной" частичной упаковки над другой, полученных из одного и того же набора прямоугольных предметов. Для каждого такого множества полученных упаковок исключаются элементы, над которыми доминирует хотя бы один элемент из данного множества. Этот шаг выполняется при переходе от генерации частичных упаковки из i прямоугольников к упаковкам из $(i + 1)$ прямоугольников. Приведены результаты численного эксперимента.

Работа поддержана грантами РФФИ 08-07-00495a, 10-07-91330-ННИО-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kenmochi M., Imamichi T., Nonobe K., Yagiura M., Nagamochi H. Exact algorithms for the two-dimensional strip packing problem with and without rotations // European Journal of Operational Research – 2008.

Назаров Денис Анатольевич, Уфимский Государственный Авиационный Технический Университет, К.Маркса, 12, г.Уфа, 450000, Россия. E-mail: denis.nsc@gmail.com

РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТАЭВРИСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ МИНИМАЛЬНОГО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОКРЫТИЯ

В. Д. Фроловский, Р. М. Хусаинов

Пусть в двумерном пространстве имеется покрываемая поверхность S_0 и покрывающие геометрические объекты (ГО) $S_1, \ldots, S_m$, где m – общее количество заданных объектов различной формы (прямоугольники, треугольники, окружности и их теоретико-множественные комбинации). Требуется расположить ГО на покрываемой поверхности таким образом, чтобы вся поверхность была покрыта целиком, т.е. должно выполняться следующее условие: $S_0 \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = S_0$, где n – общее количество использованных объектов (в общем случае $n \neq m$, т.к. некоторые объекты могут быть использованы несколько раз, или не использованы совсем) [1, 2].

Задан один из следующих критериев оптимизации:

- $L_1 = n \to \min$, где $TRIALRESTRICTION$ – общее количество использованных ГО;
- $TRIALRESTRICTION$, где $TRIALRESTRICTION$ – стоимость использования $TRIALRESTRICTION$ го объекта;
- $TRIALRESTRICTION$, где $TRIALRESTRICTION$ – площадь пересечений использованных ГО, $TRIALRESTRICTION$ – площадь частей ГО, вышедших за края покрываемой поверхности. Кроме того, можно использовать комплексный критерий (аддитивный или мультипликативный).

В работе рассмотрены следующие методы решения задачи оптимального геометрического покрытия: алгоритм “первый подходящий”; генетический алгоритм; алгоритм наложения изображений; алгоритм двумерных матриц; муравьиный алгоритм; вероятностный алгоритм; самонастраивающийся генетический алгоритм; гибридный генетический алгоритм. Разработан программный комплекс, позволяющий задавать покрываемую поверхность и покрывающие объекты, выбирать нужный критерий оптимизации и метод поиска решения и получать информацию о найденном решении. Программы позволяют работать с прямоугольниками, треугольниками, окружностями, а также объектами, полученными комбинацией этих примитивов.

Разработан эффективный растровый способ кодирования решений, позволяющий достаточно быстро обрабатывать решение, производить с ним необходимые для каждого конкретного алгоритма манипуляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппова А. С., Кузнецов В. Ю. Задачи о минимальном покрытии ортогональных многоугольников с запретными участками // Информационные технологии. 2008. № 9 (145). 2008. С. 60–65.

2. Фроловский В.Д. Приближенные методы решения NP–трудных задач в системах автоматизации проектирования. Новосибирск. НГТУ. 2006. 100с.

Фроловский Владимир Дмитриевич, Хусаинов Руслан Мансурович, НГТУ, ул. Немировича-Данченко, 136, Новосибирск, 630092, Россия, тел. (383) 346-15-59, e-mail: frolovsky@asu.cs.nstu.ru, KhusainovHeckfy@gmail.com

ТОЧНОЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАКСИМАЛЬНОЙ ВЫПОЛНИМОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПЕРЕБОРА L-КЛАССОВ

А. В. Адельшин, А. К. Кучин

Рассматривается задача максимальной выполнимости (MAX SAT) логической формулы, заданной в конъюнктивной нормальной форме, т.е. представляющей собой конъюнкцию дизъюнкций C_i, $i = 1, \ldots, m$, где каждая C_i — дизъюнкция логических переменных и их отрицаний. Пусть каждой скобке C_i соответствует некоторый неотрицательный вес w_i. Задача заключается в том, чтобы найти такой набор значений переменных, при котором суммарный вес истинных скобок будет наибольшим.

В работе [1] проводились исследования данной задачи на основе моделей целочисленного линейного программирования и L-разбиения, описан алгоритм точного решения невзвешенной задачи MAX SAT. В [2] предложен алгоритм локального поиска с чередующимися окрестностями для решения взвешенного варианта этой задачи. В обоих алгоритмах строится конечная последовательность специальных задач выполнимости (SAT), для решения которых используется алгоритм перебора L-классов.

В данной работе предложен точный алгоритм решения взвешенной задачи MAX SAT, основанный на лексикографическом переборе целочисленных векторов $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)$, каждому из которых соответствует задача выполнимости логической формулы, содержащей дизъюнкции C_i, если $Z_i = 1$, и отрицания C_i, если $Z_i = 0$. Перебор осуществляется специальным образом, направленным на уменьшение числа решаемых задач SAT. Также предложена схема алгоритмов локального поиска с чередующимися окрестностями, особенностью которых является одновременное использование окрестностей векторов $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)$ и векторов $X = (X_1, \ldots, X_n)$ из пространства логических переменных.

Приведены результаты вычислительного эксперимента на сериях тестовых задач из электронных библиотек SATLIB и MAX SAT Evaluation 09. Проведено сравнение предложенного точного алгоритма с алгоритмом wmaxsatz [3], а также алгоритмов локального поиска для различных последовательностей используемых окрестностей.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 10-01-00598).

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Колоколов, А.В. Адельшин, Д.И. Ягофарова. Решение задач выполнимости и некоторых её обощений с использованием метода перебора L–классов // Прикладная математика и информационные технологии. Омск, 2005. С. 68–79.

2. Kolokolov A., Adelshin A., Yagofarova D. Local search algorithms for the MAX SAT problem based on L–class enumeration //Extended Abstracts of 18th Mini Euro Conference on VNS. Tenerife (Spain), 2005. P. 117 – 118.

3. www.maxsat.udl.cat/09

Адельшин Александр Владимирович, Кучин Андрей Константинович, Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова, 13, Омск, 644099, Россия. e-mail: adelshin@mail.ru, dommoi@yandex.ru

АЛГОРИТМ ЛОКАЛЬНОГО СПУСКА ПО РАСШИРЕННОЙ ОКРЕСТНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

В. Л.Береснев, Е. Н. Гончаров

В [1] введено понятие расширенной (обобщенной) окрестности в пространстве (0,1)-векторов и предложен алгоритм локального поиска по обобщенной окрестности для задачи отыскания наименьшего значения псевдобулевой функции. В настоящей работе исследуются свойства обобщенной окрестности на примере псевдобулевой функции $f(x_1,\ldots,x_m)$ вида $f(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{i=1}^m f_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \min_{j|x_i=1} c_{ij}$.

Задача минимизации такой функции эквивалентна задаче размещения предприятий [2].

Вычислительные эксперименты проводились на классах задач размещения предприятий и задач покрытия множества, взятых из библиотек тестовых примеров – [3,4]. Цель вычислительного эксперимента – определить насколько локально-оптимальное решение x_0 по окрестности $N_1(x) = \{y \in B^m \mid d(x,y) = 1\}$, где $d(x,y)$ – расстояние Хемминга, отличается от локально-оптимального решения $\widetilde{x}_0$ по обобщенной окрестности $\widetilde{N_1}(x_0)$. Кроме того, представляет интерес вопрос о строении окрестности $\widetilde{N_1}(x_0)$, в частности, вопрос о том, насколько удалены элементы множества $\widetilde{N_1}(x_0)$ от точки x_0. Полученные результаты показывают, что элементы обобщенной окрестности $\widetilde{N_1}(x_0)$ "охватывают" значительную часть пространства (0,1)-векторов и в среднем находятся от точки x_0 на Хэммиговом расстоянии $m/4 \div m/3$. При этом по значению целевой функции локально-оптимальное решение x_0 по окрестности $N_1(x)$ в среднем от 1,2 раза до 4 раз (для разных классов задач) хуже локально-оптимального решения $\widetilde{x}_0$ по обобщенной окрестности $\widetilde{N_1}(x_0)$.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 08-01-00516 и 08-07-00037), целевой программой №2 Президиума РАН, целевой прогр. СО РАН (интегр. проект № 44).

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Л. Береснев, Е.Н. Гончаров Алгоритм стохастического локального спуска по расширенной окрестности для задачи минимизации псевдо-Булевых функций // Труды XIV Байкальской международной школы-семинара, Иркутск-Северобайкальск, 2008 г., Методы оптимизации и их приложения. Том 2. Оптимальное управление, с. 93–98.

2. Береснев В. Л. Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. – Новосибирск. Изд-во Инст. математики, – 2005.

3. http://www.math.nsc.ru/AP/benchmarks/english.html

4. Beasley J. E. OR-Library: distributing test problems by electronic mail. J. Oper. Res. Soc. 1990. Vol. 41, P. 1069–1072.

Береснев Владимир Леонидович, Гончаров Евгений Николаевич, Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия,тел.: (383) 333-29-91, (383) 363-46-23, e-mail: beresnev@math.nsc.ru, gon@math.nsc.ru

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ МЕТАЭВРИСТИКИ В ЗАДАЧАХ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С КРИТЕРИЕМ СИММЕТРИИ

А. С. Бондаренко, И. В. Козин

Группой симметрии конечного множества X будем называть любую подгруппу группы перестановок элементов этого множества [1]. Орбитой элемента x под действием группы симметрии G называется множество $O_g(x) = \{y|y = g(x), \forall g \in G\}$. Орбитой множества $Y \subseteq X$ называется объединение орбит его элементов.

Определение Подмножество $Y \subseteq X$ называется вполне симметричным относительно действия группы G, если $\forall g \in G,\ g(Y) = Y$. Множество вполне симметрично тогда и только тогда, когда совпадает со своей орбитой.

Определение Внешней мерой симметрии [2] $\mu_G(Y)$ подмножества $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$ называется отношение числа элементов этого множества к числу элементов его орбиты $\mu_G(Y) = \frac{|Y|}{O_G(Y)}$. Для пустого множества по определению $\mu_G(\emptyset) = 1$. Очевидно, что $\frac{|Y|}{|X|} < \mu_G(Y) \leq 1$, причем, если $\mu_G(Y) = 1$, то Y — вполне симметричное множество.

Определение Внутренней мерой симметрии $\nu_G(Y)$ подмножества $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$ называется отношение числа элементов максимального вполне симметричного подмножества этого множества к числу элементов множества Y. Для пустого множества по определению $\nu_G(\emptyset) = 1$.

Исследованы простейшие задачи с критерием симметрии на конечных множествах. Установлен класс сложности этих задач. Рассмотрен ряд задач теории расписаний, упаковки контейнеров, раскроя с критериями симметрии.

Для поиска приближенных решений рассмотренных задач комбинаторной оптимизации предлагается применять общий подход, основанный на использовании эволюционных метаэвристик [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Богопольский О.В. Введение в теорию групп. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. с.148.

2. Козин И.В. Принципы симметрии в теории принятия решений. Запорожье: Полиграф, 2008. с.164.

3. Holland J.H. Adaptation in Natural and Artificial Systems. Cambridge: MIT Press, 1992.

Бондаренко Александр Сергеевич, Козин Игорь Викторович, Запорожский национальный университет, ул. Жуковского 66, Запорожье, 69600, Украина,
тел. +38 (061) 764-55-12, e-mail: buenasdiaz@gmail.com, ainc@ukrpost.net

ЭВРИСТИКИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ВЫБОРА УЗЛОВ ХАБОВ В МОДЕЛИ КОНКУРЕНТНОГО РЫНКА ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ

П. А. Борисовский, Е. Б. Гринкевич, А. В. Еремеев, С. А. Клоков, Н. А. Косарев

В работе рассматривается задача выбора узлов торговых хабов в электроэнергетической сети для рынков с маржинальным узловым ценообразованием [1]. В качестве хаба рассматривается подмножество узлов электроэнергетической сети, а индексом хаба является среднее значение цены в его узлах.

Заданы значения цен электроэнергии для каждого узла сети и каждого субъекта рынка за некоторый достаточно продолжительный период, а также число искомых хабов. Каждый хаб должен содержать не менее минимально допустимого числа вершин. Требуется выбрать хабы и прикрепить к ним субъектов рынка с целью минимизации суммарного взвешенного среднеквадратического отклонения узловых цен субъектов от индексов хабов, к которым они прикреплены. В качестве весов могут использоваться объемы потребления или генерации. Также рассматривается модификация критерия, когда в каждый период времени t вычисляется отклонение цены C_{it} субъекта рынка i не от индекса C_{Ht} хаба H, а от линейной функции $a_i + b_i C_{Ht}$, где коэффициенты a_i, b_i – оптимизируемые параметры для каждого субъекта рынка i.

Для поиска приближенного решения данной задачи предложены и экспериментально исследованы генетический алгоритм, эволюционная стратегия (1+1)-EA и алгоритм локального поиска. Алгоритмы показали свою работоспособность на реальных данных большой размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. P.A. Borisovsky, A.V. Eremeev, E.B. Grinkevich, S.A. Klokov and A.V. Vinnikov. Trading hubs construction for electricity markets // J. Kallrath, P.M. Pardalos, S. Rebennack, M. Scheidt (eds.) Optimization in the Energy Industry. Springer. 2009. P. 29-58.

