DOOR-2013

Новосибирск
24 – 28 июня 2013

Международная конференция

Дискретная оптимизация и исследование операций

Материалы конференции

DOOR-2013

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН
Новосибирский государственный университет
Ассоциация математического программирования

при финансовой поддержке **Российского фонда фундаментальных исследований**

Международный программный комитет

д.ф.-м.н. В.Л. Береснев (Новосибирск) (Председатель)
д.ф.-м.н. Э.Х. Гимади (Новосибирск)
prof. B. Evripides (France)
д.ф.-м.н. А.И. Ерзин (Новосибирск)
prof. E. Carrizosa (Spain)
акад. Ю.И. Журавлев (Москва)
д.ф.-м.н. А.В. Кельманов (Новосибирск)
д.ф.-м.н. А.А. Колоколов (Омск)
д.ф.-м.н. Ю.А. Кочетов (Новосибирск)
д.ф.-м.н. Н.Н. Кузюрин (Москва)
prof. B.M-T. Lin (Taiwan)
prof. N. Mladenovic (UK)
prof. P.M. Pardalos (USA)
член-корр. К.В. Рудаков (Москва)
prof. S. Salhi (UK)
д.ф.-м.н. С.В. Севастьянов (Новосибирск)
д.ф.-м.н. А.С. Стрекаловский (Иркутск)
prof. El-G. Talbi (France)
д.ф.-м.н. О.В. Хамисов (Иркутск)
prof. P. Hansen (Canada)
д.ф.-м.н. М.Ю. Хачай (Екатеринбург)
д.ф.-м.н. В.И. Шмырев (Новосибирск)

Организационный комитет

д.ф.-м.н. Ю.А. Кочетов (Новосибирск) (Председатель)
к.ф.-м.н. А.В. Плясунов (Новосибирск)
д.ф.-м.н. А.И. Ерзин (Новосибирск)
к.ф.-м.н. Е.В. Константиновна (Новосибирск)
Н.А. Кочетова (Новосибирск)
к.ф.-м.н. П.А. Кононова (Новосибирск)
И.А. Давыдов (Новосибирск)
А.А. Мельников (Новосибирск)
А.А. Панин (Новосибирск)
А.В. Хмелев (Новосибирск)

http://www.math.nsc.ru/conference/door/2013
e-mail: door@math.nsc.ru

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С.Л. СОБОЛЕВА СО РАН

Международная конференция

Дискретная оптимизация и исследование операций

Новосибирск, Академгородок
24 – 28 июня 2013

Материалы конференции

Новосибирск
Издательство Института математики
2013

ББК 22.1
Д76

Международная конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций»: Материалы конференции (Новосибирск, 24 – 28 июня 2013 г.). — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2013. — 184 с.

ISBN 978-5-86134-137-0.

Данные материалы содержат пленарные доклады и тезисы выступлений, представленные на Международную конференцию «Дискретная оптимизация и исследование операций» (DOOR-2013).

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-06034).

В редактировании выпуска принимали участие:
В. Л. Береснев, Э. Х. Гимади, А. И. Ерзин, А. В. Кельманов, А. А. Колоколов, А. В. Кононов, Е.В. Константинова, Ю. А. Кочетов, А. В. Плясунов, С. В. Севастьянов, А. В. Стрекаловский, О.В. Хамисов, В. И. Шмырев.

Оригинал-макет подготовили:
Н. А. Кочетова, П. А. Кононова.
При оформлении обложки использовалась иллюстрация из материалов ISMP-2012.

Ответственный за выпуск Ю. А. Кочетов.

$$\text{М}\,\frac{1602100000-02}{\text{Я}82(03)-2013}$$ Без объявл.

ISBN 978-5-86134-137-0

СОДЕРЖАНИЕ

Пленарные доклады

ON POLYNOMIALLY SOLVABLE CASES OF NP-HARD PROBLEMS

V. Deineko

Investigation of polynomially solvable cases of NP-hard problems is a well established research branch in combinatorial optimisation. In our talk we give a historic overview of the research in this area as well as represent new results obtained in collaboration with R.Burkard, E.Cela, B.Klinz, A.Tiskin, and G.Woeginger. We mainly concentrate on the travelling salesman problem (TSP) [1] and the quadratic assignment problem [2-3].

Special structures imposed on the matrices involved in the formulation of the problems allow one to identify polynomially solvable cases of these classical problems. Monge, Supnick, Kalmanson, Demidenko matrices are examples of known special structures that permit efficient solutions to quite a few other optimisation problems. We give a full complexity classification of the so-called four-point conditions for the TSP [4]. The mentioned above matrices are special realisations of these conditions. The special structures in matrices are dependent on the numbering of the rows and columns. So the next natural step in investigating special cases is the recognition of special structures. We describe some recognition algorithms as well as formulate problems remain to be solved.

Special solvable cases gave a raise to specially structured sets of permutations. Usually these sets contain exponential numbers of permutations though an optimal permutation can be found in these neighbourhoods in polynomial time [5].

We discuss a possibility of using algorithms designed for specially structured problems in more general settings [6-8].

REFERENCES

1. Burkard R.E., Deineko V.G., van Dal R., van der Veen J.A.A., Woeginger G.J. Well-solvable special cases of the TSP: A survey, SIAM Review, 40 (3), 1998, 496–546.

2. Deineko V., Woeginger G.J. A solvable case of the quadratic assignment problem. Operations Research Letters 22, 1998, 13–17.

3. Çela E., Deineko V., Woeginger G.J. Another well-solvable case of the QAP: Maximizing the job completion time variance, Operations Research Letters 40 (5), 2012, 356 – 359.

4. Deineko V., Klinz B., Tiskin A., Woeginger G.J. Four-point conditions for the TSP: the complete complexity classification, 2013, submitted.

5. Deineko V., Woeginger G.J. A study of exponential neighborhoods for the Travelling Salesman Problem and for the Quadratic Assignment Problem, Mathematical Programming, Series A (78), 2000, 519 – 542.

6. Deineko V., Rudolf R., Woeginger G.J. Sometimes Travelling is Easy: The Master Tour Problem, Siam Journal on Discrete Mathematics, 11 (1), 1998, 81 – 93.

7. Burkard R.E., Deineko V., Woeginger G.J. The traveling salesman and the PQ-tree, Mathematics of Operations Research, 24 (1), 1999, 262 – 272.

8. Deineko V., Tiskin A., Fast minimum-weight double-tree shortcutting for metric TSP: is the best one good enough? ACM Journal on Experimental Algorithmics, 14, 2009, 4.6.

Vladimir Deineko, Warwick Business School, Coventry, UK, v.deineko@warwik.ac.uk

SOME GLOBAL OPTIMIZATION PROBLEMS IN CONTINUOUS LOCATION

E. Carrizosa

While the literature on Continuous Location is full of models which can be written as convex optimization problems, several global optimization models have been analyzed, either by means of exact (geometrical branch and bound methods) or heuristics methods.

In this talk different global optimization problems taken from the context of Continuous Location will be overviewed. The first problem is a high-dimensional industrial problem: determining the location and sizes of the heliostats (in the order of the thousands) in a solar plant so as to maximize its efficiency. While most papers in the literature impose a specific geometric pattern (e.g. radial-stagger, spirals) here we address the problem as a continuous problem with black-box objective function and nonconvex constraints. Considering not only the location, but also the size (to be chosen out a given set of standards) of the heliostats, one faces a nonconvex mixed integer problem, which is successfully handled via heuristics.

The second Location problem comes from Data Analysis. In Principal Component Analysis one seeks a k-dimensional vector space V minimizing a measure of the distances between a cloud of points and their projections onto V. We address a sparse variant, in which the orthonormal basis defining V should be sufficiently sparse. We model the problem as a biobjective problem (minimization of the projection errors, maximization of the sparsity are simultaneously sought), addressed by heuristics, which will be compared against state-of-the-art procedures.

The last problem consists of finding p points of a newtwork so as to minimize a function of the expected distance to the points along the edges, which are assumed to follow arbitrary distributions. Structural properties of the problem are discussed, and, for low-dimensional cases, a branch and bound procedure is developed exploiting the fact that the objective can be written as a d.c. function and the constraints are of box type.

This research was supported by grants MTM2012-36163 (MINECO), and FQM-329 (Junta de Andalucía), Spain, both co-funded by EU ERD Funds

REFERENCES

1. Blanquero, R., Carrizosa, E. Continuous location problems and Big Triangle Small Triangle: constructing better bounds // JOGO 2009. V. 45. P. 389–402.

2. Hansen, P., Peeters, D., Richard, D., Thisse, J.-F. The Minisum and Minimax Location Problems Revisited // Opns. Res. 1985. V. 33. P. 1251–1265.

3. Noone, C.J., Torrilhon, M., Mitsos, A. Heliostat field optimization: A new computationally efficient model and biomimetic layout // Solar Energy 2012. V. 86. P. 792–803.

4. Zou, H., Hastie, T., Tibshirani, R. Sparse Principal Component Analysis // Journal of Computational and Graphical Statistics. 2006. V. 15. P.265–286.

Emilio Carrizosa, Universidad de Sevilla, Spain, ecarrizosa@us.es

CAPTURING MARKET SHARE: FACILITY LOCATION AND DESIGN PROBLEMS

D. Krass, O. Berman, R. Aboolian

1 Market Share, Facility Location and Design: Overview

We consider the following general problem: how to simultaneously optimize the **location** and **design** for a **set of new facilities** that will compete for customer demand with each other, as well as with some pre-existing facilities controlled by competitors. Our primary goal is to develop a modeling framework that is sufficiently rich and flexible to endogenously represent the following key questions commonly faced by facility planners:

1. *How many* facilities should be located?
2. *Where* should these facilities be located?
3. *What kind* of facilities (in terms of size, product variety, and other design aspects) should be located?

These questions are obviously interconnected: for example, the number of facilities to locate is affected by the size of facilities, since fewer larger facilities may be used in place of more smaller ones. Ultimately, we would like our model to be able to represent some, if not most, of the bewildering variety of the design and location patterns of competitive facilities that can be observed in real life. In addition to developing the modeling framework, we will also present some algorithmic approaches for efficiently finding optimal solutions for an important sub-class of facility location and design problems.

We will adopt the general framework of a class of models which assume that customers, rather than patronizing a single "favorite" facility, split their demand among some or all available facilities. The proportion of demand allocated to a given facility depends on its "attractiveness" in relation to other available facilities. Thus facilities compete for the *market share* of each customer. The attractiveness of a given facility for a given customer is affected by the proximity (i.e., travel distance), as well as by other aspects of the facility, such as size, product variety, parking availability, etc. We will group these characteristics under the general term of "facility design".

We will also assume that customer demand is "elastic", i.e., the amount a given customer spends on the service provided by the facilities depends on the total utility the customer derives from this service. This is in contrast to the typical assumption of constant (i.e., inelastic) demand in most facility location literature. Our modeling approach allows us to capture the following key effects endogenously in our model:
– *Demand cannibalization:* i.e., re-allocation of customer demand among the facilities (both own and competitive) as new facilities are added to the system and/or as design changes to the existing facilities are made. Note that if the main effect of adding a new facility (or improving an existing one) is re-allocation of demand among your own existing facilities, then this action is clearly counter-productive.
– *Market Expansion:* the increase in customer demand as the overall level of service offered by the available facilities increases. The increase in the level of service can come either as a result of new facilities being added or through design improvements to the existing facilities.

– Interplay between locational and design decisions. The approach naturally captures the design-location trade-offs.

The price one pays for the flexibility of this class of models is mathematical and computational complexity: the models typically result in integer programs with non-linear objectives and constraints for which off-the-shelf solution approaches are not successful. However, as discussed below, effective exact and approximate solution approaches can be developed utilizing the special structure of the model.

The basic class of models where customers split their purchases among the available facilities in proportion of relative attraction of the facilities have many names: spatial interaction models or "gravity models" in the location literature; "brand choice" or "market share attraction" models in the marketing literature. Probably the most accurate name is Multinomial Logit Model (MNL), developed by McFadden [8], which provides the general framework for this class of models. In location literature these models originated with the work of Huff [7]; we refer the reader to Berman and Krass [4], and to a recent review by Berman *et al* [5]. The elastic demand model was introduced by Aboolian, Berman and Krass [1] and the design optimization was added by the same authors in [2], where it was assumed that the choice had to be made form a limited number of pre-determined design scenarios. The model presented in the current talk is based on [3], which provides the most general treatment of the problem.

2 Model Formulation

We assume that customer demand is concentrated in a discrete subset N of metric space $\mathcal{P}$ equipped with a distance function $d_{ij}, \quad i, j \in N$ (if $\mathcal{P}$ represent a network with nodes N, the function d_{ij} can be chosen to be the shortest path distance). Each of the $|N|$ points represents a "market" consisting of customers who are homogeneous with respect to their facility preferences and expenditure decisions; the maximum potential demand of market $i \in N$ is given by w_i.

We assume that there are pre-existing competitive facilities located in set $C \subset N$ and that any new facilities must be located in the set of potential facility locations $P \subset N - C$. Let $u_{ij} \geq 0$ be the utility derived by customer $i \in N$ from the facility located at $j \in P \cup C$; the relationship of this utility to the location and attractiveness of facilities is described later. Assuming the new facilities are located in subset $S \subset P$, the total utility derived by customers at demand point i from the service provided by the facilities is given by

$$U_i = \sum_{j \in S} u_{ij} + \sum_{j \in C} u_{ij} = \sum_{j \in S} u_{ij} + U_i^C, \tag{1}$$

where U_i^C is the total utility derived by customers at node i from the competitive facilities. Since the competitive facilities are pre-existing with known attractiveness characteristics, the quantity U_i^C is treated as a known parameter throughout the paper. Thus $U_i \geq U_i^C$.

We assume that the demand (expenditures) of customers in market i captured by the new facilities is given by $w_i V_i(U_i; S)$, where for a given facility set S, $V(U_i; S) \in [0, 1]$ is a concave, non-decreasing, twice-differentiable function representing the realized proportion of demand from a given market. The total demand captured by the new facilities is given by $\sum_{i \in N} w_i V_i(U_i; S)$.

Remark: This definition generalizes the demand structure of all previous spatial interactions models, including those with elastic demand (see [1], [2], as well as [4]). There, the total demand from market i has two components: a concave non-decreasing expenditure function $g(U) \in [0,1]$ and the market share function

$$MS_{ij} = \frac{u_{ij}}{U_i},$$

representing the share of the expenditures of market i captured by the facility j. The total demand from market i captured by facilities in S given by $w_i \sum_{j \in S} g(U_i) MS_{ij} \equiv V_i(U_i; S) w_i$. It is easy to verify that this is indeed a concave non-decreasing function on [0,1] - see theorem 1 in [2].

We next define the utility functions u_{ij} and their relationship to facility location and design. Following the treatment in [2] (as well as McFadden [8] and other papers on MNL-type models), we will assume that the utility of facility j for customers in market i, u_{ij}, is of the product form:

$$u_{ij} = A_j (d_{ij} + 1)^{-\beta}, \ i \in N, j \in P,$$

where A_j is the attractiveness of the facility at j, and $\beta > 0$ is the parameter representing sensitivity of utility to the travel distance (note that this form of the utility function assumes that when $d_{ij} = 0$, the customer utility is determined solely by the attractiveness term A_j). Following [2], the attractiveness A_j of a facility at $j \in P$ is a product of the "basic" attractiveness α_j and design improvements along K design characteristics:

$$A_j = \alpha_j \prod_{k=1}^{K} (1 + y_{jk})^{\theta_k}.$$

Here α_j represents the attractiveness of the "minimal" or "basic" design that must be used if locating at j, representing the site characteristics, building codes, by-laws governing minimum number of parking spots, etc., and each $y_{jk} \geq 0$ represents the *improvement* of the basic design along characteristic k. The parameter $\theta_k > 0$ represents the sensitivity of customers to the design characteristic k. We assume that $y_{jk} \in [0, y_k^{max}]$, i.e., the value of each design characteristic can be adjusted continuously within this interval.

We will assume that $\sum_{k \in K} \theta_k \leq 1$. As discussed in [3], this assumption ensures that A_j is concave with respect to the overall expenditure on improvements for facility j; we believe this assumption should also be reasonable in most cases; parameters $\alpha_j, j \in P$, $\theta_k, k \in \{1, \ldots, K\}$, and β can be estimated using standard techniques in the marketing literature. We also note that in [2] it was assumed that the values y_{jk} had to be selected from a pre-defined discrete set corresponding to a discrete number of possible facility designs. This assumption is relaxed in the current model

To complete the formulation we define the facility costs: for location $j \in P$, the parameter $f_j \geq 0$ represents the fixed cost of locating a facility with basic design at j, while c_{jk} is the variable cost of improving the design characteristic k by one unit. Thus, the cost of locating a facility with design attributes $y_{j1}, \ldots, y_{jK}$ is given by $B_j = f_j + \sum_{k=1}^{K} c_{jk} y_{jk}$, where B_j is the total budget for locating a facility with the desired characteristics at location $j \in P$.

Assuming the total budget cannot exceed some maximum level B^T and the total number of new facilities cannot exceed m, the Competitive Facility Design and Location

Problem (CFDLP) we wish to solve can be stated as follows:

$$\max\{Z(S) = \sum_{i \in N} w_i V_i(U_i; S) : |S| \leq m; \sum_{j \in S} B_j \leq B^T\}. \quad (2)$$

As noted earlier, this formulation generalizes all previous spatial interaction location models, which are all known to be NP-hard; the same property holds for (CDFLP). While the (CDFLP) can be formulated as a non-linear integer program using the standard binary location variables x_j augmented with the design variables y_{jk}, the practicality of this formulation is doubtful since the demand function $V_i(U_i; S)$ is a non-linear functions of the utility vector, which, in turn, is non-linear in the design variables $\mathbf{y}$. Thus, direct solution approaches are unlikely to be successful. We thus develop an indirect approach by first focusing on the single-facility optimal design problem which arises once the decision to locate a facility at $j \in P$ has been made.

3 Single Facility Design Problem

Assume there is only one facility to be located and the location $j \in P - C$, as well as the budget $B_j > f_j$ has been specified. Then it only remains to determine the optimal values of design parameters $y_{jk}, k = 1, \ldots, K$. This problem, which is interesting in its own right, can be solved efficiently and admits a parametric solution approach that allows us to use it as a "subroutine" when solving the general (CFDLP). We briefly sketch out the solution approach here.

(1) Since each utility component u_{ij} is an increasing linear function of the attractiveness A_j. It follows that the objective function of (CFDLP) is maximized by maximizing A_j. Thus, for a fixed facility location $j \in P$ and budget $B_j \in [f_j, B^T]$ we need to find the values of $y_{jk}, k \in K$ that maximize A_j, which we call the "Single Facility Design Problem" (SFDP).

(2) This can be shown to be a non-linear knapsack problem with concave and log-separable objective function. Moreover, the relaxed problem without upper and lower bounds can be solved in closed form, which allows us to develop a variant of the "variable pegging" algorithm for concave, separable, continuous knapsack (see Birtran and Hax [6]), which solves the (SFDP) in $O(K^2)$ time.

(3) The optimal solution of (SFDP) partitions all design variables into three sets: $L = \{k : y_{jk} = 0\}, U = \{k : y_{jk} = y^{max}\}$, and $K - L - U$, all remaining variables for which closed-form formula (in terms of L, U, and B_j) is available. This, in turn, allows us to represent the optimal value of the objective function in the following form:

$$A(B_j) = \delta(B_j - \gamma)^{\sum_{k \in K-L-U} \theta_k}, \quad (3)$$

where the terms δ and γ are both available in closed form for fixed sets L, U. Observe that $A(B_j)$ is a concave function of B_j. While the sets L and U are themselves a function of the budget B_j, it can be shown that there is a discrete set of budgetary breakpoints such that L, U are invariant between any two breakpoints. These breakpoints can be computed in polynomial time. Moreover, $A(B)$ can be shown to be concave over the whole range of $B \in [f_j, B^T]$. Thus we can solve the (SFDP) in polynomial time for any potential location j and any budget B_j, with the resulting optimal attractiveness level being concave in B_j. Our methodology essentially reduces a multi-variate design problem to a univariate problem, where the only variable is the budget B_j.

4 General Multi-Facility CFDLP

The results in the previous section allow us to develop both exact and approximate solution procedures for (CFDLP). First, the concavity of the the objective function in $U_i, i \in N$ and the fact that U_i is a linear combination of concave functions $A_j(B_j)$ allows us to develop a piece-wise linear approximation of (CFDLP). This is based on the extension of the Tangent Line Approximation procedure developed in [1]. This procedure allows us to solve the original model to any desired tolerance level ϵ by solving a single linear mixed integer Program. In addition, the (SFDP) can be used as part of the greedy heuristic procedure, which is shown to have excellent performance characteristics for models of this type (see [1], [2], [4]).

To summarize, in spite of non-linearities of the original formulation, efficient exact and approximate solution procedures are developed (CFDLP) by capitalizing on the special structure of the problem. This allows us to solve realistic-size instances to optimality - see [3] for details.

REFERENCES

1. Aboolian, R., Berman, O., and D. Krass, Competitive Facility Location Model with Concave Demand, *European Journal of Operations Research*, 181(2), 2007, pp. 598–619.

2. Aboolian, R., Berman, O., and D. Krass, Competitive Facility Location and Design Problem, *European Journal of Operations Research*, 182(1), 2007, pp. 40–62.

3. Aboolian, R., Berman, O., and D. Krass, Optimizing Facility Location and Design, working paper.

4. Berman, O. and D. Krass, Locating Multiple Competitive Facilities: Spatial Interaction Models with Variable Expenditures, *Annals of Operations Research*, Vol. 111, 2002, pp. 197–225.

5. Berman, O., T. Drezner, Z. Drezner and D. Krass, Modeling Competitive Facility Location Problems: New Approaches and Results, Ch. 8 in *Tutorials in Operations Research*, ed. by M. Oskoorouchi, INFORMS, 2009, pp. 156–181.

6. Birtran, G., and Hax, A.C., Disaggregation and Resource Allocation Using Convex Knapsack Problems With Bounded Variables, *Management Science*, Vol. 27, 1981, pp. 431–441.

7. Huff, D.L., Defining and Estimating a Trade Area, *Journal of Marketing*, Vol. 28, 1964, pp. 34–38.

8. McFadden, Econometric Models for Probabilistic Choice Among Products, *Journal of Business*, Vol. 53(3:2), 1980, pp. S13–S29.

Dmitry Krass, Oded Berman, Robert Aboolian,
Rotman School of Management, University of Toronto, Canada.
E-mail: krass@rotman.utoronto.ca

О НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМАХ ДВУМЕРНОЙ УПАКОВКИ

Н.Н. Кузюрин

В докладе будут рассмотрены некоторые новые результаты для задач упаковки прямоугольников в одну или несколько полос, моделирующих процесс управления ресурсами распределенных вычислительных систем.

1. Задача упаковки в полосу (в англоязычной литературе Strip packing problem) состоит в размещении множества открытых прямоугольников внутри полубесконечной вертикальной полосы единичной ширины, при этом стороны прямоугольников должны быть параллельны сторонам полосы (вращения запрещены) и прямоугольники не должны пересекаться. Нужно минимизировать «высоту упаковки» — расстояние от основания полосы до верхней грани верхнего прямоугольника в упаковке.

Эта задача рассматривалась с 1980 г. [1,2]. Она допускает естественную интерпретацию, в которой каждый прямоугольник — вычислительная задача, ширина прямоугольника соответствует количеству процессоров необходимых для вычисления задачи, высота — времени. Частным случаем упаковки в полосу при равенстве высот всех прямоугольников является NP-трудная задача упаковки в контейнеры. Поэтому для общей задачи упаковки в полосу интерес представляют приближенные полиномиальные алгоритмы.

Особый интерес представляют «онлайновые» алгоритмы, размещающие прямоугольники в полосе по мере их поступления, без знания параметров всех последующих прямоугольников. Алгоритмы упаковки в полосу обычно оцениваются по худшему случаю (worst-case analysis) или в среднем (average-case analysis). При анализе по худшему случаю минимизируют «высоту упаковки». При анализе в среднем минимизируемой функцией является математическое ожидание незаполненной прямоугольниками площади полосы от основания полосы до верхней грани самого верхнего прямоугольника в упаковке. При этом ширины и высоты всех прямоугольников являются независимыми в совокупности равномерно распределенными на отрезке $[0, 1]$ случайными величинами.

В [2] был введен класс шельфовых алгоритмов и в этом классе предложен онлайновый алгоритм, имеющий асимптотическую мультипликативную ошибку 1.7. В [3] было доказано, что никакой шельфовый алгоритм не может иметь асимптотическую мультипликативную ошибку меньше, чем 1.69103, и построен шельфовый алгоритм, позволяющий сколь угодно близко подойти к данному значению. В [4] было показано, что никакой онлайновый алгоритм упаковки прямоугольников в одну полосу не позволяет добиться асимптотической мультипликативной ошибки меньшей, чем 1.5401. В [5] получена верхняя оценка в классе онлайновых алгоритмов 1.5889.

Известно, что математическое ожидание незаполненной площади полосы у оптимальной упаковки есть $O(\sqrt{N})$, где N — число прямоугольников. В 1993 году Коффман и Шор предложили «офлайновый» (информация о всех прямоугольниках известна заранее) алгоритм [7], для которого по порядку достигается оценка $O(\sqrt{N})$. В той же работе они предложили онлайновый алгоритм, требующий знания числа прямоугольникой заранее, с оценкой $O(N^{2/3})$ для математического ожидания незаполненной площади полосы. Этот алгоритм относится к классу так называемых шельфовых алгоритмов, активно изучавшихся ранее [2,6]. В [8] предложен онлайновый алгоритм с той же оценкой, но не требующий знания числа прямоугольников

заранее. Тем не менее вопрос о возможности улучшения оценки $O(N^{2/3})$ в классе онлайновых алгоритмов оставался открытым с 1993 г. Ранее были получены результаты о том, что в классе шельфовых алгоритмов (в котором была получена оценка Шором и Кофманом) существенно улучшить оценку качества упаковки невозможно [9].

Эта проблема была решена недавно М.А. Трушниковым [10], который предложил принципиально новый онлайновый алгоритм упаковки прямоугольников. Ему удалось преодолеть недостаток предыдущих подходов [3,5,8,9], в которых прямоугольники разбивались по группам по одному измерению (ширине или высоте) и далее для упаковки прямоугольников из группы применялись известные алгоритмы для задачи упаковки в контейнеры.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что предложенный алгоритм обеспечивает верхнюю оценку $O(\sqrt{N})$ для математического ожидания незаполненной площади полосы, что существенно лучше, чем у алгоритма Коффмана-Шора.

Удалось также доказать, что математическое ожидание незаполненной площади для предложенного алгоритма есть величина $O(\sqrt{N}(\log N)^{3/2})$.

Идея алгоритма. Введем некоторые величины.

$d = \lfloor \sqrt{N}/4 \rfloor$, $U = N/(4d) = \sqrt{N} + O(1)$, $\delta = d^{-1}$.

В основании полосы выделяется $d + 1$ горизонтальная область, каждая высоты U, причем i-я область имеет ширину δi. Таким образом, полоса разбивается на две похожие пирамиды.

Каждый четный прямоугольник будем упаковывать в одну пирамиду, каждый нечетный — в другую. Прямоугольники, из которых состоит пирамида будем называть контейнерами. Пронумеруем контейнеры внутри пирамиды числами от 1 до d так, что i-й имеет ширину $i\delta$. Прямоугольники внутри контейнеров будут упаковываться просто друг над другом: первый упаковываемый прямоугольник кладется на дно контейнера, следующий — поверх первого и так далее.

Пусть некоторое количество прямоугольников упаковано в пирамиду и следующим для упаковки в данную пирамиду приходит прямоугольник ширины w.

• Найдем такое i, что $(i-1)\delta < w \le i\delta$. Будем говорить, что этот прямоугольник назначен в i-й контейнер (тем не менее он не обязательно будет упакован именно в i-й контейнер).

• Далее ищем минимальное j такое, что $i \le j \le d$ и в j-м контейнере достаточно места, чтобы поместить туда данный прямоугольник.

• Если такое j существует — помещаем данный прямоугольник в j-й контейнер.

• Если нет — просто кладем прямоугольник сверху текущей упаковки. Такие прямоугольники, которым не нашлось места ни в одном из контейнеров, в которые они помещаются по ширине будем называть выпавшими.

Верхнюю оценку дефекта упаковки (незаполненной площади) можно получить оценив число выпавших прямоугольников. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что эта величина имеет вид $C\sqrt{N}$, где константа C равна примерно 1.5-1.6.

В наших вычислительных экспериментах число прямоугольников N принимало значения от 80000 до 2000000000. К сожалению получить такую же оценку математически пока не удалось, однако удалось получить близкую к ней, а именно, $O(\sqrt{N}(\log N)^c)$.

Сформулируем сейчас вспомогательную задачу, которая возникла в ходе анализа описанного алгоритма и положительное решение которой позволит получить жела-

емую оценку $O(\sqrt{N})$ для нашего алгоритма.

Задача. Имеется n урн (они пронумерованы), каждая из которых может вместить ровно n шаров и есть n^2 шаров. В начале процесса все урны пусты. На каждом шаге один из шаров попадает в любую урну с вероятностью n^{-1}.

• Если урна не полна (в ней меньше n шаров), шар остается в ней.

• В противном случае он перемещается в урну с номером на единицу меньше. Если она не полна шар остается в ней, иначе перемещается в урну с меньшим номером.

• Если шар попадает в урну с номером 1 и она полна, шар выпадает (не попадает ни в одну из урн).

Вопрос: *Верно ли, что математическое ожидание числа выпавших шаров есть величина* $O(n)$?

Положительный ответ на этот вопрос позволит получить желаемую оценку незаполненой площади для рассмотренного нами алгоритма вида $O(\sqrt{N})$.

Рассмотренный алгоритм интересен также тем, что допускает обобщения на случай нескольких полос (Multiple Strip Packing) и случай более общих вероятностных распределений для размеров прямоугольников.

2. В случае одной полосы фактически мы имеем дело с упаковкой параллельных вычислительных задач на одной многопроцессорной машине типа вычислительного кластера. С развитием Грид-вычислений появилась возможность управлять потоком задач распределяя их на различные группы кластеров [11]. При этом кластеры могут иметь различное число процессоров.

Далее мы рассмотрим интерпретацию распределения параллельных задач на группах кластеров в виде задачи упаковки прямоугольников (задач) в несколько полос (вообще говоря, различной ширины).

Задача упаковки прямоугольников в несколько полос заключается в следующем.

Входом является конечная последовательность открытых прямоугольников $T = \{T_1, \ldots, T_n\}$, где $h(T_j)$ и $w(T_j)$ – соответственно высота и ширина прямоугольника T_j, и $C = \{C_1, \ldots, C_m\}$ – множество полубесконечных вертикальных полос, где w_i – ширина i-й полосы.

Требуется найти ортогональное размещение последовательности прямоугольников T по этим полосам (без вращений и пересечений, стороны прямоугольников параллельны сторонам полос), минимизирующее полную высоту этого размещения, то есть максимум по всем прямоугольникам и по всем полосам расстояния от дна полосы до верхней грани прямоугольника.

Для оценки точности приближенных алгоритмов будем использовать следующие характеристики. Пусть $H_O(T, C)$ и $H_A(T, C)$ – высота оптимального размещения прямоугольников и высота размещения, полученная с помощью алгоритма A. Всюду далее мы предполагаем, что высота каждого прямоугольника не превосходит 1. Тогда мультипликативная ошибка приближенного алгоритма A определяется как

$$R_A = \sup_{T,C}\{H_A(T, C)/H_O(T, C)\},$$

а асимптотическая мультипликативная ошибка как

$$R_A^\infty = \lim_{k\to\infty} \sup_{T,C}\{H_A(T, C)/H_O(T, C) \mid H_O(T, C) \geq k\}.$$

В [12] доказано, что для любого онлайнового алгоритма A выполнено неравенство

$$R_A^\infty \geq e$$

и для произвольной константы r, такой что $0 < r < 1$ построен онлайновый алгоритм A_r такой, что

$$R_{A_r}^\infty \leq \frac{2e}{r}.$$

Некоторые улучшения этих оценок получены для частного случая, в котором все полосы имеют одинаковую ширину. Этот случай в зарубежной литературе получил название Multiple Strip Packing (MSP) [13,14,15].

Поскольку в реальности вычислительные кластеры имеют не только различное число процессоров, но и процессоры в различных кластерах могут иметь различную производительность, возникает вопрос о распределении задач по кластерам и процессорам с учетом этого фактора. В теории расписаний этот случай описывается как случай related machines, когда все процессоры имеют различную производительность. Однако, там речь идет только об однопроцессорных задачах и даже в этом случае задача построения наилучших приближенных алгоритмов далека от полного решения. В заключение мы приведем интерпретацию распределения параллельных задач на группах кластеров с различными производительностями процессоров в виде задачи упаковки прямоугольников в несколько полос. К предыдущей нашей модели для каждой полосы добавим еще число (не менее единицы каждое), которое характеризует относительную производительность процессоров в кластере, соответствующем данной полосе. Таким образом, если прямоугольник помещается в полосу с приписанным числом d, то его высота уменьшается в d раз.

Для этой модели недавно удалось обобщить результаты из [12]. Доказано, что результаты о существовании онлайнового алгоритма гарантирующего асимптотическую точность сколь угодо близкую к $2e$ справедливы и для данной модели [16].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 11-07-00610.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baker B.S., Coffman E.J., Rivest R.L. Orthogonal packings in two-dimensions// SIAM J. Computing, 1980, V. 9, P. 846–855.

2. Baker B.S., Schwarz J.S., Shelf algorithms for two dimensional packing problems// SIAM J. Computing, 1983, V. 12, P. 508–525.

3. Csirik J., Woeginger G.J. Shelf Algorithms for On-Line Strip Packing// Inf. Process. Lett., 1997, V. 63, N 4, P. 171–175.

4. Van Vliet A. An improved lower bound for on-line bin packing algorithms// Inf. Process. Lett., 1992, V. 43, P. 277–284.

5. X. Han, K. Iwama, D. Ye, G. Zhang, Strip Packing vs. Bin Packing// Algorithmic Aspects in Information and Management (AAIM), 2007, LNCS, 2009, V. 4508, P. 358–367.

6. E. G. Coffman, Jr., D. S. Johnson, P. W. Shor and G. S. Lueker. Probabilistic analysis of packing and related partitioning problems// Statistical Science, 1993, V. 8, P. 40–47.

7. E. G. Coffman, Jr., P. W. Shor. Packings in two dimensions: Asymptotic average-case analysis of algorithms// Algorithmica, 1993, V. 9, P. 253–277.

8. Н. Н. Кузюрин, А.И. Поспелов, Вероятностный анализ одного класса алгоритмов упаковки прямоугольников в полосу// Журнал вычислительной математики и математической физики, (ISSN 0044-4669), 2011, т. 51, N 10, С. 1931–1936.

9. Кузюрин Н.Н., Поспелов А.И., Вероятностный анализ шельфовых алгоритмов упаковки прямоугольников в полосу// Дискретная математика, 2006, т. 18, N 1, С. 76–90.

10. М.А. Трушников. Об одной задаче Коффмана-Шора, связанной с упаковкой прямоугольников в полосу// Труды Института системного программирования РАН, том 22, 2012 г. ISSN 2220-6426 (Online), ISSN 2079-8156 (Print), С. 456–462.

11. A. Tchernykh, J. Ramirez, A. Avetisyan, N. Kuzjurin, D. Grushin, S. Zhuk, Two level job-scheduling for a computational grid// PPAM, 2005, P. 774–781.

12. С.Н. Жук. Об-онлайн алгоритмах упаковки прямоугольников в несколько полос// Дискретная математика, т.19, 2007, N 4, С. 117–131.

13. D. Ye, X. Han, G. Zhang, Online multiple strip packing// Theor. Comp. Sci., 2011, V. 412, N 3, P. 233–239.

14. M. Bougert, P.F. Dutot, K. Jansen, C. Otte, D. Trystam, Approximation Algorithms for Multiple Strip Packing// Proc. WAOA (2009), LNCS, V. 5893, 2010, P. 37–48.

15. N. N. Kuzyurin, M.A. Trushnikov, Average case analysis of a new class of on-line algorithms for Multiple Strip Packing// European Chapter on Combinatorial Optimization (ECCO-24), University of Amsterdam, May 30-June 1.

16. С.Н. Жук. О построении расписаний выполнения параллельных задач на группах кластеров с различной производительностью// Труды Института системного программирования РАН, том 23, 2012 г. ISSN 2220–6426 (Online), ISSN 2079–8156 (Print), С. 447–454.

Кузюрин Николай Николаевич,
Институт системного программирования РАН, Москва, e-mail: nnkuz@ispras.ru

NEW VNS BASED METHOD AND APPLICATIONS

Nenad Mladenović

1 Introduction

A deterministic optimization problem may be formulated as

$$\min\{f(x)|x \in X, X \subseteq \mathcal{S}\}, \tag{1}$$

where $\mathcal{S}, X, x$ and f respectively denote the *solution space* and *feasible set*, a *feasible solution* and a real-valued *objective function*. If $\mathcal{S}$ is a finite but large set, a *combinatorial optimization* problem is defined. If $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$, we refer to *continuous optimization*. A solution $x^* \in X$ is *optimal* if $f(x^*) \leq f(x),\ \forall x \in X$. An *exact algorithm* for problem (1), if one exists, finds an optimal solution x^*, together with the proof of its optimality, or shows that there is no feasible solution, i.e., $X = \emptyset$. Moreover, in practice, the time needed to do so should be finite (and not too long).