Борисовский Павел Александрович, Омский государственный технический университет, пр. Мира 11, Омск, 644050, Россия, тел. (3812) 65-20-48,
e-mail: borisovski@user.omskreg.ru
Гринкевич Егор Борисович, НП «Совет рынка», Краснопресненская наб. 12, Москва, 123610, Россия, тел. (495) 967-00-05, факс (495) 232-92-15, e-mail: geb@rosenergo.com
Еремеев Антон Валентинович, Клоков Сергей Александрович, Косарев Николай Александрович, Омский филиал Института математики им С.Л.Соболева СО РАН, ул. Певцова 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 23-67-39, факс (3812) 23-45-84, e-mail: eremeev@ofim.oscsbras.ru, klokov@ofim.oscsbras.ru, nkosarev@mail.ru

АЛГОРИТМ МУРАВЬИНОЙ КОЛОНИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ДВУМЕРНОЙ УПАКОВКИ КРУГОВ И ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ В КОНТЕЙНЕРЫ

А. Ф. Валеева, Р. И. Файзрахманов

В работе рассматривается двумерная задача упаковки прямоугольников и кругов в прямоугольные контейнеры. Исходная информация задается следующим образом – $<W, L, n, m, I_r, I_c>$, где W, L – ширина и длина контейнера в который следует упаковать предметы; n–количество прямоугольников; m–количество кругов; $w = (w_1, w_2, \ldots, w_i, \ldots, w_n)$, w_i–ширина i-го прямоугольника; $l = (l_1, l_2, \ldots, l_i, \ldots, l_n)$, l_i–длина i-го прямоугольника; $r = (r_1, r_2, \ldots, r_j, \ldots, r_m,)$, r_j–радиус j-го круга. Вводится прямоугольная система координат XoY: оси O_x и O_y совпадают с нижней и левой гранью контейнера. Решение задачи представялется ввиде набора элементов $<X_r, Y_r>$, $<X_c, Y_c>$, где $X_r = (x_{1r}, x_{2r}, \ldots, x_{nr})$, $Y_r = (y_{1r}, y_{2r}, \ldots, y_{nr},)$– векторы координат прямоугольников, (x_{ir}, y_{ir})–координаты левого верхнего угла прямоугольника; $X_c = (x_{1c}, x_{2c}, \ldots, x_{mc})$, $Y_c = (y_{1c}, y_{2c}, \ldots, y_{mc})$–векторы координат центров кругов, (x_{jc}, y_{jc})–координаты центра j-го круга.

Для решения задачи предлагается алгоритм муравьиной колонии, основанный на популяции [1]. Предложенный алгоритм использует процедуру $ABPL^+$ являющуюся модификацией известной процедуры $ABPL$, предложенной в работе [2] для задачи упаковки кругов в прямоугольные контейнеры. Проведено сравнение полученных результатов с результатами, полученными ранее другими авторами [3].

Работа поддержана грантом РФФИ 10-07-91330-ННUO-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Guntssch, M. Middendorf. Appying population based ACO for dynamic optimization problem // M. Dorigo et al., (eds.) Ant Algorithms - Third International Workshop ANTS2002, Lecture Notes in Computer Science, №2463, Springer Verlag, (2002), P. 111—122

2. Hifi M., M'Hallah R. A dynamic adaptive local search algorithm for the circular packing problem // European Journal of Operational Research 2007. Vol. 183. P. 1280–1294.

3. Руднев, А.С. Вероятностный поиск с запретами для задачи упаковки кругов и прямоугольников в полосу// Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т. 16, No. 4. С. 61 – 86.

Валеева Аида Фаритовна, Файзрахманов Ришат Илшатович, Уфимский Государственный Авиационный Технический Университет, ул. Карла Маркса, 12, Уфа, 450000, Россия, тел. 8-961-043-72-30, 8-961-047-70-94, e-mail:aida_val2004@mail.ru, rishat_faiz@mail.ru

О ПРИМЕНЕНИИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ АЛГОРИТМОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПОРОГОВ В ЗАДАЧЕ МНОГОКРАТНОГО НАИЛУЧШЕГО ВЫБОРА

Т. В. Полушина

Рассматривается задача многократного наилучшего выбора. Пусть имеется N объектов, упорядоченных по качеству. Объекты поступают последовательно в случайном порядке так, что все возможные $N!$ перестановок равновероятны. После ознакомления с очередным объектом его можно либо принять (тогда выбор одного объекта сделан), либо отвергнуть (тогда вернуться к пропущенному объекту невозможно). Требуется найти оптимальную процедуру, максимизирующую вероятность выбора k объектов, отвечающих некоторому критерию. Например, в классической постановке [1] необходимо выбрать k лучших объектов.

Известно, что оптимальная стратегия имеет вид: существует набор $\pi^* = (\pi_1^*, \ldots, \pi_k^*)$, $1 \le \pi_1^* < \pi_2^* < \ldots < \pi_k^* \le N$ такой, что:
— необходимо пропустить первые $\pi_1^* - 1$ объектов, и затем остановиться на первом объекте, который лучше всех предыдущих, или на $(N-1)$–ом объекте, если лучший объект не появился до момента $N-1$;
— во второй раз мы останавливаемся на первом объекте, который лучше, чем все предыдущие или хуже, чем один (если просмотрены уже $\pi_2^* - 1$ объектов), в противном случае N-ом объекте; и т.д. [1, 2].

Однако с помощью вычислений методом индукции назад достаточно трудно определить наборы $\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*, \ldots, \pi_k^*)$, характеризующие структуру правила, и цену игры. Поэтому отыщем наборы, рассматривая некоторую задачу оптимизации. Более формальная постановка: $\max_{x \in \mathcal{X}} \mathbf{E}\widehat{S}(x, R)$, где $\mathcal{X} = \{x = (x_1, \ldots, x_k) : 1 \le x_1 < \ldots < x_k \le N\}$, $R = (R_1, \ldots, R_N)$ — случайная перестановка 1,2, …, N, $\widehat{S}(x)$ — несмещенная оценка $\mathbf{E}\widehat{S}(x, R)$ $\widehat{S}(x) = \frac{1}{N_1} \sum_{n=1}^{N_1} I\{R_{n\tau_1} = i_1, \ldots, R_{n\tau_k} = i_k\}$, где $(R_{n1}, \ldots, R_{nN})$ — n-ая копия случайной перестановки R, $(i_1, \ldots, i_k)$ — некоторая перестановка $1, 2, \ldots, k$.

Для решения этой задачи будем использовать алгоритм, основанный на баейсовской оптимизации [3]. В работе получены значения цены игры и наборы π^*, проведены анализ и сравнение данного метода с другими. Результаты показали, что предложенный алгоритм решает поставленную задачу надежно и эффективно.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.Л. Николаев. Об одном обобщении задачи наилучшего выбора // Теор. вер. и ее прим. 1977. Т. 22, вып. 1. С. 191–194.

2. М.Л. Николаев. Оптимальные правила многократной остановки // Обоз. прикл. и пром. матем. 1998. Т. 5, вып. 2. С. 309–348.

3. P. Larranaga, J. Lozano. Estimation of distribution algorithm. Basue: University of the Basue Country, 2002.

Полушина Татьяна Владимировна, Марийский филиал Московской Открытой Социальной Академии, Ленинский пр., д. 56а, г. Йошкар–Ола, 424003, Россия,
тел. (8362) 42-17-43, факс (8362)42-17-43, e-mail: tvpolushina@inbox.ru

ГИБРИДНЫЙ АЛГОРИТМ ИМИТАЦИИ ОТЖИГА ДЛЯ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПИСАНИИ В КИНОПРОИЗВОДСТВЕ

М. Г. Сивых

Имеется m сцен и n актёров. Каждая сцена снимается за один день. Каждый актёр получает гонорар за каждый день, проведённый на съёмочной площадке. Дни отчитывают с первого съёмочного дня актёра до последнего съёмочного дня актёра. В перерыве между ними актёр может и не сниматься. Требуется найти такую последовательность съёмки сцен, при которой суммарная зарплата актёров будет минимальной.

Данная задача является NP–трудной [1]. Для её решения разработан гибридный алгоритм имитации отжига [2], использующий идею метода чередующихся окрестностей. Рассматривались как стандартные окрестности *1–замена* и *2–замена*, так и новая окрестность, получившая название окрестности *отражение*. Для получения стартового решения разработан детерминированный полиномиальный алгоритм, позволяющий начать поиск с низкой стартовой температурой.

Численные эксперименты проводились на примерах размерности $m = n = 100$, для которых известно оптимальное решение. В 96% случаев алгоритм нашёл глобальный оптимум на сильно разреженных матрицах, отражающих занятость актёров в сценах. Время работы алгоритма не превышало 30 секунд.

Работа поддержана АВЦП Рособразования, проект №2.1.1/3235 грантом РФФИ 08-06-92000.

ЛИТЕРАТУРА

1. П.А. Кононова, Ю.А. Кочетов. Об одной задаче выбора последовательности столбцов 0-1 матрицы.// Труды 14-й Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Иркутск, 2008. Том 1. с. 444–451.

2. J. Dréo, A. Pétrowski, P. Siarry, E. Taillard. Metaheuristics for Hard Optimization.// Methods and Case Studies. Springer, 2006, 369 pages.

Сивых Михаил Геннадьевич, Новосибирский Государственный Университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, e-mail: sivykh-mikl@yandex.ru

АЛГОРИТМ ПОИСКА С ЗАПРЕТАМИ ДЛЯ СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЙ В КИНОПРОИЗВОДСТВЕ

А. В. Хмелёв

Кинокомпания планирует снять фильм. Он состоит из m сцен, в которых принимают участие n актёров. Считается, что одна сцена снимается за один день. У каждого актёра свой гонорар за один день, проведённый на съёмочной площадке. Актёр приезжает на съёмочную площадку в свой первый съёмочный день и вынужден там оставаться до своего последнего съёмочного дня. Задача состоит в том, чтобы найти такой порядок сцен, чтобы суммарная зарплата актёров была минимальной [2].

Известно, что эта задача является NP–трудной [1]. Для её решения предлагается вероятностный алгоритм поиска с запретами [3]. В алгоритме используются несколько рандомизированных окрестностей квадратичной мощности. Проводится сравнение окрестностей по качеству получаемых локальных оптимумов. В списке запретов хранятся номера столбцов, уже участвовавших в локальной перестройке решений на нескольких последних итерациях алгоритма. Для повышения эффективности поиска в алгоритм включены процедуры интенсификации и диверсификации. Предлагается специальная структура данных, позволяющая быстро находить наилучшее соседнее решение. Приводятся результаты численных экспериментов на тестовых примерах размерности $n = m = 100$, у которых известны оптимальные решения. Приводится сравнение с другими эвристическими алгоритмами.

Работа поддержана АВЦП Рособразования, проект №2.1.1/3235 и грантом РФФИ 08-06-92000.

ЛИТЕРАТУРА

1. П.А. Кононова, Ю.А. Кочетов. Об одной задаче выбора последовательности столбцов 0-1 матрицы. // Труды 14-й Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Иркутск, 2008. Том 1. с. 444–451.

2. T.C.E. Cheng, J.E. Diamond, B.M.T. Lin. Optimal Scheduling in Film Production to Minimize Talent Hold Cost.// Journal of Optimization Theory and Applications. 79(1), 1993, P. 479–489.

3. J. Dréo, A.Pétrowski, P. Siarry, E. Taillard. Metaheuristics for Hard Optimization.// Methods and Case Studies. Springer, 2006, 369 pages.

Хмелёв Алексей Владимирович, Новосибирский Государственный Университет, Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (906-1) 93-73-72, e-mail: avhmel@gmail.com

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ О ПЕРЕСТАНОВКЕ СТОЛБЦОВ 0–1 МАТРИЦЫ

А. В. Яковлев

Дана матрица, состоящая из нулей и единиц. Вычислим для каждой строки i число элементов k_i, находящихся между первой и последней единицей в этой строке. Эта величина зависит от перестановки столбцов π. Каждой строке приписан положительный вес w_i. Требуется найти такую перестановку, при которой значение целевой функции $\sum_i w_i k_i(\pi)$ будет минимальным [1].

Известно, что эта задача является NP–трудной [2]. Для ее решения предлагается генетический алгоритм. В нем используются несколько процедур скрещивания решений, случайные мутации и вероятностные алгоритмы локального улучшения. Разработан алгоритм получения начальной популяции, состоящей из решений с малой погрешностью. Исследовано влияние размера популяции на качество получаемых решений.

Приводятся результаты численных экспериментов на тестовых примерах с известными оптимальными решениями. Для матриц размерности 100×100 и плотностью 5% алгоритм находит глобальные оптимумы с частотой 95%. Время работы алгоритма не превосходит 30 секунд. Приводится сравнение с другими эвристическими алгоритмами [3].

Работа поддержана АВЦП Рособразования, проект №2.1.1/3235.

ЛИТЕРАТУРА

1. П.А. Кононова, Ю.А. Кочетов. Об одной задаче выбора последовательности столбцов 0–1 матрицы.// Труды 14-й Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Иркутск. Том 1. 2008. с. 444–451.

2. T.C.E. Cheng, J.E. Diamond, B.M.T. Lin. Optimal Scheduling in Film Production to Minimize Talent Hold Cost.// Journal of Optimization Theory and Applications. 79(1). 1993. p. 479–489.

3. A.–L. Nordström, S. Tufekci. A genetic algorithm for the talent scheduling problem.// Computers and Operations Research. 21(8), 1994, p. 927–940.

Яковлев Андрей Вадимович, Новосибирский Государственный Университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 236-31-68, e-mail: ya-a-v@ya.ru

К ВОПРОСУ О СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ MSSC

А. В. Долгушев, А. В. Кельманов

Рассматривается задача MSSC (Minimum-Sum-of-Squares Clustering) — разбиения множества векторов евклидова пространства на подмножества (кластеры) по критерию минимума суммы квадратов расстояний от элементов кластеров до их центров (центр кластера определяется как среднее значение вектора в кластере). Эта же задача в некоторых публикациях фигурирует под названием k-Means (k средних), которое соответствует названию одного из ранних алгоритмов [1], предложенных для ее решения. К задаче MSSC сводится ряд типичных проблем анализа данных и распознавания образов, возникающих в широком спектре приложений. В форме верификации свойств эта задача формулируется следующим образом.

Задача MSSC. *Дано*: множество $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$ и положительное число A. *Вопрос*: существует ли такое рабиение множества $\mathcal{V}$ на непустые подмножества (кластеры) $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_J$, что имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{v \in \mathcal{C}_j} \|v - \overline{v}_j\|^2 \le A,$$

где $\overline{v}_j = \sum_{v \in \mathcal{C}_j} v/|\mathcal{C}_j|$, $j = 1, \ldots, J$, — центры кластеров?

Четыре возможных случая задачи MSSC индуцируются комбинированием размерности пространства q и числа кластеров J как элементов, которые либо являются, либо не являются частью входа задачи. NP–полнота трех из этих случаев следует из результатов, полученных в [2]–[4]. В настоящей работе установлена NP–полнота последнего неизученного случая задачи, когда размерность пространства является, а число кластеров не является частью входа задачи.

Работа поддержана грантами РФФИ 09-01-00032 и 10-07-00195, грантом АВЦП Рособразования № 2.1.1/3235, грантом Президиума РАН № 227, а также интеграционным грантом СО РАН № 44.

ЛИТЕРАТУРА

1. MacQueen J.B. Some Methods for Classification and Analysis of Multivariate Observations // Proc. 5-th Berkeley Symp. of Mathematical Statistics and Probability. 1967. Vol. 1. P. 281–297.

2. Aloise D., Deshpande A., Hansen P., Popat P. NP-Hardness of Euclidean Sum-of-Squares Clustering // Les Cahiers du GERAD, G-2008-33. 2008. 4 p.

3. Dasgupta S. The Hardness of k-means Clustering // Technical Report CS2007-0890. University of California. 2007. 6 p.

4. Mahajan M., Nimbhorkar P., Varadarajan K. The Planar k-means Problem is NP-Hard // Lecture Notes in Computer Science. 2009. V. 5431. P. 284–285.

Долгушев Алексей Владимирович, Кельманов Александр Васильевич, Новосибиский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, тел. (383) 363-46-68, (383) 363-46-79, E-mail: dolgushev@math.nsc.ru, kelm@math.nsc.ru

ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ КЛАССИФИКАТОРОВ В СЛУЧАЕ МНОГИХ КЛАССОВ

Ю. И. Журавлев, А. П. Виноградов, Ю. П. Лаптин

Пусть задана совокупность линейных функций $f_i(x, W^i) = (w^i, x) + w_0^i$, где $x \in R^n$ — вектор признаков, $W^i = (w_0^i, w^i) \in R^{n+1}$ — вектор параметров, $i = 1, ..., m$. Рассматриваются алгоритмы классификации (линейные классификаторы) вида $a(x, W) = \arg\max_i \{f_i(x, W^i) : i = 1, ..., m\}, x \in R^n$, где $W = (W^1, ..., W^m)$.

Считается заданной совокупность (обучающая выборка) конечных непересекающихся множеств $\Omega_i, i = 1, ..., m$. Классификатор $a(x, W)$ правильно разделяет точки из $\Omega_i, i = 1, ..., m$, если $a(x, W) = i$ для всех $x \in \Omega_i, i = 1, ..., m$. Множества $\Omega_i, i = 1, ..., m$ называются линейно разделимыми, если существует линейный классификатор, правильно разделяющий точки из этих множеств. Задача построения линейного классификатора $a(x, W)$ заключается в подборе значений параметров W, при котором множества $\Omega_i, i = 1, ..., m$ разделяются оптимальным образом.

В докладе рассматриваются:

- достаточные условия линейной разделимости множеств $\Omega_i, i = 1, ..., m$;
- задачи построения наилучшего классификатора $a(x, W)$ для линейно разделимых множеств;
- задача минимизация эмпирического риска (МЭР) в случае линейно неразделимых множеств - частично целочисленная задача линейного программирования большой размерности с дополнительным квадратичным ограничением;
- непрерывная релаксация задачи МЭР (отбрасываются ограничения целочисленности переменных), ее сведение к задаче выпуклого программирования (число переменных равно $m(n+1)$), и подходы к решению сформулированной задачи выпуклого программирования;
- сравнение предложенного подхода с методом опорных векторов и робастным разделением множеств.

Работа поддержана совместным грантом НАН Украины и РФФИ № 08-01-90427.

ЛИТЕРАТУРА

1. Laptin Yu., Vinogradov A. Exact discriminant function design using some optimization techniques // "Classification, Forecasting, Data Mining", International Book Series "INFORMATION SCIENCE & COMPUTING", No 8, Sofia, Bulgaria, 2009, pp. 14–19.

2. Лаптин Ю.П., Виноградов А.П., Лиховид А.П. О некоторых подходах к проблеме построения линейных классификаторов в случае многих классов // Pattern Recognition and Image Analysis, Vol.20, No 2, 2010 (To appear).

Журавлев Юрий Иванович, Виноградов Александр Петрович, Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, 119333 Москва, ул. Вавилова 40, тел +7(499)135-24-89, +7(449)135-62-38, факс +7(449)135-61-59, zhuravlev@ccas.ru, vngrccas@mail.ru
Лаптин Юрий Петрович, Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины, Киев, пр.Глушкова, 40, +38(044)526-21-68, laptin_yu_p@mail.ru

О СЛОЖНОСТИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ АНАЛИЗА ДАННЫХ И РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ

А. В. Кельманов

Установлена NP–полнота сформулированных ниже задач поиска подмножеств векторов евклидова пространства, к решению которых сводятся некоторые актуальные проблемы анализа данных и распознавания образов, возникающие в широком спектре приложений. Эффективные алгоритмы с оценками точности для решения оптимизационных вариантов этих задач в настоящее время неизвестны.

Задача SVS-FF. *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, вектор $v \in \mathcal{R}^q$, натуральные числа M_1, M_2 и положительное число A. *Вопрос*: существуют ли такие непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2 \subset \mathcal{Y}$, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{M_1}\|\sum_{y\in\mathcal{Y}_1} y\|^2 + 2\sum_{y\in\mathcal{Y}_2}(y,v) \geq A,$$

при ограничениях $|\mathcal{Y}_1| = M_1$ и $|\mathcal{Y}_2| = M_2$ на мощности подмножеств $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$?

Задача SVS-NF. *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, вектор $v \in \mathcal{R}^q$, натуральное число M и положительное число A. *Вопрос*: существуют ли такие непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2 \subset \mathcal{Y}$, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{|\mathcal{Y}_1|}\|\sum_{y\in\mathcal{Y}_1} y\|^2 + 2\sum_{y\in\mathcal{Y}_2}(y,v) \geq A,$$

при ограничении $|\mathcal{Y}_2| = M$ на мощность подмножества $\mathcal{Y}_2$?

Задача SVS-FN. *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, вектор $v \in \mathcal{R}^q$, натуральное число M и положительное число A. *Вопрос*: существуют ли такие непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2 \subset \mathcal{Y}$, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{M}\|\sum_{y\in\mathcal{Y}_1} y\|^2 + \sum_{y\in\mathcal{Y}_2}\{2(y,v) - \|v\|^2\} \geq A,$$

при ограничении $|\mathcal{Y}_1| = M$ на мощность подмножества $\mathcal{Y}_1$?

Задача SVS-NN. *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, вектор $v \in \mathcal{R}^q$ и положительное число A. *Вопрос*: существуют ли такие непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2 \subset \mathcal{Y}$, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{|\mathcal{Y}_1|}\|\sum_{y\in\mathcal{Y}_1} y\|^2 + \sum_{y\in\mathcal{Y}_2}\{2(y,v) - \|v\|^2\} \geq A?$$

Работа поддержана грантами РФФИ 09-01-00032 и 10-07-00195, грантом АВЦП Рособразования № 2.1.1/3235, грантом Президиума РАН № 227, а также интеграционным грантом СО РАН № 44.

Кельманов Александр Васильевич, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проспект Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, Новосибиский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-79, e-mail: kelm@math.nsc.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОИСКА И ИДЕНТИФИКАЦИИ НАБОРОВ ФРАГМЕНТОВ В ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

А. В. Кельманов, Л. В. Михайлова, С. А. Хамидуллин

Рассматривается один из вариантов проблемы помехоустойчивого обнаружения и идентификации наборов фрагментов в числовой последовательности. Предполагается, что в отсутствие помехи искомые наборы фрагментов совпадают с упорядоченными наборами ненулевых векторов из заданной совокупности (словаря), причем в незашумленной последовательности ненулевые фрагменты чередуются с участками, на которых элементы последовательности равны нулю. Показано, что решение этой проблемы по критерию минимума суммы квадратов уклонений сводится к решению следующей экстремальной задачи.

Задача SIVT (Searching and Identification of Vector Tuples). Дано: числовая последовательность $y_0,\dots,y_{N-1}$, множество (словарь) $\mathcal{W}$, $|\mathcal{W}|=K$, упорядоченных наборов (слов) ненулевых векторов из $\mathcal{R}^q$ и натуральное число M. Найти: совокупность $(w_1,\dots,w_J)$ векторных наборов, в которой $w_j=(U_1^j,\dots,U_{L_j}^j)\in\mathcal{W}$, $j=1,\dots,J$, и набор номеров $(n_1,\dots,n_M)$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{J-1}\sum_{m=s_{j-1}+1}^{s_j} g^j_{m-s_{j-1}}(n_m)+\sum_{m=s_{J-1}+1}^{M} g^J_{m-s_{J-1}}(n_m)\to\max,$$

где $g_i^j(n)=2\langle Y_n,U_i^j\rangle-\|U_i^j\|^2$, $n=0,\dots,N-q$, $i=1,\dots,L_j$, $j=1,\dots,J$, $Y_n=(y_n,\dots,y_{n+q-1})$ — вектор-фрагмент последовательности, $s_0=0$, $s_j=\sum_{k=1}^{j}L_k$ — порядковый номер фрагмента в последовательности, соответствующего последнему вектору в слове w_j, при ограничениях: $0\le n_1\le N-q$, $0\le n_M\le N-q$, $q\le n_m-n_{m-1}\le N-q$, $m=2,\dots,M$.

В работе обоснован точный полиномиальный алгоритм решения этой задачи, имеющий временную сложность $O(KN^2M(L_{\max}+K))$, где $L_{\max}$ — максимальная размерность набора в словаре. Рассматриваемая задача является обобщением задачи, изученной в [1].

Работа поддержана грантами РФФИ 09-01-00032 и 10-07-00195, грантом АВЦП Рособразования № 2.1.1/3235, грантом Президиума РАН № 227, а также интеграционным грантом СО РАН № 44.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельманов А.В., Михайлова Л.В., Хамидуллин С.А. Апостериорное обнаружение в квазипериодической последовательности повторяющегося набора эталонных фрагментов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48. № 12. С. 2247–2260.

Кельманов Александр Васильевич, Михайлова Людмила Викторовна, Хамидуллин Сергей Асгадуллович, Институт математики им С. Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-79, (383) 363-46-68. E-mail: kelm@math.nsc.ru, mikh@math.nsc.ru, kham@math.nsc.ru

NP–ПОЛНОТА НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПОИСКА ПОДМНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ

А. В. Кельманов, А. В. Пяткин

Доказана NP–полнота сформулированных ниже задач поиска подмножества векторов (Vector Subset) евклидова пространства. К решению этих задач сводятся некоторые оптимизационные проблемы в анализе данных и распознавании образов.

Задача VS-1. *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральное число M и положительное число A. *Вопрос*: существует ли такое подмножество $\mathcal{C} \subset \mathcal{Y}$, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{M}\|\sum_{y\in\mathcal{C}} y\|^2 + \sum_{y\in\mathcal{Y}\setminus\mathcal{C}} \|y\|^2 \geq A,$$

при ограничении $|\mathcal{C}| = M$ на мощность подмножества $\mathcal{C}$?

Задача VS-2. *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральное число M и положительное число B. *Вопрос*: существует ли такое подмножество $\mathcal{C} \subset \mathcal{Y}$, что имеет место неравенство

$$\sum_{y\in\mathcal{C}} \|y - \overline{y}\|^2 \leq B,$$

где $\overline{y} = \frac{1}{M}\sum_{y\in\mathcal{C}} y$, при ограничении $|\mathcal{C}| = M$ на мощность подмножества $\mathcal{C}$?

Задача VS-3. *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральное число M и положительное число D. *Вопрос*: существует ли такое подмножество $\mathcal{C} \subset \mathcal{Y}$, что имеет место неравенство

$$\sum_{y\in\mathcal{C}}\sum_{z\in\mathcal{C}} \|y - z\|^2 \leq D,$$

при ограничении $|\mathcal{C}| = M$ на мощность подмножества $\mathcal{C}$?

При доказательстве сначала показана полиномиальная сводимость к задаче VS-3 известной NP–полной задачи «независимое множество» в однородном графе. Затем установлена полиномиальная сводимость задачи VS-3 к задаче VS-2, а задачи VS-2 — к задаче VS-1. Эффективные алгоритмы с оценками точности для решения оптимизационных вариантов этих задач в настоящее время неизвестны.

Работа поддержана грантами РФФИ 09-01-00032 и 10-07-00195, грантом АВЦП Рособразования № 2.1.1/3235, грантом Президиума РАН № 227, а также интеграционным грантом СО РАН № 44.

Кельманов Александр Васильевич, Пяткин Артем Валерьевич, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Новосибиский государственный университет, ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-79, 363-45-46, e-mail: kelm@math.nsc.ru, artem@math.nsc.ru

МОДЕЛИ РЫНКОВ НЕСОВЕРШЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К СПОТОВОМУ РЫНКУ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ

Н. И. Айзенберг, М. А. Киселёва

В докладе рассматриваются различные механизмы торговли электроэнергией в форме организованных аукционов среди производителей электроэнергии. Правила поведения участников аукциона таковы, что они формируют свои заявки–предложения по заранее оговоренной схеме, которая определяется из соответствующей модели организации рынка. В силу особенностей электроэнергетической отрасли (ограниченное количество стратегических производителей, наличие у них рыночной власти, значительные барьеры входа и т.д.), представляется актуальным исследование следующих моделей конкурентного поведения экономических агентов: Курно, Бертрана, модели с ценовым лидером и конкурентным окружением, а также аукционов функций предложения. В рамках каждой модели решается задача согласования решений в соответствии с концепцией равновесия Нэша. Определяется, исходя из заданных заранее функций спроса и издержек производителей, точка устойчивого состояния рынка, рациональные стратегии продавцов, оцениваются их прибыли.

В результате сравнения перечисленных выше схем организации рынков сделаны следующие выводы:
1) наличие конкурентного окружения увеличивает объем отраслевого выпуска и снижает равновесную цену по сравнению с одноуровневым взаимодействием стратегических фирм;
2) с точки зрения потребителей аукцион линейных функций предложения предпочтительнее аукциона Курно. В этом случае рынок приходит к равновесию при меньших ценах и, соответственно, больших объёмах выпуска. Хотя каждая из фирм получает меньшую прибыль, чем в случае аукциона Курно, общественное благосостояние в целом увеличивается за счёт потребительского излишка, а равновесная цена приближается к цене Вальраса.

Работа поддержана интеграционным грантом СО РАН "Полиструктурные математические модели экономики: теория, методы, прогнозы".

ЛИТЕРАТУРА

1. Mas-Colell A., Whinston M., Green J. Microeconomic Theory. New York, Oxford University Press, 1995. 977 p.

2. Baldick R., Grant R., Kahn E. Theory and application of linear supply function equilibrium in electricity markets // Journal of Regulatory Economics; 25:2, 2004. PP. 143–167.

3. Vasin A.A., Vasina P.A. Homogeneous Good Markets and Auctions // Working Paper 2005/047. Moscow, New Economic School, 2005. 51 p.