Metaheuristics are general frameworks to build heuristics for combinatorial and global optimization problems. Variable Neighborhood Search (VNS) [8, 5, 6, 10] is a metaheuristic which systematically exploits the idea of neighborhood change, both in descent to local minima and in escape from the valleys which contain them. Let $\mathcal{N}_k$, $(k = 1, \ldots, k_{max})$, be a finite set of pre-selected neighborhood structures, and let $\mathcal{N}_k(x)$ denotes the set of solutions in the k^{th} neighborhood of x. We call $x' \in X$ a *local minimum* with respect to $\mathcal{N}_k$ (w.r.t. $\mathcal{N}_k$ for short), if there is no solution $x \in \mathcal{N}_k(x') \subseteq X$ such that $f(x) < f(x')$.

VNS heavily relies upon the following observations:

- A local minimum with respect to one neighborhood structure is not necessarily a local minimum for another neighborhood structure.
- A global minimum is a local minimum with respect to all possible neighborhood structures.
- For many problems local minima with respect to one or several neighborhoods are relatively close to each other.

In order to solve optimization problem by using several neighborhoods, facts facts from above can be used in three different ways:

1. Deterministic: Variable neighborhood descent (VND);
2. Stochastic: Reduced VNS (RVNS);
3. Combined, deterministic and stochastic: (i) Basic VNS (BVNS); (ii) Skewed VNS (SVNS); (iii) General VNS (GVNS); (iv) VN Decomposition Search (VNDS); (v) Parallel VNS (PVNS); (vi) Primal Dual VNS (P-D VNS); (vii) Reactive VNS; (viii) Backward-Forward VNS; (ix) VN Branching; (x) VN Pump and VN Diving; (xi) Continuous VNS; (xii) Exterior point VNS; (xiii) Mixed Nonlinear VNS (RECIPE), etc.

The basic schemes of VNS and its extensions are simple and require few, and sometimes no parameters. Therefore, in addition to providing very good solutions, often in simpler ways than other methods, VNS gives insight into the reasons for such a performance, which, in turn, can lead to more efficient and sophisticated implementations.

We review below the basic rules of VNS (in section 2) and some of its recent extensions. Among many new VNS variants, we selected just two. In section 3, a description of a new VNS based heuristic for continuous global optimization is given. New deterministic VND variants are briefly described in section 4.

2 Basic VNS

In this section we will give algorithm of the Basic VNS only. Description of other variants may be found in Hansen et al (2010). The *Basic VNS* (BVNS) method [8] combines deterministic and stochastic changes of neighborhood. Its steps are given in Algorithm 2.

Function VNS (x, k_{max}, t_{max});
1 **repeat**
2 | $k \leftarrow 1$;
3 | **repeat**
4 | | $x' \leftarrow$ Shake(x, k) /* Shaking */;
5 | | $x'' \leftarrow$ Local-Search(x') /* Local search */;
6 | | Neighborhood-Change(x, x'', k) // Change neighborhood
| | **until** $k = k_{max}$;
7 | $t \leftarrow$ CpuTime()
until $t > t_{max}$;

Algorithm 1: Steps of the basic VNS

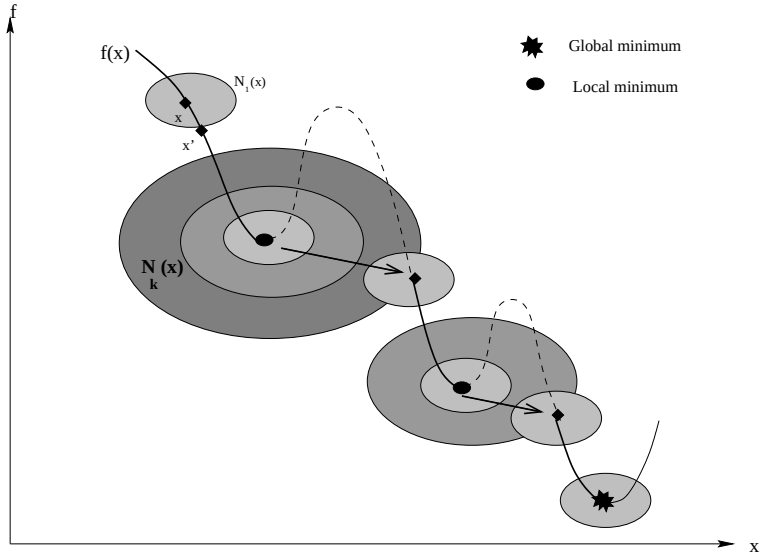


Fig.1 Basic VNS.

Often successive neighborhoods $\mathcal{N}_k$ will be nested. Observe that point x' is generated at random in Step 4 in order to avoid cycling, which might occur if a deterministic rule were applied.

3 Continuous VNS

We assume that $f : R^n \to R$ is a continuous function in (1). No further assumptions are made on f. In particular, f does not need to be convex or smooth. Several VNS based methods for solving continuous (un)constrained optimization have been proposed in the literature. Radar polyphase code design is considered in Mladenovic et al (2003) while Audet et al (2004) solve bilinear (pooling) problem; Dražić, et al (2005) suggest VNS based heuristic called `GLOB-VNS` for solving unconstrained optimization; Toskari and Guner (2007) propose VNS variants that do not use metric distances to define neighborhoods; Mladenovic et al (2008) extend their unconstrained solver `GLOB-VNS` to constrained case, using exterior penalty function method; Audet et al (2008) and Bierlaire et al (2010) hybridize VNS with Trust region methods; Carrizosa et al (2012) modify `GLOB-VNS`, by so called Gaussian VNS (`Gauss-VNS`), whose steps are given below.

	`Algorithm Gauss-VNS`
	/* *Initialization* */
01	Select the set of covariance matrices Σ_k, $k = 1, \ldots, k_{\max}$
02	Choose an arbitrary initial point $x \in S$
03	Set $x^* \leftarrow x$, $f^* \leftarrow f(x)$
	/* *Main loop* */
04	**repeat** the following steps **until** the stopping condition is met
05	Set $k \leftarrow 1$
06	**repeat** the following steps **until** $k > k_{\max}$
07	*Shake:* Generate y from a Gaussian distribution with mean x^* and covariance matrix Σ_k
08	Apply some *local search* method from y to obtain a local minimum y'
09	**if** $f(y') < f^*$ **then**
10	Set $x^* \leftarrow y'$, $f^* \leftarrow f(y')$ and **goto** line 05
11	**endif**
12	Set $k \leftarrow k + 1$
13	**end**
14	**end**
15	**Stop**. Point x^* is an approximate solution of the problem.

We generalize the paradigm of neighborhoods so that problems with unbounded domains can be addressed. The idea is to replace the class $\{\mathcal{N}_k(x)\}_{1 \le k \le k_{\max}}$ of neighborhoods of point x by a class of *probability distributions* $\{\mathcal{P}_k(x)\}_{1 \le k \le k_{\max}}$. The next random point in the shaking step is generated using the probability distribution $\mathcal{P}_k(x)$. Comparison between `GLOB` and `Gauss VNS` are given in Table 1 on Ackley test function with different value of n. For both heuristics, the steepest descent (SD) local search is used. All test instances are solved, but with different computational efforts (the number of function evaluations before known global optimum is reached). It appears that `Gauss-VNS` used considerable smaller efforts.

function	n	local minim.	$k_{\max}$	Computer effort Glob-VNS	Computer effort Gauss-VNS	% deviation
AC10	10	SD	10	188670	**50149**	276.22%
AC20	20	SD	10	433194	**158412**	173.46%
AC30	30	SD	10	909918	**304825**	198.51%
AC40	40	SD	10	1577138	**528718**	198.30%
AC50	50	SD	10	4791075	**1143721**	318.90%
AC60	60	SD	10	7820247	**2315178**	237.78%
AC70	70	SD	10	36641634	**4255533**	761.04%
AC80	80	SD	10	212944367	**17180658**	1139.44%
					Average	412.96%

Table 1. Comparison of `Glob-VNS` and `Gauss-VNS` on Ackley function

4 New neighborhoods within VND

Sequential VND. The usual way of using different neighborhoods within deterministic VNS is sequential. Neighborhoods to be used in VND local search are ordered in a sequence and used one after another, as presented in Algorithm 2 below.

Function `Seq-VND`(x, ℓ_{max});
$\ell \leftarrow 1$ `// Neighborhood counter;`
repeat
  $i \leftarrow 0$ `// Neighbor counter` **repeat**
    $i \leftarrow i + 1$;
    $x' \leftarrow arg\min\{f(x), f(x_i)\}$, $x_i \in N_\ell(x)$ `// Compare`
  until $(f(x') < f(x)$ `or` $i = |N_\ell(x)|)$;
  $\ell, x \leftarrow$ `NeighborhoodChange` (x, x', ℓ); `// Neighborhood change`
until $\ell = \ell_{max}$;

Algorithm 2: Sequential Variable Neighborhood Descent

The final solution of `Seq-VND` should be a local minimum with respect to all ℓ_{max} neighborhoods. Clearly, the chances to reach a global minimum are larger than using a single neighborhood structure. The total size of `Seq-VND` is equal to the union of all neighborhoods used. Then the following statement is obvious.

Proposition 1 *Sequential neighborhood cardinality satisfies*

$$|\mathcal{N}_{\texttt{Seq-VND}}(x)| \leq \sum_{\ell=1}^{\ell_{max}} |\mathcal{N}_\ell(x)|,\ x \in X,$$

where equality holds if all ℓ_{max} neighborhoods are disjoint (no common element in any two).

Nested VND. Assume that we define two neighborhood structures ($\ell_{max} = 2$). In the nested VND we in fact perform local search with respect to the first neighborhood in any point of the second. Its steps are given in Algorithm 3.

The cardinality of neighborhood obtained with the nested VND is product of cardinalities of neighborhoods included, i.e.,

Function `Nest-VND` (x, x', k)
Make an order of all $\ell_{max} \geq 2$ neighborhoods that will be used in the search
Find an initial solution x; let $x_{opt} = x$, $f_{opt} = f(x)$
Set $\ell = \ell_{max}$
repeat
  if all solutions from ℓ neighborhood are visited **then** $\ell = \ell + 1$;
  if any non visited solution $x_\ell \in N_\ell(x)$ exists and $\ell \geq 2$ **then** $x_{cur} = x_\ell$, $\ell = \ell - 1$;
  if $\ell = 1$ **then**
    Find objective function value $f = f(x_{cur})$;
    if $f < f_{opt}$ **then** $x_{opt} = x_{cur}$, $f_{opt} = f_{cur}$;
  end
until $\ell = \ell_{max} + 1$ (i.e., until there is no more points in the last neighborhood);

Algorithm 3: Nested Variable Neighborhood Descent

Proposition 2 *The cardinality of the nested neighborhood satisfies the following*

$$|\mathcal{N}_{\texttt{Nest-VND}}(x)| \leq \prod_{\ell=1}^{\ell_{max}} |\mathcal{N}_\ell(x)|,\ x \in X.$$

Obviously, `Nest-VND` neighborhood size is much larger than the sequential. However, the number of local minima w.r.t. `Nest-VND` will be much smaller than the number of local minima w.r.t. `Seq-VND`.

Mixed nested VND. After exploring b (a parameter) neighborhoods, we switch from a nested to a sequential strategy. We can interrupt nesting at some level b ($1 \leq b \leq \ell_{max}$) and continue with the list of the remaining neighborhoods in sequential manner. If $b = 1$, we get `Seq-VND`. If $b = \ell_{max}$ we get `Nest-VND`. The pseudo-code of `Mix-VND` is given in Algorithm 4.

Function `Mix-VND` (x, ℓ_{max}, b);
Make an order of all the $\ell_{max} \geq 2$ neighborhoods that will be used in the search;
Find an initial solution x; let $x_{opt} = x$, $f_{opt} = f(x)$;
Set $\ell = \ell_{max}$;
repeat
  if all solutions from neighborhood ℓ are visited **then** $\ell = \ell + 1$;
  if there is any non visited solution $x_\ell \in N_\ell(x)$ **then** $x_{cur} = x_\ell$, $\ell = \ell - 1$;
  if $\ell = \ell_{max} - b$ **then**
    $x' = \texttt{Seq} - \texttt{VND}(x_{cur}, \ell_{max} - b)$;
    Find objective function value $f' = f(x')$;
    if $f' < f_{opt}$ **then** $x_{opt} = x'$, $f_{opt} = f$;
    $\ell = \ell + 1$;
  end
until $\ell = \ell_{max} + 1$ (i.e., until there are no more points in the last neighborhood);

Algorithm 4: Mixed Variable Neighborhood Descent

Since Nested VND intensifies the search in a deterministic way, **boost parameter** b may be seen as a balance between intensification and diversification in deterministic local search with several neighborhoods.

Proposition 3 *The cardinality of mixed nested neighborhood of x, with boost parameter b satisfies*

$$|\mathcal{N}_{\texttt{Mix-VND}}(x)| \leq \sum_{\ell=b}^{\ell_{max}} |\mathcal{N}_\ell(x)| \times \prod_{\ell=1}^{b-1} |\mathcal{N}_\ell(x)|,\ x \in X.$$

Comparison between `Seq-VND` and `Mix-VND` is performed on Pick-up and delivery travelling salesman problem [11]. Sequential and Mixed VND consist of 3 neighborhoods: forward insertion; backward insertion and 2-opt. `Seq-VND-3` uses 3-opt as well. It appears that `Mix-VND` provides solution with much smaller % deviation from the best known, but use considerable more cpu times.

n	Q	Local Search	Min. % dev	Max. % dev	Avg. % dev	Avg. time
200	10	forward-insertion	95.650	255.517	181.195	0.088
		backward-insertion	94.753	252.827	186.318	0.081
		2–opt	13.882	242.910	32.433	0.138
		Seq–VND	12.275	242.910	27.808	0.163
		Seq–VND–3	8.991	242.910	24.309	0.478
		Mix–VND	1.269	242.910	12.958	2.989

Table 2. Pick-up and delivery TSP: % deviation from best known solutions of different local searches (10 runs): n - number of clients; Q - vehicle capacity

REFERENCES

[1] Audet, C., Báchard, V., Le, Digabel, S. (2008) Nonsmooth optimization through mesh adaptive direct search and variable neighborhood search *Journal of Global Optimization* 41(2) 299-318

[2] Audet, C., Brimberg, J., Hansen, P., Mladenović, N. (2004) Pooling problem: alternate formulation and solution methods, *Management Science* 50:761–776

[3] Bierlaire, M., Thῑmans, M., and Zufferey, N. (2010). A heuristic for nonlinear global optimization, INFORMS Journal of Computing 22(1):59-70.

[4] Dražić, M., Kovacevic-Vujcić, V., Cangalović, M., Mladenović, N. (2006) GLOB - A new VNS-based software for global optimization In: *Global Optimization: from Theory to Implementation*, Liberti L., Maculan N. (eds), Springer. pp. 135-144

[5] Hansen, P., Mladenović, N., Moreno, Pérez, J.A. (2008) Variable neighborhood search *European Journal of Operational Research* 191 (3): 593-595.

[6] Hansen, P., Mldenović, N., Moreno-Pérez, J.A. (2010). Variable neighbourhood search: methods and applications. *Annals of OR* 175: 367-407.

[7] Mladenović, N., Dražić, M., Kovačevic-Vujčić, V., Čangalović, M. (2008) General variable neighborhood search for the continuous optimization *European Journal of Operational Research* 191 (3): 753-770.

[8] Mladenović, N., Hansen, P. (1997) Variable neighborhood search. *Computers and Operations Research* 24:1097–1100

[9] Mladenović, N., Petrović, J., Kovačević-Vujčić, V., Čangalović, M. (2003) Solving spread spectrum radar polyphase code design problem by tabu search and variable neighborhood search. *European Journal of Operational Research* 151:389–399

[10] Mladenovic N., Todosijevic R. and Urosevic D. An efficient General variable neighborhood search for large TSP problem with time windows, Yugoslav Journal of Operations Research 22 (2012), 141–151.

[11] Mladenovic N., Urosevic D., Hanafi S., Ilic A. (2012) A General variable neighborhood search for the One-commodity pickup-and-delivery travelling salesman problem, *European Journal of Operational Research* 220: 270-285.

[12] Toksari, A.D., Güner, E. (2007) Solving the unconstrained optimization problem by a variable neighborhood search. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 328(2):1178–1187

Nenad Mladenović, School of Mathematics, Brunel University, London, UK
e-mail: Nenad.Mladenovic@brunel.ac.uk

CLIQUES AND QUASI-CLIQUES IN LARGE GRAPHS: THEORY AND APPLICATIONS

P. M. Pardalos, M. Batsyn, E. Maslov

Abstract

In this talk we are going to present recent advances in algorithmic developments for finding maximum cliques or quasi-cliques in graphs. In addition, we are going to present some computational results with a new algorithm described by the authors.

1 Introduction

The maximum clique problem refers to the problem of finding a clique (a complete subgraph) with the largest number of vertices in a given simple graph. It has several applications, because many practical problems can be formulated in terms of the maximum clique problem (Bomze et al., 1999 [6]). Biochemistry and genomic problems represented by a clique-detection model include integration of genome mapping data, nonoverlapping local alignments, matching and comparing molecular structures, and protein docking (Butenko & Wilhelm, 2006 [8]). Another problem is to find a binary code as large as possible which can correct a certain number of errors for a given size of the binary words (Du & Pardalos, 1999 [10]). Another application is analyzing cliques in a stock market graph (Boginski et al., 2003 [5]).

A well-known algorithm for enumerating all cliques in a graph is the algorithm of Bron & Kerbosch (1973) [7]. It finds all maximal cliques (cliques which cannot be further enlarged by adding any vertex) in an arbitrary graph. One of the first efficient Branch-and-Bound algorithms is the algorithm developed by Carraghan & Pardalos (1990) [9]. Its main idea is using a bound strategy and prune branches in case when future expanding will not lead to a clique with size bigger than the currently best found clique. The algorithm proposed by Fahle (2002) [11] applies a more efficient bounding strategy. The idea is to use the chromatic number as an upper bound on the size of the maximum clique. The MCQ algorithm developed by Tomita & Seki (2003) [25] uses the idea of graph colouring not only as a bounding strategy but also as a branching strategy. Vertices are sorted in a non-increasing degree order before colouring. The candidate vertex which is coloured in the biggest colour (colour with the biggest number) is considered first.

The MCR algorithm by Tomita & Kameda (2007) [24] and MCS algorithm by Tomita et al. (2010) [26] are further improvements of MCQ. In MCR vertices are sorted as it is suggested by Carraghan & Pardalos (1990) [9]. In MCS algorithm a new routine is added which tries to recolour a vertex with the biggest colour into a smaller one. Another recent algorithm developed by Li & Quan (2010a) [20] and its improved version (Li & Quan, 2010b [19]) applies a Max-Sat based upper bound which is tighter than the colouring based one. According to the published results for DIMACS graphs the MCS algorithm and the Max-Sat based algorithms report the best performance among the existing exact methods.

Since the maximum clique problem is NP-complete, there exists a number of heuristic approaches: greedy heuristics (Kopf & Ruhe, 1987 [18]), genetic algorithms (Marchiori (2002) [21], Singh & Gupta (2006) [23]), simulated annealing (Jerrum, 1992 [17]), neural

networks (Bertoni et al. (1997) [4], Funabiki et al. (1992) [13]), GRASP (Feo & Resende, 1995 [12]), tabu search (Glover & Laguna, 1997 [15]). However, in practice, the most successful heuristic algorithms are local search heuristics: dynamic local search (DLS) by Pullan & Hoos (2006) [22], improved DLS by Grosso et al. (2008) [16], iterated local search (ILS) by Andrade et al. (2012) [2].

2 Maximum Clique Problem

In this paper we use some definitions given below. A simple graph G is denoted as $G = (V, E)$, where $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ is the set of vertices, $E \subseteq V \times V$ is a set of edges. An adjacency matrix $A = (a_{ij})$ represents graph $G = (V, E)$, where $\forall i, j \in V$ $a_{i,j} = 1$ if $(i, j) \in E$ and $a_{i,j} = 0$ if $(i, j) \notin E$. A complementary graph for graph $G(V, E)$ is the graph $\overline{G}(V, \overline{E})$, where $\overline{E} = (V \times V) \setminus E$. A clique is a subset of vertices $C \subset V$ of graph $G(V, E)$ such that all vertices in this subset are pairwise adjacent. An independent set is a subset of vertices $S \subset V$ of graph $G(V, E)$ such that all vertices in this subset are pairwise non-adjacent. A vertex cover is a subset of vertices $S \subset V$ such that every edge $(i, j) \in E$ has at least one endpoint in S.

The maximum clique problem (MCP) refers to the problem of finding a clique with the maximum number of vertices in a given graph. MCP has a number of mathematical programming formulations. One of them is as follows:

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \mid x_i + x_j \leq 1, \forall (i, j) \in \overline{E},\ x_i \in \{0, 1\}, i = 1, ..., n \right\}.$$

Here $x_i = 1$ if vertex i is in the maximum clique C and $x_i = 0$ if $i \notin C$. In addition to several discrete formulations many continuous global optimization formulations have been introduced for the MCP (see Gibbons et al., 1996 [14]).

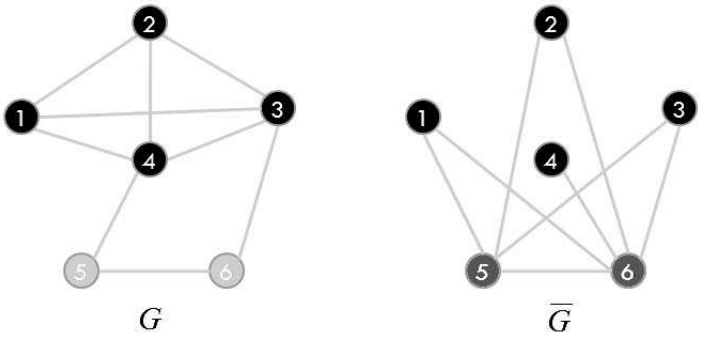


Fig. 1. Max clique, max independent set, and min vertex cover

The maximum independent set problem (MISP) refers to the problem of finding an independent set with the maximum number of vertices in a given graph. The minimum vertex cover problem (MVCP) asks for a vertex cover of minimum cardinality in a given graph. MCP, MISP, and MVCP problems are equivalent because a clique in a graph is an independent set in its complementary graph and vice versa. And if S is an independent set in a graph $G(V, E)$ then $V \setminus S$ is a vertex cover in this graph. In figure 1 the maximum clique

Benchmark	ILS	Our algorithm	MCS
brock800_1	167	6482	6337
brock800_2	164	5886	5737
brock800_3	166	3994	3830
brock800_4	166	3009	2849
gen400_p0.9_55	4320	5133	39015
gen400_p0.9_65	8	25	77620
gen400_p0.9_75	7	8	110579
keller5	96	78957	78875
p_hat1000–2	172	360	272
p_hat1000–3	54185	214611	> 1000000
p_hat1500–2	346	10231	11859
p_hat700–3	44	1303	1529

Table 1. Running time

of graph G is $\{1, 2, 3, 4\}$ and it is the maximum independent set of its complementary graph $\overline{G}$. And the remaining vertices $\{5, 6\}$ form the minimum vertex cover of graph $\overline{G}$.

In some applications, instead of a clique, one is interested in a dense subgraph. We can generalize the definition of cliques by the concept of quasi-cliques. A quasi-clique C_γ is a subset of V such that $G(C_\gamma)$ has at least $\lfloor \gamma \frac{q(q-1)}{2} \rfloor$ edges; where q=$|(C_\gamma)|$. One can define several optimization problems for quasi-cliques, e.g. find $\max \gamma q$; fix q and find $\max \gamma$; or fix γ and find $\max q$.

The graphs we have to deal with in some applications are very massive. Examples are the WWW graph and the call graph. In the call graph, the vertices are telephone numbers, and two vertices are connected by an edge if a call was made from one number to another. A call graph was constructed with data from AT&T telephone billing records. Based on one 20-day period it had 290 million vertices and 4 billion edges. The analyzed one-day call graph had 53,767,087 vertices and over 170 millions of edges. (see [1]).

3 Computation Results

Our algorithm (Batsyn et al., 2013 [3]) demonstrates good performance on hard DIMACS instances which need more than 10 minutes to be solved. The comparison of the computational time for our algorithm and MCS algorithm is given in table 3. The best results are obtained for *gen400_p0.9_75* (our algorithm is 13000 times faster for it), *gen400_p0.9_65* (3000 times faster), *gen400_p0.9_55* (7 times faster), and *p_hat1000-3* graphs. MCS algorithm is unable to solve *p_hat1000-3* instance (at least in 10 days) while our algorithm solves it in 3 days. The total time of solving all the considered DIMACS instances is reduced by 75%.

4 Acknowledgments

The authors are supported by LATNA Laboratory, National Research University Higher School of Economics (NRU HSE), Russian Federation government grant, ag. 11.G34.31.0057.

REFERENCES

[1] Abello, J., Pardalos, P., Resende, M.: On Very Large Maximum Clique Problems In: External Memory Algorithms, (Abello J. and Vitter J., Editors), AMS-DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol. 50, pp. 119–130 (1999).

[2] Andrade, D.V., Resende, M.G.C., Werneck, R.F.: Fast local search for the maximum independent set problem. Journal of Heuristics **18**(4), 525–547 (2012).

[3] Batsyn, M., Goldengorin, B., Maslov E., Pardalos, P.M.: Improvements to MCS algorithm for the maximum clique problem. In: Journal of Combinatorial Optimization (2013).

[4] Bertoni, A., Campadelli, P., Grossi, G.: A discrete neural algorithm for the maximum clique problem: Analysis and circuit implementation. In: Proceedings of Workshop on Algorithm Engineering, WAE'97, pp. 84–91 (1997)

[5] Boginski, V., Butenko, S., Pardalos, P.M. On Structural Properties of the Market Graph. A. Nagurney (editor) Innovations in Financial and Economic Networks. Edward Elgar Publishing (2003), pp. 29–45.

[6] Bomze, I., Budinich, M., Pardalos P.M., Pelillo, M. The maximum clique problem. Handbook of Combinatorial Optimization, Kluwer Academic Publishers (1999), pp. 1–75.

[7] Bron, C., Kerbosch, J.: Algorithm 457: finding all cliques of an undirected graph. Commun. ACM **16**(9), 575–577 (1973).

[8] Butenko, S., Wilhelm, W.E.: Clique-detection models in computational biochemistry and genomics. European Journal Of Operational Research **173**(1), 1–17 (2006).

[9] Carraghan, R., Pardalos, P.M.: An exact algorithm for the maximum clique problem. Operations Research Letters **9**(6), 375–382 (1990).

[10] Du, D., Pardalos, P.M.: Handbook of Combinatorial Optimization, Supplement, vol. A. Springer (1999)

[11] Fahle, T.: Simple and fast: Improving a Branch-And-Bound algorithm for maximum clique. In: Proceedings of the 10th Annual European Symposium on Algorithms, ESA '02, pp. 485–498. Springer-Verlag, London, UK (2002)

[12] Feo, T.A., Resende, M.G.C.: Greedy randomized adaptive search procedures. Journal of Global Optimization **6**(2), 109–133 (1995).

[13] Funabiki, N., Takefuji, Y., Lee, K.C.: A neural network model for finding a near-maximum clique. Journal of Parallel and Distributed Computing **14**(3), 340–344 (1992).

[14] Gibbons, L.E., D.W., Pardalos, P.M., Ramana, M.V.: Computers and Intractability: Continuous Characterizations of the Maximum Clique Problem, vol. 22. Math. Oper. Res, 754–768 (1996)

[15] Glover, F., Laguna, M.: Tabu search. Kluwer Academic Publishers (1997)

[16] Grosso, A., Locatelli, M., Pullan, W.: Simple ingredients leading to very efficient heuristics for the maximum clique problem. Journal of Heuristics **14**(6), 587–612 (2008).

[17] Jerrum, M.: Large cliques elude the metropolis process. Random Structures & Algorithms **3**(4), 347–359 (1992).

[18] Kopf, R., Ruhe, G.: A computational study of the weighted independent set problem for general graphs. Foundations of Control Engineering **12** (1987)

[19] Li, C.M., Quan, Z.: Combining graph structure exploitation and propositional reasoning for the maximum clique problem. In: Proceedings of the 2010 22nd IEEE International Conference on Tools with Artificial Intelligence - Volume 01, ICTAI'10, pp. 344–351. IEEE, Arras, France (2010)

[20] Li, C.M., Quan, Z.: An efficient branch-and-bound algorithm based on maxsat for the maximum clique problem. In: Proceedings of the Twenty-Fourth AAAI Conference on Artificial Intelligence, AAAI-10, pp. 128–133. AAAI Press, Atlanta, USA (2010)

[21] Marchiori, E.: Genetic, iterated and multistart local search for the maximum clique problem. In: Applications of Evolutionary Computing, Springer, LNCS, pp. 112–121. Springer-Verlag (2002)

[22] Pullan, W., Hoos, H.H.: Dynamic local search for the maximum clique problem. J. Artif. Int. Res. **25**(1), 159–185 (2006)

[23] Singh, A., Gupta, A.K.: A hybrid heuristic for the maximum clique problem. Journal of Heuristics **12**(1-2), 5–22 (2006).

[24] Tomita, E., Kameda, T.: An efficient branch-and-bound algorithm for finding a maximum clique with computational experiments. Journal of Global Optimization **37**(1), 95–111 (2007)

[25] Tomita, E., Seki, T.: An efficient branch-and-bound algorithm for finding a maximum clique. In: Proceedings of the 4th international conference on Discrete mathematics and theoretical computer science, DMTCS'03, pp. 278–289. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2003)

[26] Tomita, E., Sutani, Y., Higashi, T., Takahashi, S., Wakatsuki, M.: A simple and faster branch-and-bound algorithm for finding a maximum clique. In: Proceedings of the 4th international conference on Algorithms and Computation, WALCOM'10, pp. 191–203. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2010)

Pardalos Panos M., National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia, University of Florida, Gainesville, U.S.A.
e-mail: p.m.pardalos@gmail.com
Batsyn Mikhail, Maslov Evgeny, National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia.

NEW APPROXIMATION ALGORITHMS FOR THE MINIMUM SET COVER AND OTHER COVERING PROBLEMS

Maxim Sviridenko[1]

1 Introduction

We consider the classical minimum set cover problem. We are given the ground set $\{1, \ldots, n\} = [n]$ and m subsets $S_j \subseteq [n]$ for $j = 1, \ldots, m$. Each set S_j has an associated non-negative weight w_j. The goal is to choose a collection of sets indexed by $\mathcal{C} \subseteq \{1, \ldots, m\} = [m]$ such that $[n] = \cup_{j \in \mathcal{C}} S_j$ and minimize $\sum_{j \in \mathcal{C}} w_j$.

There are two additional parameters associated with the problem. Let $\Delta = \max_{j \in [m]} |S_j|$ be the maximal cardinality of a set in the instance. For each element $i \in [n]$, let $k_i = |\{S_j : i \in S_j, j \in [m]\}|$ be the number of sets in the instance containing the element $i \in [n]$ and let $k = \max_{i \in [n]} k_i$.

There are two types of classical approximation algorithms for the minimum set cover problem. The natural greedy algorithm has performance guarantee $\ln \Delta + 1$ [19, 11, 5]. Another well-known type of algorithms has performance guarantee k [4, 9]. Both performance guarantees are essentially the best possible under natural complexity assumptions [7, 6, 16]. Nevertheless, if one defines the performance ratio $\rho(k)$ as a function of parameter k the classical approximation algorithms provide us with performance guarantee $\rho(k) = \min\{k, \ln \Delta + 1\}$ (see Figure 1). The function $\rho(k)$ is not smooth at the point $k = \ln \Delta + 1$, which indicates that performance guarantee of classical algorithms is not best possible, at least in regime when $k \approx \ln \Delta + 1$.

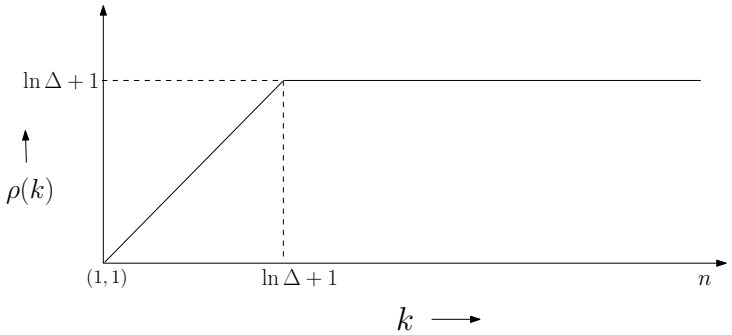


Fig. 1. Approximation Factor by Classical Algorithms.

In this paper we study the relationship between the approximation factor for Set-Cover in terms of k and Δ. We prove the following results.

Our Results

Approximation Algorithm. In this paper we design a simple LP rounding based approximation algorithm with performance guarantee $(k-1)(1-e^{-\frac{\ln \Delta}{k-1}})+1$ which matches the performance guarantee of known (and best possible) approximation algorithms when

[1]This research was supported by EPSRC grant EP/J021814/1, FP7 Marie Curie Career Integration Grant and Royal Society Wolfson Research Merit Award.

$k << \ln\Delta$ or $k >> \ln\Delta$. In particular, when $k = \ln\Delta + 1$, our algorithm has performance guarantee $(1 - e^{-1})\ln\Delta + 1$. For a comparison of the performance of our algorithm with $\rho(k)$, refer to Figure 2.

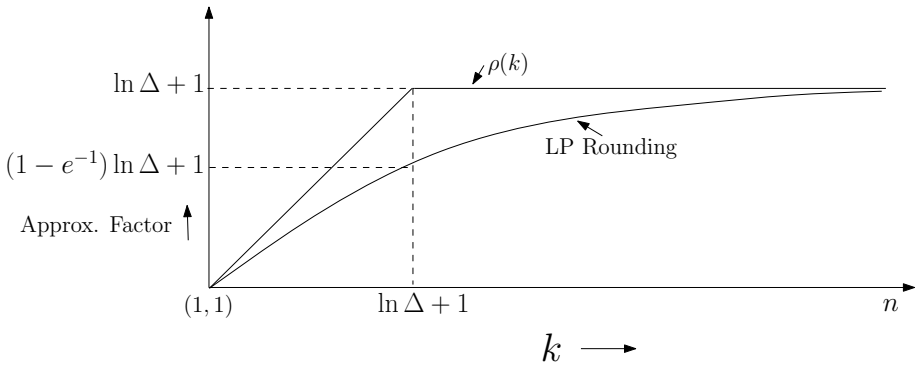


Fig. 2. Comparison of $\rho(k)$ with the LP Rounding Approximation for growing parameter Δ.

Previous results in this direction are due to Krivelevich [18] and Okun [21]. Using our notations Krivelevich [18] designed an approximation algorithm with performance guarantee $\max\{k-1, (k-1)(1-e^{-\frac{\ln\Delta}{k-1}})+1\}$ for the case when all subsets have cardinality Δ and all elements of the ground set belong to exactly k sets. Okun [21] designed an approximation algorithm that works in the regime when $(1 - e^{-1})k \leq \ln\Delta$ with performance guarantee smaller than k but strictly worse than ours.

Integrality Gap. For the interesting regime where $k = \theta(\log\Delta)$ we show an LP integrality gap of $k(1 - e^{-\frac{\ln\Delta}{k}} - \delta)$ for any constant $\delta > 0$, essentially matching our LP rounding upper bound.

Hardness of Approximation. In this work we obtain a lower bound of $\Omega\left(\frac{\log\Delta}{(\log\log\Delta)^2}\right)$ when $k = \theta(\log\Delta)$, where Δ is a polynomial in n. In previous work, Feige [7] had shown that in the regime where $k = \Omega(\Delta^\gamma)$ for some constant $\gamma > 0$, it is hard to approximate Set-Cover to within a factor of $(1 - \varepsilon)\ln\Delta$. As mentioned before, this essentially matches the $\ln\Delta + 1$ greedy algorithm. A slightly weaker lower bound of $\Omega(\log\Delta)$ was obtained by Lund and Yannakakis [20] for $k = \Omega((\log\Delta)^c)$, where $c > 1$ is a large constant, and for $k = 2^{\log^{1-\varepsilon}\Delta}$ by Raz and Safra [22] and by Alon, Moshkovitz and Safra [1]. On the other hand, for small values of k the known hardness factors are linear in k. For constant k, assuming the Unique Games Conjecture [13] it is NP-hard to approximate within a factor of $k - \varepsilon$ [16, 3]. In [6] it was shown that for superconstant $k = O((\log\log\Delta)^{1/c})$ the hardness factor is $k - 1 - \varepsilon$, and for $k = O((\log\Delta)^{1/c})$ it is $k/2 - \varepsilon$. In all these hardness reductions (except for that of [16, 3]) Δ is a polynomial in the size of the ground set n. It should be noted that these hardness results did not explicitly state the dependence between k, Δ and n, and these relations can be inferred from the respective hardness reductions.

However, the interesting case when $k = \theta(\log\Delta)$ remained unexplored till the work of Khot and Saket [17] who studied the problem of minimizing the size of DNF expression of a boolean function given its truth table. In their work [17], they implicitly obtain a hardness factor (for $k = \theta(\log\Delta)$, Δ polynomial in n) of $\Omega(\log^{1-\varepsilon}\Delta)$ although [17] do not explicitly mention this in their work.

Our stronger lower bound of $\Omega\left(\frac{\log\Delta}{(\log\log\Delta)^2}\right)$ is obtained by revisiting the Probabilistically Checkable Proof (PCP) construction of [17] using different parameters while avoiding some of the complications of their reduction. This still leaves open the possibility that when $k = \ln\Delta+1$, our approximation of $(1-e^{-1})\ln\Delta+1$ may not be optimal. Conversely, it may be possible to improve the hardness factor to match the algorithmic bound. The hardness result of this paper along with previous ones for various regimes of k are summarized in Figure 3.

Range of k	Hardness Factor	Complexity Assumption	Reference
k: arbitrarily large const.	$k-\varepsilon$	Unique Games Conj. [13]	[16, 3]
$k \le O((\log\log\Delta)^{1/c})$	$k-1-\varepsilon$	NP$\not\subseteq$ DTIME($n^{O(\log\log n)}$)	[6]
$k \le O((\log\Delta)^{1/c})$	$k/2-\varepsilon$	NP$\not\subseteq$ DTIME($n^{O(\log\log n)}$)	[6]
$k = \theta(\log\Delta)$	$\Omega(\log^{1-\varepsilon}\Delta)$	NP$\not\subseteq$ DTIME($n^{\mathrm{poly}(\log n)}$)	Implicit in [17]
$k = \theta(\log\Delta)$	$\Omega\left(\frac{\log\Delta}{(\log\log\Delta)^2}\right)$	NP$\not\subseteq$ DTIME($n^{\mathrm{poly}(\log n)}$)	This work.
$k = \Omega((\log\Delta)^c)$	$\Omega(\log\Delta)$	NP$\not\subseteq$ DTIME($n^{O(\log\log n)}$)	[20, 14]
$k = \Omega(2^{\log^{1-\varepsilon}\Delta})$	$\Omega(\log\Delta)$	P $\neq$ NP	[22, 1]
$k = \Omega(\Delta^\gamma)$	$(1-\varepsilon)\ln\Delta$	NP$\not\subseteq$ DTIME($n^{O(\log\log n)}$)	[7]

Fig. 3. Summary of known NP-hardness factors for Set-Cover with different ranges of k.

REFERENCES

[1] N. Alon, D. Moshkovitz and M. Safra, Algorithmic construction of sets for k-restrictions. The ACM Transactions on Algorithms 2(2) (2006), pp. 153-177.

[2] P. Austrin and E. Mossel, Approximation Resistant Predicates from Pairwise Independence. Computational Complexity 18 (2009), no. 2, pp. 249-271.

[3] N. Bansal and S. Khot, Inapproximability of hypergraph vertex cover and applications to scheduling problems. In Proc. ICALP (2010), pp. 250-261.

[4] R. Bar-Yehuda and S. Even, A linear-time approximation algorithm for the weighted vertex cover problem. J. Algorithms 2 (1981), no. 2, pp. 198-203.

[5] V. Chvatal, A greedy heuristic for the set-covering problem. Math. Oper. Res. 4 (1979), no. 3, pp. 233-235.

[6] I. Dinur, V. Guruswami, S. Khot and O. Regev, A new multilayered PCP and the hardness of hypergraph vertex cover. SIAM J. Comput. 34 (2005), no. 5, pp. 1129-1146.

[7] U. Feige, A threshold of $\ln n$ for approximating set cover. J. ACM 45 (1998), no. 4, pp. 634-652.

[8] V. Guruswami and P. Raghavendra, Constraint Satisfaction over a Non-Boolean Domain: Approximation Algorithms and Unique-Games Hardness. In Proc. APPROX-RANDOM (2008), pp. 77-90.

[9] D. Hochbaum, Approximation algorithms for the set covering and vertex cover problems. SIAM J. Comput. 11 (1982), no. 3, pp. 555-556.

[10] J. Holmerin, Improved Inapproximability Results for Vertex Cover on k-Uniform Hypergraphs. In Proc. ICALP (2002), pp. 1005-1016.

[11] D. Johnson, Approximation algorithms for combinatorial problems. J. Comput. Syst. Sci. 9 (1974), pp. 256-278.

[12] S. Khot. Improved inaproximability results for maxclique, chromatic number and approximate graph coloring. In Proc. FOCS (2001), pp. 600-609.

[13] S. Khot, On the power of unique 2-prover 1-round games. In Proc. STOC (2002), pp. 767-775.

[14] S. Khot, Online lecture notes for Probabilistically Checkable Proofs and Hardness of Approximation, Lecture 3 (scribed by Deeparnab Chakrabarty), available at www.cs.nyu.edu/ khot/pcp-lecnotes/lec3.ps.

[15] S. Khot and A. Ponnuswami, Better Inapproximability Results for MaxClique, Chromatic Number and Min-3Lin-Deletion. In Proc. ICALP (2006), pp. 226-237.

[16] S. Khot and O. Regev, Vertex cover might be hard to approximate to within $2-\varepsilon$. J. Comput. System Sci. 74 (2008), no. 3, pp. 335-349.

[17] S. Khot and R. Saket, Hardness of Minimizing and Learning DNF Expressions. In Proc. FOCS (2008), pp. 231-240.

[18] M. Krivelevich, Approximate set covering in uniform hypergraphs. J. Algorithms 25 (1997), no. 1, pp. 118-143.

[19] L. Lovasz, On the ratio of the optimal integral and fractional covers. Disc. Math. 13 (1975), pp. 383—390.

[20] C. Lund and M. Yannakakis, On the hardness of approximating minimization problems. J. ACM 31 (1994), no. 5, pp. 960-981.

[21] M. Okun, On the approximation of the vertex cover problem in hypergraphs. Discrete Optimization 2 (2005), no. 1, pp. 101-111.

[22] R. Raz and M. Safra, A sub-constant error-probability low-degree test, and a sub-constant error-probability PCP characterization of NP. In Proc. STOC (2007), pp. 475-484.

[23] A. Samorodnitsky and L. Trevisan, A PCP characterization of NP with optimal amortized query complexity. In Proc. STOC (2000), pp. 191-199.

Maxim Sviridenko, University of Warwick, Coventry, UK, sviri@dcs.warwick.ac.uk

HYBRID APPROACHES COMBINING METAHEURISTICS AND MATHEMATICAL PROGRAMMING FOR 0–1 MIXED INTEGER PROGRAMMING

S. Hanafi

The 0–1 mixed integer programming (0–1 MIP) problem consists of maximizing or minimizing a linear function subject to equality or inequality constraints and binary choice restrictions on some of the variables. Several special cases of the 0-1 MIP problem, such as knapsack, traveling salesman and routing problems, are known to be NP-hard. Branch-and-bound and branch-and-cut methods have long been considered the methods of choice for solving mixed integer programming problems. Many contributions have led to successive improvements in these methods. Metaheuristic methods have attracted attention as possible alternatives or supplements to the more classical approaches. The view adopted in this talk is that metaheuristic approaches can benefit from a change of perspective in order to perform at their best in the MIP setting. Recent adaptive memory and evolutionary metaheuristics for mixed integer programming have included proposals for introducing inequalities and target objectives to guide the search. These guidance approaches are useful in intensification and diversification strategies related to fixing subsets of variables at particular values, and in strategies that use linear programming to generate trial solutions whose variables are induced to receive integer values. Glover and Hanafi (2010) introduced procedures for generating target objectives and solutions by exploiting proximity in original space or projected space. In this talk, we will develop more advanced approaches for generating the target objective based on exploiting the mutually reinforcing notions of reaction and resistance. Model embedded memory, as proposed in parametric tabu search, will be integrated to provide a range of recency and frequency memory structures for achieving goals associated with short term and long term solution strategies. We propose supplementary linear programming models that exploit the new inequalities for intensification and diversification, and introduce additional inequalities from sets of elite solutions that enlarge the scope of these models.

We have investigated the use of new relaxations in a general iterative scheme to solve 0–1 Mixed Integer Programming programs. In the first one, called MIP relaxation, we release the integrality constraints over only a part of the binary variables, rather than releasing these constraints over all the 0–1 variables like in the continuous relaxation. In the second one, called Iterative Semi-Continuous relaxation, the binary variables are forced to take values close to 0 or 1. These relaxations can be used to improve the upper bound of a maximization problem, but their efficiency (in term of computation time) depends on the desired accuracy, implying a weighting between performance and complexity. The corresponding approaches have been evaluated on variants of the knapsack problem, and the results have demonstrated their efficiency for solving large instances.

REFERENCES

S. Hanafi, C. Wilbaut, (2011). Improved Convergent Heuristic for the 0–1 Multidimensional Knapsack Problem. Annals of Operations Research, Volume 183, Number 1, 125–142.

F. Glover, S. Hanafi, Metaheuristic Search with Inequalities and Target Objectives for Mixed Binary Optimization Part II: Exploiting Reaction and Resistance. International Journal of Applied Metaheuristic Computing. (2010), Volume 2, No 1, pp. 1–17.

Saïd Hanafi, University of Valenciennes, France, Said.Hanafi@univ-valenciennes.fr

КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ОБУЧЕНИЕМ В КЛАССЕ КУСОЧНО–ЛИНЕЙНЫХ РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ

М.Ю. Хачай

Задача построения аффинного разделяющего комитета является естественным дискретным обобщением задачи о разделяющей гиперплоскости в евклидовом пространстве на случай разделяемых множеств, выпуклые оболочки которых пересекаются. Для простоты изложения ограничимся рассмотрением ситуации, в которой число разделяемых множеств равно двум и оба множества конечны. При этих допущениях постановка задачи естественным образом погружается в конечномерное пространство подходящей размерности.

Пусть A, B — непустые конечные подмножества $\mathbb{R}^n$, $A \cup B = m$, $f_1, \ldots, f_q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — аффинные функции. Конечная последовательность $K = (f_1, \ldots, f_q)$ называется *аффинным комитетом, разделяющим A и B*, если

$$|\{i \in \mathbb{N}_q : f_i(a) > 0\}| > \frac{q}{2} \qquad (a \in A),$$
$$|\{i \in \mathbb{N}_q : f_i(b) < 0\}| > \frac{q}{2} \qquad (b \in B).$$

Число q называется *числом элементов (длиной) комитета* K, а множества A и B — *отделимыми* этим комитетом. Комитет наименьшей для заданных множеств A и B длины называется *минимальным*.

В частности, при $q = 1$ последовательность K состоит из единственной аффинной функции, определяющей гиперплоскость, разделяющую множества A и B, которые в этом случае отделимы в обычном смысле.

Поскольку произвольный разделяющий комитет K длины q может быть преобразован в комитет длины $q + 2t$ для произвольного $t \in \mathbb{N}$, интерес представляет задача поиска именно минимального (для заданных разделяемых множеств) комитета, поскольку его длина может считаться мерой их «неотделимости».

З а д а ч а “Минимальный аффинный разделяющий комитет” (MASC). Для заданных конечных множеств $A, B \subset \mathbb{Q}^n$ требуется найти аффинный комитет K с наименьшим числом элементов, разделяющий эти множества.

Особый интерес представляет подкласс задачи MASC (обозначаемый MASC-GP) в котором множество $A \cup B$ находится в общем положении (размерность аффинной оболочки произвольного его подмножества мощности $k \leqslant n + 1$ равна $k - 1$). Подклассы задач MASC и MASC-GP, объединяющие постановки, сформулированные в пространстве фиксированной размерности n, принято обозначать MASC(n) и MASC-GP(n), соответственно.

Для удобства изучения вопросов вычислительной сложности и полиномиальной аппроксимируемости перечисленных задач здесь и ниже полагаем разделяемые множества не пересекающимися и состоящими из точек с рациональными координатами.

Теорема 1([4]) 1. *Задача* MASC *NP-трудна и остается труднорешаемой при дополнительном ограничении*

$$A \cup B \subset \{x \in \{0, 1, 2\}^n : \|x\|_2 \leqslant 2\}.$$

2. *Задача* MASC *не принадлежит классу Apx (задач комбинаторной оптимизации, допускающих аппроксимацию полиномиальными алгоритмами с фиксированной точностью) при условии* $P \neq NP$.

Теорема 2 ([5]) *Задачи* MASC(n) *и* MASC-GP(n) *полиномиально разрешимы при* $n = 1$ *и NP-трудны при произвольном* $n > 1$.

Наивысшей точностью $O(m)$ среди известных полиномиальных алгоритмов решения задачи MASC (MASC-GP) обладает алгоритм, впервые описанный в работе [3]. В работе [6] предложен ряд его модификаций, несколько улучшающих константу в оценке точности, но не изменяющих оценку по порядку величины.

До настоящего времени наивысшей для задачи MASC-GP(n) точностью обладал алгоритм GreedyCommittee [5], точность которого составляет $O(m/n)$ в общем случае и $O(\log m)$ при некотором дополнительном допущении (Assumption 1 в [5]). Ниже, опираясь на результаты [7], мы опишем новый полиномиальный приближенный алгоритм для этой задачи, обладающий в общем случае точностью $O((m/n \ln m)^{1/2})$.

Пусть множества $A, B \in \mathbb{Q}^n$ задают условие задачи MASC-GP(n). Введя обозначение $Z = A \cup B$, как и ранее полагаем $m = |Z|$.

Подмножество $M = A' \cup B'$, в котором $A' \subset A$ и $B' \subset B$ называется *отделимым*, если подмножества A' и B' отделимы некоторой гиперплоскостью. Если при этом $M \cup \{z\}$ не является отделимым для произвольной точки $z \in Z \setminus M$, то M называется *максимальным отделимым подмножеством*. Через $\mathfrak{M}$ обозначим семейство максимальных отделимых подмножеств M.

Очевидно, что для произвольного множества Z справедлива одна из альтернатив:

1) множество Z само является отделимым и, следовательно, $\mathfrak{M} = \{Z\}$;
2) множество Z обладает собственными максимальными отделимыми подмножествами, и, следовательно, минимальный аффинный комитет, разделяющий множества A и B, содержит более одного элемента.

Приближенные алгоритмы построения комитетных решающих правил (и, в частности, методы решения задачи MASC-GP(n)) удобно описывать в терминах минимаксных стратегий одного из игроков подходящей многошаговой антагонистической игры двух лиц с нулевой суммой. Остановимся на общей схеме такой игры.

1. Пусть задано вероятностное пространство $(Z, 2^Z, \chi_0)$. Множество $\mathfrak{X}$ допустимых альтернатив 1-го игрока совпадает с множеством дискретных вероятностных мер χ, определенных на $(Z, 2^Z)$ и не зависит от позиции игры. Зададимся натуральным числом t и предикатом $\pi : \mathfrak{X} \times \mathfrak{M}^t \to \{\text{true}, \text{false}\}$.

2. Очередной, i-ый по счету раунд игры начинается определением множества $\mathfrak{Y}_i = \{y \in \mathfrak{M}^t \colon \pi(\chi_{i-1}, y) = \text{true}\}$ допустимых альтернатив 2-го игрока. Если $\mathfrak{Y}_i = \varnothing$, партия аварийно завершается. В противном случае 2-ой игрок выбирает $y_i = (M_{i1}, \ldots, M_{it}) \in \mathfrak{Y}_i$, и ход переходит к 1-му игроку, который либо завершает партию (обычным образом), либо выбирает очередную альтернативу — меру χ_i, после чего происходит переход на следующий раунд.

3. Пусть k — номер последнего раунда партии, $x = (\chi_0, \ldots, \chi_{k-1})$ и $y = (y_1, \ldots, y_k)$ — стратегии игроков. Значение платежной функции $\mathcal{L}$, определяющей проигрыш первого игрока, при условии обычного (неаварийного) завершении партии вычисляется

по формуле

$$\mathcal{L}(x,y) = 1 - \chi_0\left(\bigcup_{J\subset\{1,\ldots,k\}\times\{1,\ldots,t\},|J|>kt/2}\ \bigcap_{(i,p)\in J} M_{ip}\right). \qquad (1)$$

Можно показать, например, что алгоритм построения аффинного разделяющего комитета, описанный в работе [3], соответствует оптимальной минимаксной стратегии 1-го игрока в частной игре, получаемой из данной схемы заданием

$$t = 2 \ \text{ и } \pi(\chi,(M_1,M_2)) = (\chi(M_1\cap M_2)>0)\wedge(M_1\cup M_2 = Z).$$

В работе [7] исследуется частный случай игры, определяемый параметрами

$$t = 1, \gamma\in(0,1/2) \text{ и } \pi(\chi,(M)) = (\chi(M)\geqslant 1/2+\gamma),$$

и доказывается

Теорема 3 *Пусть $\gamma\in(0,1/2)$ таково, что $\pi(\chi,(M))\not\equiv false$ для произвольной меры χ, заданной на $(M,2^M)$. Тогда для произвольного $\varepsilon\in(0,1)$ для*

$$k = \lceil 1/(2\gamma^2)\ln(1/2\varepsilon)\rceil$$

существует такая стратегия $x_\varepsilon = (\chi_0,\ldots,\chi_{k-1})$ 1-го игрока, что $\mathcal{L}(x_\varepsilon,y)\leqslant\varepsilon$ при произвольной стратегии соперника.

Воспользуемся процедурой построения стратегии x_ε как подпрограммой для обоснования приближенного полиномиального алгоритма для задачи MASC-GP(n). Зададимся частичным отображением Boost : $(0,1/2)\times(0,1)\to\{\text{true},\text{false}\}\times\mathfrak{Y}$, где $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_1\times\mathfrak{Y}_2\times\ldots$, Boost$(\gamma,\varepsilon) = (S(\gamma,\varepsilon),R(\gamma,\varepsilon))$, а функции S и R вычисляются (одновременно) в процессе розыгрыша партии игры, при котором стратегия x 1-го игрока определяется упомянутым выше алгоритмом, а стратегия y 2-го — произвольным допустимым способом. Значение $S(\gamma,\varepsilon)$ определено при произвольных $\gamma\in(0,1/2)$ и $\varepsilon\in(0,1)$ и, по определению, равно true, если партия завершилась безаварийно и $\mathcal{L}(x,y)\leqslant\varepsilon$. Значение $R(\gamma,\varepsilon)$ определено и равно y тогда и только тогда, когда $S(\gamma,\varepsilon) = \text{true}$.

Введем обозначение $\bar t = \lceil\frac{\lfloor(m-n)/2\rfloor}{n}\rceil$, положим $\varepsilon = \frac{1}{m+1}$ и рассмотрим следующий конечношаговый алгоритм. Б.о.о полагаем множества A и B неотделимыми и $\ln m < 2t^*+1$.

А л г о р и т м BGC.

1. Найти

$$t_0 = \arg\min\left\{t\in\{1,\ldots,\bar t\}\colon S\left(\frac{1}{4t+2},\varepsilon\right)\wedge\left((t=1)\vee\overline{S}\left(\frac{1}{4t-2},\varepsilon\right)\right)\right\}$$

2. Если

$$t_0\leqslant\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2\bar t+1}{2\ln((m+1)/2)}\right)^{1/2}-1\right), \qquad (2)$$

положить $y = R(\frac{1}{4t_0+2},\varepsilon)$, пусть $y = (M_1,\ldots,M_k)$, $M_i = A_i'\cup B_i'$ $A_i'\subset A$, $B_i'\subset B$. Выдать в качестве результата последовательность $K = (f_1,\ldots,f_k)$ аффинных функций, в которой f_i отделяет A_i' от B_i'.

Теорема 4 *Алгоритм BGC корректен и находит приближенное решение задачи* MASC-GP(n) *с точностью*

$$\frac{\mathrm{BGC}(A,B)}{\mathrm{OPT}(A,B)} \leqslant \lceil 2\bar{m}\ln((m+1)/2)\rceil^{1/2}, \quad \textit{где } \bar{m} = 2\left\lceil \frac{\lfloor (m-n)/2 \rfloor}{n} \right\rceil + 1, \tag{3}$$

за время $O(m^{n+3}/n\ln m)+\Theta_{GC}$, *где* Θ_{GC} — *трудоемкость алгоритма GreedyCommittee.*

Работа поддержана грантами РФФИ 13-01-00210 и 13-07-00181, а также грантами УрО РАН 12-П-1-1016 и 12-С-1-1017/1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мазуров Вл.Д. Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации – М.: Наука, 1990. 348 с.

[2] Schapire R. and Freund Y. Boosting. MitPress. 2012. P. 496.

[3] Мазуров Вл. Д. Комитеты систем неравенств и задача распознавания образов // Кибернетика. 1971. № 3. С. 140–146.

[4] Khachai M. Computational and approximational complexity of combinatorial problems related to the committee polyhedral separability of finite sets // Pattern Recognition and Image Analysis. 2008. Vol. 18, no. 2. P. 237–242.

[5] Khachai M., Poberii M. Complexity and approximability of committee polyhedral separability of sets in general position // Informatica. 2009. Vol. 20, no. 2. P. 217-–234.

[6] Khachai M., Mazurov V., Rybin A. Committee construction for solving problems of selection, diagnostics, and prediction // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1. 2002. P. S67–S101.

[7] Freund Y. Boosting a Weak Algorithm by Majority // Information and Computation. 1995. Vol. 121, P. 256–285.

[8] Гайнанов Д.Н., Новокшенов В.А., Тягунов Л.И. О графах, порождаемых несовместными системами линейных неравенств // Мат. заметки. 1983. Т. 33, вып. 2., С. 293–300.

[9] Мазуров Вл.Д., Хачай М.Ю. Комитетные конструкции // Известия УрГУ. 1999. вып. 14. С. 76–108.

Хачай Михаил Юрьевич,
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия, e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ МАРШРУТИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А.Г. Ченцов

Рассматривается задача последовательного обхода мегаполисов, осложненная условиями предшествования и внутренними работами, выполняемыми в пределах мегаполисов (непустых конечных множеств). Предполагается, что стоимости внешних перемещений и внутренних работ могут явным образом зависеть от списка заданий, не выполненных на текущий момент времени. Упомянутая зависимость может возникать, в частности, в инженерной задаче о демонтаже оборудования энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации (см. [1]). Построено расширение исходной задачи маршрутизации и, на его основе, экономичный вариант метода динамического программирования, не предусматривающий, вообще говоря, построение всего массива значений функции Беллмана; см. [2, 3]. Предложена гипотетическая версия параллельного алгоритма, позволяющего в принципе построить требуемый частичный массив посредством независимых вычислений с использованием конечной системы процессоров.

Разработана схема построения метода итераций на основе преобразования исходной задачи маршрутизации с зависимыми переменными (маршрут, трасса) к эквивалентной оптимизационной задаче с независимыми переменными (система городов, маршрут). Данная схема допускает естественные аналогии с методом покоординатного спуска в общей теории экстремальных задач, но реализуется в двойственности, отвечающей паре упомянутых экстремальных задач маршрутизации с ограничениями в виде условий предшествования.

Предлагаются алгоритмы с элементами параллельных вычислений, реализованные на многоядерных ПЭВМ.

1. В различных прикладных задачах возникает необходимость в разработке методов маршрутизации при наличии ограничений. К числу таких задач можно отнести проблемы, возникающие в связи с необходимостью снижения облучаемости работников АЭС при выполнении комплекса операций в помещениях с повышенной радиацией.

Весьма актуальной представляется инженерная задача, связанная с демонтажом энергоблоков, выведенных из эксплуатации, а также подобные задачи, связанные с утилизацией излучающих элементов в условиях аварийных ситуаций (Чернобыль, Фукусима). В данной задаче маршрутизация перемещений работника (бригады) осложнена не только многочисленными условиями предшествования, но и характером функций стоимости. Последние включают зависимость от списка невыполненных на текущий момент заданий (разумеется, зависимость от конкретных пунктов, между которыми осуществляется перемещение, также имеет место). Дозы радиации, полученные на этапах выполнения работ по демонтированию, суммируются, так что в данной задаче вполне обоснованным представляется использование аддитивного варианта агрегирования стоимостей, каждая из которых зависит от многих факторов, меняющихся по мере развития процесса.

Зависимость от списка заданий (на работника воздействуют недемонтированные источники) приводит к задаче маршрутизации, в которой важно выбрать очередность "выключения" источников. При этом воздействие источника в каждый момент

времени обратно пропорционально квадрату расстояния между источником и работником (имеются некоторые особенности ближних зон, т. е. участков перемещений и работ вблизи источника). Эту зависимость следует интегрировать вдоль трассы перемещения работника от одного фрагмента оборудования к другому. С точки зрения возникающей при этом задачи маршрутизации это означает, что конструируемая матрица потерь будет "неметрической" , а, стало быть, мы приходим к очень сложной экстремальной задаче, для которой неизвестны приближенные методы, допускающие оценку проигрыша в сравнении с глобальным экстремумом.

Полезно, однако, иметь в виду то обстоятельство, что реальная размерность вышеупомянутой конкретной задачи является, как правило, умеренной (несколько десятков) и, более того, может быть понижена посредством объединения некоторых фрагментов в мегаполисы. В такой модели естественным образом выделяются (внешние по смыслу) перемещения между мегаполисами и внутренние (в пределах мегаполисов) работы; последние также сопровождаются перемещениями, причём пункты прибытия (в мегаполис) и отправления могут не совпадать.

Один из возможных конкретных вариантов условий предшествования связан с тем, что в помещении энергоблока имеются элементы оборудования, размещённые на других объектах (реальная задача демонтажа не является плоской), а тогда демонтировать "верхние" объекты приходится раньше "нижних". Соответственно перемещения между объектами (объединёнными, возможно, в мегаполисы) могут быть не прямолинейными, чем усложняется определение функций стоимости.

К задаче маршрутизации со стоимостями, зависящими от списка заданий, могут быть сведены и некоторые другие содержательные задачи (см., в частности, [4, 5]), где рассматриваются постановки, включающие элементы некоторой нестационарности в определении стоимости внешних перемещений и внутренних работ).

2. Постановки, связанные с последовательным обходом мегаполисов при условиях предшествования, возникают также в инженерной задаче о листовой резке деталей с использованием станков с числовым программным управлением (ЧПУ). Имеется в виду задача быстродействия при осуществлении холостого хода инструмента с фрагментами врезки и выхода из металла в режим холостого хода. В данной содержательной задаче мегаполисы имеет смысл отождествить с конечными множествами точек, лежащих вблизи некоторых эквидистант контуров, подлежащих вырезке (рассматриваемая задача является плоской); упомянутые эквидистанты вводятся с целью обеспечения резки с некоторым запасом (подробнее см. в [6]). В конкретной задаче каждому граничному контуру можно сопоставить одну (реальную) точку врезки (пробивки) и одну точку включения инструмента; последняя может в ряде случаев находиться на эквидистанте. Но для выбора местоположения двух упомянутых точек имеет смысл привлекать математическую модель, в рамках которой каждый граничный контур "снабжается" мегаполисом, составленным из гипотетических точек врезки и выключения инструмента, образующих допустимые пары, отвечающие началу и окончанию внутренних работ (появляется новое ограничение на характер выполнения внутренних работ).

Вырезаемые (из листа) детали имеют зачастую достаточно сложную структуру; в частности, нередко соответствующая деталь имеет несколько граничных контуров, один из которых внешний, а остальные внутренние. Резка внутренних контуров детали непременно должна предшествовать резке внешнего контура, что приводит к специфическим условиям предшествования (одно после другого). Имеется также це-

лый ряд менее жестких условий технологического характера, связанных с обеспечением должной жесткости и возможным ослаблением по мере движения термических воздействий. Представляется, что некоторые из этих требований можно выполнить, прибегая к ограничению возможных переходов из точки выключения инструмента одного мегаполиса в точку врезки следующего (в маршруте) мегаполиса, формируя своеобразные области достижимости. В результате возникает обобщенная задача курьера с ограничениями в выборе точек очередного мегаполиса.

3. Из содержательного обсуждения в разделах 1 и 2 следует, что имеются все основания для разработки специализированных теоретических методов решения задачи о последовательном обходе мегаполисов с ограничениями различных типов, среди которых в качестве доминанты выделяются условия предшествования. В постановках такого рода также логично допустить усложнение функций стоимости, которое возникает по объективным причинам, связанным с приложениями. Данный тип задач маршрутизации существенно отличается от задачи коммивояжера [7, 8, 9]. Проблема сложности вычислений, сохраняющая свою остроту, всё же в ряде случаев принимает иной характер: в задаче умеренной размерности, а таковые возникают в приложениях (см. раздел 1), возникает потребность в надёжной реализации допустимых решений при осуществлении локальной и, если возможно, глобальной оптимизации. В такой постановке с теоретической точки зрения естественным инструментом является динамическое программирование, должным образом адаптированное к задачам с ограничениями упомянутых типов. Данный метод может, наряду с непосредственным применением в задачах умеренной размерности, использоваться для тестирования эффективных эвристических методов.

4. С учётом соображений раздела 3 совсем кратко наметим некоторые существенные элементы единой постановки задачи, ориентированной на использование в вышеупомянутых прикладных задачах. Условимся о соглашении: если h есть упорядоченная пара (УП), то $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ — суть первый и второй элементы h соответственно. Фиксируем непустое множество $X, x^0 \in X$, натуральное число $N, N \geq 2$, непустые конечные подмножества (п/м) X, обозначаемые через $M_1, \ldots, M_N$. Упомянутые п/м полагаем попарно непересекающимися и не содержащими x^0. Полагаем также заданными непустые отношения $\mathbb{M}_1, \ldots, \mathbb{M}_N : \mathbb{M}_j \subset M_j \times M_j$ при $j = 1, \ldots, N$. Нас интересуют процессы вида

$$x^0 \to (z_1 \in \mathbb{M}_{\alpha(1)}) \to \ldots \to (z_N \in \mathbb{M}_{\alpha(N)}), \tag{1}$$

где α — перестановка в $\overline{1,N} \triangleq \{1; \ldots; N\}$. Выбор α может быть стеснён условиями предшествования. Перемещения с одного мегаполиса на другой также стеснено ограничениями и характеризуется некоторой областью достижимости, зависящей от точки старта и номера мегаплиса, на который осуществляется перемещение.

Каждой УП паре $z \in \mathbb{M}_j$, где $j \in \overline{1,N}$, соответствует (возможно неединственный) вариант внутренних работ, связанных с посещением M_j. Фиксируем возможные финальные их состояния: $\mathbf{M}_t \triangleq \{\mathrm{pr}_2(z) : z \in \mathbb{M}_t\} \quad \forall t \in \overline{1,N}$. Эти множества играют далее существенную роль при построении функции Беллмана.

Фиксируем множество $\mathbf{K}, \mathbf{K} \subset \overline{1,N} \times \overline{1,N}$, элементы которого (адресные пары) формируют условия предшествования. Сопоставляем $z \in \mathbf{K}$ первый элемент (отправитель) $\mathrm{pr}_1(z)$ и второй элемент (получатель) $\mathrm{pr}_2(z)$; разумеется $z = \big(\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)\big)$. Через $\mathbb{P}$ обозначаем множество всех перестановок в $\overline{1,N}$ и при $\alpha \in \mathbb{P}$ через α^{-1}

обозначаем перестановку из $\mathbb{P}$, обратную к α. Тогда [2, ч. 2]

$$\mathbb{A} \stackrel{\triangle}{=} \{\alpha \in \mathbb{P} |\ \forall z \in \mathbf{K}\ \ \alpha^{-1}\big(\mathrm{pr}_1(z)\big) < \alpha^{-1}\big(\mathrm{pr}_2(z)\big)\}$$

есть множесто всех $\mathbf{K}$-допустимых маршрутов из $\mathbb{P}$ (допустимых по предшествованию). Полагаем, что для каждого непустого множества $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{K}_0 \subset \mathbf{K}$, существует $z_0 \in \mathbf{K}_0 : \mathrm{pr}_1(z_0) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \ \forall z \in \mathbf{K}_0$. Тогда [2] $\mathbb{A} \neq \emptyset$.

Пусть $\mathbb{X} \stackrel{\triangle}{=} \{x^0\} \cup \big(\bigcup\limits_{i=1}^{N} M_i\big)$ и $\mathbf{X} \stackrel{\triangle}{=} \{x^0\} \cup \big(\bigcup\limits_{i=1}^{N} \mathbf{M}_i\big)$ Мы полагаем, что при каждом $j \in \overline{1,N}$ определен оператор A_j, действующий из $\mathbf{X}$ в семейство всех непустых п/м M_j и определяющий ограничения на осуществление внешних перемещений (в задаче о листовой резке действие A_j можно связать с требованиями обеспечения жесткости).

Полагаем, что $\forall j \in \overline{1,N}\ \ \forall x \in \mathbf{X}\ \exists z \in \mathbb{M}_j : \mathrm{pr}_1(z) \in A_j(x)$. Если $\alpha \in \mathbb{A}$, то $\mathcal{Z}_\alpha$ есть def множество всех кортежей $(z_i)_{i\in\overline{0,N}} : \overline{0,N} \to \mathbb{X} \times \mathbf{X}$, для каждого из которых $z_0 = (x^0, x^0)$ и $\forall t \in \overline{1,N}$

$$\big(z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)}\big)\ \&\ \Big(\mathrm{pr}_1(z_t) \in A_{\alpha(t)}\big(\mathrm{pr}_2(z_{t-1})\big)\Big);$$

$\mathcal{Z}_\alpha$ — непустое конечное множество. Пару $(\alpha, \mathbf{z})$, где $\alpha \in \mathbb{A}$ и $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha$, назыаем допустимым решением.

Через $\mathfrak{N}$ обозначаем семейство всех непустых п/м $\overline{1,N}$. На множестве $\mathbb{X}\times\mathbb{X}\times\mathfrak{N} = (\mathbb{X}\times\mathbb{X})\times\mathfrak{N}$ определяем неотрицательные вещественнозначные функции $\mathbf{c}, c_1, \ldots, c_N$, а на множестве $\mathbb{X}$ — неотрицательную вещественнозначную функцию f. Основная задача имеет вид

$$\sum_{t=0}^{N-1} \mathbf{c}\big(\mathrm{pr}_2(z_t), \mathrm{pr}_1(z_{t+1}), \{\alpha(s) : s \in \overline{t+1,N}\}\big) + \sum_{t=1}^{N} c_{\alpha(t)}\big(z_t, \{\alpha(s) : s \in \overline{t,N}\}\big) +$$

$$+ f\big(\mathrm{pr}_2(z_N)\big) \to \min,\ \ \alpha \in \mathbb{A}, (z_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha.$$

Построение оптимального решения данной задачи составляет содержание доклада, являющегося естественным продолжением [10]. Вопросы, связанные с применением методов маршрутизации в задачах атомной энергетики, подробно обсуждаются в [1].

Для построения упомянутого решения конструируется расширение основной задачи, использующее преобразование системы ограничений по схеме [2, ч. 2]; допустимость по предшествованию заменяется допустимостью "по вычеркиванию" (см. [2, § 2.2]). При этом "запас" допустимых маршрутов базовой задачи не изменяется [2, теорема 2.2.1].

В классе допустимых "по вычеркиванию" маршрутов конструируются частичные (укороченные) задачи, подобные в идейном отношении используемым в [2, § 2.4] (см. также [3]). Систему экстремумов данных задач рассматриваем как функцию Беллмана; устанавливается вид уравнения Беллмана, для практического использования которого привлекается конструкция слоёв [2, § 4.9]. Данная конструкция оперирует с частичным массивом значений функции Беллмана, достаточным, однако, для построения оптимальной пары маршрут-трасса. Реализация последней осуществляется по традиционной пошаговой схеме. На основе данного подхода построен алгоритм, который реализован А.А. Ченцовым и П.А. Ченцовым на многоядерной ПЭВМ в

вариантах, ориентированных на задачу демонтажа и задачу листовой резки соответственно.

Работа поддержана грантами РФФИ № 11-01-90432 укр_ф_а, № 12-01-00537_а.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Коробкин В.В., Сесекин А.Н., Ташлыков О.Л., Ченцов А.Г. Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения безопасности и эффективности эксплуатации атомных станций./ Под общ. ред. член-корр. РАН И.А. Каляева. – М.: Новые технологии, 2012. 233 с.

[2] Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. Москва-Ижевск: РХД. 2008. 238 с.

[3] Ченцов А.Г. Метод динамического программирования в экстремальных задачах маршрутизации с ограничениями // Изв.РАН. Теория и системы управления. 2010, № 3, с. 52–66.

[4] Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Маршрутизация перемещений с ограничениями и нестационарными функциями стоимости// Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика, телекоммуникации, управление, 4(152)/2012, с. 88–93.

[5] Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Динамическое программирование в одной нестционарной задаче маршрутизации // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 1 (39), с. 151–154.

[6] Петунин А.А. О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала// Вестник УГАТУ. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2009. Т.13, № 2(35). С. 280–286.

[7] Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.

[8] Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3–29.

[9] Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы// Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3–26.

[10] Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Динамическое программирование в экстремальных задачах маршрутизации: общая теория и элементы параллельной структуры // Материалы 6 международной конференции "Параллельные вычисления и задачи управления". PACO 2012. Москва, Институт проблем управления РАН. Т.II. С. 183–198.

Ченцов Александр Георгиевич,
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН, Екатеринбург, e-mail: chentsov@imm.uran.ru

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ В АЛЬТЕРНАНСНОЙ ФОРМЕ

Т.А. Ангелов

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное и замкнутое множество и C — его выпуклая оболочка. В задачах негладкой оптимизации условие оптимальности часто записывают в виде $0_n \in C$. Например, условие минимума для задачи безусловной оптимизации выпуклой функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ записывается в виде

$$0_n \in \partial f(x^*), \tag{1}$$

где $\partial f(x^*)$ — субдифференциал функции $f(x)$ в точке $x^* \in \mathbb{R}^n$ [1].