Айзенберг Наталья Ильинична, Киселёва Марина Александровна, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (8-3952) 42-97-64, e-mail: zen@isem.sei.irk.ru, marinee@mail.ru

О МОДИФИКАЦИЯХ МОДЕЛИ РАМСЕЯ С НАЛОГАМИ

С. М. Анцыз

В отличие от известных моделей Рамсея и Солоу, доход в данных модификациях модели делится на потребление, инвестиции и налоги: $Y(t) = C(t) + I(t) + N(t) = (1-\rho(Y(t))[(1-s(t))Y(t)+s(t)Y(t)]+\rho(Y(t))Y(t), 0 \leq s(t) \leq 1$. В каждый момент времени выпуск $Y(t) = F(K(t))$ делится на потребление $C(t)$, инвестиции $I(t)$ и налог $N(t)$, s(t) – часть выпуска, которая идет на инвестиции, $\rho(Y(t))$ – ставка налогообложения. Предприятия определяют долю дохода, выделяемую на инвестиции, при заданной форме налогообложения. Переходя к новым переменным – фондовооруженности $k = K/L$ и удельному потреблению, и обозначив при этом $f(k) = F(K/L, 1)$, (L – труд), при плоской шкале налогообложения получаем задачу предприятия: максимизировать функционал

$$\int_0^T (1-\chi_1)(1-s(t))f(k(t))\exp^{-\delta t}\,dt \tag{1}$$

при ограничениях

$$\dot{k}(t) = (1-\chi_1)s(t)f(k(t)) - \mu k(t), \tag{2}$$

$$0 \leq s(t) \leq 1,\ 0 \leq \chi_1 \leq 1, k(0) = k_0 > 0,\ k(T) \geq k_T > 0.$$

Здесь χ_1 – ставка пропорционального налога, функция $f(k)$ удовлетворяет неоклассическим условиям [1].

Прогрессивная схема налогообложения моделируется возрастающей выпуклой вниз функцией, ставка налога при которой определяется, например, формулой $\rho(Y) = \chi_2 Y$, где $0 \leq \chi_2 \leq 1$. Уравнение (2) в этом случае принимает вид: $\dot{k}(t) = s(t)(1-\chi_2 f(k(t)))f(k(t)) - \mu k(t)$, а функционал (1): $\int_0^T (1-\chi_2 f(k(t)))(1-s(t))f(k(t))\exp^{-\delta t}\,dt$.

Управление верхнего уровня максимизирует сумму собираемых налогов, которая для плоской шкалы налогов в случае одного предприятия имеет вид $\chi_1 \int_0^T Y(t)dt + \chi \int_0^T C(t)dt \to \max\limits_{\chi_1,\chi}$.

В отличие от изученных ранее модификаций модели Рамсея (например в [2]) в докладе рассматриваются ситуации, когда налогами облагается не только доходы инвестора, но и его потребление (доход с физических лиц), а также двухуровневые модели, нижний уровень которых состоит из более, чем одного предприятия.

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты № 10-06-00168-а и № 10-06-00057-а) и РГНФ (проект № 09-02-00337-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. С.А. Ашманов. Введение в математическую экономику. М.:Наука, 1984.

2. А.Е. Трубачева. О независимости верхнего уровня управления от формы налогообложения // Сибирский журнал индустриальной математики, 2006, т. IX, № 3(27), с. 139–147.

Анцыз Сергей Матвеевич, Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-04, факс (383) 333-25-98, e-mail:antzys@math.nsc.ru

ОБ АППРОКСИМАЦИИ НЕОКЛАССИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

С. М. Анцыз, В. А. Латышева

Для модифицированной модели Рамсея [1] при значениях параметров, удовлетворяющих некоторым условиям, Трубачевой А.Е. [2] получено, что при производственных функциях вида $f(k) = ak^b$ оптимальная для верхнего уровня управления величина ставки налогообложения в варианте с прогрессивным налогом оказывается меньше, чем в варианте с плоской шкалой налогообложения.

В общем случае не удается однозначно установить преимущество той или иной схем налогообложения. Построены пример, в котором лучший для верхнего уровня результат получается при использовании плоской шкалы налогов, и пример, в котором больший объем налогов получается при прогрессивном налогообложении.

В настоящей работе изучается возможность аппроксимации произвольной неоклассической функции $\varphi(k)$ (вогнутой) линейной комбинацией функций вида $a_i k^b$, а значит возможность распространения любого результата, справедливого для этих функций, на неоклассическую производственную функцию.

Найдена зависимость величины доли инвестиций и параметров схем налогообложения от исходных данных модели. Это позволяет формализовать условия, при которых предпочтительней плоская шкала либо прогрессивная схема налогов и сравнить их с экономической реальностью.

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты № 10-06-00168-а и № 10-06-00057-а) и РГНФ (проект № 09-02-00337-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. С.А. Ашманов. Введение в математическую экономику. М.:Наука, 1984.

2. А.Е. Трубачева. О независимости верхнего уровня управления от формы налогообложения // Сибирский журнал индустриальной математики, 2006, т. IX, № 3(27), с. 139–147.

Анцыз Сергей Матвеевич, Латышева Виктория Александровна, Новосибирский государственный университет, Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-04, факс (383) 333-25-98, e-mail:antzys@math.nsc.ru; vicalat@mail.ru

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ И РАВНОВЕСНЫЕ МОДЕЛИ МАРКЕТИНГА В СТРУКТУРЕ «ПРОИЗВОДИТЕЛЬ – ПОСРЕДНИК – ПОТРЕБИТЕЛЬ»

И. А. Быкадоров

Исследуется модель ценообразования в структуре “Производитель – Посредник – Потребитель”: производитель привлекает посредника, предоставляя ему товар с *торговым дисконтом*; часть торгового дисконта, *pass-through*, используется посредником для снижения розничной цены товара. Модель является линейной по фазовым переменным (общим продажам и мотивации посредника) и квадратичной по управлениям (оптовому и розничному дисконтам).

В [1], [3] рассматривался оптимизационный вариант модели, в котором производитель максимизирует прибыль при постоянном pass-through. В [2] изучался равновесный вариант: целевыми функционалами являются прибыли производителя и посредника.

В докладе развиваются результаты [1], [2], [3]. В частности, в изученных ранее вариантах модели с постоянными управлениями [2] выявлен параметр, знак которого характеризует желания Производителя и/или Посредника быть или не быть лидером распределительного канала. Оказалось, что эти результаты могут быть обобщены на случай кусочно-постоянных управлений: для случая одного переключения удалось выделить соответствующие характеристические параметры, а также изучить некоторые их свойства. Кроме того, показано, что если переключение происходит в середине интервала продаж, то борьба за право не быть лидером (т.е. быть ведомым) может только усилиться.

Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (проект 09-02-00337) и Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-4113.2008.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bykadorov I., Ellero A., Moretti E. Optimal control of trade discount in a vertical distributional channel // Rendiconti per gli Studi Economici Quantitativi. 2005. Vol. 15, N 1. P.121–129.

2. Bykadorov I., Ellero A., Moretti E. Trade discount policies in the differential games framework: preliminary results // Universita’ di Venezia, Dipartimento di Matematica Applicata, 2005, report n.130/2005, 27 p.

3. Bykadorov I., Ellero A., Moretti E., Vianello S. The role of retailer’s performance in optimal wholesale price discount policies // European Journal of Operational Research. 2009. Vol. 194, N 2. P. 538–550.

Быкадоров Игорь Александрович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, пр. Ак. Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383)363-46-06,
факс (383)333-25-98, e-mail: bykad@math.nsc.ru

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ КОНКУРЕНЦИЯ НА РЫНКЕ ПЕРЕДАЧИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ КАК АЛЬТЕРНАТИВА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ДЕЗИНТЕГРАЦИИ

М. Ю. Васильев, А. Ю. Филатов

В результате реформирования электроэнергетики во многих странах происходит переход от вертикально интегрированной структуры отрасли, сочетавшей генерацию, передачу и распределение электроэнергии в рамках одной компании, к дезинтегрированной структуре, ключевым элементом которой является принцип отделения передающих и распределяющих сетей от генерации, сбыта и потребления электроэнергии.

В работе изучается стратегическое взаимодействие компаний на рынке передачи электроэнергии в рамках простейшей двухузловой ЭЭС. Исследуются четыре возможных варианта функционирования рассматриваемого рынка: гарантированная регулируемая (Р) и нерегулируемая (М) сетевая монополия, сетевая монополия в условиях потенциальной конкуренции с независимой сетевой компанией (М+НСК) и генерирующей компанией (М+ГК). Сопоставление вариантов осуществляется с точки зрения минимизации разницы цен в генерирующем узле и у потребителя, а также максимизации пропускных способностей сетей и объемов передачи электроэнергии.

Среди основных выводов выделим следующие:

1. С точки зрения общественной эффективности (максимальные объемы передачи электроэнергии при самой низкой цене) наиболее типична ситуация «М $<$ М+НСК $<$ М+ГК $<$ Р».

2. Увеличение имеющейся пропускной способности далеко не всегда благоприятно сказывается на итоговых объемах передачи электроэнергии и ценах на передачу.

3. При низких издержках расширения сети не исключена ситуация, когда НСК оказывается более эффективной, чем ГК в условиях потенциальной конкуренции с сетевой монополией.

4. При высоких издержках возможна уникальная ситуация, и структура «М+ГК» может приводить к результатам более эффективным с точки зрения общественного благосостояния, чем государственное регулирование сетевой монополии.

5. Основной причиной преимущества структуры «М+ГК» является интернализация прибыли: генерирующая компания может осуществлять передачу энергии себе в убыток (в частности, инвестируя крупные суммы в строительство новых ЛЭП), если эти потери компенсируются ростом прибыли от продажи увеличившегося количества электроэнергии.

Все сделанные выводы справедливы при наличии потенциальной конкуренции. Если имеющаяся сетевая монополия не будет ограничена возможностью выхода на рынок конкурента, интеграция в рамках одной компании генерирующих и передающих мощностей приводит к крайне негативным с точки зрения общества эффектам в случае невмешательства государства и усложнению регулирования при активной государственной позиции.

Васильев Михаил Юрьевич, Филатов Александр Юрьевич, Институт систем энергетики им. Л.А.Мелентьева СО РАН, ул. Лермонтова, 130, Иркутск, 664033, Россия,
тел. 8-902-176-32-26, e-mail: mikhail-vasilyev@yandex.ru;
тел. 8-914-88-21-888, e-mail: fial@irlan.ru, alexander.filatov@gmail.com.

ОПТИМИЗАЦИЯ НАДЕЖНОСТИ ТОПЛИВОСНАБЖЕНИЯ И КОЛЕБАНИЯ ТЕМПЕРАТУР

В. И. Зоркальцев

В докладе рассматривается проблема выбора оптимального состава средств обеспечения надежности снабжения котельно-печным топливом. Это является развитием научно-прикладных исследований по определению эффективной системы резервов и запасов топлива в СССР [1]. Обсуждаются задачи определения оптимального уровня резервов мощности в производстве топлива, объемов хранилищ и нормативов на запасы топлива. В качестве критерия оптимальности рассматривается сумма двух составляющих: 1) приведенные среднеожидаемые издержки на создание и содержание средств резервирования; 2) математическое ожидание ущербов от возникновения дефицита топлива. В качестве оптимизируемых рассматриваются также механизмы управления средствами резервирования топлива. Проблема исследуется комплексно для трех типов возмущающего воздействия на систему топливоснабжения: 1) краткосрочные возмущения; 2) регулярные сезонные колебания; 3)возмущения долгосрочного характера. Особое внимание в докладе планируется уделить проблемам регулирования многолетних колебаний расхода топлива на отопление. На основе данных [2] о многолетних наблюдений температур (с 1881 г.) количественно исследуются интенсивность и синхронность возможных отклонений расхода топлива на отопление по экономическим районам бывшего СССР, оцениваются законы вероятностей отклонений (имеющие ассиметричный характер), возможность серии из нескольких холодных зим [3]. На основе имитационной модели регулирования многолетних колебаний расхода топлива с использованием метода статистических испытаний (метод Монте-Карло) определяется рациональный состав средств регулирования многолетних колебаний расходов топлива и одновременный рациональный механизм управления этими средствами.

Работа поддержана грантом РГНФ 09-0200278а.

ЛИТЕРАТУРА

1. П.К. Аксютин, В.И. Зоркальцев Методические положения по расчету эксплуатационных запасов котельно-печного топлива в народном хозяйстве СССР // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики. Вып. 38, 1991. с.73–90.

2. Г.Т. Гневко Среднемесячная температура воздуха и продолжительность отопительного периода с температурой воздуха ниже 8^0C для экономических районов СССР. (ч.1, ч.2).// Обнинск; ВНИИТМИ - МИД, 1981.

3. В.И. Зоркальцев, Е.Н. Иванова Интенсивность и синхронность колебаний потребности в топливе на отопление по экономическим районам страны. // Известия АН СССР, энергетика и транспорт, 1990, №6. с. 14–22.

Зоркальцев Валерий Иванович, Институт систем энергетики им Л.А. Мелентьева СО РАН, ул. Лермонтова, д. 130, Иркутск, 664033, Россия, тел. (395-2) 42-88-27, факс (3952) 42-67-96, e-mail:zork@isem.sei.irk.ru

GRAPH STRUCTURES AND ALGORITHMS IN MULTIDIMENSIONAL SCREENING

S.Kokovin, B.Nahata, E.Zhelobodko

We develop the graph-theory approach to multidimensional screening or two-tier optimization in a self-selection game (see [1]). The setting considers discrete consumer types, one outside option (non-participation), and one pricing tool which is tariff for a quantity/quality bundle. Most results require only quasi-linearity of utilities and separability of costs w.r.t. bundles.

A-graph of a solution is a list of active incentive-compatibility and participation constraints perceived as directed arcs ($i \to j$) connecting any two agents i, j. It is called a "river" when it is in-rooted and dicycles (closed directed paths) are absent. To overcome dicycles this paper applies a small parameter $\rho \geq 0$ relaxing each constraint.

We find that any solution has an in-rooted A-graph, and under strict relaxation $\rho > 0$ any A-graph is a *river*. Moreover, bunching among predecessors and successors in the graph is excluded. Thereby, two major hardships in characterizing and finding solutions are resolved: (1) unclear existence of the Lagrange multipliers; (2) more narrow list of positive multipliers than the list of active constraints. More surprisingly, the reverse is true: every river is a solution structure for some screening problem and we enumerate all possible regimes of screening: 5 for two consumers, 79 for three consumers, 2865 for four, and so on. Based on these findings, we characterize any solution through its spanning-tree without first-order conditions (FOC) or, under differentiability and relaxation $\rho > 0$, through FOC. Therefore, to find all solutions in (generally non-convex) screening optimization it is sufficient to try FOC for all conceivable rivers and then compare the resulting local optima.

Related "trees-and-rivers" algorithm is exact and finite. We design also another, heuristic "relaxation" algorithm for finding the screening optima. The comparison of the two algorithms in efficiency remains an open question.

Authors gratefully acknowledge the research support from the University of Louisville and grant R06-0561 from the Economic Education and Research Consortium (financed by the Eurasia Foundation; USAID; GDN; the World Bank Institute and the Government of Sweden). We are grateful for the assistance and comments from Richard Ericson, Victor Polterovich and especially Alexei Savvateev.

REFERENCES

1. J.-C. Rochet, L. Stole. The Economics of Multidimensional Screening, Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications// Eighth World Congress Vol I. (Eds.) Mathias Dewatripont, Lars Peter Hansen and Stephen J. Turnovsky. Cambridge: Cambridge University Press. 2006.