Рассматривается минимаксная задача оптимального выбора параметров

$$\max_{Y \in G} F(X, Y) \to \min_{x \in \Omega}, \tag{2}$$

где Ω — выпуклое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, G — ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^m$ [2].

Примером такой задачи является классическая задача чебышевской интерполяции

$$\max_{t \in G} |P_n(A, t) - f(t)| \to \min_{A \in \mathbb{R}^{n+1}}, \tag{3}$$

где $P_n(A, t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, $A = (a_0, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$, f — непрерывна на $G \subset \mathbb{R}$. Условие минимума (1) принимает альтернансную форму [2]. Для того, чтобы точка $A^* \in \mathbb{R}^{n+1}$ была решением задачи (3), необходимо и достаточно, чтобы существовали $n + 2$ точки $t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+2}$, в которых разность $P_n(A^*, t_i) - f(t_i)$ достигает максимальной по абсолютной величине значения с последовательной переменой знаков. Такое условие позволяет не только проверять условие минимума, но и строить численные методы [2].

Из [3] известно, что альтернансная форма необходимых условий минимума допустима не только для задач чебышевской интерполяции, но и для широкого класса задач математического программирования.

В докладе будет представлен метод, использующий необходимое условие минимума в альтернансной форме, для решения задачи (2), где $F(X, A)$ — непрерывна по совокупности переменных $X \in \mathbb{R}^n$ и $Y \in G \subset \mathbb{R}^m$, $F(X, A)$ — непрерывно дифференцируема по X на $\mathbb{R}^n$ равномерно по $Y \in G$.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00752.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Рокафеллар. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

2. В.Ф. Демьянов, В.Н. Малозёмов. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

3. В.А. Даугавет, В.Н. Малозёмов. Нелинейные задачи аппроксимации. // Н.Н. Моисеев (ред.) Современное состояние теории исследования операций. М.: Наука, 1979.

Ангелов Тодор Ангелов, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, e-mail:angelov.t@gmail.com

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ СТАБИЛИЗАТОРАМИ

А.С. Величко

В работе [1] развивается подход использования недифференцируемых стабилизаторов в методе регуляризации Тихонова. В частности для одномерного интегрального уравнения Фредгольма $\int\limits_a^b K(t,s)u(s)\,ds = y(t)$ можно записать задачу негладкой оптимизации $\min\limits_{\{u_j\}}\Big\{\sum\limits_{i=1}^{m}\Big[h\Big|\sum\limits_{j=1}^{n} hK(t_i,s_j)u_j - y_i\Big| + h\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} hK(t_i,s_j)u_j - y_i\Big)^2\Big] + \alpha\sum\limits_{j=1}^{n} u_j^2\Big\}$.

Возможно ее эквивалентное представление [2] в виде задачи квадратичной оптимизации с ограничениями типа неравенств: $\min\limits_{\{u_j,w_i\}}\Big(h\sum\limits_{i=1}^{m} w_i + h\sum\limits_{i=1}^{m} w_i^2 + \alpha\sum\limits_{j=1}^{n} u_j^2\Big)$ с линейными ограничениями $w_i \geq \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} hK(t_i,s_j)u_j - y_i\Big), w_i \geq -\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} hK(t_i,s_j)u_j - y_i\Big)$.

Следуя [3], преобразуем последнюю задачу, для краткости записанную в виде $\min\limits_x\{(1/2)x'Qx + c'x, Ax \leq b\}$, к двойственной: $\min\limits_p\{(1/2)p'Dp + d'p, p \geq 0\}$. Для оптимальных решений выполнено $x* = -Q^{-1}(c + A'p*)$, где $D = AQ^{-1}A', d = b + AQ^{-1}c$.

Идея параллельного алгоритма для решения двойственной задачи основана на модификации нелинейного метода Якоби для задачи оптимизации с простыми ограничениями неотрицательности, в котором на шаге $s+1$ параллельно решается k одномерных (по переменной $p_i^{s+1} \geq 0$) квадратичных задач, формируемых, когда i принимает значения от 1 до k, вида $\min\{(1/2)p^{(i)}Dp^{(i)} + d'p^{(i)}\}$, где $p^{(i)} = (p_1^s, p_i^{s+1}, p_k^s)$. Особенностью параллельного алгоритма является то, что на шаге $(s+1)$ вектор $p^{s+1} = (p_1^s, p_{i*}, p_k^s)$ определяется из условия $i* = \operatorname{argmin}\{(1/2)p^{(i)}Dp^{(i)} + d'p^{(i)}\}$.

Алгоритм реализован на языке Matlab и Octave с использованием библиотеки 'OpenMPI Extension for Octave' для поддержки параллельных вычислений. Расчеты проводятся на многопроцессорном вычислительном комплексе Центра коллективного пользования Дальневосточного отделения РАН во Владивостоке. Данный подход используется для решения задач большой размерности, возникающих в задаче восстановления спектра излучения на входе поляризационного спектроанализатора и задаче продолжения гравитационного поля Земли на заданную глубину.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.В. Васин, Т.И. Сережникова. Регулярный алгоритм аппроксимации негладких решений для интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, №2. С. 15–23.

2. А.С. Величко. О выборе шага в проективных алгоритмах для задач линейного программирования большой размерности // Дальневосточный математический журнал. 2012. №2. С. 160–170.

3. D.P. Bertsekas, J.N. Tsitsiklis. Parallel and Distributed Computation : Numerical Methods. Athena Scientific, 1997.

Величко Андрей Сергеевич, Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия, e-mail: vandre@dvo.ru

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ В МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

Т.К. Виноградова

В последние годы, даже десятилетия, возрос интерес как математиков, так и инженеров к задачам негладкой оптимизации, т.е. задачам, которые описываются с помощью недифференцируемых функций или функционалов. Доклад посвящается решению некоторых вопросов, связанных с минимизацией негладких функционалов ("типа максимум") в задачах оптимального управления. Можно привести много примеров из техники, которые сводятся к задачам подобного типа. Это, например, задача о минимуме максимального отклонения, задача противоударной амортизации, задача о минимуме наибольшего значения перегрузки при входе космического аппарата в атмосферу Земли и т.д. Недифференцируемость целевого функционала в значительной степени усложняет решение подобных задач. Предлагается несколько типов необходимых условий и численные методы решения, построенные на их основе. Рассмотрим задачу оптимального управления объектом, движение которого задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, рассматриваемых на заданном промежутке. Задача заключается в том, чтобы для заданной системы с начальными условиями найти управление, если оно существует, чтобы функционал качества "типа максимум"достигал минимального значения. Приближенное решение задач с недифференцируемым функционалом — достаточно сложная вычислительная проблема. Задачи такого типа рассматривались А.Я. Дубовицким, А.А. Милютиным, Р. Габасовым, Ф.М. Кирилловой, В.В. Величенко, Ю.М. Ермольевым, Б.Н. Пшеничным, Р. Беллманом, В.Ф. Демьяновым и рядом других авторов. Отметим, что хотя теория решения задач с недифференцируемым функционалом разработана достаточно полно и глубоко [1], методы их численного решения еще нельзя считать окончательно установившимися. С помощью различных вариаций [2] в [3] были получены так называемые поточечный и интегральный принцип минимакса. Получение необходимых условий для задач в другой постановке предложено в работе [4], где рассмотрена минимаксная задача с запаздыванием. В настоящем докладе получены дальнейшие обобщения необходимых условий на случай наличия запаздывания в системе дифференциальных уравнений, а также в функционале.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00752.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // ЖВМ и ВМ, 1965. Т.5. № 3.

2. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. 3 изд. М.: Наука, 1976.

3. Виноградова Т.К., Демьянов В.Ф. Принцип минимакса в задачах оптимального управления // ДАН СССР, 1973. Т.213. №3.

4. Виноградова Т.К. Негладкая задача с отклоняющимся аргументом // Известия ГЭТУ. Выпуск 472. СПб, 1994.

Виноградова Татьяна Кановна, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, e-mail: vinogradova@inbox.ru

РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ

С.А. Гах, О.В. Хамисов

Задана задача линейного программирования, зависящая от векторного параметра $p \in P \subset \mathbf{R}^k$,

$$c(p)^T x \to \min_x, \tag{1}$$

$$A(p)x \le b(p), \tag{2}$$

$$\underline{x} \le x \le \overline{x}, \tag{3}$$

где $c(p)$ и $b(p)$ — векторы с компонентами $(c_1(p), \ldots, c_n(p))$ и $(b_1(p), \ldots, b_m(p))$, соответственно, $A(p)$ — матрица с компонентами $a_{ij}(p), i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$, $\underline{x} \in \mathbf{R}^n, \overline{x} \in \mathbf{R}^n$. Зависимость $c_j(p), b_i(p), a_{ij}(p), i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ от p предполагается аффинной. Требуется найти такой вектор $p^* \in P$, что решение $x^*(p^*)$ задачи (1)-(3) удовлетворяет соотношениям

$$Bx = d, \tag{4}$$

B — $s \times n$ матрица, $d \in \mathbf{R}^s$ или установить, что такого вектора не существует.

Данная постановка является частным случаем общей постановки обратной задачи математического программирования, введённой в [1]. В докладе описана редукция исследуемой задачи к невыпуклой квадратичной задаче оптимизации, основанной на условиях оптимальности. Предлагается методика решения редуцированной задачи, базирующаяся не только на адаптации методов отсечений [2], но и на общей схеме ветвей и границ с использованием вспомогательных задач линейного программирования специального вида. Приводятся результаты численного эксперимента.

Разработанная методика применяется для нахождения так называемых спотовых цен в рыночной электроэнергетической модели [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Антипин А.С. Обратные задачи оптимизации: постановка задачи и подходы к её решению // Обратные задачи математического программирования. М. Наука. — 1992. — С. 4–58

2. Булатов В.П., Белых Т.И. Численные методы решения многоэкстремальных задач, связанных с обратными задачами математического программирования // Известия ВУЗов. Математика. — 2007. — N6. — С. 14–20

3. Подковальников С. В., Хамисов О. В. Несовершенные электроэнергетические рынки: моделирование и исследование развития генерирующих мощностей// Известия Российской академии наук. Энергетика. — 2011. — N 2. — С. 57–76

Гах Светлана Анатольевна, Хамисов Олег Валерьевич ИСЭМ СО РАН, Иркутск, Россия, e-mail:svetagah@inbox.ru, e-mail:khamisov@isem.sei.irk.ru

КВАЗИНЬЮТОНОВСКИЕ АЛГОРИТМЫ МАТРИЧНОЙ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ СО СТРУКТУРНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

В.И. Ерохин, А.С. Красников, М.Н. Хвостов

Проблемой D_H матричной коррекции пары взаимно двойственных несобственных задач линейного программирования (ЛП) $L(A,b,c)$ и $L^*(A,b,c)$ со структурными ограничениями будем называть задачу построения матрицы $H \in \mathbf{R}^{m\times n}$, имеющей структуру нулевых элементов, задаваемую множеством $\mathbf{K} = \{(i \in \{1,2,...,m\},\ j \in \{1,2,...,n\}) \mid H_{i,j} = 0\}$, обладающей минимальной евклидовой нормой и гарантирующей разрешимость скорректированных задач

$$\begin{cases} L(A+H,b,c) : (A+H)x = b,\ x \geq 0,\ c^\top x \to \max, \\ L^*(A+H,b,c) : u^\top(A+H) \geq c^\top,\ b^\top u \to \min. \end{cases}$$

Пусть

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_{i,j}) \left| \begin{array}{l} \mathcal{H}_{i,j} = 0 \ \texttt{если}\ \ \{i,j\} \in \mathbf{K}, \\ \mathcal{H}_{i,j} = 1 \ \texttt{в противном случае}, \end{array} \right.$$

$$\mathbf{L}(x) = \{i \,|(b - Ax)_i \neq 0\},$$

$s(p,q) \in \mathbf{R}^n$ — вектор, составленный из элементов $p_j \cdot q_j$, где $p = (p_j) \in \mathbf{R}^n$, $q = (q_j) \in \mathbf{R}^n$. Строки матриц A, H и $\mathcal{H}$ будем обозначать соответственно как A_{i*}, H_{i*} и $\mathcal{H}_{i*}$, символом $\|\cdot\|$ — евклидову матричную (или, в зависимости от контекста, векторную) норму.

Теорема. *Задача D_H эквивалентна задаче*

$$\varphi(x) = \sum_{i\in\mathbf{L}(x)} \frac{(b-Ax)_i^2}{\left\|s\left(x, \mathcal{H}_{i*}^\top\right)\right\|^2} \to \min_{x\geq 0}. \tag{1}$$

Если x^* — решение задачи (1)*, то матрица H^*, являющаяся решением задачи D_H, может быть построена из x^*, A, b по прямым формулам. При этом $\|H^*\|^2 = \varphi(x^*)$, x^* — решение задачи $L(A+H^*,b,c)$.*

С помощью преобразования $x = \mathrm{diag}(z)\cdot z$, где $z \in \mathbf{R}^n$, задача (1) сводится к задаче безусловной дифференцируемой минимизации функции

$$f(z) = \sum_{i\in\mathbf{L}(\mathrm{diag}(z)\cdot z)} \frac{(b - A\cdot\mathrm{diag}(z)\cdot z)_i^2}{\left\|s\left(\mathrm{diag}(z)\cdot z, \mathcal{H}_{i*}^\top\right)\right\|^2} = \sum_{i\in\mathbf{L}(\mathrm{diag}(z)\cdot z)} \frac{(b - A\cdot\mathrm{diag}(z)\cdot z)_i^2}{\|v_i\|^2} = \sum_{i\in\mathbf{L}(\mathrm{diag}(z)\cdot z)} f_i(z).$$

Градиент $f(z)$ может быть вычислен аналитически:

$$\nabla f(z) = \sum_{i\in\mathbf{L}(\mathrm{diag}(z)\cdot z)} \frac{4}{\|v_i\|^2} \cdot \mathrm{diag}(z) \cdot \left(A_{i*}^\top \cdot (A\cdot\mathrm{diag}(z)\cdot z - b)_i - v_i \cdot f_i(z)\right),$$

что позволяет применять к решению задачи D_H квазиньютоновские алгоритмы минимизации. Обсуждению указанных алгоритмов и посвящен данный доклад.

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки 1.7890.2013.

Ерохин Владимир Иванович, Красников Александр Сергевич СПбГТИ(ТУ), Россия, e-mail:erohin_v_i@mail.ru, askrasnikov@gmail.com
Хвостов Михаил Николаевич, БГПИ, Борисоглебск, Россия, e-mail:hvostoff@inbox.ru

АЛГОРИТМЫ ОТСЕЧЕНИЙ БЕЗ ВЛОЖЕНИЯ АППРОКСИМИРУЮЩИХ МНОЖЕСТВ И ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЯ

И.Я. Заботин, Р.С. Яруллин

Предлагается метод решения задачи математического программирования, относящийся к классу методов погружений–отсечений (напр., [1]). Метод характерен тем, что не требует вложения каждого из аппроксимирующих множеств в предыдущее. Эта особенность дает определенные преимущества методу перед некоторыми известными алгоритмами названного класса при его практической реализации.

Пусть $f_j(x)$, $j \in J$, — выпуклые в R_n функции, множества $D_j = \{x \in R_n : f_j(x) \leq 0\}$ таковы, что $intD_j \neq \emptyset \ \forall j \in J$, $D' = \bigcap\limits_{j \in J} D_j$, $D'' \subset R_n$ — выпуклое замкнутое множество, $f(x)$ — непрерывная достигающая на $D = D' \bigcap D''$ минимального значения f^* функция. Решается задача $min\{f(x) : x \in D\}$.

Положим $X^* = \{x \in D : f(x) = f^*\}$, $E^* = \{x \in R_n : f(x) \leq f^*\}$, $F(x) = \max\limits_{j \in J} f_j(x)$, $D'_\varepsilon = \{x \in R_n : F(x) \leq \varepsilon\}$, $\varepsilon \geq 0$. Предлагаемый метод вырабатывает последовательность $\{x_k\}$ и заключается в следующем.

Строится выпуклое замкнутое множество $M_0 \subset R_n$, содержащее хотя бы одну точку $x^* \in X^*$, выбираются $v^j \in intD_j \ \forall j \in J$ и $\varepsilon_0 > 0$, полагается $k = 0$, $i = 0$.

1. Находится точка $y_i \in M_i \bigcap D'' \bigcap E^*$, полагается $J_i = \{j \in J : y_j \notin D_j\}$.

2. Для каждого $j \in J_i$ в интервале (v^j, y_i) находится точка $z_i^j \notin intD_j$, удовлетворяющая определенному требованию. Выбирается некоторое подмножество $H_i \subset J_i$.

3. Для каждого $j \in H_i$ выбирается множество A_i^j обобщенно-опорных векторов к D_j в точке z_i^j, и полагается $M_{i+1} = Q_i \bigcap \{x \in R_n : \langle a, x - z_i^j \rangle \leq 0 \ \forall a \in A_i^j\}$. Множество Q_i задается следующим образом. Если $y_i \notin D'_{\varepsilon_k}$, то $Q_i = M_i$. В противном случае в качестве Q_i выбирается любое подмножество множества M_0, содержащее x^*, полагается $x_k = y_i$, задается $\varepsilon_{k+1} > 0$, значение k увеличивается на единицу. Далее следует переход к п. 1 при i, увеличенном на единицу.

Доказано, что при $\varepsilon_k \to 0, k \to \infty$, любая предельная точка последовательности $\{x_k\}$ принадлежит X^*. За счет выбора чисел ε_k и множеств H_i и Q_i построены различные алгоритмы метода.

При условии, что $D'' = R_n$, функции $f_j(x)$ сильно выпуклы с константами сильной выпуклости μ_j, а $f(x)$ выпукла и удовлетворяет условию Липшица с константой L, доказаны следующие оценки: $||x^* - x_k|| \leq \sqrt{\varepsilon_k/\mu}$, $|f^* - f(x_k)| \leq L\sqrt{\varepsilon_k/\mu}$, где $\mu = \min\limits_{j \in J} \mu_j$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.П. Булатов. Методы погружения в задачах оптимизации. Новосибирск.: Наука, 1977.

Заботин Игорь Ярославич, Яруллин Рашид Саматович, Казанский (Приволжский) федеральный университет, e-mail: IYaZabotin@mail.ru, YarullinRS@gmail.com

РАЗРАБОТКА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ МНОГОШАГОВЫХ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫХ МЕТОДОВ

Д.Н. Запорожец, А.В. Зыкина

Общим свойством классических итерационных методов является последовательность выполнения итераций процесса, а именно, использование на каждой итерации той информации, что получена на этой же итерации, невозможность начать вычисление очередной итерации, пока не закончится вычисление предыдущей. Использование дополнительных (прогнозных) шагов, рассматриваемое в докладе, позволяет запоминать информацию о направлении на предыдущей итерации и использовать её при вычислении очередной итерации. Таким образом эти методы могут использовать параллельные вычисления на каждой итерации.

Вычислительная схема параллельных алгоритмов строится следующим образом. Пусть итерационный процесс имеет вид: $x_k = F(x_{k-1}),\ k = 1, 2, ...,$ где F — некоторая процедура, последовательность действий, необходимая для получения следующей точки x_k. Обозначим $r_k = x_k - x_{k-1}$, построим вспомогательную точку $\hat{x}_k = x_k + r_k$ и вычислим x_{k+1} следующим образом:

$$x_{k+1} = \begin{cases} F(\hat{x}_k), ||F(x_{k+1}) - \hat{x}_k|| < \frac{(F(x_k)-x_k, \hat{x}_k - x_k)}{\|\hat{x}_k - x_k\|} \\ F(x_k), ||F(x_{k+1}) - \hat{x}_k|| \geq \frac{(F(x_k)-x_k, \hat{x}_k - x_k)}{\|\hat{x}_k - x_k\|} \end{cases}$$

Смысл предлагаемого подхода заключается в вычислении $F(x_k)$ и $F(\hat{x}_k)$ на двух процессорах. И если $F(x_k)$ и $\hat{x}_k$ оказываются достаточно близки (в смысле выполнения оценки), то в качестве следующей точки следует брать $F(\hat{x}_k)$.

Предлагаемая схема аппробирована на градиентном методе, на одношаговом экстраградиентном методе [1, 2] и на двухшаговом экстраградиентном методе [3, 4] решения вариационных неравенств, проведено сравнение эффективности этих методов.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-31360.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.М. Корпелевич. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и математические методы. 1976. Т. 12, №4. С. 747–756.

2. А.С. Антипин. О методе выпуклого программирования, использующем симметрическую модификацию функции Лагранжа // Экономика и математические методы. 1976. Т. 12, № 6. С. 1164-1173.

3. А.В. Зыкина, Н.В. Меленьчук. Двухшаговый экстраградиентный метод для вариационных неравенств. // Известия вузов. Математика. 2010. №9. С. 82–85.

4. А.В. Зыкина , Н.В. Меленьчук, Д.Н. Запорожец. Сравнительный анализ экстраградиентных методов решения вариационных неравенств для некоторых задач. // Автоматика и телемеханика. 2012. № 4. С. 32–46.

Запорожец Дмитрий Николаевич, Зыкина Анна Владимировна,
Омский государственный технический университет, Россия, e-mail: avzykina@mail.ru

ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ВОГНУТОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

И.В. Мокрый, О.В. Хамисов

В докладе рассматривается следующая задача математического программирования

$$f(x) \to \min, \tag{1}$$

$$x \in X \subset \mathbf{R}^n, \tag{2}$$

где $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — квазивогнутая функция, X — выпуклое компактное множество. Задачу (1)–(2) будем называть задачей вогнутого программирования.

Несмотря на то, что данной задаче посвящена обширная литература [1], она все ещё остаётся сложной для решения. Цель данного исследования состоит в выделении наиболее эффективных численных подходов в зависимости от разных типов задач вогнутого программирования. К таким типам можно отнести задачи минимизации квазивогнутой функции на параллелепипеде, на выпуклом многограннике, на выпуклом множестве и т.д. Эффективность методов зависит также от того является ли целевая функция квазивогнутой или вогнутой. Исследуются различные методы решения и приводятся результаты численного эксперимента по следующим направлениям:

- переборные методы;
- методы отсечений;
- методы разбиений;
- методы ветвей и границ с отсечениями.

Рассматриваются также различные задачи глобальной оптимизации, сводящиеся к решению последовательности задачи вида (1)–(2), такие, как d.c. оптимизация, липшицева оптимизация, невыпуклое квадратичное программирование и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Horst R., Tuy H. Global Optimization. (Deterministic Approaches). 3rd, revised and enlarged edition. — Berlin: Springer–Verlag. — 1996. — P. 727.

Мокрый Игорь Владимирович, Хамисов Олег Валерьевич,
ИСЭМ СО РАН, Иркутск, Россия, e-mail: khamisov@isem.sei.irk.ru

МЕТОДЫ СОПРЯЖЕННЫХ СУБГРАДИЕНТОВ В ВЫПУКЛОЙ НЕГЛАДКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Е.А. Нурминский

Вскоре после появления субградиентных методов в негладкой оптимизации [1,2] возникли и алгоритмы, напоминающие метод сопряженных градиентов [3]. Субградиентные алгоритмы нашли широкое применение в декомпозиционных схемах и были в определенных условиях весьма успешны. Вместе с тем в общем случае их сходимость гарантрируется лишь в условиях расходимости ряда шаговых множителей с их убыванием к нулю. Такие условия ведут к медленной сходимости, что стимулировало развитие альтернативных направлений, в том числе методов типа сопряженных субградиентов. В общем случае была показана сходимость таких методов к приближенному решению эстремальной задачи с весьма пессимистическими оценками по необходимым ресурсам памяти для сохранения предыстории процесса. В докладе рассмотрены основные результаты этого направления и предложен новый вариант этих алгоритмов с ограниченной памятью. Теория сходимости этих алгоитмов основана на свойствах фейеровских процессов с убывющими возмущениями [4]. Вычислительные эксперименты показали существенное ускорение сходимости как по сравнению с типичными субградиентными алгоритмами так и с имеющимися вариантами методов сопряженных субградиентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шор Н.З. Применение метода градиентного спуска для решения сетевой транспортной задачи // Материалы научного семинара по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики и исследования операций. Киев: Научный Совет по кибернетике, АН УССР. 1962. Вып. 1. С. 9–17.

2. Поляк Б.Т. Один общий метод решения экстремальных задач // Доклады АН СССР. 1967. Т. 8. С. 593–597.

3. Wolfe P. A method of conjugate subgradients for minimizing nondifferentiable functions // Mathematical Programming Study. 1975. V. 3. P. 145–173.

4. Нурминский Е.А. Фейеровские алгоритмы с адаптивным шагом // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2011. Т. 51, Вып. 5. С. 791–801.

Нурминский Евгений Алексеевич,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия,
e-mail: nurmi@dvo.ru

ОБ АДАПТАЦИИ МЕТОДА НАГРУЖЕННОГО ФУНКЦИОНАЛА К НЕСОБСТВЕННЫМ ЗАДАЧАМ МП 1-ГО РОДА

Л.Д. Попов

Доклад посвящен модификации метода нагруженного функционала [1], которая делает его применимым не только к обычным, разрешимым задачам, но и к несобственным задачам математического программирования 1-го рода. В случае разрешимости исходной задачи модифицированный метод находит ее обычное решение, а в случае несобственности — автоматически строит ее обобщенное решение, имеющее весьма естественную содержательную интерпретацию.

Рассмотрим стандартную задачу выпуклого программирования

$$\inf\{f_0(x)\colon f_j(x) \le 0 \ (j = 1, \dots, m),\ x \in R^n\}; \tag{1}$$

здесь числовые функции $f_0(x), f_1(x), \dots, f_m(x)$ всюду конечны на R^n и выпуклы. Предположим, что задача (1) — несобственная 1-го рода (противоречивая, не имеющая решения в обычном смысле). Следуя общему подходу [2], введем параметры коррекции правых частей ее ограничений $u = (u_1, \dots, u_m) \in R^m_+$, где R^m_+ — неотрицательный ортант пространства R^m, и обозначим

$$\bar{u} = \arg\inf_{u\in\Omega} ||u||, \quad \text{где } \Omega = \{u \ge 0\colon M(u) \ne \emptyset\},$$

$$M(u) = \{x\colon f_j(x) \le u_j \ (j = 1, \dots, m),\ x \in R^n\}.$$

В качестве обобщенного (в другой терминологии, аппроксимационного) решения исходной задачи рассмотрим оптимальный вектор(ы) задачи

$$\bar{v} = \inf\{f_0(x)\colon f_j(x) \le \bar{u}_j \ (j = 1, \dots, m),\ x \in R^n\}.$$

Заметим, что в собственном случае введенное нами обобщенное решение совпадает с обычным решением задачи (1).

Соотношения модифицированного метода нагруженного функционала, которому и посвящен доклад, имеют вид

$$x_k \in \operatorname{Arg\,min}_x \Phi(x, v_k), \quad v_0 < \bar{v}, \quad v_{k+1} = f_0(x_k) \qquad (k = 0, 1, \dots),$$

где, как обычно,

$$\Phi(x, v) = ([f_0(x) - v]^+)^2 + \sum_{j=1}^{m} [f_j^+(x)]^2, \quad v \in R, \quad x \in R^n.$$

В докладе обсуждаются условия сходимости модифицированного метода и результаты численных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука. 1988.

2. Еремин И.И., Мазуров Вл.Д., Астафьев Н.Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983.

Попов Леонид Денисович, Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, e-mail:popld@imm.uran.ru

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ СО СЛУЧАЙНЫМИ ДАННЫМИ

О.А. Попова

Для решения оптимизационных задач рассматривается подход, основанный на использовании численного вероятностного анализа (ЧВА). Численный вероятностный анализ — раздел вычислительной математики, предметом которого является решение задач со случайными данными [4–6]. Его основу составляют численные операции над плотностями вероятностей случайных величин, функций от случайных аргументов и вероятностные расширения. Одной из составляющих ЧВА является гистограммная арифметика, применение которой позволяет получить дополнительную информацию о распределении случайных величин [1,3]. Численные методы, основанные на ЧВА, позволяют эффективно решать некоторые оптимизационые задачи, а также системы линейных алгебраических и нелинейных уравнений со случайными параметрами [3,4]. Решение задач линейного программирования со случайными входными данными, сводится к решению соответствующих систем линейных алгебраических уравнений. Рассматриваются примеры принятия оптимальных экономических решений на основе ЧВА [2,3]. В случае эпистемистической неопределенности используются гистограммы второго порядка [5,6].

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Герасимов, Б.С. Добронец, М.Ю. Шустров. Численные операции гистограммной арифметики и их применения. // АиТ. 1991. 2. С. 83–88.

2. Б.С. Добронец, О.А. Попова. Применение гистограммной математики в экономических задачах исследования операций. — VI Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2010): Москва, 19–23 октября 2010 г.: Труды / П.С. Краснощеков, А.А. Васин (Отв. ред.) М.: МАКС Пресс, 2010. С. 90–92.

3. Б.С. Добронец, О.А. Попова. Численные операции над случайными величинами и их приложения. // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2011. 4(2). С. 229–239.

4. Б.С. Добронец, О.А. Попова. Элементы численного вероятностного анализа. Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета. 2012. 2(42), С. 19–23.

5. Б.С. Добронец, О.А. Попова. Численный вероятностный анализ для исследования систем в условиях неопределенности. Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2012. 21(4) С. 39–46

6. B.S. Dobronets, O.A. Popova. Numerical probabilistic ananlysis under aleatory and epistemic uncertainty. 15th GAMM-IMACS Iternational Symposium SCAN'12, Book of Abstacts, Novosibirsk, Russia, Institute of Computational Technologies, 2012, pp. 33–34

Попова Ольга Аркадьевна, Сибирский федеральный университет,
Красноярск, Россия, e-mail:olgaarc@yandex.ru

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ ПРОТИВОРЕЧИВЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В.Д. Скарин

Рассмотрим задачу выпуклого программирования (ВП)

$$\min\{f_0(x) : x \in X\}, \tag{1}$$

где $X = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \ldots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — выпуклые на $\mathbb{R}^n$ функции $(i = 0, 1, \ldots, m)$. Построим для задачи (1) функцию Лагранжа $L(x, \lambda) = f_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)$, $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_m] \geq 0$. Обозначим $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+ : \inf\limits_x L(x, \lambda) > -\infty\}$. Будем считать, что допустимое множество X задачи (1) может быть пустым. В случае пустоты множества X согласно классификации из [1] задача (1) будет несобственной (НЗ) 1-го рода, если $\Lambda \neq \varnothing$, и несобственной 3-го рода, если $\Lambda = \varnothing$. Пусть $X_\xi = \{x : f(x) \leq \xi\}$, $\xi \in \mathbb{R}^m_+$, $E = \{\xi : X_\xi \neq \varnothing\}$. В качестве оптимальной коррекции (аппроксимации) для (1) рассматривается задача

$$\min\{f_0(x) : x \in X_{\bar{\xi}}\}, \tag{2}$$

где $\bar{\xi} = \arg\min\{\|\xi\|_2 : \xi \in E\}$. В работе исследуется метод оптимальной коррекции, т. е. метод отыскания параметра $\bar{\xi}$ и решения задачи (2), основанный на применении регуляризованной функции Лагранжа $\Lambda_\sigma(x, \lambda) = \Lambda(x, \lambda) + \alpha\|x\|_2^2 - \beta\|\lambda\|_2^2$, где $\sigma = [\alpha, \beta] \in \mathbb{R}^2$, $\sigma > 0$. Функция $\Lambda_\sigma(x, \lambda)$ для любого $\sigma > 0$ имеет единственную седловую точку $[x^\sigma, \lambda^\sigma]$ в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$ независимо от наличия допустимых точек в задаче (1). Этот факт может служить обоснованием применимости функции $\Lambda_\sigma(x, \lambda)$ для построения на ее основе методов коррекции НЗ ВП.

Обычно сходимость $[x^\sigma, \lambda^\sigma]$ к решению задачи (2) и двойственной к ней доказывалась (см., например, [2]) в предположении ограниченности множества X_ξ для некоторого ξ. Это условие гарантировало существование и единственность вектора $\bar{\xi}$ и разрешимость задачи (2). Кроме того, при выводе оценок сходимости метода предполагалась разрешимость двойственной к (2) задачи, что в свою очередь требовало выполнения для задачи (2) условий регулярности. В данной работе обсуждается случай неограниченности множества X_ξ, а также ситуация, когда двойственная задача не имеет решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00210, 13-07-00181) и программ Президиума УрО РАН (проекты 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1).

ЛИТЕРАТУРА

1. И.И. Еремин, В.Д. Мазуров, Н.Н. Астафьев. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983.

2. В.Д. Скарин. О применении одного метода регуляризации для коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 230–241.

Скарин Владимир Дмитриевич, Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия, e-mail: skavd@imm.uran.ru

НАХОЖДЕНИЕ РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ КВАДРИКАМИ

Г.Ш. Тамасян, А.А. Чумаков

Задача. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Найти расстояние между квадриками H_1 и H_2, где

$$H_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \frac{1}{2} x^T A_k x + x^T B_k + C_k = 0 \right\}, \quad k = 1, 2,$$

A_k — постоянные и симметричные $(n \times n)$-матрицы, B_k — постоянные вектор-столбцы $(n \times 1)$, $C_k \in \mathbb{R}$ — константы. Предполагается, что матрица A_1 — положительно определенная.

Поставленная задача возникает в вычислительной геометрии. Классическим методом решения подобных задач на условный экстремум является метод множителей Лагранжа (или его модификации), где для поиска подозрительных на экстремум точек требуется решить систему алгебраических уравнений, как правило, нелинейную. Для решения последних могут применяться численные методы, либо аналитические [1] (где используется аппарат многомерных результантов для исключения переменных в системах алгебраических уравнений).

Доклад посвящен решению поставленной задачи, опираясь на аппарат негладкого анализа и теории точных штрафных функций [2]. Составим точную штрафную функцию

$$\Phi_\lambda(x, y) = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + \lambda \left(\left| \frac{1}{2} x^T A_1 x + x^T B_1 + C_1 \right| + \left| \frac{1}{2} y^T A_2 y + y^T B_2 + C_2 \right| \right), \qquad (1)$$

где λ — фиксированное число, удовлетворяющее неравенству $\lambda > \lambda^* \geqslant 0$, λ^* — константа точного штрафа. Таким образом, исходная задача с ограничениями сведена к безусловной задаче, а именно, к минимизации функции $\Phi_\lambda(x, y)$ на всем пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

В докладе будет рассказано о двух итерационных методах (наискорейшего и гипердифференциального) спуска, с помощью которых строятся минимизирующие последовательности для функционала (1). Следует отметить, что основные трудоемкие шаги указанных алгоритмов, а именно, поиск направления спуска и величины шага спуска, в рамках данной задачи вычисляются по аналитическим формулам.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00752.

ЛИТЕРАТУРА

1. Утешев А.Ю., Яшина М.В. Нахождение расстояния от эллипсоида до плоскости и квадрики в $\mathbb{R}^n$// Доклады АН. 2008. Т. 419, № 4. с. 471–474.

2. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационные задачи. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.

Тамасян Григорий Шаликович, Чумаков Андрей Александрович
Санкт-Петербургский государственный университет,
e-mail: grigoriytamasjan@mail.ru, katandrew@mail.ru

ПОИСК ПОТОКОВОГО РАВНОВЕСИЯ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ПРОПУСКНУЮ СПОСОБНОСТЬ СЕТИ

Н.Б. Шамрай

Данное исследование является продолжением работ [1,2] в области моделирования и поиска потокового равновесия в транспортных сетях. Основной критикой рассматриваемых ранее моделей потокового равновесия является отсутствие ограничений на пропускную способность элементов транспортной сети, которые в свою очередь весьма естественны для задач данного класса [3].

В работе транспортная сеть описывается в виде ориентированного графа $G(V, E)$, где V — множество вершин, E — множество дуг сети. В сети G выделяется множество W потокообразующих пар "источник-сток" и множество P_w возможных путей, соединяющих пару $w \in W$. Спрос на перевозки для пары $w \in W$ равен d_w. Задача потокового равновесия с ограничениями на пропускную способность сети состоит в поиске потоков $x^* = (x_p^* : p \in P_w,\ w \in W)$ таких, что

$$F_p(x^*) = \min_{q \in P_w} F_q(x^*),\ \text{если } x_p^* > 0,\ p \in P_w,\ \sum_{p \in P_w} x_p^* = d_w,\ x_p^* \geq 0,\ p \in P_w,\ w \in W, \quad (1)$$

$$\sum_{p \in P_e} x_p^* \leq c_e,\ e \in E, \quad (2)$$

где $F_p(x)$ — функция издержек на передвижение по пути p, P_e — множество путей, проходящих по дуге $e \in E$, c_e — пропускная способность дуги $e \in E$.

Добавление ограничения на пропускную способность (2) к традиционной постановке задачи потокового равновесия (1), значительно усложняет применение разработанных ранее эффективных методов ее решения, например метода, описанного в [1], поэтому требуется разработка новых подходов к решению (1)–(2).