Sergey Kokovin, Evgeny Zhelobodko: Novosibirsk State University, Novosibirsk 630090, Russia, e-mail: skokovin@math.nsc.ru, ezhel@ieie.nsc.ru
Babu Nahata: Department of Economics, University of Louisville, Louisville, Kentucky 40292, USA. e-mail: nahata@louisville.edu.

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ РЕГИОНОВ ДАЛЬНЕГО ВОСТОКА В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОТЫ ИНФОРМАЦИИ

А. П. Мартюшев

Низкий уровень развития российской системы региональной экономической статистики является весьма ограничивающим фактором для моделирования экономик регионов и долгосрочного прогнозирования их развития. В настоящее время в публикуемых Росстатом статистических сборниках отсутствуют детализированные показатели системы региональных счетов, необходимые для построения полноценной региональной модели общего равновесия.

В работе рассматривается модель взаимодействия экономик регионов в условиях неполноты статистических данных. Изучаемый подход, основан на многорегиональных межотраслевых балансах Леонтьева – Страута [1] и гравитационной модели Вильсона [2]. Распределением потоков будем называть набор x_{ij}^r продуктов отраслей r, производимых в регионах i, и перевозимых в регионы j. Величины a_j^{rp} — затраты продукта r для производства единицы продукта p в регионе j; ν_{ij} — вероятности перемещения единичного потока из региона i в регион j, характеризующие межрегиональную транспортную доступность; конечное потребление продукта r в регионе j обозначим за y_j^r. Обозначим за k — количество регионов, за n — количество отраслей. Задача получения наиболее вероятного долгосрочного равновесного распределения потоков продуктов отраслей в системе регионов с использованием энтропийного подхода может быть сформулирована в виде проблемы нелинейной оптимизации [1]:

$$-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{r=1}^{n} x_{ij}^r \ln\frac{\nu_{ij}}{x_{ij}^r} \to \min_{x_{ij}^r}$$

при ограничениях $\sum_i x_{ij}^r - \sum_p a_j^{rp} \sum_l x_{jl}^p = y_j^r; i, l, j = \overline{1,k}; r, p = \overline{1,n}$ и дополнительных ограничениях $x_{ij}^r \geq \varepsilon > 0$.

Были проведены расчеты по 15 отраслям в разрезе ОКВЭД для 9 регионов Дальнего Востока. Проведен сравнительный анализ структуры наиболее вероятных потоков при изменении входных параметров конечного потребления y_j^r и транспортной доступности ν_{ij}. С помощью иерархического кластерного анализа [3] были получены дендрограммы тесноты межрегиональных связей по отдельным отраслям и для системы регионов Дальнего Востока РФ в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. Величко, Д.В. Давыдов. Интервальная энтропийная модель межрегионального производственного баланса. // Пространственная экономика. 2009. №3. С. 20–35.
2. А.Дж. Вильсон. Энтропийные методы моделирования сложных систем. М.: Наука, 1978.
3. Л.И. Ниворожкина, С.В. Арженовский. Многомерные статистические методы в экономике. М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2008.

Мартюшев Алексей Павлович, Дальневосточный государственный университет, ул. Суханова, 8, г. Владивосток, 690950, Россия, тел. (4232) 45-56-97, факс (4232) 44-99-74, e-mail:martyoushevoff@mail.ru

ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВА ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ЦЕН. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НА БАЗЕ МЕТОДОВ МОНТЕ-КАРЛО И БЕНДЕРСА

О. В. Медведко

В моделях математического программирования некоторые или все параметры показателя качества или ограничений могут оказаться неопределенными или случайными. Рассмотрим модель планирования выпуска продукции для случая, когда при заданной норме риска определяются максимальная прибыль и оптимальная номенклатура выпуска в условиях динамической рыночной экономики при неопределенности цен на товары. Учитываются следующие параметры производственных процессов: t – момент времени производства ($t = 1, \dots, T$); X_t – вектор объемов выпуска продукции в момент времени t ; Y_t^1,Y_t^2 – вектор величин переменных затрат и затрат на оборудование в момент времени t. В каждый момент времени t имеются цены продаваемых продуктов–вектор ξ_t и цены ресурсов — векторы $c_t^{1,2}$, где $\xi_{kt} \in P(c_{kt}, d_{kt})$ — независимые случайные величины. Введем стандартные ограничения, переменную величину A_i назовем допустимым гарантированным доходом в момент времени i при заданной норме риска α_0. Возникает задача динамического стохастического программирования.

$$\begin{cases} \sum\limits_{t=1}^{T} A_t \to MAX \\ X_t, Y_t, A_t \in X \\ P(\xi_t X_t - (C_t^1 Y_t^1 + C_t^2 Y_t^2) - 3_{tCONST} \geq A_t) \geq 1 - \alpha_0. \end{cases} \tag{1}$$

Для задачи оптимального планирования производства в условиях стохастики при различных распределениях цен на выпускаемые товары разработан итерационный алгоритм поиска оптимального решения исходной задачи — метод стохастических квазиградиентов [1], в котором требуются знание точных значений функции распределения, что на практике делает задачу труднорешаемой. Как правило, на практике существует лишь массив статистических данных случайной величины, поэтому предлагаемый метод, построенный на компиляции метода Монте–Карло и метода Бендерса, позволяет решать исходную задачу в общем случае, не имея точных значений функции распределения: для исходной задачи стохастического программирования при аппроксимации левой части P–неравенства методом Монте–Карло на близкое(с вероятностью близкой к единице) по значениям выражение — построен итерационный процесс, который сходится к оптимальному значению. Метод основывается на приведении исходной задачи к целочисленной задаче линейного программирования с использованием модификации итерационного метода, изложенного в работах [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.М. Ермольев, А.И. Ястремский. Стохастические модели и методы в экономическом планировании. — М: Наука, 1979.
2. Т. Ху. Целочисленное программирование и потоки в сетях. — М: Мир, 1974.

Медведко Олег Викторович, Институт математики им С.Л.Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, г. Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 333-28-92, e-mail: a.medvedko@ngs.ru

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ПАССИВОВ БАНКА С КУСОЧНО ПОСТОЯННОЙ ДЕПОЗИТНОЙ СТАВКОЙ

Н. А. Орозбеков

В [1] и [2] изучались нелинейные многоэкстремальные модели функционирования банков. В частности, рассматривались вопросы оптимизации активов банка. Модели представляли собой нелинейные задачи математического программирования с нелинейными целевой функцией и системой ограничений. Для данных задач были разработаны эффективные алгоритмы решения.

В [3] рассматривалась задача оптимизации процесса привлечения банком денежных средств клиентов, построенная с использованием структуры задачи оптимизации активов.

В данной работе предложена модифицированная задача оптимизации пассивов, в которой депозитная процентная ставка представлена в виде кусочно–постоянной функции, аргументом которой является срок вклада.

Рассматриваются два вида вкладов: краткосрочные и долгосрочные. При этом мы имеем функцию депозитной процентной ставки с разрывом в одной точке, т.е. банк устанавливает различные процентные ставки на краткосрочные и долгосрочные вклады.

В итоге получается задача математического программирования с нелинейными ограничениями и нелинейной целевой функцией. Для этой задачи разработан алгоритм нахождения оптимального решения, основанный на редукции исходной задачи в две нелинейные задачи. Далее каждая из двух нелинейных задач редуцируется в последовательность задач линейного программирования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 10-06-00168-а и № 10-06-00057-а), и РГНФ (проект № 09-02-00337-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. С.М. Анцыз, Н.А. Орозбеков. Об одном подходе к построению математических моделей для оптимизации банковской деятельности. // Новосибирск: Препринт/РАН. Сиб. отд–ние. Ин–т математики; № 147, 2004, 26 с.

2. Н.А. Орозбеков. Нелинейные модели оптимизации банковских активов. // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Том VIII, №4(24), стр. 73–90.

3. Н.А. Орозбеков. Модель оптимизации пассивов коммерческого банка. // Сборник научных трудов VI Всероссийского симпозиума "Математическое моделирование и компьютерные технологии". Кисловодск, 2004, С. 20–22.

Орозбеков Нурлан Аскарович, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-04, факс (383) 333-25-98, e-mail:nurlan_o@math.nsc.ru

ОБ ИГРОВОМ ПОДХОДЕ К ПРОБЛЕМАМ ЗЕМЕЛЬНОЙ РЕНТЫ

Э. О. Рапопорт

Пусть имеется один продукт и m земельных участков, на которых этот продукт может производиться.

Основная характеристика i-того участка есть его производственная функция $b_i(\alpha)$ – выход продукта (в натуральном выражении) на i-м участке земли при затратах α $\alpha \in [\alpha_i^0, \infty)$. Предполагается, что для всех i $b_i' > 0$, $b_i'' < 0$.

Будем отождествлять каждый из участков с игроком, владеющим этим участком, причем цель игрока i – выбрать уровень вложений α_i, чтобы получить наибольшую ренту. Задача для фиксированного суммарного уровня производства изучалась в [1].

Пусть задана функция g, описывающая зависимость между спросом и ценой, $p = g(\gamma)$. Функция g удовлетворяет условиям:

$$g' < 0,\ g'' > 0,\ \gamma g'(\gamma) + g(\gamma) < 0,\ \gamma g''(\gamma) + 2g'(\gamma) > 0$$

Пусть $\bar{\alpha}_i = \{\alpha_j, j \neq i\}$. Рассмотрим задачу i-того игрока:

Задача K_i. *Выбрать α, чтобы для каждого допустимого вектора $\bar{\alpha}_i$ максимизировать*

$$R_i(\alpha, \bar{\alpha}_i) = b_i(\alpha) g(b_i(\alpha) + \sum_{j \neq i} b_j(\alpha_j)) - \alpha.$$

Определение. Равновесным множеством вложений будем называть совокупность вложений $\alpha^* = \{\alpha_i^*\}$ таких, что для всех i и для всех α справедливы неравенства

$$R_i(\alpha_i^*, \bar{\alpha}_i^*) \geq R_i(\alpha, \bar{\alpha}_i^*)$$

Теорема 1. Равновесие существует.

Теорема 2. Пусть равновесие достигается во внутренней точке области определения, и при этом производится количество продукта γ. Тогда при централизованном подходе при производстве такого же количества продукта цена на продукт меньше, чем при конкурентном.

Теорема 3. При образовании какой-нибудь коалиции производство уменьшается, а цена растет.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-06-00168), РГНФ(проект № 09-02-00337) и Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ-4113.2008.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вирченко М.И., Рапопорт Э.О. Земельная рента. Моделирование и анализ // Сибирский журнал индустриальной математики, № 2(8), 2001, с. 94–108.

Эрнест Ошерович Рапопорт, ИМ СО РАН, проспект Ак. Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия тел. (383)36-34-606, факс (383)333-25-98, e-mail: rapoport@math.nsc.ru

GAME THEORETIC APPROACH TO MATHEMATICAL MODELING OF CANCER DEVELOPMENT

A. Świerniak

Non-cooperative game theory starting from its very beginning was a very practical branch of operation research. Its applications in economics and econometrics, behavioral and social science, engineering and military have created challenges for new formulations and their solutions. Recently it is observed an increasing interest in game theoretic tools applied in biological and medical sciences especially in genetics and molecular biology, ecology and environmental biology, etiology of diseases and modeling of cell regulatory processes. Evolutionary game theory initiated by John Maynard Smith [1] differs from the standard game theory in its approach to understanding of the mechanism behind the process of strategy formulation. Simply a strategy is not understood as a deliberate course3 of action but rather as a phenotypic trait and the payoff is an average reproductive success. Moreover the players are members of a population that compete or cooperate to obtain a larger share of the population.

Application of the evolutionary game theory to the mathematical modeling of cancer development is based on the following assertions:

- In organisms cells compete for various resources, tumor and normal cells are players in the game;
- Mutations occasionally occur in cell division due to various reasons;
- Cancer is a disease where mutated cells oust normal cells in local population.

In the talk we present some simple game theoretic models of tumorigenesis, tumor angiogenesis and metastasis, following by the results of simulations in which evolutionary stable strategies have been found and replicators dynamics has been modeled. Both results from recent literature and our original ones obtained in cooperation with biologists and clinicians will be given.

REFERENCES

1. J. M. Smith. The theory of games and the evolution of animal conflicts// Journal of Theoretical Biology. 47. 1974. PP. 209–219.

Andrzej Świerniak, Department of Automatic Control, 44-101 Gliwice, Poland

ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗВИТИЕ В МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УПРАВЛЯЕМОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ

П. М. Симонов, А. А. Вагин

Обеспечить текущие нужды производства в расходных ресурсах (материалы, заготовки, полуфабрикаты и так далее) можно с помощью оборотных фондов. Для этого используется оборотный капитал. Потребность производства в оборотном капитале зависит от производственной мощности. Следовательно, можно вести процентную величину *загруженность производственных мощностей,* зависящую от наличия оборотного капитала и собственно производственной мощности:

$$G\,(K_{oc}, F) \in [0,1), \quad K_{oc} \geq 0, \quad F \geq 0,$$

где K_{oc} — оборотный капитал, F — предельная мощность производства. Введем дополнительно параметр $u(t) \in [0,1]$, и запишем основной и оборотный капитал, как функции суммарного капитала производства K:

$$K_{opf} = u(t)K, \quad K_{oc} = (1-u(t))K.$$

Тогда функцию, описывающую конечное производство можно записать в виде:

$$\widetilde{F}(K,L,u(t)) = F(u(t)K,L)\cdot G((1-u(t))K, F(K,L)).$$

Поставим задачу оптимального экономического роста в случае управляемой экономической функции. Как и неоклассической задаче об оптимальном экономическом росте имеется одна фазовая координата — капиталовооруженность рабочего $k(t)$, а уравнение движения — это основное дифференциальное уравнение неоклассического экономического роста:

$$\dot{k}(t) = \widetilde{f}(k,u(t)) - (\eta + \mu u(t))k(t) - c(t), \quad \widetilde{f}(k,u(t)) = \widetilde{F}(k,1,u(t))/L.$$

Начальное состояние задается значением капиталовооруженности одного рабочего $k(t_0) = k_0$.

Будем оптимизировать интеграл

$$W = \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{-\delta(t-t_0)}(\beta Q(c(t)) + (1-\beta)\widetilde{f}(k,u(t)))\,dt \to \max,$$

$$\beta \in [0,1],\ 0 \leq c(t) \leq \widetilde{f}(k(t),u(t))$$

на решениях дифференциального уравнения неоклассического экономического роста при условиях $k(t_0) = k_0$. Этот интеграл принимает наибольшее значение при единственном $\{k^*, u^*\}$.

Работа поддержана грантами РФФИ и администрации Пермского края №10-01-00448-а, №10-01-96054-р-урал-а, и ЗАО “ПРОГНОЗ”.