В докладе будет описан опыт решения задачи (1)–(2) с использованием идей построения независимых множеств и адаптивным выбором шагового множителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шамрай Н.Б. Поиск потокового равновесия проективными методами с использованием декомпозиции и генерации маршрутов // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 150–165.

2. Нурминский Е.А., Шамрай Н.Б. Прогнозное моделирование автомобильного трафика Владивостока // Труды Московского физико-технического института. 2010. Т. 2. № 4(8). С. 119–129.

3. Nesterov Yu., De Palma A. Stationary dynamic solutions in congested transportation networks: summary and perspectives // Networks and Spatial Economics. 2003. № 3. P. 371–395.

Шамрай Наталья Борисовна,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия,
e-mail: shamray@dvo.ru

A MATHEURISTIC FOR THE DISCRETE $(R|P)$-CENTROID PROBLEM WITH MULTIPLE OBJECTIVES FOR THE FOLLOWER

E. Alekseeva, Yu. Kochetov, El-Gh. Talbi

Two players, a leader and a follower, open their own facilities in turn in a given market. They compete with each other for customers' demands in cooperative manner. Each customer patronizes the closest facility opened either by the leader or by the follower. The goal is to find p facilities for the leader to maximize his market share anticipating that the follower will open r facilities to maximize his own multiple objectives.

We present this Stackelberg game as a discrete bi-level mixed integer linear program with multiple criteria at the lower level. For finding a feasible solution to the problem, we have to choose the best solution on Pareto frontier for a given solution of the leader [2]. This subproblem is reformulated as a mixed integer linear program with the large number of constraints. We design an iterative exact method for the subproblem based on this representation. To find a near optimal solution for the leader, we apply a stochastic tabu search method [1].

Computational experiments were conducted for the $(r|p)$-centroid problem with two criteria at the lower level. The proposed approach is compared with another one where the well-known two-phase method [3] is applied for the follower's subproblem. Our preliminary computational experiments on the Euclidean test instances with 100 potential facilities and customers, and $p = r = 10$ show that the size of Pareto frontier is small. Thus the feasible solutions for the bi-level problem can be found easily and the method is able to find the optimal or near optimal solutions for the entire bi-level problem.

This research was partially supported by RFBR grants 12-01-31090, 12-01-00077 and 13-07-00016. The work of the first author was partially carried out during the tenure of an ERCIM "Alain Bensoussan" Fellowship Programme. The research leading to these results has received funding from FP7/2007-2013 under grant agreement N246016.

REFERENCES

1. E. Alekseeva, Yu. Kochetov. Matheuristics and exact methods for the discrete $(r|p)$-–centroid problem // El-G. Talbi, L. Brotcorne (eds.) Metaheuristics for bi-level optimization. Springer. 2013. (upcoming publication)

2. Herminia I. Calvete, Carmen Galé. On linear bilevel problems with multiple objectives at the lower level. // The Int. J. Management Science Omega. 2011. V. 39. P. 33–40.

3. E. Ulungu, J. Teghem. The two phases method: an efficient procedure to solve bi-objective combinatorial optimization problems. Foundations of Computing and Decision Sciences. 1995. V. 20(2). P. 149–165.

Alekseeva Ekaterina, Talbi El-Ghazali, INRIA Lille Nord Europe, France,
e-mail: katerina.alekseeva@gmail.com, El-ghazali.Talbi@lifl.fr
Kochetov Yury, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia,
e-mail: jkochet@math.nsc.ru

О ЗАДАЧЕ КОНКУРЕНТНОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ СО СВОБОДНЫМ ВЫБОРОМ ОБСЛУЖИВАЮЩЕГО ПРЕДПРИЯТИЯ

В.Л. Береснев

Рассматривается математическая модель, в которой две соперничающие стороны последовательно размещают свои предприятия, имея целью захватить потребителей и максимизировать прибыль. Модель представляется в виде задачи двухуровневого целочисленного программирования, где в качестве оптимальных решений рассматриваются оптимальные некооперативные решения [1, 2].

Вид задачи конкурентного размещения предприятий зависит от того, какие принимаются предположения относительно, например, выбора сторонами открытого предприятия для обслуживания данного потребителя. В [1, 2] рассматриваются модели, в которых используется правило "жесткого" выбора, когда выбирается наиболее предпочтительное для данного потребителя открытое предприятие.

В исследуемой в работе модели используется правило свободного выбора обслуживающего предприятия. Каждая из сторон для обслуживания потребителя может использовать любое открытое предприятие, которое предпочтительнее для данного потребителя всякого предприятия, открытого другой стороной.

При построении алгоритмов поиска решений задач последовательного конкурентного размещения предложенным в [1, 2] методом важным являются следующие два положения. Во-первых, возможность представить задачу как задачу максимизации некоторой псевдобулевой функции от малого числа переменных по сравнению с исходной задачей и, во-вторых, эффективно вычислять верхнюю границу значений этой функции на подмножествах, задаваемых частичными решениями.

В работе показано, что в случае задачи конкурентного последовательного размещения предприятий со свободным выбором обслуживающего предприятия оба указанных предложения могут быть эффективно реализованы.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00077.

ЛИТЕРАТУРА

1. Береснев В.Л., Мельников А.А. Приближённые алгоритмы для задачи конкурентного размещения предприятий // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т. 17, № 6. С. 3–19.

2. Береснев В.Л. Алгоритмы локального поиска для задачи конкурентного размещения предприятий // Автоматика и телемеханика. 2012 № 3 С. 12–27.

Береснев Владимир Леонидович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
e-mail: beresnev@mail.ru.

FAST MATHEURISTICS FOR THE DISCRETE $(r|p)$-CENTROID PROBLEM

I. Davydov, Yu. Kochetov, N. Mladenović, D. Urosevic

This paper addresses the following Stackelberg facility location game. Two decision makers, a leader and a follower, compete to attract customers from a given market. The leader opens p facilities, anticipating that the follower will react to the decision by opening own r facilities. Each customer patronizes the closest facility. The goal is to find p facilities for the leader to maximize his market share. It is known that this problem is Σ_2^P-hard. We present this game as a mixed integer linear bi-level program. Based on this representation, we design local search heuristics and apply classical mathematical programming tools for the follower problem.

Variable neighborhood search (VNS) and stochastic tabu search (STS) methods are used and compared for this problem. The main idea of the methods is to apply the well-known frameworks of these local search approachers for the leader variables and use exact methods for the follower problem in order to calculate the market share of the players. The sticking point of this approach is the follower problem. It is NP-hard in the strong sense. Thus, we need fresh ideas for accelerating the local search. The VNS and STS matheuristics use the Swap neighborhood for the leader variables. To reduce the running time of each iteration, we divide the Swap neighborhood into three subneighborhoods:

— Fswap where each leader facility is swaped with each follower facility;

— Nswap where each leader facility is swaped with a nearby facility;

— Cswap = Swap \ (Fswap ∪ Nswap).

We apply the first improvement rule and investigate Fswap neighborhood as the most prominent part. In case of no improvements, we check Nswap neighborhood. Cswap neighborhood is verified in the last turn. Moreover, we apply local search again to evaluate the neighboring solutions. Thus, we use exact method for the follower problem in only the case when the current solution is replaced to the best found neighboring solution. Finally, we apply the idea of randomization to the Cswap neighborhood and investigate a random part of this set neighboring solutions. Computational results for the benchmarks from the library *Facility Location Problems* confirm the value of the methods.

Ivan Davydov, Novosibirsk State University, Novosibirsk, e-mail: vann.davydov@gmail.com
Yury Kochetov, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, e-mail: jkochet@math.nsc.ru
Nenad Mladenović, School of Mathematics, Brunel University, London, UK
e-mail: Nenad.Mladenovic@brunel.ac.uk
Dragan Urosevic, Mathematical Institute Serbian Academy of Sceinces and Arts, Belgrad, Serbia, e-mail: draganu@mi.sanu.ac.rs

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХУРОВНЕВЫХ И ДВУХЭТАПНЫХ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С КВАНТИЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ

А.И. Кибзун, А.В. Наумов, С.В. Иванов

Задачи двухуровневой оптимизации являются предметом интенсивного изучения как зарубежных [1], так и российских специалистов [2]. В данной работе рассматривается двухуровневая задача стохастического линейного программирования с квантильным критерием. Задача лидера представляет из себя задачу минимизации функции квантили, то есть минимального уровня потерь лидера, непревышение которого гарантируется с доверительной вероятностью α:

$$\min_{\varphi\in\mathbb{R}}\{\varphi \mid \mathbf{P}\{c_1^{\mathrm{T}}u + \Phi(u,X) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\} \to \min_{u\in U}, \tag{1}$$

где $u \in \mathbb{R}^n$ — стратегия лидера, $U \triangleq \{u \mid A_1u \leqslant b_1\}$, X — случайный вектор с реализациями $x \in \mathbb{R}^m$, $c_1 \in \mathbb{R}^n$, $A_1 \in \mathbb{R}^{l\times n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^l$. Функция $\Phi(u,x)$ имеет вид

$$\Phi(u,x) \triangleq \begin{cases} \min\limits_{y^*\in Y^*(u,x)} f^{\mathrm{T}}y^*, & \text{если } Y^*(u,x) \neq \varnothing, \\ +\infty, & \text{если } Y^*(u,x) = \varnothing, \end{cases} \tag{2}$$

где $Y^*(u,x) \triangleq \operatorname{Arg}\min\limits_{y\in\mathbb{R}^k}\{c_2^{\mathrm{T}}y \mid A_2u+B_2y \geqslant x, y \geqslant 0\}$ — множество оптимальных стратегий последователя, $c_2, f \in \mathbb{R}^k$, $A_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{m\times k}$. Задачу (1), (2) будем называть двухуровневой задачей квантильной оптимизации в оптимистической постановке.

Доказывается теорема о непрерывности при определенных условиях целевой функции (1). Приводятся достаточные условия существования решения задачи. Предлагается метод сведения задачи (1) к нелинейной двухэтапной задаче стохастического программирования с квантильным критерием. Данный метод основан на использовании необходимых и достаточных условий оптимальности решения задачи линейного программирования.

Для частного случая дискретного распределения случайного вектора X приводится эквивалентная задача в виде смешанной задачи линейного программирования, в которой введены дополнительные целочисленные переменные, соответствующие реализациям случайного вектора и нелинейным ограничениям эквивалентной задачи.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-07-13108-офи_м_РЖД.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Dempe. Foundations of Bilevel Programming. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

2. В.Л. Береснев. Верхние оценки для целевых функций дискретных задач конкурентного размещения предприятий // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т. 15. №4. С. 3–24.

Кибзун Андрей Иванович, МАИ, Москва, Россия, e-mail: kibzun@mail.ru
Наумов Андрей Викторович, МАИ, Москва, Россия, e-mail: naumovav@mail.ru
Иванов Сергей Валерьевич, МАИ, Москва, Россия, e-mail: sergeyivanov89@mail.ru

РАНДОМИЗИРОВАННЫЙ ЛОКАЛЬНЫЙ ПОИСК ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ КОНКУРЕНТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ

А. А. Мельников

Рассматривается модель конкурентной борьбы между двумя сторонами. Стороны открывают предприятия с целью максимизации дохода, получаемого от обслуживания клиентов. Множество мест, доступных для размещения предприятий, а также множество клиентов конечны. Каждый клиент выбирает обслуживающее его предприятие исходя из собственных известных предпочтений. Процесс принятия решений может рассматриваться как игра Штакельберга: на первом шаге одна из сторон, называемая Лидером, открывает свои предприятия. Другая сторона, называемая Последователем, учитывая решение Лидера, открывает предприятия на втором шаге. После этого каждый из клиентов выбирает одно из открытых предприятий для своего обслуживания. Требуется найти размещение предприятий Лидера, максимизирующее доход от обслуживания клиентов за вычетом стоимости открытых предприятий, учитывая дальнейшее появление конкурирующих предприятий Последователя.

Задача может быть записана в виде двухуровневой смешанно–целочисленной модели. Задачи верхнего и нижнего уровня данной модели являются задачами размещения предприятий с порядками [1]. Вычисление значения целевой функции Лидера требует нахождения оптимального решения задачи нижнего уровня, поэтому исследуемая задача является более сложной, чем большинство известных NP–трудных задач.

В связи с высокой вычислительной сложностью задачи, разработка методов поиска приближенных решений становится перспективным направлением исследований. Заметную роль среди таких методов играют методы, основанные на локальном поиске [2,3]. В данной работе предлагается метод, основанный на конструкции, предложенной в [4]. Результаты численных экспериментов показывают применимость метода к решению задач большой размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lazaro Canovas, Sergio Garcia, Martine Labbe, Alfredo Marin. A strengthened formulation for the simple plant location problem with order. // Operations Research Letters. 2007. V. 35. P. 141–150.

2. Beresnev V. L., Melnikov A. A. Approximate Algorithms for the Competitive Facility Location Problems. J. Appl. Indust. Math. 2011; 5: 180–190.

3. Beresnev V. L., Goncharov E. N., Mel'nikov A. A. Local search with a generalized neighborhood in the optimization problem for pseudo-Boolean functions. J. Appl. Indust. Math. 2012; 1: 22–30.

4. Kernighan B. W., Lin S. An efficient heuristic procedure for partitioning graphs. // Bell System Technical Journal. 1970; 49: 291–307.

Мельников Андрей Андреевич, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, e-mail: melnikov@math.nsc.ru

НОВАЯ МОДЕЛЬ КОНКУРЕНТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ И ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

А.В. Плясунов, А.А. Панин, М.Г. Пащенко

В работе рассматривается следующая игра Штакельберга. Задано конечное множество пунктов размещения и конечное множество рынков. Первым ходом лидер размещает свои предприятия, затем свой выбор делает конкурент. Предполагается, что предприятия производят однородный продукт. У каждого игрока имеются ограничения на бюджет для открытия предприятий. Для каждого рынка и предприятия известна общая себестоимость производства и доставки товара потребителям рынка. После того как выбраны предприятия процесс ценообразования на каждом рынке реализуется в виде игры Бертрана. В результате ценовой конкуренции рынки будут поделены между лидером и конкурентом. Предприятие лидера захватывает рынок, если себестоимость поставляемого им продукта минимальна среди всех открытых предприятий. Оставшиеся рынки захватываются предприятиями конкурента. Монополист на каждом своём рынке устанавливает монопольную цену и получает прибыль равную произведению величины спроса на разность монопольной цены и себестоимости. Прибыль игрока складывается из прибыли с каждого из монополизированных им рынков. Цель игры лидера – выбрать такое множество пунктов размещения при заданном бюджетном ограничении, которое позволяет монополизировать рынки, доставляющие максимальную прибыль.

В работе предложена математическая модель данной игры в виде задачи двухуровневого линейного булевого программирования. Эта модель позволяет разрабатывать приближённые алгоритмы на основе идей изложенных в [1]. Подход к моделированию процессов размещения и ценообразования реализованный в данной работе позволяет анализировать разные постановки. В частности, можно исследовать вопросы связанные с эластичностью спроса. Например, такая ситуация возможна, когда спрос на каждом рынке зависит только от цены продукта и определяется некоторой убывающей функцией.

При исследовании вычислительной сложности полученных двухуровневых задач, показано, что задача, в которой прибыль на рынке определяется монотонно невозрастающей функцией от себестоимости продукции монополиста, является $\sum_2^p$-трудной. При этих же условиях показано, что задача принадлежит классу *poly-APX*.

Работа поддержана грантами РФФИ 13-07-00016, 13-06-00023, 12-01-31090.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Carrizosa, I. Davydov, and Yu. Kochetov. A new alternating heuristic for the $(r|p)$–centroid problem on the plane. Operations Research Proceedings 2011. Springer, 2012. P. 275–280.

Панин Артём Александрович, Пащенко Михаил Георгиевич,
Плясунов Александр Владимирович, ИМ СО РАН, НГУ, Новосибирск, Россия,
e-mail: arteam1897@gmail.com, pashch@ngs.ru, apljas@math.nsc.ru

ON-LINE ALGORITHMS FOR THE PROBLEM OF FINDING MAXIMUM OF THE SMOOTH FUNCTION

Yu. Velikanova

In this paper we consider an on-line problem which is connected with auto-focusing of a camera. A function $f(x)$ is smooth and it has the only maximum on the interval $[0, L]$. The values of $f(x)$ are unknown. We have a measuring device. Originally the device is located at point 0. For every point $x \in [0, L]$ the device can move to x and it can compute the value of $f(x)$. The measuring device spends an energy for moving to the point x and computing $f(x)$. The energy consumption depends on length, on which the device moves. We want to localize the maximum of the $f(x)$ in the ε-interval so as to minimize the energy consumption. For localization of the maximum we have to choose the sequence of the points $x_i \in [0, L]$, which leads us to the required ε-interval.

First, we consider two the well-known algorithms: Golden Section Search and Dichotomy. For these algorithms we study their worst case ratio and the best case ratio. The ratios depend on the length L. We also present three new algorithms. Two of them are based on Golden Section Search and Dichotomy algorithm. The first one calculates the value of $f(x)$ and the additional value of $f(x + \varepsilon)$. The value of $f(x + \varepsilon)$ allows to determine the direction of the gradient. The second algorithm combines good features of Golden Section Search and Dichotomy. The worst case and the best case ratios of these two algorithms are better than Golden Section Search and Dichotomy algorithm have, but the ratios still depend on length L. Next, we propose the algorithm with a constant competitive ratio. We partition the interval $[0, L]$ into disjoint subinterval of the form $[(2^{i-1} - 1)\varepsilon, (2^i - 1)\varepsilon]$. Starting from the left the algorithm tries to localize the maximum inside each subinterval or prove that it is not there. When algorithm localizes the maximum, it stops.

REFERENCES

1. Krotkov E. Focusing. // International Journal of Computer Vision. 1987. N. 1. P. 223–237.

2. Amos Fiat, Gerhard J. Woeginger. Online Algorithms The State of the Art// Springer, 1998, P. 13–16.

Velikanova Julia, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia,
e-mail: julia.velikanova@gmail.com

ОПТИМИЗАЦИЯ МОДУЛЯРНЫХ И СУПЕРМОДУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ НА ПОРЯДКОВЫХ ИДЕАЛАХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

М.Ю. Выплов, В.П. Ильев

Рассматриваются оптимизационные задачи на порядковых идеалах и L-матроидах в конечных геометрических решетках. Подмножество I решетки L называется *порядковым идеалом*, если для любых $x, y \in L$ выполняется условие $(x \in I, y \leq x) \Rightarrow y \in I$. В булевой решетке всех подмножеств конечного множества понятию порядкового идеала соответствует понятие системы независимости. Дунстан, Инглтон и Уэлш [1] ввели понятие суперматроида как обобщение понятия матроида в частично упорядоченном множестве с нулем. Для конечной решетки L это определение приобретает следующий вид. Пусть I — порядковый идеал в L. Он называется *суперматроидом* или *L-матроидом*, если для любого $x \in L$ все максимальные элементы из $I \cap [0, x]$ имеют одинаковую высоту. Функция $f : L \to R_+$ называется *супермодулярной* на решетке L, если для любых $x, y \in L$ выполняется неравенство $f(x \vee y) + f(x \wedge y) \geq f(x) + f(y)$. В случае равенства функция f называется *модулярной* на решетке L.

Рассматриваются следующие оптимизационные задачи в геометрических решетках:

$$\max\{w(x) : \ x \text{ — максимальный элемент (база) } I\}, \tag{1}$$

$$\min\{f(x) : \ x \text{ — максимальный элемент (база) } I\}, \tag{2}$$

где I — порядковый идеал конечной геометрической решетки L, $w : L \to R_+$ — неубывающая модулярная функция, $w(0) = 0$, $f : L \to R_+$ — неубывающая супермодулярная функция, $f(0) = 0$.

Получена гарантированная оценка точности жадного алгоритма для задачи (1), обобщающая известную оценку Дженкинса-Корте-Хаусмана [2] для систем независимости. Оценка получена в терминах кривизны порядкового идеала — параметра, характеризующего близость порядкового идеала к L-матроиду. Для задачи (2) на L-матроиде, обладающем свойством, аналогичным аксиоме пополнения для независимых множеств матроида, получена гарантированная оценка точности жадного алгоритма в терминах кривизны целевой функции — параметра, характеризующего ускорение возрастания супермодулярной функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Dunstan, A. Ingleton, D. Welsh. Supermatroids // D. Welsh, D. Woodal (eds.) Combinatorics. Southend-on Sea. 1972. P. 72-122.

2. B. Korte, D. Hausmann. An analysis of the greedy heuristic for independence systems // Annals of Discrete Math. 1978. V. 2. P. 65-74.

Выплов Михаил Юрьевич, Ильев Виктор Петрович,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия,
e-mail: vyplov@omsu.ru, iljev@mail.ru

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ 3-ИНДЕКСНОЙ m-СЛОЙНОЙ ПЛАНАРНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ НА ОДНОЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДСТАНОВКАХ

Э.Х. Гимади, Ю.В. Глазков, О.Ю. Цидулко

Пусть дана $n \times n \times n$ матрица $C = (c_{ijk})$ с неотрицательными элементами. Трехиндексная планарная задача о назначениях (3-ПЗН) [3,4] заключается в нахождении n подстановок $\pi^1, ..., \pi^n$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{i,k,\pi^i(k)} \longrightarrow \min \text{ (или } \max)$$

$$\pi^i(k) \neq \pi^j(k),\ 1 \leq k \leq n,\ 1 \leq i < j \leq n$$

Та же задача, в которой входная матрица $C = (c_{ijk})$ — $m \times n \times n$ матрица, где $1 < m < n$, называется m-слойной 3-индексной планарной задачей о назначениях (m-3-ПЗН) [1,2]. Эта задача NP-трудна, поскольку ее можно понимать как задачу 3-ПЗН, в которой $c_{ijk} = 0$ для $i > m$.

В данной работе рассматриваестя m-3-ПЗН на одноциклических подстановках (m-3-ПЗНО), являющаяся, в общем случае, задачей m коммивояжеров с различными весовыми функциями их маршрутов. Задача NP-трудна. Для $1 < m < n/4$ построен приближенный полиномиальный алгоритм решения задачи с временной сложностью $O(mn^2)$. Получены оценки качества его работы в случае, когда входные данные (элементы матрицы $m \times n \times n$) являются независимыми случайными величинами с общей функцией равномерного распределения на отрезке $[a_n, b_n]$, где $0 < a_n < b_n$. Получены условия асимптотической точности алгоритма, верные также в случае функции распределения мажорирующего типа.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00093а, 13-07-00070а, 12–01–33028а и 13-01-91370СТ-а), целевых программ СО РАН (интеграционный проект № 7Б) и Президиума РАН (проект № 227).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э. Х., Глазков Ю. В. Об асимптотически точном алгоритме решения одной модификации планарной трехиндексной задачи о назначениях. Дискретный анализ и исследование операций, Сер. 2, Т. 13, № 1. 2006. С. 10–26.

2. Гимади Э.Х., Коркишко Н.М. Об одном алгоритме решения трехиндексной аксиальной задачи о назначениях на одноциклических подстановках. Дискретный анализ и исследование операций, Сер. 1. Новосибирск, 2003, Т. 10, № 2, С. 35–45.

3. Burkard R., Dell'Amico M., Martello S. Assignments. SIAM, Philadelphia, 2009, 382 p.

4. Spieksma F. C. R. Multi index assignment problems: complexity, approximation, applications. Nonlinear assignment problems, algorithms and applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. P. 1–12.

Гимади Эдуард Хайрутдинович, ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия,
Цидулко Оксана Юрьевна, Новосибирский государственный университет,
e-mail: gimadi@math.nsc.ru; tsidulko.ox@gmail.com

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ПРИБЛИЖЕННОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ЗАДАЧИ О МИНИМАЛЬНОМ ОСТОВНОМ ДЕРЕВЕ С ОГРАНИЧЕННЫМ СНИЗУ ДИАМЕТРОМ

Э. Х. Гимади, Е. В. Шин

Дан полный неориентированный реберно-взвешенный граф G_n с множеством вершин $\{1, \ldots, n\}$, натуральное число $d_n < n$ и симметричная $(n \times n)$-матрица (c_{ij}) расстояний (весов ребер графа), где диагональные элементы равны нулю. Задача заключается в отыскании такого остовного дерева D_n минимального веса, что диаметр его не меньше d_n.

Задача NP-трудна при $d_n = n - 1$ как классическая задача отыскания минимальной гамильтоновой цепи в G_n. Более того, если d_n — константа, то задача полиномиально разрешима посредством полного полного перебора всех простых цепей, состоящих ровно из d_n ребер.

В работе [1] был представлен приближенный алгоритм с трудоемкостью $O(n^2)$ и даны условия его асимптотической точности в случае весов ребер, выбираемых случайно, независимо и равновероятно из отрезка $[a_n, b_n], a_n > 0$.

В данном докладе рассматривается класс матриц с весами ребер, выбираемых случайно и независимо из неограниченного сверху интервала $[a_n, \infty), a_n > 0$ с непрерывной функцией распределения.

Проведен вероятностный анализ алгоритма из [1] в случае усеченно-гауссового и экспоненциального распределений. Получены оценки качества алгоритма (относительной погрешности решения и вероятности несрабатывания), а также представлены условия асимптотической точности алгоритма.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00093, 12-01-33028-мола-вед, 13-01-91370ST-а), целевой программы резидиума РАН (проект № 227) и междисциплинарного интеграционного проекта ИМ СОРАН (№ 7Б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э.Х., Сердюков А.И. Об одном алгоритме нахождения минимального остова с ограниченным снизу диаметром // Дискр. анализ и исслед. операций, Сер. 1, 2000, Том 7, № 2, С. 3–11.

Гимади Эдуард Хайрутдинович, ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия
Шин Екатерина Викторовна, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия e-mail: gimadi@math.nsc.ru; Shinus90@ya.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ НА РАЗМЕЩЕНИЯХ С ЕДИНИЧНОЙ СУММОЙ

О. А. Емец, А. О. Емец

Рассмотрим решение методом ветвей и границ задачи

$$\sum_{j=1}^{k} c_j x_j \to \min; x = (x_1, ..., x_k) \in E^k_{\eta\nu}(G); \sum_{j=1}^{k} x_j = 1, \quad (1)$$

где $G = \{g_1, ..., g_\eta\}$ - известное мультимножество, $g_j \in R^1$.

Пусть: $c_{\alpha_1} \geq c_{\alpha_2} \geq ... \geq c_{\alpha_l} \geq 0 > c_{\alpha_{l+1}} \geq ... \geq c_{\alpha_k}$, $g_1 \leq ... \leq g_k \leq g_{k+1} \leq ... \leq g_\eta$.

Ветвим допустимое множество, определяя переменные в $x \in E^k_{\eta\nu}$ в порядке номеров $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{l-1}, \alpha_l$, а затем - $\alpha_k, \alpha_{k-1}, ..., \alpha_{l+2}, \alpha_{l+1}$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_l$ последовательно значениями $g_1, g_2, ...$, а переменным с номерами $\alpha_k, \alpha_{k-1}, ..., \alpha_{l+1}$ - последовательно значения $g_\eta, g_{\eta-1}, ...$

Если для подмножества Q оценка $\xi \geq F_0 = F(x_0)$ - значение целевой функции на одноэлементном допустимом множестве x_0, то Q - отсекается. Если $F_0 < F_1 = F(x_1)$, то $F_0 := F_1$. Если $\xi \geq F_0$, то множество Q отсекают.

Рассмотрим способ оценивания допустимых подмножеств решений.

Пусть в Q уже определены переменные $x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, ..., x_{\beta_t}$, пронумеруем их так, чтобы выполнялось соотношение: $c_{\beta_1} \geq c_{\beta_2} \geq ... \geq c_{\beta_t}$.

Неопределенные в Q переменные обозначим $\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_\tau$, $t + \tau = k$. Пронумеруем их так, чтобы для коефициентов $\tilde{c}_j$ при переменных $\tilde{x}_j$ $\forall j \in J_\tau$ выполнялось: $\tilde{c}_1 \geq \tilde{c}_2 \geq \tilde{c}_\lambda \geq 0 > \tilde{c}_{\lambda+1} \geq ... \geq \tilde{c}_\tau$.

Значения t переменных $x_{\beta_1} = g_{i_1}, ..., x_{\beta_t} = g_{i_t}$, определяющих подмножество Q, объединим в мультимножество $G_B = \{g_{i_1}, ..., g_{i_t}\}$. Тогда значения неопределенных переменных выбираются из мультимножества $\tilde{G} = G - G_B = \{\tilde{g}_1, ..., \tilde{g}_\chi\}$, $\chi + t = \eta$. Пусть элементы $\tilde{G}$ пронумерованы так, что $\tilde{g}_1 \leq \tilde{g}_2 \leq ... \leq \tilde{g}_\chi$.

Теорема 1. Оценкой ξ подмножества Q множества допустимых решений задачи (1) является величина $\xi = \nu + c^*$, где $\nu = \sum_{p=1}^{t} c_{\beta_p} g_{i_p}$, а $c^* = \sum_{j=1}^{\lambda} \tilde{c}_j \tilde{g}_j + \sum_{j=1}^{\tau-\lambda} \tilde{c}_{\lambda+j} \tilde{g}_{\chi-\tau+\lambda+j}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Емец О. А., Емец А. О. Решение линейной задачи евклидовой комбинаторной оптимизации на размещениях с условием постоянства суммы элементов размещения // Кибернетика и системный анализ. - 2012. - № 4. - С. 83-94.

2. Ємець О. О., Ємець Ол-ра О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах: монографія. - Полтава: ПУЕТ, 2011. - 239 с. - Режим доступа: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/352.

3. Ємець О. О., Парфьонова Т. О. Транспортні задачі комбінаторного типу: властивості, розв'язування, узагальнення: монографія. - Полтава: ПУЕТ, 2011. - 174 с. - Режим доступа: http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/353.

Емец Олег Алексеевич, Емец Александра Олеговна,
Полтавский университет экономики и торговли, Полтава,
e-mail: yemetsli@mail.ru; yemets2008@ukr.net

2-ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА КЛИКИ С МИНИМАЛЬНЫМ ВЕСОМ ВЕРШИН И РЁБЕР

И. И. Ерёмин, Э. Х. Гимади, А. В. Кельманов,
А. В. Пяткин, М. Ю. Хачай

Рассматривается одна из формализаций задачи кластерного анализа, важнейшей проблемы анализа данных, суть которой состоит в группировке «похожих» объектов на множестве $\{1, \ldots, n\}$. Нередко исходные данные в задаче задаются весами $(a_1, \ldots, a_n)$ объектов и матрицей $c = (c_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, попарных сравнений объектов, где a_j и c_{ij} — вещественные числа. Требуется выбрать подмножество объектов (строк) с минимальной суммой весов выбранных объектов и суммой попарных весов этих объектов.

Показывается [1], что в общем случае эта задача NP-трудна в сильном смысле и не допускает эффективной аппроксимируемости. Тем не менее, в работе доказано, что по крайней мере в двух практически важных случаях (см. ниже) задача, сохраняя труднорешаемость, обладает 2-приближёнными полиномиальными алгоритмами.

Рассматриваемой постановке сопоставлена следующая экстремальная задача. Даны полный неориентированный взвешенный n-вершинный граф G и натуральное число $m < n$. Требуется найти m-клику с минимальным (максимальным) суммарным весом входящих в неё вершин и рёбер.

В качестве приближённого решения задачи поиска m-клики минимального суммарного веса в графе G предлагается использовать точный алгоритм $\mathcal{A}$ отыскания в данном графе m-звезды минимального веса. Такая звезда, очевидно, находится за время $O(n^2)$.

В случае, когда веса вершин неотрицательны, а веса рёбер удовлетворяют неравенству треугольника, алгоритм $\mathcal{A}$ находит приближённое решение задачи об m-клике на минимум с *асимптотически достижимой* оценкой точности 2.

В случае, когда веса вершин неотрицательны, а веса рёбер являются квадратами попарных расстояний в некоторой системе точек евклидова пространства, этот же алгоритм выдает решение задачи об m-клике на минимум с *достижимой* оценкой точности 2.

Работа поддержана грантами РФФИ 12-01-00090а, 12-01-00093а, 12-01-33028-мола-вед, 13-01-00210а, 13-07-00070а и 13-07-00181а, а также грантами целевой программы Уро РАН и СО РАН (интеграционные проекты 12-01-1017/1 и 7Б).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. И. Ерёмин, Э. Х. Гимади, А. В. Кельманов, А. В. Пяткин, М. Ю. Хачай 2-приближённый алгоритм поиска клики с минимальным весом вершин и рёбер. // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2 (принята в печать).

Еремин Иван Иванович, Хачай Михаил Юрьевич, ИММ УрО РАН,
Екатеринбург, Россия, e-mail: eremin@imm.uran.ru; mkhachay@imm.uran.ru;
Гимади Эдуард Хайрутдинович, Кельманов Александр Васильевич, Пяткин Артем Валерьевич, ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия,
e-mail: gimadi@math.nsc.ru; kelm@math.nsc.ru; artem@math.nsc.ru

ЖАДНЫЙ АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПРОСТОМ МАКСИМАЛЬНОМ РАЗРЕЗЕ

В.И. Ерохин

Задача о простом максимальном разрезе неориентированного графа (Simple Max Cut) является классической задачей комбинаторной оптимизации. В общем случае является NP-трудной [1], что было использовано в работах [2,3] для обоснования важного для интервального анализа [4] факта – NP-трудности задачи вычисления $\|\cdot\|_{\infty,1}$- нормы, определяемой как $\|A\|_{\infty,1} = \max\limits_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_1$.

С помощью незначительной доработки результатов работы [2] удается осуществить «ответное проникновение» интервального анализа и линейной алгебры в задачу о простом максимальном разрезе:

Теорема. *Пусть с неориентированным графом $G(V,E)$, где $V = \{1,\dots,n\}$ – множество вершин, E – множество рёбер, связана матрица $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = n$ если $i = j$, $a_{ij} = -1$ если вершины i и j соединены ребром и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Пусть V_1 и V_2 – такое разбиение множества V на два пересекающихся подмножества, что количество рёбер, соединяющих вершины из V_1 с вершинами из V_2, максимально и равно $mc(G)$. Тогда 1) справедливо соотношение $mc(G) = \frac{1}{4}\left(\|A\|_{\infty,1} + 2|E| - n^2\right)$; 2) элементами вектора x^*, отвечающего условиям $\|x^*\|_\infty = 1$ и $\|Ax^*\|_1 = \|A\|_{\infty,1}$ являются числа $x_j^* = \pm 1$; 3) справедливо представление $V_1 = \left\{j \,\middle|\, x_j^* = -1\right\}$, $V_2 = \left\{j \,\middle|\, x_j^* = 1\right\}$.*

Основываясь на приведенной выше теореме, удается построить следующий приближённый алгоритм решения задачи о простом максимальном разрезе.

Шаг 0. Сформировать матрицу A. Найти индекс k такой, что столбец a^k имеет максимальную $\|\cdot\|_1$-норму, положить $d = a^k$, $x_k = 1$. **Шаг** $i = 1,2,\dots,n-1$**.** Среди оставшихся индексов j столбцов матрицы A найти индекс k такой, что либо вектор $p = d + a^k$, либо вектор $q = d - a^k$ имеет максимальную $\|\cdot\|_1$-норму среди всех векторов $d \pm a^j$. Если $\|p\|_1 > \|q\|_1$, положить $d = p$, $x_k = 1$, в противном случае положить $d = q$, $x_k = -1$. После завершения работы алгоритма имеем $\|d\|_1 \le \|A\|_{\infty,1}$ и вектор x как приближение к x^*. В докладе предполагается привести результаты экспериментов.

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки 1.7890.2013.

ЛИТЕРАТУРА

1. M.R. Garey, D.S. Johnson, L. Stockmeyer. Some simplified NP-complete graph problems. // Theor. Comput. Sci. 1976. V. 1. P. 237-267.

2. S. Poljak, J. Rohn. Checking robust nonsingularity is NP-hard. // Math. Control Signals Systems. 1993. V. 6. P. 1-9.

3. J. Rohn. Computing the Norm $\|A\|_{\infty,1}$ is NP-Hard. // Linear and Multilinear Algebra. 2000. V. 47. P. 195-204.

4. М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамник и др. Задачи линейной оптимизации с неточными данными. Ижевск:НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008.

Ерохин Владимир Иванович, СПбГТИ(ТУ), СПб., Россия, e-mail:erohin_v_i@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ СРЕДНЕГО ЧИСЛА ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ

Л.А. Заозерская

Рассматривается класс задач о рюкзаке с булевыми переменными из [1] следующего вида:

$$\max\{cx \mid Ax \le b,\ x \in \{0,\ 1\}^n\}, \tag{1}$$

где $c = (c_1, ..., c_n)$, $b = (b_1, ..., b_m)$ и все $c_j > 0$, $b_i > 0$, а элементы a_{ij} матрицы A размера $m \times n$ являются независимыми случайными величинами и удовлетворяют условиям $\mathsf{P}\{a_{ij} = h\} = p$ при $h = 1, ..., B$ и $\mathsf{P}\{a_{ij} = 0\} = 1 - pB > 0$, $B = \max_{i=1,...,m} b_i$ и $0 < p < 1$. В [1] выделен полиномиально разрешимый в среднем подкласс $\mathcal{K}(n, p)$, для которого $\mathsf{E}|D(n, p)| = O(n)$ при любом B. Здесь $|D(n, p)|$ – мощность множества допустимых решений задачи (1), а $\mathsf{E}\xi$ – математическое ожидание случайной величины ξ. В [2] на основе метода регулярных разбиений построены полиномиальные верхние оценки среднего числа итераций для ряда алгоритмов целочисленного линейного программирования (ЦЛП) при решении задач из $\mathcal{K}(n, p)$.

В данной работе исследуется среднее число допустимых решений задач (1) при том же вероятностном распределении для случаев $B = 2$ и $B = 3$. Нами установлено, что функция $g(k) = \mathsf{E}|D_{k+1}|/\mathsf{E}|D_k|$ для $k = 0, 1, ..., n$ является убывающей, где D_s – множество допустимых решений задачи (1), имеющих ровно s единиц. Используя это свойство, описаны подклассы задач, для которых верхняя оценка $\mathsf{E}|D(n, p)|$ имеет порядок $O(n^k)$, где k – заданное целое число.

Ранее подобные оценки получены для задач об упаковке и покрытии множества и некоторых их обобщений. Результаты такого типа используются для анализа трудоемкости ряда алгоритмов ЦЛП, в частности, основанных на аппарате непрерывной оптимизации [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н. Кузюрин. Полиномиальный в среднем алгоритм в целочисленном линейном программировании// Сиб. журн. исследования операций. 1994. №3. С. 38–48.

2. Л.А. Заозерская, А.А. Колоколов, Н.Г. Гофман. Оценки среднего числа итераций для алгоритмов решения некоторых задач булева программирования// Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18. №3. С. 49–64.

3. Л.А. Заозерская, А.А. Колоколов. Оценки среднего числа итераций для ряда алгоритмов решения задач об упаковке и покрытии множества// Интеллектуализация обработки информации: 9-ая междунар. конф. Черногория, г. Будва, 2012 г.: Сборник докладов. М.: Торус пресс. 2012. С. 260–262.

Заозерская Лидия Анатольевна,
Омский филиал Института математики им С.Л.Соболева СО РАН,
Омск, Россия, e-mail: zaozer@ofim.oscsbras.ru

О ЗАДАЧЕ АППРОКСИМАЦИИ ГРАФА С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА МОЩНОСТИ КОМПОНЕНТ СВЯЗНОСТИ

С.Д. Ильева, В.П. Ильев

Задачи аппроксимации графов являются одной из формализаций задач классификации систем взаимосвязанных объектов, в которых требуется минимизировать число связей между классами и число недостающих связей внутри классов. Постановки и различные интерпретации этих задач можно найти в [2, 3].

Если $G_1 = (V, E_1)$ и $G_2 = (V, E_2)$ – помеченные обыкновенные графы на одном и том же множестве вершин V, то *расстояние* $d(G_1, G_2)$ между ними определяется как $d(G_1, G_2) = |E_1 \setminus E_2| + |E_2 \setminus E_1|$. Обыкновенный граф называется *M-графом*, если каждая его компонента связности является полным графом.

В **задаче аппроксимации графа** для заданного графа $G = (V, E)$ требуется найти ближайший M-граф $M^* = (V, E^*)$. В различных постановках задачи число компонент связности графа M^* может быть произвольным, ограниченным сверху или равным заданному целому числу. В настоящем сообщении рассматриваются задачи аппроксимации графами с компонентами ограниченного размера. Обозначим через $\mathcal{M}^{\leq p}(V)$ множество всех M-графов на множестве вершин V, в которых мощность каждой компоненты связности не превышает целого числа p, $2 \leq p \leq |V|$.

Задача $\mathbf{A}^{\leq \mathbf{p}}$. Дан n-вершинный граф $G = (V, E)$ и целое число p, $2 \leq p \leq n$. Найти такой граф $M^* \in \mathcal{M}^{\leq p}(V)$, что $d(G, M^*) = \min\limits_{M \in \mathcal{M}^{\leq p}(V)} d(G, M)$.

В работе [1] доказано, что для любого фиксированного $p \geq 3$ задача $\mathbf{A}^{\leq \mathbf{p}}$ является *NP*-трудной, а задача $\mathbf{A}^{\leq \mathbf{2}}$ полиномиально разрешима.

Ранее для задачи $\mathbf{A}^{\leq \mathbf{3}}$ Ильевым, Ильевой и Навроцкой был предложен полиномиальный 3-приближенный алгоритм. В настоящей работе показано, что задача $\mathbf{A}^{\leq \mathbf{p}}$ принадлежит классу *APX* при любом фиксированном $p \geq 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.П. Ильев, А.А. Навроцкая. Вычислительная сложность задачи аппроксимации графами с компонентами связности ограниченного размера // Прикладная дискретная математика. 2011. N 3. С. 80–84.

2. N. Bansal, A. Blum, S. Chawla. Correlation clustering // Machine Learning. 2004. V. 56. P. 89–113.

3. C.T. Zahn. Approximating symmetric relations by equivalence relations // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1964. V. 12, N 4. P. 840–847.

Ильев Виктор Петрович, Ильева Светлана Диадоровна,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия,
e-mail: iljev@mail.ru, iljeva@mail.ru

О ТОЧНОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМИТЕТНОЙ ОТДЕЛИМОСТИ

К.С. Кобылкин

В сообщении рассматривается интересная MAX – SNP-труднорешаемая [1] задача геометрического разделения в смысле логики большинства двух конечных множеств A и B на плоскости семейством прямых минимальной мощности. Дадим

Определение. Комитетом аффинных функций, разделяющим два множества A и B, называется такая конечная последовательность $Q = (f_1, \ldots, f_q)$ аффинных функций, что во всякой точке $a \in A$ (соответственно, в любой точке $b \in B$) более, чем $q/2$ функций из Q принимают положительное (соответственно, отрицательное) значение.

Задача MASC(2)**.** Найти минимальный по длине комитет, разделяющий A и B.

Исследуется точность одного приближенного $O(|A \cup B|^2)$-алгоритма решения частного случая этой задачи (задача CMASC(2)), когда на свободные коэффициенты всех функций комитета накладывается ограничение положительности. Этот алгоритм сводится к поиску минимального комитета однородных аффинных функций, разделяющего A и B. Существует пример задачи CMASC(2), когда отношение $r(A, B)$ мощности получаемого алгоритмом комитета к мощности минимального комитета равно $O(|A \cup B|)$, что совпадает с оценками точности известных приближенных алгоритмов [2]. Тем не менее, эксперименты с множествами A и B, выбранными случайно из равномерного распределения, или из двух различных смесей гауссовских распределений, дают $r(A, B) < 2.5$ при условии случайного выбора начала отсчета.

Теорема. Если A и B являются выборками мощности N из равномерного распределения на единичном круге, то имеет место оценка снизу для вероятности:

$$\mathrm{P}(r(A,B) \le t) \ge \sum_{\left\lceil \frac{2N-1}{t} \right\rceil \le q \le N,\ q-\text{нечетно}} \frac{2Np(N,q)}{2^N q},$$

где $t \ge 2$, а $p(N, q)$ — количество упорядоченных разбиений числа N на q слагаемых.

Работа поддержана грантами РФФИ №13-07-00181, 13-01-00210, программами Президиума РАН 12-П-1-1016, 12-С-1-1017/1 и грантом ИММ УрО РАН им. Красовского от 2013 года.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.И. Поберий. О принадлежности классу MAX – SNP-трудных задач MIN – PC и MASC – GP(n) // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т.16. №3. С. 210–216.

2. M.Yu. Khachay. On an Efficient Approximation Algorithm for Minimal Committee Machine Learning // Pattern Recognition and Image Analysis. 2003. V.13, №1. P. 43–44.

3. J.G. Wendel. A problem in geometric probability // Mathematics Scandinavia. 1962. V.11. P. 109–111.

Кобылкин Константин Сергеевич,
Институт математики и механики имени Н.Н.Красовского, Екатеринбург, Россия, e-mail: kobylkinks@gmail.com

ЖАДНЫЕ АЛГОРИТМЫ НА ФРАГМЕНТАРНЫХ СТРУКТУРАХ

И.В. Козин

Для некоторых классов оптимизационных задач жадные алгоритмы всегда приводят к точному оптимальному решению задачи [1]. Однако в большинстве случаев можно рассчитывать лишь на приближенное решение проблемы. Интересен вопрос, на каких классах задач в принципе возможно применение жадного алгоритма для поиска приближенного оптимального решения.

Поиски классов дискретных задач, допускающих применение жадных алгоритмов, приводят к различным комбинаторным структурам. В частности - это матроиды [2], гридоиды [3] и наследственные структуры [4]. Однако наиболее общей комбинаторной конфигурацией для подобных задач является фрагментарная структура.

Определение. Фрагментарной структурой (X, E) на конечном множестве X называется такое семейство его подмножеств $E = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$, где $\forall\ i = 1, 2, ..., n$, $E_i \subseteq X$, что $\forall E_i \in E,\ E_i \neq \emptyset\ \exists e \in E_i\ E_i \backslash \{e\} \in E$.

Всякое подмножество $A \in E$ (допустимый фрагмент) можно построить из пустого множества, путем применения жадного алгоритма, последовательно просматривая элементы множества X и добавляя их таким образом, чтобы на каждом шаге этой процедуры построенное подмножество было допустимым фрагментом. Результат работы алгоритма зависит лишь от начальной перестановки элементов множества X.

Задача поиска оптимального значения функции, заданной на множестве допустимых фрагментов, сводится к оптимизационной задаче на перестановках и, следовательно, может быть решена гибридным алгоритмом, построенным путем комбинации фрагментарного алгоритма и какого-либо комбинаторного алгоритма.

Доказано, что фрагментарной структурой обладают ряд задач об оптимальном покрытии графа (покрытие звездами, циклами, путями и т.д.), задачи целочисленного прямоугольного раскроя, задачи плоской укладки невыпуклых объектов(тетрамино, пентамино, гексамино). Для всех перечисленных задач удалось построить гибридный алгоритм поиска приближенного оптимального решения на основе комбинации фрагментарного алгоритма и эволюционного алгоритма на перестановках с геометрическим оператором кроссовера. Для рассматриваемых классов задач построены генераторы случайных задач и проведена оценка качества алгоритмов на больших сериях случайно сгенерированных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1.Whitney H. On the abstract properties of linear dependence. — American Journal of Mathematics, 1935.-Vol. 57.-No.3.— P.509-533.

2.Ziegler G.M. Oriented Matroids Today. —The Electronic Journal of Combinatorics: dynamic surveys.— `http://www.emis.ams.org/journals/EJC/Surveys/ds4.pdf`.

3.Bjorner A. Introduction to greedoids. —Cambridge: Cambridge University Press: Matroid Applications, 1992. — 180p.

4.Ильев В.П. Задачи на системах независимости, разрешимые жадным алгоритмом. —Дискретная математика. — Т. 21, вып. 4,2009. — С.85-94.

Козин Игорь Викторович, Запорожский национальный университет,
Запорожье, Украина, e-mail: ainc@ukrpost.net

ОБ АПРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ КАЧЕСТВА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СТАНДАРТИЗАЦИИ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОГРАНИЧЕННЫМИ СВЕРХУ ВХОДНЫМИ ДАННЫМИ

А.А. Курочкина, Е. А. Нагорная

В задаче стандартизации (ЗС) [1] выбирается подмножество $X \subseteq I = \{1, 2, ..., m\}$ типоразмеров, минимизирующее суммарные затраты на ввод в действие выбранных типов изделий X и на обслуживание спроса (потребителей) $j = 1, ..., n$ (затраты на производство и обслуживание потребителей):

$$\sum_{i \in X} g_i^0 + \sum_{j=1}^{n} \min_{i \in X} g_{ij} \longrightarrow \min_{X \subseteq I}. \qquad (1)$$

Известно, что задача (1) в общем случае NP-трудна. Поэтому актуально выделение ее подклассов, позволяющих построить экономные приближенные алгоритмы с оценками их качества.

Рассмотрим класс $\widetilde{\text{ЗС}}$ с элементами g_{ij} и g_i^0 из числовых отрезков $[a_n, \infty)$ и $[A_n, B_n]$, соответственно, $A_n \geq 0$, $a_n > 0$, причем g_{ij} — независимые случайные величины с одинаковой функцией экспоненциального распределения: $F(\xi) = 1 - \exp(-\alpha\xi)$ с параметром $\alpha > 0$.

Применяем к произвольной задаче из класса $\widetilde{\text{ЗС}}$ следующую модификацию приближенного алгоритма $\mathcal{A}$ из работы [2]: если $m \leq \log_2 n$, то находим точное решение перебором по подмножествам $X \subset I$. Иначе полагаем $\widetilde{m} := \min\{m, \lceil m_0 \rceil\}$, где $m_0 = \sqrt{\frac{n}{\alpha B_n}} - 1$ и в качестве решения выбираем множество $\widetilde{X}$ — набор номеров первых $\widetilde{m}$ минимальных элементов вектора (g_i^0), $i \in I$.

У т в е р ж д е н и е: *Алгоритм $\mathcal{A}$ за время $O(n^2)$ находит асимптотически точное решение задачи (1) из класса $\widetilde{ЗС}$ при выполнении следующих условий: $B_n/\alpha_n = o(n/\ln n)$ и $(a_n \alpha_n \ln n) \to \infty$ при $n \to \infty$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00093, 12-01-33028-мола-вед), целевой программы резидиума РАН (проект № 227) и междисциплинарного интеграционного проекта ИМ СОРАН(№ 7Б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Береснев В. Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978. 333 с.

2. Гимади Э.Х. Обоснование априорных оценок качества приближенного решения задачи стандартизации // Целочисленная Оптимизация. (Сб. Управляемые системы). Новосибирск: ИМ СО АН, 1987, Вып. 27. С. 12–27.

Курочкина Анна Анатольевна, СИБГУТИ, Новосибирск, Россия,
Нагорная Елена Александровна, НГУ, Новосибирск, Россия,
e-mail: alkurochkin@ngs.ru, nitem@ya.ru

СОВПАДЕНИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ПО ВРЕМЕНИ ВЫЧИСЛЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ПО ПАМЯТИ

И.В. Латкин

Пусть $\boldsymbol{\mathcal{EXP}}$ — класс языков, распознаваемых на машинах Тьюринга за экспоненциальное время от длины входа. В [2] доказана следующая

Теорема 1. *По всякому входу X на ленте машины Тьюринга и любой программе машины P можно построить замкнутую формулу $\Omega(X,P)$ сигнатуры класса булевых алгебр $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, обладающую свойствами (cL — код объекта L):*

а) код формулы $\Omega(X,P)$ строится за время $g(|X|+|cP|)$ для некоторого многочлена g, фиксированного для всех X и P;

б) $Th(\boldsymbol{\mathcal{B}}) \vdash \Omega(X,P)$ равносильно тому, что машина Тьюринга с программой P допускает вход X менее, чем за $\exp(2,|X|)$ шагов;

в) имеется такая константа $D>0$, независящая от P (но зависящая от выбора кодировки формул и программ), что при всех достаточно длинных X имеет место $|X| \leqslant |c\,\Omega(X,P)| \leqslant D|cP|\cdot|X|^{2+\varepsilon}$ для всякого наперёд заданного $\varepsilon>0$.

В [2] построение моделирующей формулы $\Omega(X,P)$ для теории $Th(\boldsymbol{\mathcal{B}})$ сводится к написанию такой формулы для более просто устроенной теории двухэлементной булевой алгебры $\mathbf{B}_0$, т.е. $Th(\boldsymbol{\mathcal{B}}) \vdash \Omega(X,P)$ в п. б) из формулировки теоремы может быть заменено проверкой $\mathbf{B}_0 \models \Omega(X,P)$.

В § 3.4.2 из [2] отмечено также следующее свойство: *г) Если требуется промоделировать вычисления длины $\exp(2,|X|^t)$ ($t \geqslant 1$) машины P на входе X, то соответствующие формулы $\Omega_t(X,P)$ можно строить по тому же принципу, но тогда $|X|^t \leqslant |c\,\Omega_t(X,P)| \leqslant D_t\cdot|cP|\cdot|X|^{2t+\varepsilon}$.*

Теорема 2. *Теория $Th(\mathbf{B}_0)$ булевой алгебры $\mathbf{B}_0$ полна по Карпу в классе $\boldsymbol{\mathcal{EXP}}$.*

Доказательство. Истинность на алгебре $\mathbf{B}_0$ булевой формулы φ с кванторами проверяется за время, не превосходящее $O(\exp(2,|\varphi|))$, т.е. $Th(\mathbf{B}_0) \in \boldsymbol{\mathcal{EXP}}$. И на основании вышесказанного все языки этого класса полиномиально сводятся к $Th(\mathbf{B}_0)$.

Теорема 3. *Классы $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-space и $\boldsymbol{\mathcal{EXP}}$ совпадают.*

Доказательство. В [1] приводятся следующие факты: 1) теория $Th(\mathbf{B}_0)$ полна по Карпу в классе $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-space, т.е. в классе языков, распознаваемых с полиномиальной памятью (теорема 7.10); 2) $\boldsymbol{\mathcal{P}}$-space $\subseteq \boldsymbol{\mathcal{EXP}}$. Ввиду Карп-полноты теории $Th(\mathbf{B}_0)$ в классе $\boldsymbol{\mathcal{EXP}}$ верно и обратное включение $\boldsymbol{\mathcal{EXP}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{P}}$-space.

Работа поддержана грантом МОН РК № 0726/ГФ «Вычислимость и алгебраические структуры».

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Гэри, Д. Джонсон. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Москва.: Мир, 1982.

2. И.В. Латкин. О сложности распознавания теорий и их вычислительной выразительности// Алгебра и логика Т. 51, № 2, 2012, С. 216–238.

Латкин Иван Васильевич, Восточно-Казахстанский государственный технический университет, г. Усть-Каменогорск, Казахстан, e-mail: lativan@yandex.ru

ЧАСТИЧНОЕ ИЛИ ПОЛНОЕ СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ 3SAT К 2SAT ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧЕ ФАКТОРИЗАЦИИ

П.А. Лежанкин

В работе рассматривается задача 3ВЫП (3SAT) [1] и способы её частичного сведения к 2SAT [5][6]. Под частичным сведением понимается упрощение исходной формулы так, чтобы множество выполняющих её наборов не изменилось. В работе приводятся техники упрощения исходной формулы, в основе которых лежит правило резолюции. На основе этих техник разработан алгоритм, имеющий полиномиальные оценки времени работы и затрачиваемой памяти.

Также рассмотрены способы сведения задачи факторизации к задаче 3SAT [3][4]. Разработанный алгоритм испытан на формулах, получаемых из задачи факторизации. В ряде случаев удалось из 3КНФ формулы получить эквивалентную 2КНФ, то есть решить задачу факторизации за полиномиальное время. В работе проводится исследование ситуаций, когда полное сведение к 2КНФ возможно. Особое внимание уделяется случаю, когда факторизуемое число представимо в виде $N{=}p{\cdot}q$ (p,q - простые) - это соответствует ситуации, когда получаемая 3КНФ имеет 1 или 2 выполняющих набора.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. A. Cook. The complexity of theorem proving procedures. 1971

2. Martin Davis and Hilary Putnam. A computing procedure for quantification theory. 1960

3. Paul Purdom and Amr Sabry. Cnf generator for factoring problems. `http://www.cs.indiana.edu/cgi-pub/sabry/cnf.html`, November 23, 2007.

4. Constantinos Patsakis. RSA private key reconstruction from random bits using SAT solvers. 2013

5. Brafman, R.: A simplifier for propositional formulas with many binary clauses. 2004

6. Marijn Heule, Matti Jarvisalo,Armin Biere. Efficient CNF Simplification based on Binary Implication Graphs. 2011

Лежанкин Петр Андреевич, УГАТУ, Уфа, Россия, e-mail:plezhankin@gmail.com

АЛГОРИТМ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЕБЕРА В ДИСКРЕТНОЙ ПОСТАНОВКЕ ДЛЯ k-ДЕРЕВА

А.В. Панюков, Р.Э. Шангин

Рассматривается дискретная задача Вебера $\Theta\{G = (J, E),\ V,\ p,\ c\}$ [1, 2], в которой граф $G = (J, E)$ представляет k-дерево [3], V – произвольное конечное множество, элементами которого являются позиции, предназначенные для размещения вершин графа G, $p : J \times V \to R^+$ – функция стоимости размещения вершины $i \in J$ в множестве V и $c : E \times V^2 \to R^+$ – функция стоимости размещения ребра $(i, j) \in E$ на V^2. Несмотря на множество известных полиномиальных алгоритмов для частных случаев дискретной задачи Вебера [1, 2, 4, 5], известно, что в общем случае такая задача является NP-трудной [1].

В работе предлагается последовательный квазиполиномиальный алгоритм, находящий точное решение дискретной задачи Вебера для k-дерева, основанный на динамическом программировании. Вычислительная и пространственная сложность предложенного алгоритма не превосходит $O(|V|^{k+2} \cdot |J|)$.

Проведен вычислительный эксперимент по анализу эффективности предложенного алгоритма в сравнении с пакетом IBM ILOG CPLEX Optimization Studio 12.2 (решение модели целочисленного линейного программирования (ЦЛП) задачи Вебера в дискретной постановке алгоритмом ветвей и границ с ограничением по времени работы). Тестовые данные генерировались случайным образом с равномерным распределением. Решались серии из 30 задач одинаковой размерности (|J|,|V|) – от (5,5) до (100,100). Установлено, что применение предложенного алгоритма перспективно при сравнительно малых значениях величины параметра k, причем, чем меньше величина k и чем больше количество вершин размещаемого графа, тем предлагаемый алгоритм более эффективен по сравнению с точными алгоритмами, являющимися вариациями полного перебора с отсевом заведомо бесперспективных подмножеств допустимых решений, например алгоритма ветвей и границ.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Панюков. Модели и методы решения задач построения и идентификации геометрического размещения: дисс. на соискание уч. степ. д.ф.–м.н.: 05.13.16. 1999.

2. A.V. Panyukov, B.V. Pelzwerger. Polynomial Algorithms to Finite Veber Problem for a Tree Network // Journal of Computational and Applied Math. 1991. V. 35. P. 291-–296.

3. В.В. Быкова. Вычислительные аспекты древовидной ширины графа // Прикладная дискретная математика. 2011. № 3(13). С. 65–79.

4. Г.Г. Забудский, Д.В. Филимонов. Решение дискретной минимаксной задачи размещения на сети // Известия вузов. Математика. 2004. № 5. С. 33–36

5. А.В. Панюков, Б.Ф. Пельцвергер. Оптимальное размещение дерева в конечном множестве // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1988. Т. 28. С. 618–620.

Панюков Анатолий Васильевич, Шангин Роман Эдуардович, ЮУрГУ, Челябинск, Россия, e-mail: a_panyukov@mail.ru, shanginre@gmail.com

О РАЗРЕШИМОСТИ 8-ИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ НА ОДНОЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДСТАНОВКАХ

О.Ю. Цидулко

Аксиальная m-индексная задача о назначениях (m-АЗН) формулируется следующим образом. Пусть даны n-элементные множества $A_1, A_2, \ldots, A_m$. И для каждого кортежа $x_{i_1 i_2 \ldots i_m} \in A_1 \times A_2 \ldots \times A_m$ известен его вес – некоторое вещественное число $c_{i_1 i_2 \ldots i_m}$. Требуется выбрать n кортежей минимального суммарного веса, таких что любой элемент из $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_m$ содержался бы ровно в одном кортеже. В терминах подстановок из симметрической группы S_n порядка n задача имеет вид [3]:

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i,\varphi_1(i),\varphi_2(i),\ldots,\varphi_{m-1}(i)} \longrightarrow \min_{\varphi_k \in S_n,\, 1 \le k < m} \tag{1}$$

В данной работе речь пойдет о многоиндексной аксиальной задаче о назначениях на одноциклических подстановках по Сердюкову (m-АЗНО):

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i,\sigma_{21}(i),\sigma_{31}(i),\ \ldots,\ \sigma_{m1}(i)} \longrightarrow \min \tag{2}$$

на множестве подстановок $\{\pi_k \,|\, 1 \le k \le m\}$, где

$$\sigma_{kk'} = \pi_{k-1}\pi_{k-2}\ldots\pi_{k'+1}\pi_{k'} \in P_n, \quad \text{при } 1 \le k' < k \le m, \tag{3}$$

а P_n — множество всех одноциклических подстановок из S_n.

Задача (2)–(3) MAX SNP-трудна, поскольку ее частный случай при $m = 1$ — это известная задача коммивояжера.

Сложная система ограничений (3) на одноцикличность искомых подстановок задачи не всегда может быть совместна. В частности, в работе [2] было показано, что при любых $m > 1$, для четных значений n система (3) несовместна. Для нечетных n случай $m \le 7$ был исследован в [1].

В данной работе для задачи 8-АЗНО получен следующий результат.

Теорема. Для всякого $2 < m \le 8$ найдется такой номер n_m, что m-АЗНО разрешима при нечетных $n \ge n_m$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00093, 12-01-33028-мола-вед), целевой программы резидиума РАН (проект № 227) и междисциплинарного интеграционного проекта ИМ СОРАН (№ 7Б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э.Х., Коркишко Н.М., Сердюков А.И. О разрешимости многоиндексной аксиальной задачи о назначениях на одноциклических подстановках. Изв. вузов. Математика., 2000, № 12 (463). С. 21–26.

2. Гимади Э.Х., Сердюков А.И. Аксиальные задачи о назначении и коммивояжера: быстрые приближенные алгоритмы и их вероятностный анализ. Известия Вузов. Математика, Казань: Форт Диалог, 1999, Том 451, № 12, С. 19–25.

3. Burkard R., Dell'Amico M., Martello S. Assignments. SIAM, Philadelphia, 2009. 382 p.

Цидулко Оксана Юрьевна, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия, e-mail: tsidulko.ox@gmail.com

СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ ПОДМНОЖЕСТВЕ ЗАДАННОГО ДИАМЕТРА

В.В. Шенмайер

Диаметром произвольного множества S называется величина $\sup\limits_{x,y\in S} \|x-y\|$, где $\|x-y\|$ — евклидово расстояние между x и y. Рассматривается следующая задача.

Дано: n-элементное множество векторов $P \subset \mathbb{R}^d$ и вещественное число $r > 0$.

Найти: максимальное по мощности подмножество $S \subseteq P$, диаметр которого не превосходит r.

Иными словами, требуется найти максимальную по мощности клику в графе пересечения шаров радиуса $r/2$. В случае плоскости ($d = 2$) задача полиномиально разрешима [3]. В случае $d = 3$ сложность задачи до сих пор неизвестна, но в [1] получен 2.553-приближённый алгоритм для данного случая. Afshani и Hatami [2] доказали, что при условии P≠NP для любого $\varepsilon > 0$ существует размерность $d = \Theta(\log n)$, для которой не существует $(95/94 - \varepsilon)$-приближённого полиномиального алгоритма. Отсюда следует, что в случае, когда размерность пространства не фиксирована, задача не может быть решена с помощью полиномиальной аппроксимационной схемы (PTAS). Возникает вопрос о существовании приближённых алгоритмов с константной оценкой точности. Ответ на него даёт полученный результат:

Теорема При условии P≠NP существует размерность пространства $d \leq 2n - 2$, для которой при любом $\varepsilon > 0$ для рассматриваемой задачи не существует $(n^{1-\varepsilon})$-приближённого полиномиального алгоритма.

Следствие При условии P≠NP рассматриваемая задача не принадлежит классу APX, даже если размерность пространства ограничена функцией n^γ, где $\gamma > 0$.

Доказательство теоремы производится путём сведения к рассматриваемой задаче хорошо известной задачи о максимальной клике в произвольном графе.

Работа поддержана грантами РФФИ (12-01-00093, 12-01-33028 и 13-01-91370СТ), целевой программы Президиума РАН (227) и интеграционного проекта ИМ СО РАН (7Б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Afshani P., Chan T. Approximation algorithms for maximum cliques in 3d unit-disk graphs // Proc. 17th Canadian Conf. on Computational Geometry. 2005. P. 19–22.

2. Afshani P., Hatami H. Approximation and inapproximability results for maximum clique of disc graphs in high dimensions // Information Processing Letters. 2005. V. 105. P. 83–87.

3. Clark B.N., Coulbourn C.J., Johnson D.S. Unit disk graphs // Discrete Mathematics. 1990. V. 86. P. 165–177.

Шенмайер Владимир Владимирович,
Институт математики им С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия,
e-mail: shenmaier@mail.ru

ОБ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ БОНДАРЕВОЙ-ШЕПЛИ ДЛЯ НЕЧЕТКИХ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР

В.А.Васильев

В докладе приводится один вариант обобщения известной теоремы Бондаревой-Шепли о существовании неблокируемых дележей [1,2] на случай нечетких кооперативных игр. В основе предлагаемого подхода лежит распространение понятия сбалансированного семейства обычных коалиций на случай произвольных систем нечетких коалиций (подробности см. в [3]).

Нечеткой кооперативной игрой n лиц называется функция $v : \sigma_F \to \mathbf{R}$, где $\sigma_F = \{\tau \in \mathbf{R}_+^N \mid \tau \neq 0,\ \tau_i \in [0,1],\ i \in N\}$ — совокупность нечетких коалиций (здесь и всюду далее $N = \{1,\dots,n\}$ — множество игроков игры v). Для $\tau \in \sigma_F$ положим $N(\tau) = \{i \in N \mid \tau_i > 0\}$ и введем множество $G_v(\tau)$ дележей нечеткой коалиции $\tau = (\tau_1,\dots,\tau_n)$: $G_v(\tau) = \{x \in \mathbf{R}^{N(\tau)} \mid \tau_{N(\tau)} \cdot x \leq v(\tau)\}$ (как обычно, x_S — сужение вектора $x \in \mathbf{R}^N$ на множество $S \subseteq N$). Будем говорить, что нечеткая коалиция τ блокирует дележ $x \in G_v(e_N)$, если существует $y \in G_v(\tau)$ такой, что $y_i > x_i$ для каждого $i \in N(\tau)$ (здесь $e_N = (1,\dots,1)$ — "большая коалиция" игры v). Ядром нечеткой игры v называется совокупность $C(v)$ дележей из $G_v(e_N)$, не блокируемых никакой коалицией из σ_F.

Ключевая роль в описании класса нечетких игр v, имеющих непустое ядро $C(v)$, принадлежит понятию F–сбалансированного семейства коалиций из σ_F : конечное множество $\{\tau_k\}_{k\in K} \subseteq \sigma_F$ называется F–сбалансированным, если $\sum_{k\in K} \lambda_k \tau_k = e_N$ для некоторых балансирующих весов $\lambda_k \geq 0$, $k \in K$. Прямым аналогом классического понятия сбалансированной стандартной игры оказывается следующее: нечеткая игра v называется V–сбалансированной, если для любого F–сбалансированного семейства $\{\tau_k\}_{k\in K} \subseteq \sigma_F$ и отвечающего ему множества балансирующих весов $\{\lambda_k\}_{k\in K} \subseteq \mathbf{R}_+$ выполняется неравенство $\sum_{k\in K} \lambda_k v(\tau_k) \leq v(e_N)$.

Теорема. Нечеткая кооперативная игра v имеет непустое ядро $C(v)$ тогда и только тогда, когда она является V–сбалансированной.

Работа поддержана грантом РФФИ 13-06-00311.

ЛИТЕРАТУРА

1. О.Н.Бондарева. Теория ядра для игры n лиц. // Вестник Ленингр. универ., сер. матем. 1962. Т. 17. С. 141–142.

2. L.S.Shapley. On balanced sets and cores. // Naval Res. Logist. Quart. 1967. V. 14., No. 4. P. 453–460.

3. В.А.Васильев. Об одном обобщении теоремы Скарфа о непустоте ядра. // Препринт Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН. 2012. № 283. 41 С.

Васильев Валерий Александрович, Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, e-mail:vasilev@math.nsc.ru

СИЛЬНО ГАРАНТИРОВАННОЕ РЕШЕНИЕ В ОДНОЙ КООПЕРАТИВНОЙ ИГРЕ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

К.Н. Кудрявцев

В работе рассматривается кооперативная игра двух лиц с побочными платежами и при неопределенности

$$\langle\{1,2\},\{\mathrm{X}_i=\mathbf{R}^n\}_{i=1,2},\mathrm{Y}=\mathbf{R}^m,\{f_i(x,y)\}_{i=1,2}\rangle. \tag{1}$$

Здесь 1 и 2 — порядковые номера игроков, X_i — множество стратегий x_i у i-го игрока, ситуация игры $x=(x_1,x_2)\in\mathrm{X}=\mathrm{X}_1\times\mathrm{X}_2$, Y — множество неопределенных факторов y, Y^{X} — множество функций $y(x)$, заданных на X со значениями в Y, m-вектор–функции $y(x)$ — неопределенности в игре (1), а функции выигрыша $f_i(x,y)=f_i(x,y(x))$ $(i=1,2)$ линейно–квадратичны и имеют вид

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x_1'A_{11}x_1+2x_1'x_2+x_2'A_{12}x_2+2x_1'C_1y+y'D_1y+2a_1'x_1+2b_1'x_2,\\ f_2(x,y) &= x_1'A_{21}x_1-2x_2'x_1+x_2'A_{22}x_2+2x_2'C_2y+y'D_2y+2a_2'x_1+2b_2'x_2, \end{aligned}$$

где x_1,x_2 — n-вектора-столбцы, y — m-вектор-столбец, штрих сверху означает операцию транспонирования, постоянные векторы a_i и матрицы A_{ij},C_i,D_i соответствующих размерностей, причем A_{ij} и D_i — симметричны $(i,j=1,2)$; далее $A_{ij}<0$ $(D_i>0)$ означает, что квадратичная форма $x_j'A_{ij}x_j$ $(y'D_iy)$ определенно отрицательна (соответственно, положительна).

Формализация сильно гарантированного решения проводится (в отличие от предложенных в [1] понятий, построенных на основе аналога векторной седловой точки) на основе аналога векторного максимина (данный подход был применен к бескоалиционным играм в [2]).

Утверждение. Если в игре (1) матрицы

$$A_{ij}<0,\quad D_i>0\quad(i,j=1,2),$$

то сильно гарантирующая ситуация $x^e=(x_1^e,x_2^e)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1^e &= -\left[A_{11}+A_{21}-C_1D_1^{-1}C_1'\right]^{-1}(a_1+a_2),\\ x_2^e &= -\left[A_{12}+A_{22}-C_2D_2^{-1}C_2'\right]^{-1}(b_1+b_2), \end{aligned}$$

а сильно гарантированный дележ — любой вектор $(f_1^e,f_2^e)\in\mathbf{R}^2$, для которого

$$\begin{aligned} f_1^e+f_2^e=&-(a_1'+a_2')\left[A_{11}+A_{21}-C_1D_1^{-1}C_1'\right]^{-1}(a_1+a_2)-\\ &-(b_1'+b_2')\left[A_{12}+A_{22}-C_2D_2^{-1}C_2'\right]^{-1}(b_1+b_2). \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Жуковский. Кооперативные игры при неопределенности и их приложения. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

2. В. Жуковский, К. Кудрявцев, Л. Смирнова. Гарантированные решения конфликтов и их приложения. М.: URSS, Красанд, 2013.

Кудрявцев Константин Николаевич, ЮУрГУ, Челябинск, Россия, kudrk@mail333.com

ПРИМЕНЕНИЕ СТАНДАРТНЫХ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ КУРНО С КУБИЧНЫМИ ИЗДЕРЖКАМИ

И.М. Минарченко

Рассмотрим модель Курно с n участниками, издержки которых заданы полиномами третьей степени. Обратная функция спроса линейна. Каждый участник максимизирует свою функцию прибыли, оперируя собственным выпуском:

$$\begin{gathered} F_i(x) = \left(d - a\sum_{j=1}^{n} x_j\right)x_i - c_i(x_i) \to \max_{x_i}, \\ c_i(x_i) = \alpha_i x_i^3 + \beta_i x_i^2 + \gamma_i x_i + \delta_i, \quad 0 \le x_i \le \bar{x}_i,\ a > 0, d > 0, \\ \alpha_i > 0, \beta_i < 0, \gamma_i > 0, \delta_i \ge 0, \beta_i^2 \le 3\alpha_i\gamma_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{gathered} \tag{1}$$

Издержки такого вида с учётом ограничений на коэффициенты полинома имеют S-образный вид и включают участок входа на рынок. Целью работы является получение в модели (1) равновесия (по Нэшу).

Нетрудно убедиться, что рассматриваемая модель является потенциальной [1], потому поиск равновесий удобнее производить путём максимизации потенциала:

$$\begin{gathered} P(x) = \sum_{i=1}^{n}\left[-\alpha_i x_i^3 - (a+\beta_i)x_i^2 + \left(d - \gamma_i - \tfrac{a}{2}\sum_{j\ne i} x_j\right)x_i\right] \to \max, \\ 0 \le x_i \le \bar{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{gathered} \tag{2}$$

Для нахождения максимума в (2) предлагается использовать стандартные методы оптимизации такие, как метод проекции градиента и метод Ньютона, адаптированный к условной оптимизации. Вид оптимизируемой функции позволяет производить на каждой итерации метода глобальную одномерную максимизацию по направлению. Анализируется сходимость используемых методов. Приводятся результаты численных экспериментов.

Работа является продолжением исследования в [2]. Предлагаемая здесь методика позволяет быстро и эффективно, по сравнению с методами глобального поиска, отыскивать равновесия в модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Monderer, L.S. Shapley. Potential Games. // Games and Economic Behavior. 1996. V. 14. P. 124–143.