Симонов Пётр Михайлович, Вагин Александр Алексеевич, Пермский государственный университет, ул. Букирева, 15, Пермь, 614990, Россия, тел. 8(342) 2-396-849, факс 8(342) 2-396-217, e-mail: simonov@econ.psu.ru, simpm@mail.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ АГЛОМЕРАЦИОННЫХ РАВНОВЕСИЙ ПРИ АСИММЕТРИЧНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ИММОБИЛЬНОГО НАСЕЛЕНИЯ

А. В. Сидоров

В работе исследуется модель П.Кругмана “Центр-Периферия” [1], описывающая процессы индустриальной агломерации и трудовой миграции между несколькими регионами, в простейшем случае — двумя. Трудовые ресурсы регионов делятся на два типа: иммобильное (“сельскохозяйственное”) население в количестве L_i, и мобильное (“индустриальное”), в количестве H_i для каждого региона i. Динамика миграции мобильного населения подчинена естественному закону $\dfrac{ds_{H_i}}{dt} = s_{H_i} \cdot \big(W_i - \overline{W}\big)$, где $s_{H_i} = \dfrac{H_i}{\sum_j H_j}$ — относительная доля индустриального труда в регионе i, W_i — реальная заработная плата индустриального труда в регионе i, $\overline{W} = \sum_i s_{H_I} W_i$ — средневзвешенная индустриальная реальная заработная плата. Состояние полной агломерации возникает в случае $s_{H_i} = 1$, т.е. когда весь мобильный труд абсорбируется одним регионом (Центром), оставляя прочие регионы в положении Периферии. При этом, агломерационное состояник может оказаться устойчивым или неустойчивым по Ляпунову, в зависимости от величины транспортных издержек τ.

Существующие на данный момент *аналитические* исследования устойчивости агломерационных равновесий касаются случая двух регионов при симметричном распределении иммобильных трудовых ресурсов $L_1 = L_2$ (см. например [2]). Несимметричный случай $L_1 \neq L_2$ исследовался лишь с помощью компьютерного моделирования (см. [3, Гл. 2, Appendix C.1]).

В настоящей работе получена полная аналитическая классификация (согласующаяся с известными результатами компьютерного моделирования) необходимых и достаточных условий устойчивости/неустойчивости агломерационных равновесий в терминах соотношений между относительными долями иммобильного населения $s_{L_i} = \dfrac{L_i}{\sum_j L_j}$ и другими параметрами модели, в том числе — транспортными издержками τ.

Работа поддержана грантом EERC R09-5581.

ЛИТЕРАТУРА

1. Krugman, P. R., Increasing Returns and Economic Geography// Journal of Political Economy, 1991, V. 99, P. 483–499.

2. Robert-Nicoud, F., The structure of simple “New Economic Geography” models// Journal of Economic Geography, 2005, V. 5, P. 201–234.

3. Baldwin, R. E. et al, Economic Geography and Public Policy, Princeton University Press, 2003.

Сидоров Александр Васильевич, Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-06, факс (383) 333-25-98, e-mail: sidorov@math.nsc.ru

О НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ ВОЗМУЩЕНИЯ ФУНКЦИИ ПРОИЗВОДСТВА

А. Е. Трубачева

В данной работе задача оптимизации имеет следующий вид (см. [1]): максимизировать функционал (1) $\int_0^T (1-s(t))\tilde{f}(k(t))e^{-\delta t}dt$ при ограничениях (2) $\dot{k}(t) = s(t)\tilde{f}(k(t)) - \mu k(t)$, (3) $0 \le s(t) \le 1$, (4) $k(0) = k_0 > 0$, (5) $k(T) \ge k_T > 0$, где $s(t)$ – доля инвестиций в доходе, $\delta > 0$ – константа дисконтирования, $k(t)$ – фондовооруженность, $\mu > 0$ – темп амортизации фондов, k_T – нижняя граница фондовооруженности в момент времени T.

Определение 1. Функция $\tilde{f}(k) = f(k) + \tau(k)$ называется *аддитивно слабо возмущенной* (или *квазинеоклассической*), если $f(k)$ — неоклассическая производственная функция, $\tau(k) \in C^2$ и возмущение $\tau(k)$ мало, т.е. $\|\tau\|_{C^2} \le \zeta$ для $0 < \zeta \ll 1$ и $\tau(0) = 0$.

Определение 2. Функция $\tilde{f}(k) = f(k)(1+\tau(k))$ называется *слабо возмущенно вогнутой*, если $f(k)$ — неоклассическая функция и возмущение $\tau(k)$ мало, т.е. $\|\tau\|_{C^1} \le \zeta$ для $0 < \zeta \ll 1$ и $\tau(0) = 0$.

Определение 3. *Наилучшим стационарным значением фондовооруженности* для производственной функции f называется такое число k^*, что в точке $(k^*, f(k^*))$ касательная к графику функции f параллельна прямой μk и лежит выше всех других касательных к этому графику, параллельных прямой μk.

Теорема 1. *Пусть стратегия инвестора определяется из условия стационарности решения задачи (1)— (5), в которой $\tilde{f}(k)$ — аддитивно слабо возмущенная функция, $\tau(k) \in C^1$. Тогда оптимальная стратегия инвестора имеет вид $s^* = \frac{\mu k^*_{add}}{\tilde{f}(k^*_{add})}$, где k^*_{add} — максимальное среди наилучших стационарных значений фондовооруженности.*

Теорема 2. *Пусть распределение дохода на потребление и инвестиции определяется из условия стационарности решения задачи (1)— (5), $\tilde{f}(k)$ — слабо возмущенно вогнутая функция и $\tau(k) \in C^1$. Тогда оптимальная стратегия инвестора определяется по правилу $s^* = \frac{\mu k^*_{mult}}{\tilde{f}(k^*_{mult})}$, где k^*_{mult} — максимальное среди наилучших стационарных значений фондовооруженности.*

Работа поддержана грантом РФФИ № 10-06-00168-а, грантом РГНФ № 09-06-00337-а и грантом НШ № НШ-4113.2008.6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трубачева А.Е. Влияние возмущения производственной функции на поведение инвестора // Сибирский журнал индустриальной математики, 2004, Т.VII, N3(19), стр. 156–169.

Трубачева Анна Евгеньевна, Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск, 630090, Россия, тел. (383) 363-46-04, факс(383) 333-25-98, E-mail: aetrub@math.nsc.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ЗАДАЧ С ЛОГИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

А. В. Адельшин, Е. Н. Жовнер

В данной работе рассматриваются задачи проектирования сложных изделий на основе моделей задач оптимизации с логическими ограничениями. Разрабатываются модели целочисленного линейного программирования для нахождения химического состава огнестойкой и маслостойкой резин на основе смесей каучуков.

При проектировании химического состава резин многие ограничения на включение различных химических элементов удобно описывать с помощью логических условий, что приводит к задачам выполнимости и максимальной выполнимости. Пусть состав резины формируется из ингредиентов v_j, $j \in J, J = \{1, ..., n\}$. Каждому v_j соответствует логическая переменная x_j, принимающая значение *истина*, если v_j входит в состав резины, и *ложь* – в противном случае. Известны стоимости s_k, $k \in J$, и веса r_t, определяющие степень огнестойкости (маслостойкости) некоторых ингредиентов, $t \in J_1 \subseteq J$. Были установлены логические связи между ингредиентами, которые определили формулы C_i, $i \in I, I = \{1, ..., m\}$. Часть этих формул C_i, $i \in I_1 \subset I$, соответствует условиям, которые должны быть обязательно выполнены ("жесткие" ограничения), а для остальных заданы веса d_i, $i \in I \backslash I_1$, характеризующие степень необходимости выполнения соответствующих формул ("мягкие" ограничения). Кроме этого, имеются ограничения, задающие нижние границы суммарных весов r_t, включенных в состав ингредиентов. Задача заключается в поиске состава резины, удовлетворяющего данным логическим ограничениям, при котором суммарный вес выполненных "мягких" ограничений наибольший.

Для полученных оптимальных решений задач строятся задачи о нахождении соотношения масс каучуков, при котором суммарная стоимость состава минимальна, на основе задачи о смесях. Полученные результаты сопоставимы с данными экспериментов, приведенными специалистами в химической лаборатории [1].

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 10-01-00598).

ЛИТЕРАТУРА

1. О.В. Фролова, Е.Н. Жовнер. Разработка модели задачи проектирования химического состава резин специального назначения.– Юбилейная X межвузовская научно-практическая конференция аспирантов, студентов и молодых исследователей "Теоретические знания – в практические дела": сборник статей в трёх частях. Омск: РосЗИТЛП, филиал в г. Омске, 2009. Ч.1. С. 304–305.

Адельшин Александр Владимирович, Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, ул. Певцова 13, Омск, 644099, Россия, тел. (3812) 236739, факс (3812) 23-45-84, e-mail: adelshin@ofim.oscsbras.ru
Жовнер Евгения Николаевна, филиал ООО "Люксофт Профешнл" в г. Омске, ул. Учебная 83/1, Омск, 644010, Россия, e-mail: ezhovner@luxoft.com

РАВНОВЕСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ В МОДЕЛИ ГРУППОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

М. А. Анисова, И. И. Тахонов

Рассмотрим динамическую распределенную систему, представленную взвешенным двудольным графом $G = (I \cup J, E)$. Назовем элементы множества I "агентами", а элементы множества J – "полями взаимодействия". Агент i присутствует на поле j в том и только том случае, когда $(i, j) \in E$. Обозначим через V_i множество вершин, смежных с i.

Каждый агент i обладает ресурсом в размере q_i, который он полностью распределяет между смежными с ним полями. Назовем множество $X_i = \{x_{ij} : \ j \in V_i\}$ *распределением ресурса агента* i, а множество $X = \{X_i : \ i \in I\}$ – *состоянием системы*. Обозначим также через $\hat{X}_j$ общее количество ресурса, выделенное всеми агентами $l \in V_j$ на поле j: $\hat{X}_j = \sum\limits_{l \in V_j} x_{lj}$.

Агент i оценивает эффект от своего вклада в поле j согласно значениям известных оценивающих функций $c_{ij}(x_{ij}, \hat{X}_j)$. Предположим, что на временном шаге k каждый агент i на основании наблюдаемых на предыдущем шаге значений $\hat{X}_j^{k-1}$ $(j \in V_i)$ принимает решение о перераспределении своего ресурса с целью "оптимизировать" эффект от своих вкладов. Новое распределение X_i^k определяется агентом из решения следующей оптимизационной задачи:

$$\begin{cases} \min\limits_{j \in V_i} c_{ij}(x_{ij}^k, \hat{X}_j^{k-1}) \to \max\limits_{\{x_{ij}^k\}} \\ \sum\limits_{j \in V_i} x_{ij}^k = q_i. \end{cases}$$

Так как все агенты действуют независимо друг от друга, то система приходит в состояние, отличное от ожидаемого, что снова вынуждает их перераспределять свои ресурсы. Таким образом, в системе происходит процесс изменения состояний: $X^k = \Phi(X^{k-1})$ (оператор перехода Φ зависит от графа G и не меняется с течением времени). Исследования подобных моделей производились в [1] и [2]. Рассматриваемая в данной работе модель является обобщением модели, изложенной в [1].

В данной работе производится анализ сходимости процесса изменения состояний для частных случаев графа G и линейных оценивающих функций c_{ij}. Сформулированы достаточные условия сходимости этого процесса. Также исследуется вопрос существования *равновесного* состояния системы, удовлетворяющего условию: $X^* = \Phi(X^*)$, и приводятся аналитические выражения для его вычисления.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.И. Ерзин, И.И. Тахонов. Равновесное распределение ресурсов сетевой модели. // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. VIII, 3(23). с. 58–68.
2. А.И. Ерзин, И.И. Тахонов. Задача поиска сбалансированного потока в сети. // Сибирский журнал индустриальной математики. 2006. Т. IX, 4(28). с. 50–63.

Анисова Мария Александровна, Кемеровский институт (филиал) РГТЭУ, пр. Кузнецкий 39, Кемерово, 650992, Россия,тел. (3842) 75-33-34, E-mail: anisovam@gmail.com
Тахонов Иван Иванович, Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова 2, Новосибирск, 630090, Россия, E-mail: takhonov@gmail.com

ПОСТРОЕНИЕ КАРТЫ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ НАКРЫТИЯ ОБЛАСТИ ГРОЗОВЫМ ОЧАГОМ

А. К. Богушов, А. В. Панюков

Как известно [1], при использовании однопунктовых систем пассивного мониторинга грозовой активности возникает неустранимая ошибка обнаружения пеленга на разряд. Одним из способов решения данной проблемы является анализ информации полученной от некоторого множества разрядов грозового очага. Можно выделить несколько подходов для прогнозирования местоположения грозового очага:

- Построение грозовых ячеек по результатам кластерного анализа [2].
- Построение карты плотности вероятности накрытия области грозовым очагом. В работе [3] предложен метод построения карты плотности вероятности и выдвинут ряд гипотез относительно вероятности нахождения разряда в различных точках пространства.

В докладе дано развитие работы [3] с использование результатов полученных в [1]. В основе подхода лежит следующая гипотеза.
Гипотеза. Плотность вероятности нахождения разряда в направлении η равна

$$f_{\psi}(\eta) = \frac{s}{2\hat{\psi}[s^2\cos^2(\varphi-\eta) - \sin^2(\varphi-\eta)]}, -\arccos u \le \eta - \varphi \le \arccos u,$$

где

$$s = \left|\frac{1-uv}{uv}\right|, \qquad \hat{\psi} = \arctan\left(\frac{1}{s}\tan\arccos u\right),$$

параметры u, v, φ определяется грозопеленгатором [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Panyukov A.V. Estimation of the location of an arbitrarily oriented dipole under single-point direction finding // Journal of geophysical research. 1996. V. 101. P. 14,997–14,982.

2. Богушов А.К., Панюков А.В. Размещение взаимосвязанных объектов в условиях неопределенности // IV Всероссийская конференция. Проблемы оптимизации и экономические приложения. Омск. 2009. С. 113.

3. Богушов А.К., Панюков А.В. Вторичная обработка результатов пассивного мониторинга грозовой деятельности // Сборник трудов 40-й молодежной школы-конференции. 2009. Екатеринбург. С. 286–290.

4. Панюков А.В., Файзулин Н.А., Будуев Д.В. Однопунктовая система местоопределения гроз в ближней зоне. Патент РФ на изобретение №2230336. 2004.

Панюков Анатолий Васильевич, Богушов Александр Константинович, ЮУрГУ, пр.Ленина, д. 76, Челябинск, 454080, РФ, тел./факс: (351) 267-90-39,
e-mail: a_panyukov@mail.ru, abogushov@gmail.com

ИНТЕГРИРОВАННАЯ СИСТЕМА «МАРШРУТНЫЕ ЛИСТЫ»

Т. С. Ванина

В работе рассматривается задача оптимизации транспортной логистики для предприятия, занимающегося доставкой товара со своего склада до сети покупателей. Разработана интегрированная система «Маршрутные листы», которая не только автоматически составляет оптимальный план грузоперевозок, но и ведет учет движения товара.