2. И.М. Минарченко. Применение методов глобальной оптимизации для нахождения равновесия Курно при нелинейных издержках. // Проблемы оптимизации и экономические приложения: материалы V Всероссийской конференции (Омск, 2–6 июля 2012 г.). — Омск: изд-во Ом. гос. ун-та, 2012. — с. 180.

Минарченко Илья Михайлович, ИСЭМ СО РАН, Иркутск, Россия,
e-mail: sla669@gmail.com

УПРАВЛЕНИЕ РАВНОВЕСИЕМ НА МОНОПОЛИЗИРОВАННЫХ РЫНКАХ

А. В. Панюков, Е. Д. Коновалова

Монополизированные рынки можно рассматривать в виде биматричной игры $\Gamma = \langle \{\mathrm{M}, \Pi\}, \{X_\mathrm{M}, X_\Pi\}, \{H_\mathrm{M}, H_\Pi\}\rangle$, где: (1) M — предприятие-монополист, X_M — множество стратегий монополиста, представляющих предложение услуг покупателям с использованием технологии $i = 1, 2, \ldots, n$ (определяется услуга (товар) и их цена P_i); (2) Π — множество предприятий-потребителей, (3) X_Π — множество стратегий потребителей, представляющих рыночный спрос потребителя на товары с потребительскими свойствами (определяются объемы потребления V_j); (4) $H_\mathrm{M} = PV^T - \Delta_\mathrm{M}$ — матрица выигрышей игры Γ монополиста, где элементы матрицы $H_{\mathrm{M}ij} = P_iV_j - \Delta_{\mathrm{M}ij}$ — прибыль монополиста при наступлении ситуации (i, j) , P_i — цена, установленная монополистом, V_j — объем, который согласны купить потребители при объявленных ценах, Δ_M — матрица государственного воздействия на монополиста; (5) $H_\Pi = PV^T - \Delta_\Pi$ — матрица выигрышей игры Γ покупателей, элементы которой представляют совокупную полезность соответствующей ситуациям для потребителей, Δ_Π — матрица государственного воздействия на потребителей.

Пусть на этапе k при игре монополиста и покупателей при заданной политике государства (т.е. матрицах Δ_M^k и $\Delta_\Pi^{(k)}$) на рынке в результате эволюции (т.е. достижения векторами P и V значений $P^{(k)}$ и $V^{(k)}$ соответственно) складывается ситуация равновесия $(q^{(k)}, s^{(k)})$, которая может перестать удовлетворять потребности государства по экономическим характеристикам или другим причинам. Стремление установить на рынке новое «справедливое» положение равновесия (i^*, j^*) государство осуществляет за счет изменения матриц Δ_M^k и Δ_Π^k, на Δ_M и Δ_Π. Построение скорректированных платежных матриц $H_\mathrm{M} = P^{(k)}{V^{(k)}}^T - \Delta_\mathrm{M}$ и $H_\Pi = P^{(k)}{V^{(k)}}^T - \Delta_\Pi$, при которых ситуация (i^*, j^*) есть равновесие по Штакельбергу в чистых стратегиях, сводится к построению таких матриц Δ_M и Δ_Π, что

$$\sum_{i\in I, j\in J} (u_\Pi(i,j) + u_\mathrm{M}(i,j)) \to \min_{u,\Delta} \tag{1}$$

$$(\forall i \in I, j \in J)\,(p(i)V(j) + \Delta_\mathrm{M}(i,j) \le p(i^*)V(j) + \Delta_\mathrm{M}(i^*,j))\,, \tag{2}$$

$$(\forall i \in I, j \in J)\,(-p(i)V(j) + \Delta_\Pi(i,j) \le -p(i)V(j^*) + \Delta_\Pi(i,j^*))\,, \tag{3}$$

$$\sum_{i\in I, j\in J} \Delta_\mathrm{M}(i,j) = \sum_{i\in I, j\in J} \Delta_\Pi(i,j), \quad u_\mathrm{M}, u_\Pi \ge 0, \tag{4}$$

$$(\forall i \in I, j \in J)\,(-u_\Pi(i,j) \le \Delta_\Pi(i,j) \le u_\Pi(i,j), \quad -u_\mathrm{M}(i,j) \le \Delta_\mathrm{M}(i,j) \le u_\mathrm{M}(i,j))\,. \tag{5}$$

Утверждение. *Задача (1)–(5) имеет оптимальное решение.*

Исследование выполнено при поддержки Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14.B37.21.0395

Панюков Анатолий Васильевич, Коновалова Екатерина Дмитриевна
ЮУрГУ (НИУ), Челябинск, Россия, e-mail: paniukovav@susu.ac.ru

О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЗЕМЕЛЬНОЙ РЕНТЫ

Э.О. Рапопорт

Под земельной рентой обычно понимается дополнительный доход, который можно получить с фиксированного участка за вычетом нормативной прибыли.

Основные положения, используемые при формализации этого понятия:

1. Если земля не используется, то никакого дополнительного дохода нет.

2. Величина дополнительного дохода зависит от интенсивности использования земли, то-есть от уровня вложения средств в данный участок.

Пусть имеется один продукт и m земельных участков, на которых этот продукт может производиться. Основной характеристикой каждого участка будем считать его производственную функцию $b(\alpha)$ — выход продукта (в натуральном выражении) на этом участке при затратах α.

На базе этих функций строятся различные математико–экономические модели, различающиеся способами владения землей.

Рассматриваются системы с различной структурой в зависимости от способов владения и управления землей:

a) централизованное управление, когда величина производимого товара фиксирована извне;

b) игровой подход, когда величина производимого товара определяется из условий чистой конкуренции;

c) смешанный подход, когда некоторые группы участков имеют единого владельца.

В каждом из вариантов вводятся понятия равновесия, (равновесные вложения, равновесное распределение квот). Исследуются вопросы существования равновесий, свойства равновесных распределений и цен, изменения цен на продукт при изменениях спроса и уровней вложений в разные участки. Изучаются закономерности изменения цен и объемов производства при образовании различных коалиций участников.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00667).

ЛИТЕРАТУРА

1. М.И.Вирченко, Э.О.Рапопорт. Земельная рента. Моделирование и анализ // Сибирский журнал индустриальной математики. 2001. №.2(8). С. 94–108.

2. Э.О.Рапопорт. О некоторых проблемах моделирования земельной ренты в условиях многоукладной экономики // Сибирский журнал индустриальной математики. 2011. Т.14. № 2(46). С. 95–105.

Рапопорт Эрнест Ошерович, Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия, e-mail:rapoport@math.nsc.ru

О ГАРАНТИРОВАННОМ ПО ИСХОДАМ И РИСКАМ РЕШЕНИИ В ОДНОЙ КООПЕРАТИВНОЙ ИГРЕ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

И.С. Стабулит

Рассматривается кооперативная игра двух лиц при неопределенности

$$\langle\{1,2\},\{\mathrm{X}_i\}_{i=1,2},\mathrm{Y},\{f_i(x,y)\}_{i=1,2}\rangle. \tag{1}$$

Здесь 1 и 2 — порядковые номера игроков, $\mathrm{X}_i \subseteq \mathbf{R}^{n_i}$ – множество стратегий x_i у i-го игрока, ситуации $x=(x_1,x_2)\in \mathrm{X}=\mathrm{X}_1\times\mathrm{X}_2$, множество нестохастических неопределенностей y есть $\mathrm{Y}\subseteq\mathbf{R}^m$, $f_i(x,y)$ — скалярная функция выигрыша i-го игрока $(i=1,2)$.

Партия игры развивается следующим образом. В результате совместного выбора игроками своих стратегий $x_i\in \mathrm{X}_i$ $(i=1,2)$ складывается ситуация $x=(x_1,x_2)\in \mathrm{X}$. Независимо от действий игроков реализуется некоторая неопределенность $y\in \mathrm{Y}$. На образовавшихся в результате парах $(x,y)\in \mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ определена скалярная функция выигрыша i-го игрока $f_i(x,y):\mathrm{X}\times\mathrm{Y}\to\mathbf{R}$, а также (в отличии от [1]) его функция риска $\Phi_i(x,y)$ из [2] $(i=1,2)$. Значение функций выигрыша $f_i(x,y)$ и риска $\Phi_i(x,y)$ на реализовавшейся ситуации x и появившейся независимо неопределенности y есть выигрыш и риск i-го игрока соответственно.

На «содержательном уровне» цель i-го игрока состоит в выборе такой своей стратегии, чтобы полученный в результате его выигрыш стал возможно *большим*, а риск возможно *меньшим*.

Определение. Гарантированным по исходам и рискам решением (ГИРР) кооперативной игры при неопределенности (1) назовем пятерку $(x^S,f_1^S,f_2^S,\Phi_1^S,\Phi_2^S)\in$ $\in \mathrm{X}\times\mathbf{R}^4$, для которой существует неопределенность $y_S\in\mathrm{Y}$ такая, что

во-первых, неопределенность y_S является минимальной по Слейтеру в четырехкритериальной задаче

$$\langle \mathrm{Y},\{f_i(x^S,y),-\Phi_i(x^S,y)\}_{i=1,2}\rangle$$

во-вторых, ситуация $x^S\in\mathrm{X}$ максимальна по Слейтеру в 4-критериальной задаче

$$\langle \mathrm{X}(y_S),\{f_i(x,y_S),-\Phi_i(x,y_S)\}_{i=1,2}\rangle,$$

где $\mathrm{X}(y_S)$ — множество ситуаций, удовлетворяющих условию индивидуальной рациональности для функций выигрыша $f_i(x,y_S)$ $(i=1,2)$ в кооперативной игре, полученной из игры (1) при фиксированной неопределенности $y=y_S$.

При этом $F^S=(f_1^S,f_2^S,\Phi_1^S,\Phi_2^S)$ назовем гарантированным по исходам и рискам дележем игры (1), а x^S — гарантирующей по исходам и рискам ситуацией.

При стандартных (для теории игр) ограничениях установлено существование гарантированного по исходам и рискам решения в чистых и смешанных стратегиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Жуковский. Кооперативные игры при неопределенности и их приложения. М.: Эдиториал УРСС, 1999.

2. К. Кудрявцев. Побочные платежи в одной кооперативной игре с учетом рисков. // Вестник ЮурГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. №10(227). 2011. С. 25-29.

Стабулит Ирина Станиславовна, ЧГАА, Челябинск, Россия, e-mail:irisku76@mail.ru

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ БИМАТРИЧНОЙ ИГРЫ

А.С. Стрекаловский

Рассматривается игра трех игроков x, y и z, где $x \in S^m$, $y \in S^n$, $z \in S^l$, $S_k = \{x = (x_1, \ldots, x_k)^\top \in I\!R^k_+ \mid \langle e_k, x\rangle = 1\}$, $e_k = (1, \ldots, 1)^\top \in I\!R^k$, $k = m, n, l$, с критериями эффективности $F_1(x, y, z) = \langle x, A_1 y\rangle + \langle x, A_2 z\rangle$, $F_2(x, y, z) = \langle y, B_1 x\rangle + \langle y, B_2 z\rangle$ и $F_3(x, y, x) = \langle z, C_1 x\rangle + \langle z, C_2 y\rangle$ соответственно, где A_p, B_p, C_p, $p = 1, 2$ — матрицы соответствующих размерностей. Данная игра является обобщением биматричной игры (см. [1,2]). Напомним, что ситуация $(x^*, y^*, z^*) \in S$, где $S \stackrel{\triangle}{=} S_m \times S_n \times S_l$, называется равновесием по Нэшу, если

$$\left.\begin{array}{c} F_1(x, y^*, z^*) \le F_1(x^*, y^*, z^*) \quad \forall x \in S_m, \qquad F_2(x^*, y, z^*) \le F_2(x^*, y^*, z^*) \quad \forall y \in S_n, \\ F_3(x^*, y^*, z) \le F_3(x^*, y^*, z^*) \quad \forall z \in S_l. \end{array}\right\}$$

Равновесные выигрыши игроков обозначим $v^*_k = v_k(x^*, y^*, z^*) \stackrel{\triangle}{=} F_k(x^*, y^*, z^*)$, $k = 1, 2, 3$, множество всех ситуаций равновесия — $NE \stackrel{\triangle}{=} NE(A, B, C)$, а вектор $Ay = ((Ay)_1, \ldots, (Ay)_m)$. Можно показать, что для того, чтобы $(x^*, y^*, z^*) \in NE$, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$\left.\begin{array}{c} (A_1 y^*)_i + (A_2 z^*)_i \le v^*_1 \quad \forall i = 1, \ldots, m, \qquad (B_1 x^*)_j + (B_2 z^*)_j \le v^*_2 \quad \forall j = 1, \ldots, n, \\ (C_1 x^*)_p + (C_2 y^*)_p \le v^*_3 \quad \forall p = 1, \ldots, l. \end{array}\right\}$$

Также как для биматричных игр [2], нетрудно доказать следующий результат.

Теорема 1. *Для того, чтобы $(x^*, y^*, z^*) \in NE$, необходимо и достаточно существования α_*, β_*, γ_*: $(x^*, y^*, z^*, \alpha_*, \beta_*, \gamma_*) \in D$ и $F(x^*, y^*, z^*, \alpha_*, \beta_*, \gamma_*) = 0$, где*

$$D \stackrel{\triangle}{=} \big\{(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \in S \times I\!R^3 | A_1 y + A_2 z \le \alpha e_m, B_1 x + B_2 z \le \beta e_n, C_1 x + C_2 y \le \gamma e_l\big\},$$

$$F(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \stackrel{\triangle}{=} \langle x, (A_1 + B_1^\top) y\rangle + \langle x, (A_2 + C_1^\top) z\rangle + \langle y, (B_2 + C_2^\top) z\rangle - \alpha - \beta - \gamma.$$

Рассмотрим следующую задачу математического программирования:

$$F(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \uparrow \max, \quad (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) \in D. \qquad (\mathcal{P})$$

Теорема 2. *Если $(x^*, y^*, z^*, \alpha_*, \beta_*, \gamma_*) \in Sol(\mathcal{P})$, то $(x^*, y^*, z^*) \in NE$.*

Для задачи $(\mathcal{P})$, в частности, разработан метод локального поиска, учитывающий специфику постановки. Кроме того, при общих предположениях знаконеопределенности матриц $(A_1 + B_1^\top)$, $(A_2 + C_1^\top)$, $(B_2 + C_2^\top)$ доказаны необходимые и достаточные условия глобальной оптимальности набора $(x^*, y^*, z^*, \alpha_*, \beta_*, \gamma_*)$ в задаче $(\mathcal{P})$, на основе которых разработан метод глобального поиска. На специально сконструированном поле тестовых примеров разработанный метод глобального поиска продемонстрировал свою вычислительную эффективность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998.

2. А.С. Стрекаловский, А.В. Орлов. Биматричные игры и билинейное программирование. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

Стрекаловский Александр Сергеевич,
Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия,
e-mail: strekal@icc.ru

СУЩЕСТВОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ В ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ОБМЕНА

В.И.Шмырев, А.С.Зыкина

Рассматривается линейная модель, являющаяся естественным обобщением классической линейной модели обмена. Расширяется множество участников модели, — к участникам–потребителям $i \in I$ добавляются участники–фирмы $k \in K$

Потребитель i характеризуются не только начальным запасом товаров w^i, но и начальным запасами денег α_i. Его общий бюджет после продажи своего запаса товаров по ценам p равен $\alpha_i + (p, w^i)$. Задача потребителя состоит в максимизации линейной функции полезности (c^i, x^i) при соблюдении бюджетного ограничения:

$$\left.\begin{array}{c}(c^i, x^i) \to \max, \\ (p, x^i) \le \alpha_i + (p, w^i), \\ x^i \ge 0.\end{array}\right| \Longrightarrow \text{ задача потребителя } i.$$

Участники–фирмы поставляют дополнительные объемы товаров на рынок. При этом k-я фирма, обязана поставить на рынок товары на сумму не менее заданной положительной величины λ_k (вмененный доход) . Линейная функция (c^k, x^k) характеризует затраты фирмы для производства набора товаров x^k. Фирма минимизирует затраты при соблюдении ограничения на доход:

$$\left.\begin{array}{c}(c^k, x^k) \to \min, \\ (p, x^k) \ge \lambda_k, \\ x^i \ge 0.\end{array}\right| \Longrightarrow \text{ задача фирмы } k.$$

Состояние равновесия характеризуется некоторым вектором цен $\tilde{p}$ и набором векторов $\tilde{x}^i$ и $\tilde{x}^k$, $i \in I$, $k \in K$, являющихся оптимальными решениями соответствующих задач участников при $p = \tilde{p}$ и удовлетворяющих условию баланса товаров:

$$\sum_{i \in I} \tilde{x}^i = \sum_{k \in K} \tilde{x}^k + \sum_{i \in I} w^i.$$

Частный случай модели, когда все c^i, c^k положительны и нет начальных запасов товаров, но товары в определенных количествах уже имеются на рынке, и бюджеты потребителей фиксированы, исследовался в [1,2]. В докладе рассматривается вопрос существования равновесия для более общего случая модели. Обобщается известный критерий Д.Гейла [3] для классической модели обмена.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00667-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шмырёв В.И. Обобщённая линейная модель обмена // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2006. Т. 13, №2. С. 74–102.

2. Shmyrev V. I. A generalized linear exchange model // J. Appl. Indust. Math. 2008. V. 2, N 1. P. 125–142.

3. Gale D. The linear exchange model // J. Math. Econ. 1976. V. 3, N 2. P. 205–209.

Шмырев Вадим Иванович, ИМ СО РАН, Новосибирск, shmyrev.vadim@mail.ru.
Зыкина Анна Сергеевна, НГУ, Новосибирск, a.s.zykina@gmail.com

ТОЧНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СОСТАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ РАСПИСАНИЙ

П. А. Борисовский

В работе рассматривается задача составления расписания многопродуктового производства [1]. Исходные данные представлены в виде множеств *продуктов* и *операций* с заданными характеристиками. Предполагается, что каждая операция производит только один продукт, при этом продукт может производиться несколькими операциями. Известна производительность каждой операции, т.е. количество продукта, выпускаемого в единицу времени. Для каждой операции определено *устройство*, необходимое для ее выполнения. В данной работе рассматривается задача с одним устройством, кроме того, предполагается, что продукт должен быть выпущен в полном объеме одной операцией без прерываний. Для каждой пары операций задана длительность переналадки, необходимой при переключении устройства с одной операции на другую. Требуется выбрать набор операций для выполнения, определить их последовательность и длительности для производства продукции в необходимом объеме. Критерием является минимизация момента завершения последней операции.

Работа посвящена разработке и исследованию точных алгоритмов решения указанной задачи. Рассмотрены алгоритм динамического программирования (ДП) на основе подхода, предложенного в [2] для задачи коммивояжера, параллельный вариант алгоритма ДП для выполнения на графическом процессоре (GPU) и алгоритм ветвей и границ (АВГ). Проведенные вычислительные эксперименты показали преимущество предложенных алгоритмов по сравнению с известным пакетом IBM ILOG CPLEX. Наилучшие результаты показал параллельный алгоритм ДП для GPU. Обсуждаются возможности комбинирования рассмотренных алгоритмов, а также их применения для решения задачи с несколькими устройствами.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00122.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисовский П.А. Генетический алгоритм для одной задачи составления производственного расписания с переналадками // Труды XIV Байкальской междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Т.4. Иркутск, ИсЭМ СО РАН. — 2008. — с. 166–173.
2. Held M., Karp R.M. A dynamic programming approach to sequencing problems // Journ. of the Soc. for Ind. and Appl. Math. V. 10. — 1962.— P. 196–210.

Борисовский Павел Александрович,
Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск, Россия,
e-mail: borisovski@mail.ru

СОСТАВЛЕНИЕ РАСПИСАНИЙ МНОГОПРОДУКТОВОГО ХИМИЧЕСКОГО ПРОИЗВОДСТВА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

П. А. Борисовский, А. В. Еремеев, Ю. В. Коваленко

В работе исследуется NP-трудная задача составления расписаний многопродуктового производства, где заданы вещества, операции и устройства. Вещества подразделяются на сырье, промежуточные и окончательные продукты. В результате выполнения операций происходит преобразование одних веществ в другие. Для каждой операции имеется некоторый набор устройств, на которых она может выполняться. При составлении расписания необходимо учитывать погрузку и хранение продуктов, переналадку устройств, а также нижние и верхние границы объема обрабатываемого вещества в каждой операции.

Кроме того, рассматриваются следующие технологические особенности: поступление сырья через трубопровод ограниченной пропускной способности или партиями фиксированного размера, непрерывность выполнения последовательности однотипных операций, поддержание резервного запаса в бункерах хранения, а также другие особенности, описанные в [1, 2].

Разработан гибридный алгоритм на основе методов целочисленного линейного программирования с использованием декомпозиционного подхода, генетического алгоритма и эвристики жадного типа. Вычислительный эксперимент на задачах с реальными данными показал существенное преимущество этого алгоритма по сравнению с предложенными ранее методами [1, 2].

Работа поддержана грантами РФФИ 12-01-00122, 13-01-00862.

ЛИТЕРАТУРА

1. Floudas C.A., Kallrath J., Pitz H.-J., Shaik M.A. Production scheduling of a large-scale industrial continuous plant: short-term and medium-term scheduling // Comp. Chem. Engng. 2009. V. 33. P. 670–686.

2. Janak S.L., Floudas C.A., Kallrath J., Vormbrock N. Production scheduling of a large-scale industrial batch plant. I. Short-term and medium-term scheduling // Industrial & Engineering Chemistry Research. 2006. V. 45. N. 25. P. 8234–8252.

Еремеев Антон Валентинович,
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия,
e-mail: eremeev@ofim.oscbras.ru
Борисовский Павел Александрович, Коваленко Юлия Викторовна
Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск, Россия,
e-mail: borisovski@mail.ru, juliakoval86@mail.ru

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ЭВРИСТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ НЕСКЛАДИРУЕМЫМИ РЕСУРСАМИ

Е.Н. Гончаров

Рассматривается многономенклатурная одномодальная задача календарного планирования в условиях ограниченных ресурсов. Необходимо найти расписание выполнения работ с минимальным сроком завершения проекта. При этом должны быть учтены технологические ограничения предшествования работ и ограничения на ресурсы. Все ресурсы являются нескладируемыми, считаем известным объем выделяемого ресурса в каждый момент времени. Прерывания работ не допускаются [1].

Частичный порядок на множестве работ задается ациклическим ориентированным графом. Для каждой работы известны длительность ее выполнения, множество потребляемых ею ресурсов, их объем, и профиль потребления ресурсов на протяжении выполнения работы. Длительности работ - произвольные вещественные неотрицательные числа.

Для решения задачи предлагается стохастический эвристический алгоритм. На каждом его шаге строится вероятностное приближенное решение на основе детерминированного жадного алгоритма [2], временная сложность которого зависит от числа дуг-работ n как $n \log n$. Основная идея этого алгоритма состоит в том, что для построения решения исходной задачи используется приближенное расписание, полученное в предположениии складируемости ограниченных ресурсов [1]. Для улучшения полученных этим способом решений дополнительно применялся также известный Forward-backward алгоритм.

Качество алгоритма исследовано в серии вычислительных экспериментов, тестовые примеры для которых были взяты из библиотеки тестовых задач PSPLIB [3].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-07-00809).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э.Х. О некоторых математических моделях и методах планирования крупномасштабных проектов // Модели и методы оптимизации: Тр./ АН СССР Сиб. Отд-ние. Институт математики; т.10. Новосибирск: Наука, 1988. с. 89–115
2. Goncharov E.N. A greedy heuristic approach for the resource-constrained project scheduling problem // Studia Informatica Univeralis, 2011, Vol. 9, N. 3, pp. 79–90.
3. R. Kolisch and A. Sprecher. PSPLIB — A project scheduling problem library // Eur. J. Oper. Res. 1996. T. 96, N 1. C. 205–216.

Гончаров Евгений Николаевич,
Институт математики СО РАН им. С.Л.Соболева, Новосибирск, Россия,
E-mail: gon@math.nsc.ru

ЗАДАЧА СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЙ ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОРОВ С КРИТЕРИЕМ МИНИМИЗАЦИИ МАКСИМАЛЬНОГО ВРЕМЕННОГО СМЕЩЕНИЯ

Н.С. Григорьева

Рассматривается NP-трудная [1] задача составления расписания для параллельных процессоров, в которой критерием качества расписания является максимальное временное смещение.

Рассмотрим систему заданий $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, которые требуется выполнить на m идентичных процессорах, любое задание может выполняться на любом процессоре, и каждый процессор может выполнять не более одного задания в каждый момент времени. Прерывания выполнения заданий не допускаются. Задано время выполнения каждого задания $t(u_i)$, время поступления задания $r(u_i)$ и директивный срок $D(u_i)$, к которому задание должно быть закончено.

Построить расписание значит найти для каждого задания u_i время начала выполнения задания $\tau(u_i)$ и номер процессора $num(u_i)$, на котором оно выполняется. Определим запаздывание для каждого задания $f(u_i) = \max\{\tau(u_i) + t(u_i) - D(u_i)\}$. Максимальным временным смещением для расписания S называется величина

$$L_{\max} = \max\{f(u_i) | u_i \in U\}.$$

Требуется построить расписание S минимизирующее $L_{\max}$.

Для решения задачи предлагается алгоритм ветвей и границ, который позволяет получать точное оптимальное решение или, при ограничении на время работы, достаточно хорошие приближенные решения задачи. Основными особенностями данного алгоритма являются метод продолжения частичного решения, метод построения оценки и способы исключения недопустимых решений.

Предлагается сначала выбирать задания с минимальным директивным сроком, этот вариант может приводить к частому появлению простоев, чтобы исключить нерациональное использование времени процессора, определяется задание, которое можно выполнять в этот период простоя. Такой метод выбора заданий был разработан для задачи построения расписания минимальной длины [2]. Для оценки частичного решения, предлагается метод, основанный на определении интервала концентрации. Разработаны несколько критериев для раннего определения недопустимости частичных решений, применение которых приводит к существенному сокращению перебора. Был проведен вычислительный эксперимент, который показал эффективность предложенных подходов.

ЛИТЕРАТУРА

1. P.Brucker, M.R.Garey and D.S.Jonson. Sheduling equal-length tasks under treelike precedence constraints to minimize maximum lateness.// Math.Oper.Res.1977. V. 2.P.275–284.

2. Н.С.Григорьева. Алгоритм ветвей и границ для задачи составления расписания на параллельных процессорах. // Вестник СПбГУ. Серия 10. 2009. Вып. 1. С. 44–55.

Григорьева Наталья Сергеевна, С.-Петербургский гос. университет, С.-Петербург, Россия, e-mail:gns@interzet.ru

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ СЕТЕВОЙ МОДЕЛИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОЕКТА С КРИТЕРИЕМ МАКСИМИЗАЦИИ ПРИБЫЛИ

Н.Ю. Исупова, Д. С. Орлова

Пусть проект описывается сетевым графом $G = (V, E)$. В каждом промежутке $[t-1, t)$, $t \in Z^+$, интервала планирования $[0, T)$ имеется $Q^k(t)$ ресурсов вида $k \in K$. Работа $j \in V$ характеризуется длительностью $p_j \in Z^+$, потребностью $q_i^k(\tau)$ в ресурсе на интервале $[\tau - 1, \tau)$, $\tau = 1, \ldots, p_j$, и прибыльностью $c_j(s_j)$, зависящей от начала выполнения работы s_j. В предположении складируемости ресурсов задача может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j \in V} c_j(s_j) & \longrightarrow & \max; (1) \\ s_i + p_i & \leq & s_j, \quad (i,j) \in E; (2) \\ \sum\limits_{t'=1}^{t} \sum\limits_{j \in N(S,t)} q_j^k(t' - s_j) & \leq & \sum\limits_{t'=1}^{t} Q^k(t'), \ k \in K; (3) \\ s_j + p_j & \leq & T, \ j \in V, (4) \end{cases}$$

где $N(S,t) = \{j \,|\, s_j < t \leq s_j + p_j\}$. Известно, что данная задача в общем случае NP-трудна, несмотря на предположение о складируемости ограниченных ресурсов.

Теорема 1. *Пусть работам с положительной прибыльностью соответствуют максимальные элементы частичного порядка G, $c_j(s_j)$ выпуклые вверх функции, и $p_j \in Z^+$ произвольны. Тогда алгоритм покоординатного спуска точно решает задачу (1)-(4) за полиномиальное время.*

В отличие от детерминированной модели, множество вершин-событий стохастического графа неоднородно и состоит из подмножеств разнотипных вершин, определяемых условиями их реализации на входах или выходах событий. Результатом анализа сетевой модели являются данные совместной статистической обработки независимых розыгрышей отдельных реализаций модели [2]. Для каждой конкретной реализации отыскиваются допустимоое расписания работ, входящих в данную реализацию, и величина суммарного дохода, получаемого в пределах заданного горизонта планирования. В качестве выхода алгоритма анализа стохастической сетевой модели предлагается эмпирическая функция распределения величин получаемых доходов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00093, 12-01-33028-мола-вед), целевой программы резидиума РАН (проект № 227) и междисциплинарного интеграционного проекта ИМ СОРАН (№ 7Б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.И.Глебов. Об одном классе задач выпуклого целочисленного программирования // Сб. Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР, Новосибирск, 1973, выпуск 11.
2. Мироносецкий Н. Б., Сокольская Т. И. Алгоритм анализа стохастической сетевой модели // Методы моделирования и обработка информации. Новосибирск: Наука, 1976, с. 197–203.

Исупова Надежда Юрьевна, СибГУТИ, Новосибирск, Россия;
Орлова Дарья Сергеевна, НГУ, Новосибирск,Россия
e-mail: nad2549@yandex.ru, orlink@mail.ru

ГИБРИДНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СОСТОЯВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ, СВЯЗАННЫХ ЧАСТИЧНЫМ ПОРЯДКОМ, В МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ СРЕДЕ

Д. А. Кобер, Н.С. Григорьева

Планирование – процесс распределения вычислительных работ между процессорами с целью уменьшения общего времени выполнения заданий. Важным аспектом подобных процессов является решение задач составления расписаний, которые в общем случая являются NP-трудными. В работе рассматривается следующая задача. Пусть m – количество заданий, подлежащих выполнению; n – количество процессоров, работающих параллельно; τ_{ij} – время начала выполнения задания i на процессоре j, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$; t_i – время выполнения задания i, $1 \leqslant i \leqslant m$. В единицу времени процессор может выполнять не более одного задания. Прерывания выполнения заданий запрещены. На множестве заданий введен частичный порядок: задание i предшествует заданию j ($i \prec j$), тогда и только тогда, когда $\tau_{ik} + t_i \leqslant \tau_{jl}$, где $1 \leqslant i, j \leqslant m$, $1 \leqslant k, l \leqslant n$. Необходимо составить расписание минимальной длины.

Для решения поставленной задачи был разработан гибридный алгоритм, основой которого является островная генетическая модель с несколькими параллельно развивающимися популяциями. Жизненный цикл популяций контролируется внешним процессом-наблюдателем, который отвечает за координацию работы дочерних генетических алгоритмов и определение момента остановки всего алгоритма вцелом. Помимо стандартной структуры, каждый генетический алгоритм развития конкретной популяции, включает в себя различные фазы оптимизации, что позволяет находить более хорошие решения за меньшее время по сравнению с классической моделью.

Тестированние разработанного алгоритма проводилось на наборе задач, полученных специализированным модулем, целью которого является генерация и отбор трудно-решаемых задач. Выводы о сложности задачи делались на основе результатов работы таких алгоритмов, как генетический алгоритм, алгоритм критического пути и списочный алгоритм.

ЛИТЕРАТУРА

1. K.S. Goh, A. Lim, B. Rodrigues Sexual Selection for Genetic Algorithms // Journal Artificial Intelligence Review archive Volume 19 Issue 2, April 2003, Pages 123 - 152.

2. Tarek A. El-Mihoub, Adrian A. Hopgood, Lars Nolle, Alan Battersby Hybrid Genetic Algorithms: A Review // Engeneering Letters, 13:2 (Advance online publications: 4 August 2006).

3. J. Brownlee Clonal Selection Algorithms // Technical Report 070209A.

Кобер Дмитрий Александрович, Григорьева Наталья Сергеевна,
СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия, e-mail:dmitry.kober@gmail.com, gns@interzet.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕСУРСАМИ

В. В. Леонов, Д. В. Мишин

Пусть проект описывается сетевым графом $G = (V, E)$. В каждом единичном промежутке времени $[t-1, t)$, $t \in Z^+$, интервала планирования $[0, T)$ имеется $Q^k(t)$ ресурсов вида $k \in K$. Каждая работа $j \in V$ характеризуется продолжительностью $p_j \in Z^+$ и потребностью $q_i^k(\tau)$ в ресурсе вида k на интервале времени $[\tau - 1, \tau)$, $\tau = 1, \ldots, p_j$.

Требуется найти расписание работ, минимизирующее время выполнения проекта, при условии соблюдения технологии выполнения работ и ресурсных ограничений.

В работе [1] был представлен точный полиномиальный алгоритм в случае складируемости ограниченных ресурсов. В общем случае, когда допускаются нескладируемые ресурсы, задача NP-трудна.

В данном докладе приводятся результаты программной реализации алгоритма из работы [1] и предложен подход к построению приближенного гибридного алгоритма решения задачи при наличии ограничений на ресурсы нескладируемого типа с использованием эвристик типа [2] и решения задачи со складируемыми ресурсами в качестве оценочного снизу.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00093, 12-01-33028-мола-вед), целевой программы резидиума РАН (проект № 227) и междисциплинарного интеграционного проекта ИМ СОРАН(№ 7Б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гимади Э.Х., Залюбовский В.В., Севастьянов С.В. Полиномиальная разрешимость задач календарного планирования со складируемыми ресурсами и директивными сроками // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2000, Том 7, № 1, С. 9–34.

2. Кочетов Ю.А., Столяр А.А. Новые жадные эвристики для задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. 2005. Т. 12, № 1. С. 12–36.

Леонов Валентин Вячеславович, Мишин Дмитрий Валентинович,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия,
e-mail: leonov.valentin@gmail.com, mishindmv@gmail.com

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОЕКТОВ

О.А. Ляхов

В управлениии проектами основным инструментом для описания ресурсных и временных условий является сетевая модель — ориентированный без контуров, петель и кратных дуг граф, в котором дуги — операции, вершины отображают результаты операций. Известные постановки календарных задач в сетевой форме сводятся в основном к минимизации длительности выполнения комплексов работ при ограниченных ресурсах или к сокращению несбалансированности потребления ресурсов при заданной длине планового периода. На практике используются приближенные методы, не гарантирующие получение близких к оптимальным решений.

Рассмотрены способы формализации условий календарных задач сетевого планирования с прерываниями и без прерываний работ с учетом ограничений на ресурсы в виде моделей целочисленного программирования. Приведены результаты численных экспериментов задач по минимизации длительности цикла с использованием известных пакетов решения оптимизационных задач.

Ляхов Олег Алексеевич, ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, e-mail:loa@rav.sscc.ru

ОПТИМИЗАЦИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КРЕДИТОВ В ЗАДАЧЕ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Е.А. Мартынова, В.В. Сервах

Рассматривается задача календарного планирования с критерием максимизации прибыли и ограничениями на финансовые ресурсы. Имеется множество взаимосвязанных работ $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Работа $j \in V$ выполняется непрерывно в течение времени $p_j \in Z^+$. Известны необходимые вложения $k_j(\tau)$ в работу и доход от ее выполнения $c_j(\tau)$, $\tau = 1, 2, \ldots, p_j$, который может быть реинвестирован. Величина $NPV_j = \sum\limits_{\tau=1}^{p_j} \frac{c_j(\tau)-k_j(\tau)}{(1+r_0)^{\tau-1}}$ называется чистой прибылью работы, приведенной к началу ее выполнения, где r_0 — процентная ставка альтернативного безрискового размещения капитала. Предполагается, что в год $t = 1, 2, \ldots$ имеются финансовые ресурсы в объеме $K(t)$. Требуется, с учетом технологических и ресурсных ограничений, составить расписание выполнения работ $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, при котором общая чистая приведенная прибыль

$$NPV = \sum_{j \in V} \frac{NPV_j}{(1 + r_0)^{s_j}}$$

максимальна.

При использовании кредитов множество допустимых расписаний может быть расширено и, соответственно, прибыль увеличена [1]. В настоящей работе исследуется постановка задачи, в которой в любой момент времени имеется возможность привлечения кредитных ресурсов под фиксированную процентную ставку $r_k \geq r_0$. Кроме построения самого расписания требуется определить сроки и объемы кредитных заимствований. Для теоретического анализа решается подзадача с идентичными технологическими независимыми работами единичной длительности. Построено оптимальное решение, приведены примеры ситуаций, в которых часть работ финансируется за счет кредитов, а остальные за счет реинвестирования поступаемого дохода. Полученные теоретические результаты используются при разработке алгоритма решения задачи в общем случае.

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 12-01-00184а, 12-01-00122) и грантом целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 7Б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мартынова Е.А., Сервах В.В. О задаче календарного планирования проектов с использованием кредитов // Автоматика и телемеханика, 2012. – № 3, – С.107–116.