При работе с товарооборотом интегрированная система:

- сохраняет все изменения в движении товара со склада ЗАО "Автомода" до покупателя;
- формирует отчеты по движению товара;
- выписывает накладные с указанием количества товара и его веса. Вес товара необходим для распределения всего груза по имеющимся автомобилям, так как каждый их них имеет ограниченную грузоподъемность.

Для управления грузоперевозками интегрированная система:

- сохраняет все изменения в справочниках (справочники представляют собой базу данных, хранящую информацию о водителях, контрагентах компании, автомобилях, расстояния между торговыми точками, данные о товарах, разработанные для удобства работы пользователя с системой)
- формирует оптимальный маршрут для доставки товара (маршрут по которому едет конкретный автомобиль с максимальной загрузкой и минимальным расстоянием, а соответственно и расходом топлива);
- формирует отчеты по расходу топлива с учетом стандартов и ГОСТов (то есть с учетом загрузки автомобиля, так как за каждую тонну груза расход автомобиля увеличивается на 1,3 литра, учитывать зимние и летние периоды);
- принимает решения по оптимальности доставки товара. То есть распределять весь имеющийся к доставке на конкретную дату груз по имеющимся автомобилям, с максимальной загрузкой каждого и сведения к минимуму количества автомобилей и расход топлива.

Данная интегрированная система введена в опытную эксплуатацию на нескольких предприятиях г. Челябинска.

ЛИТЕРАТУРА

1. Забурдаев, В. Ю. Моделирование бизнес-процессов в логистике. [Электронный ресурс] URL: http://logistik03.narod.ru/A_1.htm (дата обращения 23.02.2009)

2. Маркова, Е. В., Лисенков А. Н. Комбинаторные планы в задачах многофакторного эксперимента. М.: Наука. 1979. 345 с.

3. Харчистов, Б.Ф. Методы оптимизации: учебное пособие. Таганрог: Изд–во ТРТУ. 2004. 140 с.

Ванина Татьяна Сергеевна, ЮУрГУ, пр.Ленина, д. 76, Челябинск, 454080, Россия, тел./факс: (351) 231-55-59, e-mail: oop_flp@mail.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ НАЗНАЧЕНИЯ РАБОТНИКОВ В СЕТЕВЫЕ ГРУППЫ

А. С. Величко

В работе рассматриваются математические модели формирования оптимального состава групп работников в условиях неоднородности выполняемых работниками функций, например, в случае различных профессий, и с учетом взаимодействий работников в группах в рамках предписанных организационных сетей (например, "звезда" или "круг"). Назначение людей в группы осуществляется по критерию минимизации суммарной "несовместимости" работников, который может быть построен на основе индикатора психологических типов Майерс–Бриггс.

Одна из возможных постановок задач заключается в следующем. Пусть имеется $l = mn$ однородных по выполняемой функции работников, которых необходимо назначить на определенные места в n группах по m человек с учетом предписанной организационной сети в группах. Взаимодействие работников на местах p и q в группе k наперед заданы бинарным параметром a_k^{pq}.

Бинарная переменная $x_{ik}^{(p)}$ равна 1, когда работник $i = 1, \ldots, l$ назначается на место $p = 1, \ldots, m$ в группе $k = 1, \ldots, n$. Так как каждый человек работает только в одной группе и только на одном месте, то $\sum_{p,k} x_{ik}^{(p)} = 1$. Поскольку в каждой группе работает ровно m человек, то $\sum_{i,p} x_{ik}^{(p)} = m$. Поскольку разные люди в каждой из групп не могут занимать одно место, то $\sum_i x_{ik}^{(p)} = 1$. Пусть бинарная переменная y_{ij} равна 1, если человек i назначен на место p в группе k и работает с j, назначенным на место q в этой группе, и эти работники взаимодействуют в рамках предписанной организационной сети для данной группы. Тогда $y_{ij} = \sum_{p,q,k} a_k^{pq} x_{ik}^{(p)} x_{jk}^{(q)}$.

Определим величину c_{ij} как степень "несовместимости" (например, психологической) пары работников i и j. Тогда минимизируемая целевая функция суммарной "несовместимости" работников имеет вид $\sum_{i,j} c_{ij} y_{ij}$.

Формулируемые нелинейные задачи бинарного программирования могут быть эквивалентно представлены в виде линейных задач бинарного программирования с помощью подхода точной линеаризации [1,2].

Задачи бинарного программирования представлены на языке описания задач математического программирования AMPL. Тесты проведены с помощью солверов GLPK и KNITRO на сервере NEOS (http://neos.mcs.anl.gov).

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. Величко. Оптимизация назначения работников в группы // Информатика и системы управления. 2009. №3. С. 45–51.

2. R.E. Burkard, E. Çela, P.M. Pardalos, L.M. Pitsoulis. The quadratic assignment problem // D.Z. Du, P.M. Pardalos (eds.)Handbook of Combinatorial Optimization. Vol. 3. Kluwer Academic Publishers. 1998. P. 241–338.

Величко Андрей Сергеевич, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, ул. Радио, 5, Владивосток, 690041, Россия, тел. (4232) 31-04-04, факс (4232) 31-04-52, e-mail:vandre@dvo.ru

ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА ЗАКУПОК

А. В. Зыкина, О. Н. Канева

Рассматривается задача закупочной логистики: формирование оптимального плана закупок. Пусть вектор x — план закупок ($x \geq a$, a — обязательный минимальный объем закупок), принимаемый на основе спроса $q(\omega)$ на некоторые продукты. Вектор y соответствует плану дополнительных закупок (плану коррекции), вводимому в решение после наблюдения реального значения спроса. Матрица A — матрица поставщиков ($a_{ij} \in \{0, 1\}$, i — индекс продукта, j — индекс поставщика), матрица B — матрица коррекции (b_{ik} — дополнительное количество i-го продукта на единицу мероприятия k-го координатора). Разработка предварительного плана и плана дополнительных закупок (компенсация невязок) — два этапа решения следующей двухэтапной задачи

$$\min_x \{cx + \max_y dy\}$$

при условиях

$$By \geq q(\omega) - Ax, \; y \geq 0, \quad y^T By = y^T (q(\omega) - Ax),$$

$$x \in X,$$

где $X = \{x \mid x \geq a\}$, c — затраты на закупки, d — прибыль координаторов от компенсационных мероприятий.

Один из вариантов использования двухэтапной задачи для формировании портфеля ценных бумаг предложен в работе [1].

Трудности, с которыми связан анализ двухэтапных задач, в значительной степени определяются необходимостью выбора такого оптимального предварительного плана x исходной задачи, который гарантировал бы существование плана y компенсации невязок при всех реализациях спроса $q(\omega)$. Прогнозные значения спроса предлагается находить с помощью метода LGAP [2], что дает возможность получить в качестве результата прогноза набор возможных значений спроса в будущем.

Работа поддержана аналитической ведомственной целевой программой «Развитие научного потенциала высшей школы», код проекта 2.1.1/2763.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зыкина А.В., Канева О.Н., Огородников С.Б. Двухэтапная задача стохастического программирования для формирования портфеля ценных бумаг // Экономика и математические методы. 2008. Т. 44, № 3. С. 111–116.

2. Загоруйко Н.Г. Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск : Изд–во Ин–та математики, 1999. 268 с.

Зыкина Анна Владимировна, Канева Ольга Николаевна, Омский государственный технический университет, пр. Мира 11, Омск, 644050, Россия, тел. (3812) 65-22-08, e-mail: avzykina@mail.ru, okaneva@yandex.ru

АНАЛИЗ МИГРАЦИОННЫХ ПОТОКОВ РФ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Н. Д. Камнева

В работе рассматривается модель миграции населения в РФ за 2006–2009 гг. Миграция населения играет большую роль в развитии человечества и оказывает существенное влияние на социально-экономическое положение населения [1].

Модель миграционных потоков в РФ основана на принципах теории экономического равновесия и рассматривает процесс миграции как деятельность независимых экономических агентов (мигрантов), стремящихся улучшить свое благосостояние.

В модели рассматривается множество P регионов. Издержки при переезде из региона $i \in P$ в $j \in P$ заданы функцией $G_{ij}(x)$ матрицы миграционных потоков x. Система находится в равновесии, если для любых $(i,j) \in P \times P$ выполнены условия

$$G_{ij}(x) - U_i(x) \begin{cases} \geq 0, & \text{если } x_{ij} = 0, \\ = 0, & \text{если } x_{ij} > 0; \end{cases}$$

где $U_i(x) = \min_{j \in P} G_{ij}(x)$ — минимальные издержки при миграции из региона i.

Проблема поиска равновесных миграционных потоков x^* может быть сформулирован как задача нелинейной комплементарности

$$G_{ij}(x^*) - U_i(x^*) \geq 0, \sum_{i,j \in P} x^*_{ij} \cdot (G_{ij}(x^*) - U_i(x^*)) = 0, \sum_{j \neq i} x^*_{ij} \leq b_i, x^*_{ij} \geq 0, \text{для } (i,j) \in P \times P,$$

где b_i — численность населения в регионе i, или вариационное неравенство [2]

$$\sum_{i,j \in P} G_{ij}(x^*)(x_{ij} - x^*_{ij}) \geq 0 \tag{1}$$

для всех x_{ij}, удовлетворяющим условиям баланса.

Эта модель была использована для расчета миграционных потоков между 80 регионами РФ. В качестве исходных данных используются статистические показатели, отражающие миграционные процессы, демографическую и экологическую ситуации в регионах РФ, занятость населения и уровнь его благосостояния, а также индексы цен на товары и услуги за 2006–2009гг. Равновесные миграционные потоки расчитываются с использованием проективных методов, основанных на фейеровских отображениях [3]. Помимо определения межрегиональных миграционных потоков, модель (1) может быть использована для оценки их изменений при меняющихся условиях в регионах.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.Edvard Taylor. Migration Models. //Encyclopedia of Population. New York: Macmillan, 2003.

2. A. Nagurney. Network Economics: A Variational Inequality Approach. 2nd and revised ed. Kluwer academic: Dordreacht, 1999.

3. Е.А. Нурминский. Фейеровские процессы с малыми возмущениями. // Доклады АН. 2008. т. 422, вып. 5. С. 601–605.

Камнева Надежда Дмитриевна, Дальневосточный государственный университет, ул. Чапаева, 8, Владивосток, 690069, тел.8-908-4484838, e-mail: kamne@dvo.ru

ИНТЕРВАЛЬНАЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ В МОДЕЛИ НЕЙМАНА

А. В. Панюков, А. Т. Латипова

Определение. *Модель Неймана* задается парой неотрицательных матриц затрат A и выпуска B размером $n \times m$, где n - число продуктов, а m - число процессов. *Параметрами равновесия* модели Неймана является тройка $(\lambda^*, x*, w*)$, где λ^* – это число Фробениуса, $x*$ и $w*$ – прямой и двойственный векторы Фробениуса соответственно. *Интервальной* назовем модель Неймана с интервальными матрицами затрат $\mathbf{A} = \{\mathbf{a_{ij}}\} = \left\{\left[\underline{a_{ij}}, \overline{a_{ij}}\right]\right\}$ и выпуска $\mathbf{B} = \{\mathbf{b_{ij}}\} = \left\{\left[\underline{b_{ij}}, \overline{b_{ij}}\right]\right\}$, $i = (\overline{1,n}),\ j = (\overline{1,m})$.

Теорема [1]. Пусть $(\underline{\lambda}, \underline{x}, \underline{w})$ являются параметрами равновесия для модели Неймана $(\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}})$, а $(\overline{\lambda}, \overline{x}, \overline{w})$ являются параметрами равновесия для модели Неймана $(\overline{\mathbf{A}}, \underline{\mathbf{B}})$, тогда для любой точечной модели Неймана $(\tilde{A}, \tilde{B})$ (где $\tilde{A} \in \mathbf{A}$, $\tilde{B} \in \mathbf{B}$) её число Фробениуса $\tilde{\lambda}$ принадлежит интервалу $[\underline{\lambda}; \overline{\lambda}]$.

Очевидно, что область значений для прямого (двойственного) вектора Фробениуса принадлежит интервальному вектору $\mathbf{I_m}$ $(\mathbf{I_n})$, элементами которого являются интервалы единичного диаметра $[0; 1]$.

Определение. Назовем *операцией сжатия* для интервальной модели Неймана нахождение пары $(\mathbf{X}, \mathbf{W})$ интервальных векторов (где $\mathbf{X} \subset \mathbf{I_m}, \mathbf{W} \subset \mathbf{I_n}$) таких, что для любой точечной модели $(\tilde{A}, \tilde{B})$ прямой вектор Фробениуса $\tilde{x}$ принадлежит $\mathbf{X}$, а двойственный вектор Фробениуса $\tilde{w}$ принадлежит $\mathbf{W}$. Сжатие будем считать *эффективным*, если диаметры областей $\mathbf{X}$ и $\mathbf{W}$ будут меньше 1.

Утверждение. Для любой интервальной модели Неймана отсутствует эффективное сжатие.

Определение. Назовем пару точечных векторов $(x' \in \mathbf{I_m}, \mathbf{w}' \in \mathbf{I_n})$ *допусковым* решением для интервальной модели Неймана, если для любой точечной модели $(\tilde{A}, \tilde{B})$ существует такое число $\lambda \in [\underline{\lambda}; \overline{\lambda}]$, для которого выполняются неравенства $\left\{(\tilde{A} - \lambda\tilde{B})x' \leq 0; (\tilde{A}^T - \lambda\tilde{B}^T)w' \geq 0\right\}$.

Утверждение. Множество допусковых решений для любой интервальной модели Неймана не является пустым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панюков А.В., Латипова А.Т. Оценка положения равновесия в модели Неймана при интервальной неопределенности исходных данных. // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. Серия "Управление, вычислительная техника и информатика". 2008. Т.10. №2(27). С. 150–153.

2. Фидлер М., Недома Й. Задачи оптимизации с неточными данными. М. - Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2008.

Панюков Анатолий Васильевич, Латипова Алина Таиховна, Южно-Уральский госуниверситет, пр. Ленина, 76, Челябинск, 454080, РФ, тел. (8-351) 267-90-39, факс (8-351) 267-99-00, e-mail: a_panyukov@mail.ru,alfas_chel@mail.ru

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЪЕМОВ ПРОИЗВОДСТВА ПО ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМ МАРШРУТАМ

А. В. Панюков, В. А. Телегин

Пусть $R = \{1, 2, \ldots, N\}$ — множество рабочих центров (РЦ), где осуществляется обработка изделия, которое меняет его физические свойства; $I = \{1, 2, \ldots, M\}$ – множество изделий; t_n – доступность РЦ $n \in R$, т.е. время доступное для осуществления переделов допустимых изделий в течение периода планирования; p_m – цена реализации единицы изделия $m \in I$; d_m – объем спроса на изделие $m \in I$.

Технологическим маршрутом j_m производства изделия $m \in I$ будем называть упорядоченную последовательность обработки изделия различными РЦ, т.е. j_m представляет орцепь $(V(j_m), E(j_m))$, где множество вершин $V(j_m)$, соответствующее множеству операций маршрута j_m, представляет мультимножество РЦ в маршруте j_m; $E(j_m)$ – множество технологических переходов в маршруте j_m. Множество РЦ в мультимножестве $V(j_m)$ обозначим как $V^*(j_m)$. Через $V(j_m)(n)$ обозначим подмножество $V(j_m)$, содержащее только экземпляры рабочего центра $n \in R$. Множество всех технологических маршрутов изделия $m \in I$ обозначим через $J(m)$; интенсивность использования технологии $j_m \in J(m)$, т.е. объемы производства, обозначим через x_{j_m}. Пусть время выполнения операции $n \in V(j_m)$ равно $t_{j_m n}$. Пусть стоимость времени выполнения операции $n \in V(j_m)$ равна $c_{j_m n}$.

Рассматривается задача максимизации маржинальной прибыли

$$\sum_{m\in I}\left(p_m \sum_{j_m\in J(m)} x_{j_m}\right) - \sum_{n\in R}\left(\sum_{m\in I} \sum_{j_m\in J(m):\, i\in V*(j_m)} \left(x_{j_m} \sum_{k\in V(j_m)(i)} c_{j_m k} t_{j_m k}\right)\right) \to \max_{x\in D},$$

где D – множество неотрицательных интенсивностей, удовлетворяющих ограничению на время, необходимое рабочим центрам при заданных интенсивностях использовании технологических маршрутов:

$$(\forall n \in R)\left(\sum_{m\in I} \sum_{j_m\in J(m):\, n\in V^*(j_m)} \left(x_{j_m} \sum_{k\in V(j_m)(n)} t_{j_m k}\right) \le t_n\right),$$

и обеспечивающих требуемый спрос

$$(\forall m \in I)\left(\sum_{j_m\in J(m)} x_{j_m} \ge d_m\right).$$

При реальных исходных данных рассматриваемая задача может оказаться некорректно поставленной: $D = \emptyset$.

В докладе будут даны способы построения псевдорешения задачи в этом случае.

Панюков Анатолий Васильевич, Телегин Вадим Александрович, ЮУрГУ, пр. Ленина, д. 76, Челябинск, 454080, РФ, тел./факс: (351) 267-90-39, e-mail: a_panyukov@mail.ru

ПСЕВДОРЕШЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

А. В. Панюков, Т. В. Труфанова

Рассматривается интервальная система линейных уравнений и неравенств [1] $\mathbf{A}x = \mathbf{a}$, $\mathbf{B}x \leq b$, $x \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}^k$, где $\mathbf{A} = \left\{[\underline{A}_{ij}, \overline{A}_{ij}] : \ i = 1, 2, \ldots, l, \ j = 1, 2, \ldots, n\right\}$, $\mathbf{a} = \left\{[\underline{a}_i, \overline{a}_i] : \ i = 1, 2, \ldots, l\right\}$, $\mathbf{B} = \left\{[\underline{B}_{ij}, \overline{B}_{ij}] : \ i = 1, 2, \ldots, k, \ j = 1, 2, \ldots, n\right\}$.

В качестве решения данной системы принимаются точки допустимого множества

$$S_{\mathbf{A}x=\mathbf{a}, \ \mathbf{B}x\leq b} = \left\{x : \left(\forall \tilde{A} \in \mathbf{A}, \tilde{a} \in \mathbf{a}, \tilde{B} \in \mathbf{B}\right) \left(\tilde{A}x = \tilde{a}, \tilde{B}x \leq b\right)\right\}.$$

Если $S_{\mathbf{A}x=\mathbf{a},\mathbf{B}x\leq b} = \varnothing$, то в качестве решения предлагается рассматривать множество допустимых точек линейной системы с модифицированными правыми частями $\widetilde{a}(z) = [\underline{a} - z|\underline{a}|, \overline{a} + z|\overline{a}|], \widetilde{b}(z) = b + z|b|, z \geq 0$.
Пусть $z^* = \inf\{z : S_{\mathbf{A}x=\widetilde{\mathbf{a}}(z),\mathbf{B}x\leq\widetilde{b}(z)} \neq \varnothing\}$. По аналогии с [2] псевдорешением исходной системы будем называть точки допустимого множества $S_{\mathbf{A}x=\widetilde{\mathbf{a}}(z*),\mathbf{B}x\leq\widetilde{b}(z*)}$.
Корректность введенного определения подтверждает

Теорема 1. *Для любой интервальной линейной системы* $\mathbf{A}x = \mathbf{a}, \mathbf{B}x \leq b$ *при всех* $z \geq 1$ *множество* $S_{\mathbf{A}x=\widetilde{\mathbf{a}}(z*),\mathbf{B}x\leq\widetilde{b}(z*)} \neq \varnothing$.

Способ нахождения псевдорешения линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{a}, \mathbf{B}x \leq b$ дает

Теорема 2. *Существует решение* (x^{+*}, x^{-*}, z^*) *задачи линейного программирования*

$$z \to \min_{(x^+, x^-, z)}$$

$$\sum_{j=1}^{n}[\underline{A}_{ij}x_j^+ - \overline{A}_{ij}x_j^-] \geq \underline{a}_i - z|\underline{a}_i|, \ i = 1, 2, \ldots, l,$$

$$\sum_{j=1}^{n}[\overline{A}_{ij}x_j^+ - \underline{A}_{ij}x_j^-] \leq \overline{a}_i + z|\overline{a}_i|, \ i = 1, 2, \ldots, l,$$

$$\sum_{j=1}^{n}[\overline{B}_{ij}x_j^+ - \underline{B}_{ij}x_j^-] \leq b_i + z|b_i|, \ i = 1, 2, \ldots, k,$$

$$x_j^+, x_j^-, z \geq 0, j = 1, 2, \ldots, n,$$

при этом $x^* = x^{+*} + x^{-*}$ *является псевдорешением системы* $\mathbf{A}x = \mathbf{a}, \mathbf{B}x \leq b$.
Таким образом, введенное в работе понятие "псевдорешение" линейной интервальной системы уравнений и неравенств является вполне конструктивным и позволяет давать приемлемые результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fielder M., Nedoma J., Ramik J., Zimmerman K. Linear optimization problems with inexact data.New York: Springer, 2006.

2. Иванов В.К. О линейных некорректных задачах // ДАН СССР. 1962. Т. 145, №2. С. 270–272.

Панюков Анатолий Васильевич, Труфанова Татьяна Викторовна, Южно-Уральский государственный университет, пр.Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия,
тел. (351) 267-90-39, e-mail: a_panyukov@mail.ru, tteu448@mail.ru

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ МНОГОУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Н. И. Пляскина

В представленном докладе рассмотрена двухуровневая система моделей, состоящая из K объектов, предложен способ согласования моделей верхнего и нижнего уровней при условии, что развитие системы в целом и входящих в нее подсистем отображается в виде конечных ориентированных графов $G_0, G_1, \ldots, G_k$ $(k = 0, 1, \ldots, K)$, где G_0-граф системы. Продолжительность каждой работы t_{ij}^k, $(i,j) \in G_k$ ограничена снизу d_{ij}^k (жесткое ограничение) и сверху D_{ij}^k (нормальное ограничение). Задача оптимизации системы состоит в нахождении времен T_i, T_j наступления событий i и j, продолжительностей t_{ij}^k работ $(i,j) \in G_0$, объемов потребления l-го глобального ресурса q_{ij}^{lk}, $l = \overline{1,L}$ и объемов выпуска η-ой продукции $p_{ij}^{\eta k}$ на работе $(i,j) \in G_k$, k-ой подсистемой $(k = \overline{1,K})$, при которых общая сумма приведенных к моменту T затрат на весь комплекс работ сетевого графика была бы минимальной. Для каждой подсистемы формулируется локальная задача оптимизации (задача нижнего уровня), для которой время выполнения всего комплекса работ объекта T^k является оптимизируемой величиной. В этом случае задача подсистемы является задачей параметрического программирования, для решения которой, при соблюдении соответствующих допущений, может быть использован алгоритм Келли [1]. Процедура получения глобального оптимума в двухуровневой системе представлена итерационным процессом, основанным на принципе сопоставления множителей Лагранжа и условии существования седловой точки функции Лагранжа. Для задачи оптимизации системы и ее k подсистем составляются функции Лагранжа. Пусть $\overrightarrow{y} = (y_t^{1k}, \ldots, y_t^{lk}, \ldots, y_t^{Lk})$- вектор множителей Лагранжа, соответствующих L глобальным ресурсам. На нижнем уровне определяются множители Лагранжа, верхний уровень сравнивает их между собой и прямо пропорционально им распределяет глобальный ресурс. Информация о полученном распределении вновь поступает на нижний уровень, и начинается следующая итерация. Подсистемы находятся в равновесии по распределению глобальных ресурсов, если для каждого из них, заданного ограничением, во всех локальных задачах оценки y^{1k+} равны между собой и равны оценке глобального ресурса в системе:

$$y^{1k+} = y^{1+}, \ldots \quad k = \overline{1,K}. \qquad (1)$$

На основе равновесного распределения ресурсов строится оптимальное состояние системы, для которого необходимо выполнение условия жесткости: если какая–либо оценка $y^l > 0$, то и

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{(i,j)\in G_0} q_{ij}^{lk} = C_t^l, \quad t = \overline{1,T}, \quad 0 \le T_i + t_{ij} \le t. \qquad (2)$$

где C_t^l — объем суммарных поставок l–го ресурса в течение t–го года. Процедура повторяется до тех пор, пока не будут выполнены условия (1)–(2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сеа Ж.Н. Оптимизация. Теория и алгоритмы. 1973. Сайт www.nglib.ru

Пляскина Нина Ильинична, ИЭОПП СО РАН, Новосибирск, 630090, пр. Академика Лаврентьева, 17, НГУ, Новосибирск, 630090, ул. Пирогова, 2. Тел. (383)330-28-26, факс (383) 330-25-80, pliaskina@hotmail.com

ПОИСК ДОПУСТИМЫХ ВАРИАНТОВ РАЗВИТИЯ ОСНОВНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ

О. М. Попова

В работе рассматривается задача определения пропускных способностей линий электропередач (ЛЭП) основной электрической сети при соблюдении:

балансов мощностей узлов ($i = 1, n$)

$$x_i + \sum_{j \in J} (1 - p_{ij}) x_{ji} - \sum_{j \in J} x_{ij} = P_i^P,$$

ограничений на потоки мощности по ЛЭП (P_{ij}^L) и располагаемые мощности электростанций (P_i^G)

$$0 \leq x_{ij} \leq P_{ij}^L;$$

$$0 \leq x_i \leq P_i^G.$$

Неизвестными величинами являются потоки мощности по связям x_{ij} из узла i в узел j (МВт) и мощности генерации в узлах x_i (МВт). Здесь p_{ij} — удельный коэффициент потерь мощности при передаче по связи между узлами i и j; P_i^P — потребляемая мощность в узле i.

Для решения поставленной задачи в виде системы линейных ограничений используется метод внутренних точек.

Работа поддержана грантом РФФИ 10-07-00264.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попова О.М., Такайшвили В.Р., Труфанов В.В. Пакет программ для анализа развития электрических сетей с использованием геоинформационных технологий. Иркутск, 2001. (Препр. / ИСЭМ СО РАН; № 8).

2. Дикин И.И., Попова О.М. Исследование и ускорение сходимости алгоритмов метода внутренних точек: Решение оптимизационных задач термодинамики. Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1997.

Попова Ольга Михайловна, Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева (ИСЭМ) СО РАН, ул. Лермонтова, 130 , Иркутск-33, 664033, Россия,
тел. (3952)-42-63-80, e-mail: POM@isem.sei.irk.ru

СПИСОК АВТОРОВ

Российская конференция

Дискретная оптимизация и исследование операций

Алтай, 27 июня – 3 июля 2010

Материалы конференции

Подписано в печать 01.06.2010. Формат 60x84 1/8. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 25,8. Уч.-изд. л. 12,0. Тираж 150 экз. Заказ № 61.

Отпечатано в ООО «Омега Принт»,
пр. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.

Схема проезда от Новосибирска до гостиницы «Ареда»

Дискретный анализ и исследование операций

http://math.nsc.ru/publishing/DAOR/daor.html

Журнал «Дискретный анализ и исследование операций» основан в 1994 г. Учредители — Сибирское отделение РАН, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. До 2008 года журнал выходил в двух сериях.

Главный редактор В.Л. Береснев

Переводы статей на английский язык публикуются с 2007 г. в журнале Journal of Applied and Industrial Mathematics. Berlin: Springer. Журнал включён в российский индекс научного цитирования.

Электронная версия журнала размещена на платформе научной электронной библиотеки: www.elibrary.ru и на общероссийском математическом портале **Math-Net.Ru** www.mathnet.ru.

В журнале публикуются оригинальные статьи, содержащие теоретические результаты в области дискретного анализа и исследования операций, статьи прикладной направленности, представляющие интерес с точки зрения практического приложения полученных результатов, а также обзорные статьи по данной тематике, краткие научные сообщения, информация о новых книгах.

Журнал реферируется РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», «Zentralblatt MATH».

В журнале публикуются работы по следующим разделам:

- дискретная оптимизация
- дискретные структуры и экстремальные задачи
- комбинаторика
- контроль и надежность дискретных устройств
- математическое программирование
- модели и методы принятия оптимальных решений
- построение и анализ алгоритмов, синтез и сложность управляющих систем
- теория автоматов
- теория графов
- теория игр и ее приложения
- теория кодирования
- теория функциональных систем
- теория расписаний
- теория размещений
- модели экономики
- моделирование процессов управления
- системы поддержки принятия решения

Информация о подписке:

Журнал распространяется по подписке через агентство «Роспечать» (индекс 73402).

Адрес редакции:

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4
630090 Новосибирск, Россия

Тел. (383) 363-46-85
Факс (383) 333-25-98
E-mail **discopr@math.nsc.ru**

Зав. редакцией Наталья Михайловна Пузынина
E-mail: discopr@math.nsc.ru

Более подробную информацию о журнале можно найти в INTERNET по адресу:
http://math.nsc.ru/publishing/DAOR/daor.html
Здесь Вы найдете содержание выпусков за последние три года, аннотации к каждой статье, адреса авторов, а также информацию о книгах, журналах и препринтах, выпускаемых издательством Института математики.