Мартынова Евгения Андреевна
Омский государственный университет, Омск, Россия, e-mail: martynova87@mail.ru
Сервах Владимир Вицентьевич
Омский филиал Института математики им С.Л.Соболева СО РАН, Омск, Россия, e-mail: svv_usa@rambler.ru

О ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ДЛЯ РОБОТИЗИРОВАННОЙ ЯЧЕЙКИ

С. В. Павлов

Роботизированная ячейка представляет собой производственную линию для обработки бесконечного потока идентичных деталей, состоящую из $m+2$ машин $\{M_0, \ldots, M_{m+1}\}$ и одного робота, предназначенного для переноса деталей между машинами. Каждая *работа* в машинной среде *flow shop* представляет собой последовательность $O_1 \to \cdots \to O_m$ из операций, выполняемых над одной деталью, где операция O_i выполняется на машине M_i. По завершении O_i робот обязан немедленно выполнить действие A_i: снять деталь с машины M_i и переместить её на M_{i+1}. При этом моменты начала операций O_i и O_{i+1} (в случае $i < m$) должны различаться лишь на время δ_i^{i+1} перемещения детали между машинами. (Иными словам, действия робота подчиняются *строгой стратегии разгрузки*.) Робот может захватывать одновременно не более одной детали. Машины M_0 и M_{m+1} являются выделенными и представляют собой *вход* и *выход* роботизированной ячейки.

В *циклическом расписании* робот многократно повторяет некоторую последовательность $(\mathcal{C})$ действий $\{A_i\}$, называемую *циклом*. *Степенью цикла* $\mathcal{C}$ называют число $k(\mathcal{C})$ инициируемых в нём работ, т. е. число входящих в $\mathcal{C}$ действий A_0. *Периодом цикла* $\mathcal{C}$ называется длина $T(\mathcal{C})$ циклически повторяющегося расписания выполнения работ, в котором действия робота задаются последовательностью $\mathcal{C}$. Отношение $\frac{k(\mathcal{C})}{T(\mathcal{C})}$ называется *производительностью цикла*. В рассматриваемой задаче (обозначим её $\mathcal{G}$) требуется найти цикл максимальной производительности.

Помимо задачи $\mathcal{G}$ представляет интерес её частный случай $\mathcal{G}'$, когда рассматривается *сбалансированная* и *регулярная* роботизированная ячейка (т. е. когда время выполнения каждой операции равно $p \geqslant 0$, а время перемещения робота между машинами M_i и M_j вычисляется по формуле $\delta_i^j = |i-j|\delta$, для заданного $\delta \geqslant 0$).

В [1] была высказана гипотеза о том, что степень оптимального цикла для любого входа задачи $\mathcal{G}$ не превосходит $m-1$, где m — число машин, и приводится доказательство для $m = 2, 3$. Позднее в [2] для задачи $\mathcal{G}'$ была представлена более детальная гипотеза о структуре оптимальных циклов для этого частного случая, и там же эта гипотеза доказана для случаев $m \leqslant 4$, а также для произвольного m в случае $p \in [4(q-1)\delta, 4q\delta)$, $q \leqslant \frac{m+2}{4}$, оставляя таким образом случай $m = 5$, $p \in [4\delta, 8\delta)$ открытым. В настоящей работе мы доказываем следующее

Утверждение. Для регулярной сбалансированной роботизированной ячейки в среде flow shop с одним роботом и строгой стратегией разгрузки оптимальным циклом в случае $m = 5$, $p \in [4\delta, 8\delta)$ является $A_0A_1A_0A_2A_1A_3A_2A_4A_3A_5A_4A_5$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Agnetis* (2000) Scheduling no-wait robotic cells with two and three machines // *European Journal of Operational Research* **123**(2), 303–314.

2. *F. Mangione, N. Brauner, B. Penz* (2003) Cyclic production for the robotic balanced no-wait flow shop // International Conference of Industrial Engineering and Production Management (IEPM), Porto: Portugal 2003.

Павлов Сергей Вадимович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН Новосибирск; e-mail: kiberdweller@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАКАЗОВ ПАРТИЯМИ С РАЗЛИЧНЫМИ КРИТЕРИЯМИ

А.А. Романова

Рассмотрим следующую задачу теории расписаний. Производителю необходимо выполнить n заказов некоторого клиента. Известна длительность p_j выполнения заказа j, а также директивный срок d_j — время, к которому желательно выполнить заказ j, $j = 1, \ldots, n$. Выполнение заказов производителем происходит последовательно. Для доставки клиенту готовые заказы распределяются по партиям. Моментом завершения выполнения заказа считается время завершения выполнения всех заказов партии, в которую данный заказ размещен. Количество партий ограничено числом k, в каждой партии не должно быть более m заказов (предполагается, что $mk \geq n$). Эти условия могут быть связаны, например, с ограниченным количеством транспортных средств у производителя для доставки заказов клиенту. В работе исследуется сложность данной задачи с критериями минимизации максимального запаздывания $T_{\max}$, суммы моментов завершения C_Σ, суммы взвешенных моментов завершения $C_{\Sigma w}$.

При известной последовательности выполнения заказов задача с любым из перечисленных критериев может быть решена за полиномиальное время алгоритмом динамического программирования. Таким образом, задача сводится к нахождению последовательности выполнения заказов.

Задача в аналогичной постановке, но с другим критерием исследовалась в [2]. В книге [1] приведен обзор задач обслуживания требований партиями в различных условиях. Наиболее близкими к рассматриваемой задаче по режиму выполнения заказов (последовательное выполнение, одновременное завершение обслуживания) являются задачи с наличием переналадок между партиями и неограниченным размером партий.

В данной работе доказана полиномиальная разрешимость задачи с критериями C_Σ и $T_{\max}$; построены соответствующие алгоритмы. С помощью полиномиального сведения задачи “Разбиение” показана NP-трудность задачи с критерием $C_{\Sigma w}$. Также выделены полиномиально разрешимые частные случаи этой задачи, предложен алгоритм нахождения приближенного решения, показавший хорошие результаты в ходе проведения вычислительного эксперимента.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00122.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.С. Танаев, М.Я. Ковалев, Я.М. Шафранский. Теория расписаний. Групповые технологии. Минск: Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 1998.

2. Y. Wang. Models and Algorithms for Some Combinatorial Optimization Problems: University Course Timetabling, Facility Layout and Integrated Production. Grado Department of Industrial and Systems Engineering. Virginia Tech, Blackburg, USA, 2007.

Романова Анна Анатольевна,
Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск, Россия,
e-mail: anna.a.r@bk.ru

НОРМАЛЬНОСТЬ В ЗАДАЧЕ OPEN SHOP С МАРШРУТИЗАЦИЕЙ ПРИ УСЛОВИИ ДОМИНИРОВАНИЯ

И.Д. Черных, А.А. Подкожурникова

В классической модели Open Shop расписание называется *нормальным*, если его длина совпадает с нижней оценкой $\bar{C} \doteq \max\{\ell_{\max}, d_{\max}\}$, где $\ell_{\max}$ — максимальная машинная нагрузка, а $d_{\max}$ — максимальная длина работы.

В работе [1] описываются широкие подклассы примеров этой задачи, для которых гарантируется существование допустимого нормального расписания (такие классы называются *нормальными*) и для которых существует эффективный алгоритм построения оптимального расписания (*эффективно-нормальные*). Все эти классы описаны в терминах неравномерности нагрузок машин и максимальной длительности операции $p_{\max}$.

В данной работе эти результаты адаптируются для задачи open shop с маршрутизацией машин [2]. В этой модели работы считаются расположенными в узлах некоторой транспортной сети, и машины передвигаются по этой сети, в частности обходя все ее узлы (в каждом узле расположена по крайней мере одна работа). Все машины изначально находятся в выделенной вершине (*базе*) и должны вернуться туда после выполнения всех своих операций. Таким образом, эта задача является обобщением как задачи open shop, так и классической задачи комивояжера в метрическом случае. Для этой задачи рассмотрим нижнюю оценку $\bar{R} \doteq \max\{\ell_{\max} + T, \max\{d^k_{\max} + 2\tau_k\}\}$, где T — длина кратчайшего обхода транспортной сети, $d^k_{\max}$ — максимальная длина работы в k-ой вершине и τ_k — расстояние от базы до k-ой вершины. Расписание, длина которого совпадает с $\bar{R}$, также будем называть нормальным.

Рассмотрим двухмашинную задачу open shop с маршрутизацией графе $G = \langle V, E\rangle$. Обозначим разность между нагрузками машин через $\delta \doteq |\ell_1 - \ell_2$. Для этой задачи получены следующие результаты:

- Класс примеров задачи с $G = K_2$ и $\delta \geq p_{\max}$ является эффективно-нормальным;
- Класс примеров задачи с $\delta \geq 2p_{\max}$ и произвольным графом G является эффективно-нормальным в случае, когда известен кратчайший обход графа и нормальным в остальных случаях.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00184.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Kononov, S. Sevastianov, I. Tchernykh. When difference in machine loads leads to efficient scheduling in open shops. //Annals of Operations Research 1999, Volume 92, pp 211-239

2. I. Averbakh, O. Berman, I. Chernykh. The routing open shop problem on a network: complexity and approximation. // European J. Oper. Res. Volume 173, Issue 2, 2006, Pages 531–539

Черных Илья Дмитриевич, ИМ СОРАН, Новосибирск, e-mail:idchern@math.nsc.ru
Подкожурникова Алёна Александровна, НГУ, Новосибирск, e-mail:ale-na-06@mail.ru

О СООТНОШЕНИИ ОПТИМУМОВ В ЗАДАЧАХ OPEN SHOP С ЗАПРЕЩЕНИЕМ И РАЗРЕШЕНИЕМ ПРЕРЫВАНИЙ ОПЕРАЦИЙ

И. Д. Черных, С. В. Севастьянов

Одной из актуальных тем в теории расписаний является возможность улучшения качества решения (улучшения значения оптимума) за счёт разрешения прерывания операций. В классической задаче Open Shop на минимум длины расписания довольно часто прерывания не дают каких-либо преимуществ — такие примеры называются *нормальными*. Тем не менее, существуют примеры, для которых это не так. Возникает естественный вопрос: сколь велика может быть *ненормальность* примера, оцениваемая как отношение оптимума ($C^*_{NP}(I)$) в задаче с запрещением прерываний к оптимуму ($C^*_P(I)$) задачи с разрешением прерываний?

Аксёновым [1] было доказано, что ненормальность любого примера не превосходит 2. Согласно фольклорной гипотезе (остающейся до сих пор открытой) ненормальность никогда не превосходит $3/2$. (Эта оценка достигается на примерах с бесконечно растущим числом машин m.) Как подтверждение данной гипотезы, в [2] было доказано, что ненормальность примеров с числом машин $m \leq 3$ не превосходит $4/3$, и эта оценка точна.

В представленной работе мы исследуем величину ненормальности в "худшем случае" как функцию $F_m(D)$ от ограничения сверху (D) на величину суммарной нагрузки ($\Delta(I)$) по всем машинам в заданном примере I. При этом рассматриваются лишь *масштабированные* примеры, у которых $C^*_P(I) = 1$. (Такой пример получается из исходного примера I' путём деления длительности каждой операции на $C^*_P(I')$.)

Новые результаты:

1. Построен график функции $F_3(D)$, определённой в интервале $D \in [1, 3]$.

2. Доказано, что для любого масштабированного примера I верна оценка оптимума: $C^*_{NP}(I) \leq \max\{1, \Delta(I)/2\}$.

3. Обнаружен новый класс нормальных примеров, а именно: класс $\mathcal{I}(D)$ масштабированных примеров, удовлетворяющих ограничению $\Delta(I) \leq D$, при любом $D \leq 2$ является нормальным и разрешимым за линейное время.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант N 12-01-00184а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *В.А. Аксёнов* (1988) Полиномиальный алгоритм приближённого решения одной задачи теории расписаний // *Управляемые системы*, Т. 28. С. 8–11.

2. *S.V. Sevastianov and I.D. Tchernykh* (1998) Computer-Aided Way to Prove Theorems in Scheduling // G. Bilardi, a.o. (Eds.), Algorithms — ESA'98, 6th Annual European Symposium, Venice, Italy, August 1998. Proceedings, *Lecture Notes in Computer Science*, V. **1461**, Springer-Verlag, pp. 502–513; doi: 10.1007/3-540-68530-8_42

Черных Илья Дмитриевич, Севастьянов Сергей Васильевич,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
e-mail: idchern@math.nsc.ru, seva@math.nsc.ru

СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧИ О РАЗРЕЗЕ МАКСИМАЛЬНОГО ВЕСА В ЕВКЛИДОВОМ СЛУЧАЕ

А.А. Агеев

В задаче о максимальном разрезе (**Max-Cut**) задан полный граф G с неотрицательными весами на рёбрах. Требуется разбить множество вершин графа G на две части таким образом, чтобы суммарный вес рёбер, соединяющих вершины из разных частей, был максимален.

Задача **Max-Cut** является одной из базовых NP-трудных задач дискретной оптимизации. Распознавательная версия задачи фигурирует под номером 21 в классическом списке NP-полных задач Карпа [1] (см. также [2]).

Можно показать, что задача **Max-Cut** NP-трудна также и в метрическом случае – когда веса ребер удовлетворяют неравенству треугольника. В работе рассматривается ещё более частный случай – когда вершинами графа являются точки пространства $\mathbb{R}^n$, а веса ребер - евклидовы расстояния между этими точками (**Euclidean Max-Cut**). Сложностной статус **Euclidean Max-Cut** в литературе не исследован; при фиксированных размерностях пространства остаётся неясным. Основной результат работы:

Теорема 1. Задача **Euclidean Max-Cut** NP-трудна в сильном смысле в случае, когда размерность пространства является частью входа задачи.

В основе доказательства лежит полиномиальное сведение к рассматриваемой задаче NP-трудной задачи о бисекции кубического графа [3].

В заключение отметим, что NP-трудность **Max-Cut** в случае, когда веса ребер являются *квадратами евклидовых расстояний* и размерность пространства - часть входа, доказана недавно А.В. Кельмановым и А.В. Пяткиным. Незначительная модификация конструкции, использованной в доказательстве теоремы 1, приводит к короткому доказательству и их результата.

Работа поддержана грантом РФФИ №12-01-00184.

ЛИТЕРАТУРА

1. Karp R.M. Reducibility among combinatorial problems // Miller R.T., Thatcher J.W. (eds.), Complexity of Computer Computations. Plenum Press, New York, 1972, pp. 85–103.

2. Garey M.R., Johnson D.S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. San Francisco: Freeman, 1979. 314 P.

3. Garey M.R., Johnson D.S., Stockmeyer L. Some simpliЇed NP-complete graph problems// Theoret. Comput. Sci. 1(3):237–267, 1976.

Агеев Александр Александрович
ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия, e-mail: ageev@math.nsc.ru

(3, 1)-РАСКРАСКИ И 3-РЕГУЛЯРНЫЕ ПОДГРАФЫ 4-РЕГУЛЯРНЫХ ПСЕВДОГРАФОВ

А.Ю. Бернштейн

Гипотеза К. Бержа, доказанная В.А. Ташкиновым [2], утверждает, что любой простой 4-регулярный граф содержит 3-регулярный подграф. Для 4-регулярных псевдографов это утверждение, вообще говоря, неверно, и вопрос характеризации 4-регулярных псевдографов, не содержащих 3-регулярной части, остаётся открытым. В частности, неизвестно, существуют ли 4-регулярные псевдографы без кратных рёбер (но с петлями), не содержащие 3-регулярных подграфов. В докладе рассматривается специальный класс раскрасок рёбер 4-регулярных псевдографов, свойства которых, с одной стороны, тесно связаны с наличием в графе 3-регулярных подграфов, а с другой — представляют самостоятельный интерес.

$(3, 1)$-*раскраской* 4-регулярного псевдографа G будем называть раскраску его рёбер в несколько цветов, такую что в каждой вершине сходятся три ребра одного цвета и одно — другого. В первую очередь, интерес представляет характеризация 4-регулярных псевдографов, допускающих $(3, 1)$-раскраску, а также оценка минимального необходимого для $(3, 1)$-раскраски числа цветов. Автором доклада было показано, что любой связный 4-регулярный псевдограф, содержащий 3-регулярный подграф, обладает $(3, 1)$-раскраской, в то время как обратное неверно. Кроме того, $(3, 1)$-раскраску допускает любой 4-регулярный псевдограф без кратных рёбер. Было доказано, что для $(3, 1)$-раскраски связного 4-регулярного псевдографа G достаточно двух цветов, если и только если G содержит чётное число вершин. Наконец, если псевдограф допускает какую-либо $(3, 1)$-раскраску, то он допускает также и $(3, 1)$-раскраску не более, чем в 3 цвета. Таким образом, проблема о минимальном числе цветов, необходимом для $(3, 1)$-раскраски, полностью решена.

Назовём *упорядоченной* $(3, 1)$-*раскраской* 4-регулярного псевдографа G раскраску его рёбер в цвета $\{1, 2, \ldots, k\}$ (где k — некоторое натуральное число), такую что в каждой вершине сходятся 3 ребра одного цвета и одно — другого, причём обладающего строго большим номером. Автором доклада было доказано, что связный 4-регулярный псевдограф G обладает упорядоченной $(3, 1)$-раскраской, если и только если он содержит 3-регулярный подграф.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Alon, S. Friedland, G. Kalai. Every 4-regular graph plus an edge contains a 3-regular subgraph. // Journal of Combinatorial Theory — JCT, Volume 37, No. 1, 1984, Pages 92–93.

2. В.А. Ташкинов. 3-однородные части 4-однородных графов. // Матем. заметки, 36:2, 1984, С. 239–259.

3. O. Moreno, V.A. Zinoviev. Some sufficient conditions for 4-regular graphs to have 3-regular subgraphs. // Proceeding of First French-Israeli Workshop on Algebraic Coding, Lecture Notes in Computer Science, 1993, Pages 164–171.

Бернштейн Антон Юрьевич, Новосибирский Государственный Университет, Новосибирск, Россия, E-mail: bahtoh@gmail.com

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ГИПЕРГРАФА НА АТОМЫ КЛИКОВЫМИ МИНИМАЛЬНЫМИ СЕПАРАТОРАМИ

В.В. Быкова

Рассматривается один из декомпозиционных подходов решения NP-трудных экстремальных задач на графах — разложение гиперграфа на атомы кликовыми минимальными сепараторами. Показано, что такое разложение сохраняет все клики исходного гиперграфа, не порождает новых клик. Доказано, что процесс разложения всегда приводит к уникальному для заданного гиперграфа набору атомов. Работа обобщает результаты Лаймера [1], полученные для обыкновенных графов, расширяя тем самым область приложений рассматриваемого подхода.

Пусть задан связный конечный гиперграф $H = (X, U)$ с множеством вершин X и множеством ребер U, при этом всякое ребро гиперграфа определяется как некоторое непустое подмножество множества X. Множество $S \subset X$ назовем (a, b)-сепаратором гиперграфа H, если существуют $a, b \in X \setminus S$, такие что гиперграф $H(X \setminus S)$ несвязен, а вершины a и b принадлежат разным компонентам связности. Минимальный по включению (a, b)-сепаратор, образующий в H клику, – кликовый минимальный сепаратор гиперграфа H. Гиперграф $H(Y)$ назовем атомом исходного гиперграфа H, если $Y \subseteq X$ — максимальное по включению подмножество вершин, порождающее гиперграф $H(Y)$, при этом $H(Y)$ связен и не содержит кликовых минимальных сепараторов. Процесс разложения гиперграфа H на атомы заключается в многократном поиске в H кликового минимального сепаратора S, выделении компонент связности гиперграфа $H(X \setminus S)$ и «копировании» S в эти компоненты. Пусть результатом этого процесса являются множество $\Delta(H)$ кликовых минимальных сепараторов и множество $\Omega(H)$ гиперграфов $H(Y_i)$ с областями связности $Y_i \subseteq X$, $i \in I$.

Утверждение 1. Разложение $\Omega(H) = \{H(Y_i) : \ i \in I\}$ задает уникальное для заданного гиперграфа H множество атомов.

Утверждение 2. Для гиперграфа $H = (X, U)$ множества $\Delta(H)$ и $\Omega(H)$ можно построить за время $O(n^2 m)$, где $n = |X|$, $m = |U|$.

В работе показано применение атомарного разложения гиперграфа при решении двух NP-трудных задач: вычисления древовидной ширины гиперграфа и нахождения вершинной k-раскраски гиперграфа [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. H.G. Leimer. Optimal decomposition by clique separators // Discrete Mathematics. 1993. V. 113. P. 99–123.

2. В.В. Быкова. Рекуррентные методы вычисления древовидной ширины гиперграфа // Известия Томского политехнического университета. 2011. Т. 318. №5. С. 5–10.

3. В.В. Быкова. Полиномиальные достаточные условия бихроматичности гиперграфа // Вестник Красноярского государственного университета. Серия физ.-мат. науки. 2006. №7. С. 98–106.

Быкова Валентина Владимировна,
Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия, e-mail: bykvalen@mail.ru

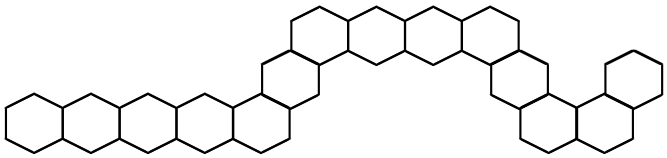
ИНДЕКС ВИНЕРА ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ С СЕГМЕНТАМИ ОДИНАКОВОЙ ДЛИНЫ

А.А. Добрынин

Рассматривается инвариант связного неориентированного графа G, равный сумме расстояний между всеми парами его вершин в естественной метрике:

$$W(G) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} d(u,v).$$

Этот инвариант, называемый индексом Винера, интенсивно изучается в теории графов и имеет многочисленные приложения [1–3]. Гексагональные цепи образуют класс плоских графов, каждая внутреняя грань которых ограничена шестиугольником, и каждая неконцевая грань графа имеет в точности две смежных с ней грани. Цепь естественным образом разбивается на сегменты, состоящие из линейно соединенных граней. Число граней в сегменте называется его длиной (цепь на рисунке ниже содержит 6 сегментов с длинами 5, 3, 4, 3, 2, 2).



Традиционно свойства инвариантов исследуются для индивидуальных графов. В докладе рассказывается об изучении так называемых коллективных свойств индекса Винера, начатом в [4]. Под этим пониматся изучение сумм значений индекса для подмножеств графов. Описаны подмножества $\mathcal{G}$ гексагональных цепей с n сегментами одинаковой длины ℓ, для которых

$$W(\mathcal{G}) = \sum_{G\in\mathcal{G}} W(G) = |\,\mathcal{G}|\,W_{\max} - 8m(\ell-1)^2\binom{n}{3},$$

где $W_{\max}$ есть максимальное значение индекса Винера для цепей рассматриваемого класса, целое число m — характеристика множества цепей $\mathcal{G}$.

Работа поддержана грантом РФФИ 12–01–00631.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Trinajstić. Chemical graph theory. Boca Raton: CRC Press, 1992.
2. A.A. Dobrynin, R. Entringer, I. Gutman. Wiener index for trees: theory and applications // Acta Appl. Math. 2001. V. 66, N. 3. P. 211–249.
3. A.A. Dobrynin, I. Gutman, S. Klavžar, P. Žigert. Wiener index of hexagonal systems // Acta Appl. Math. 2002. V. 72, N 3. P. 247–294.
4. A.A. Dobrynin. On the Wiener index of fibonacenes // MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 2010. V. 64, N. 3. P. 707–726.

Добрынин Андрей Алексеевич, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия, e-mail: dobr@math.nsc.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНО-АВТОМАТНЫХ МОДЕЛЕЙ ГЕННЫХ СЕТЕЙ СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРЫ МЕТОДАМИ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

А.А. Евдокимов, С.Е. Кочемазов, И.В. Отпущенников, А.А. Семенов

Генные сети [1] — это активно изучаемые модели взаимодействия компонентов биологических систем. Математическая модель генной сети — ориентированный граф, вершины которого интерпретируют биологические агенты, а дуги – связи между агентами. Каждой вершине сети сопоставляется специальная функция, называемая весовой функцией. Ряд моделей с дискретными весовыми функциями был изучен в работе [2], где были получены условия возникновения неподвижных точек и циклов для отображений, заданных сетью регулярной структуры (использовались циркулянтные графы). В [3] весовые функции из [2] использовались в сетях случайной структуры. Для численного решения задач поиска неподвижных точек в [3] был применен SAT-подход. Были найдены неподвижные точки отображений, заданных сетями с несколькими сотнями вершин. В [4] предложена дискретная модель генных сетей, учитывающая различные виды регуляторной деятельности агентов: активация, ингибирование и авторегуляция. В настоящем докладе будут представлены результаты исследования сетей, структура которых задается в соответствии с известными моделями случайных графов, а весовые функции — в соответствии с [4].

Работа выполнена при поддержке: Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН №80 «Дифференциально-разностные и интегродифференциальные уравнения. Приложения к задачам естествознания», гранта Президента РФ СП-3667.2013.5, гранта РФФИ-11-07-00377а, гранта РФФИ 11-01-00997.

ЛИТЕРАТУРА

1. Системная компьютерная биология / Под ред. Н.А. Колчанова, С.С. Гончарова, В.А. Лихошвая, В.А. Иванисенко. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. 768 с.

2. Е.Д. Григоренко, А.А. Евдокимов, В.А. Лихошвай, И.А. Лобарева. Неподвижные точки и циклы автоматных отображений, моделирующих функционирование генных сетей // Вестник Томского гос. ун-та. Приложение. 2005. № 14. С. 206-212.

3. А.А. Евдокимов, С.Е. Кочемазов, А.А. Семенов. Применение символьных вычислений к исследованию дискретных моделей некоторых классов генных сетей // Вычислительные технологии. 2011. Т. 16. №1. С. 30-47.

4. А.А. Евдокимов, С.Е. Кочемазов, И.В. Отпущенников, А.А. Семенов. Символьные алгоритмы решения булевых уравнений в применении к исследованию дискретных моделей генных сетей // Материалы XVI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». Нижний Новгород. 2011. С. 151-154.

Евдокимов Александр Андреевич, ИМ им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, evdok@math.nsc.ru
Кочемазов Степан Евгеньевич, ИДСТУ СО РАН, Иркутск, veinamond@gmail.com
Отпущенников Илья Владимирович, ИДСТУ СО РАН, Иркутск, otilya@yandex.ru
Семенов Александр Анатольевич, ИДСТУ СО РАН, Иркутск, biclop@rambler.ru

ОЦЕНКА ЧИСЛА ПОДГРАФОВ С ЗАДАННЫМИ СТЕПЕНЯМИ ВЕРШИН

М.И. Исаев

Пусть G — простой граф с n вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_n$ и множеством ребер EG. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{|EG|}$ векторов $\vec{x} = \left(\xi_{\{j,k\}}\right)$, где пара $\{j,k\}$ соответствует ребру $\{v_j, v_k\} \in EG$. Пусть политоп $\mathcal{P}_G(\vec{s}) \subset \mathbb{R}^{|EG|}$ определяется уравнениями

$$\sum_{j\colon \{v_j,v_k\}\in EG} \xi_{\{j,k\}} = s_k \quad \text{для } k = 1, 2, \ldots, n$$

и неравенствами $0 \le \xi_{\{j,k\}} \le 1$. Целочисленные точки в $\mathcal{P}_G(\vec{s})$ для $\vec{s} \in \mathbb{N}^n$ соответствуют помеченным подграфам графа G, имеющим заданную последовательность степеней вершин $\vec{s}$. Обозначим $SG(\vec{s}) = \mathcal{P}_G(\vec{s}) \cap \mathbb{Z}^{|EG|}$.

Приведем «наивную» оценку $|SG(\vec{s})|$. Предположим, $SG(\vec{s})$ — не пустое. Тогда:

$$\lambda = \lambda(\vec{s}) = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{2|EG|} \in [0,1].$$

Рассмотрим случайный подграф R, для которого каждое ребро G присутствует независимо с вероятностью λ. Каждый подграф с E ребрами возникает с вероятностью $\lambda^E(1-\lambda)^{|EG|-E}$. Вероятность события E_j, что степень v_j в R совпадает с s_j, равна $\lambda^{s_j}(1-\lambda)^{d_j-s_j}\binom{d_j}{s_j}$, где d_j обозначает степень v_j в графе G. Если предположить (ошибочно), что все события $E_1, \ldots, E_n$ независимы, то получится «наивная» оценка:

$$\widehat{|SG(\vec{s})|} = \left(\lambda^\lambda(1-\lambda)^{1-\lambda}\right)^{|EG|} \prod_{j=1}^{n} \binom{d_j}{s_j}.$$

Пусть $q(G)$ обозначает отношение наименьшего к наибольшему собственных значений симметричной матрицы $Q = A + D$, где A — это матрица смежности графа G, D — диагональная $n \times n$ матрица такая, что $D_{jj} = d_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Теорема. Пусть простой граф G с n вершинами таков, что $\max\limits_{1\le j\le n} d_j \ge \gamma n$ и $q(G) \ge \gamma$ для некоторого $\gamma > 0$. Пусть $0 < \alpha \le 1/2$, $\beta > 0$. Тогда для любого $\vec{s} \in \mathbb{N}^n$ такого, что $s_1 + \ldots + s_n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$, $\lambda = \lambda(\vec{s}) \in [\alpha, 1-\alpha]$ и $\max\limits_{1\le j\le n} |s_j - \lambda d_j| \le \beta$, при $n \ge n_0$ выполняется:

$$C_1\sqrt{\frac{\det Q}{\det D}} \le \frac{|SG(\vec{s})|}{\widehat{|SG(\vec{s})|}} \le C_2\sqrt{\frac{\det Q}{\det D}},$$

где константы $n_0, C_1, C_2 > 0$ зависят только от α, β и γ.

Приведенный результат согласуется со следующей формулой, полученной для графов G, близких к полному графу K_n (см. [1] и указанные там ссылки):

$$|SG(\vec{s})| \sim \sqrt{2}e^{1/4}\widehat{|SG(\vec{s})|}.$$

Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00398.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. D. McKay. Subgraphs of dense random graphs with specified degrees.// Combinatorics, Probability and Computing. 2011. V. 20. P. 413–433.

Исаев Михаил Исмаилович, МФТИ(ГУ), Москва, Россия, e-mail:Isaev.M.I@gmail.com

О СЛОЖНОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О РАЗРЕЗЕ МАКСИМАЛЬНОГО ВЕСА

А.В. Кельманов, А.В. Пяткин

Рассматривается следующая

Задача Max-Cut($\mathbb{R}^q$)-SD (Max-Cut in Euclidean space, the case for Squared Distances). *Дано*: множество $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_N\}$ векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^q$ и положительное число A. *Вопрос*: Существует ли разбиение множества $\mathcal{X}$ на два подмножества $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ такое, что

$$\sum_{y \in \mathcal{Y}} \sum_{z \in \mathcal{Z}} \|y - z\|^2 \geq A?$$

Оптимизационный вариант этой задачи соответствует поиску разреза максимального веса в полном неориентированном взвешенном графе, вершинами которого являются точки евклидова пространства, а веса ребер равны квадратам расстояний между этими точками. Как известно, в общем (неевклидовом) случае, когда весами ребер в графе являются положительные числа, задача NP-полна в сильном смысле [1, 2]. Сложностной статус рассматриваемого (евклидова) случая задачи ранее не был установлен, что мотивировало наши исследования. Кроме того, эта задача актуальна, в частности, при решении проблем помехоустойчивого кластерного анализа данных.

Основной результат работы:

Теорема 1. Задача Max-Cut($\mathbb{R}^q$)-SD NP-полна в сильном смысле.

При доказательстве показано, что к частному случаю рассматриваемой задачи с числовыми значениями, ограниченными полиномом от размера входа, полиномиально сводится классическая NP-полная в сильном смысле задача Max-Cut.

Работа поддержана грантами РФФИ 12-01-00090, №12-01-00093, №12-01-00184, 12-01-33028-мол-а-вед, 13-07-00070, а также грантами целевой программы СО РАН (интеграционные проекты 7Б и 21А).

ЛИТЕРАТУРА

1. Karp R.M. Reducibility among combinatorial problems // Miller R.T., Thatcher J.W. (eds.), Complexity of Computer Computations. Plenum Press, New York, 1972, pp. 85–103.

2. Garey M.R., Johnson D.S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. San Francisco: Freeman, 1979. 314 P.

Кельманов Александр Васильевич, Пяткин Артём Валерьевич,
ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия, e-mail: kelm@math.nsc.ru; artem@math.nsc.ru

ЦИКЛЫ МАЛОЙ ДЛИНЫ В STAR ГРАФЕ

Е.В. Константинова, А.Н. Медведев, М.Ю. Савин.

Star граф $S_n = Cay(Sym_n, st), n \geq 2$, является графом Кэли на симметрической группе Sym_n с порождающим множеством $st = \{t_i \in Sym_n, 1 < i \leq n\}$ транспозиций t_i, перемещающих i–ый элемент на первое место. Граф $S_n, n \geq 3$, не содержит нечетные циклы, поскольку является двудольным, но содержит все четные циклы $C_{2l}, 3 \leq l \leq \frac{n!}{2}$ [1], в частности, является гамильтоновым [2].

В данной работе дается полная характеризация 6– и 8–циклов в Star графе на основе их представления в виде произведения порождающих элементов. В [3] такое представление использовалось для характеризации циклов в Pancake графе. Формой цикла C_l длины l в графе S_n, $n \geq 3$, называется последовательность транспозиций $C_l = t_{i_0} \dots t_{i_{l-1}}$, где $2 \leq i_j \leq n$, и $i_j \neq i_{j+1}$ для любого $0 \leq j \leq l-1$, таких, что $\pi\, t_{i0} \dots t_{i_{l-1}} = \pi$, где $\pi \in Sym_n$. В зависимости от выбора вершины π и направления обхода, любой l–цикл может быть представлен $2\,l$ его формами. Канонической формой цикла C_l длины l называется форма с лексикографически максимальной последовательностью индексов $i_0 \dots i_{l-1}$.

Теорема 1. *В графе S_n, $n \geq 3$, через каждую его вершину проходит $\binom{n-1}{2}$ циклов длины шесть канонической формы $C_6 = r_l\, r_k\, r_l\, r_k\, r_l\, r_k$, $2 \leq k < l \leq n$. Всего в графе $\frac{(n-2)(n-1)n!}{12}$ циклов длины шесть.*

Теорема 2. *В графе S_n, $n \geq 4$, через каждую его вершину проходит N_8 различных циклов длины восемь следующих канонических форм:*

$$C_8^1 = t_s\, t_k\, t_l\, t_k\, t_s\, t_k\, t_l\, t_k,$$
$$C_8^2 = t_s\, t_k\, t_l\, t_k\, t_s\, t_l\, t_k\, t_l,$$
$$C_8^3 = t_s\, t_k\, t_s\, t_l\, t_k\, t_s\, t_k\, t_l,$$
$$C_8^4 = t_s\, t_k\, t_s\, t_l\, t_s\, t_k\, t_s\, t_l,$$

где $2 \leq l \neq k < s \leq n$, а $N_8 = 5(n-3)(n-2)(n-1)$. В целом, в графе имеется $\frac{n!}{8}\, N_8$ циклов длины восемь.

Работа поддержана грантом РФФИ 12–01–00448.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. S. Jwo, S. Lakshmivarahan, S. K. Dhall. Embedding of cycles and grids in star graphs // J. Circuits Syst. Comput. — 1991. — Vol. 1, N. 1. P. 43–74.

2. В. Л. Компельмахер, В. А. Лисковец. Последовательное порождение перестановок с помощью базиса транспозиций // Кибернетика. — 1975 — Т. 3, С. 17–21.

3. Е. В. Константинова, А. Н. Медведев. Циклы длины семь в Pancake графе // Дискретный Анализ и Исследование Операций. — 2010. — Т. 17, № 5.–С. 46–55.

Константинова Елена Валентиновна, ИМ СО РАН, Новосибирск, e_konsta@math.nsc.ru
Медведев Алексей Николаевич, ИМ СО РАН, Новосибирск, an_medvedev@yahoo.com
Савин Михаил Юрьевич, НГУ, Новосибирск, savinmike.u@gmail.com

ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ДВОЙНОМ ЦИРКУЛЯНТЕ С ПОРОГОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ В ВЕРШИНАХ

А.М. Нажмиденова, А.Л. Пережогин

В качестве графа–носителя рассматриваемой в работе дискретной динамической системы определим ориентированный граф $G^-_{n;k}$, с множеством вершин

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\},$$

и множеством дуг

$$\{x_i x_j \,|\, j-i \bmod n < k\} \cup \{y_i y_j \,|\, j-i \bmod n < k\} \cup \{x_i y_{n-i \bmod n},\, x_i y_{n-i \bmod n} \,|\, 0 \le i \le n-1\}.$$

Этот граф является склейкой двух циркулянтов [1].

В каждый момент времени вершины графа $G^-_{n;k}$ помечены элементами из $\mathbb{Z}_2$. Набор весов вершин $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \in \mathbb{Z}_2^{2n}$ назовем состоянием системы. В следующий момент времени (такт работы системы) состояние системы меняется, и динамика его изменения определяется отображением

$$A_F : \mathbb{Z}_2^{2n} \to \mathbb{Z}_2^{2n},$$

где $F = (f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, g_0, g_1, \ldots, g_{n-1})$ и новые метки вершин x_i и y_i являются значениями функций $f_i : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2$ и $g_i : \mathbb{Z}_2^k \to \mathbb{Z}_2$, аргументы которых принимают значения старых меток в тех вершинах, дуги из которых входят в вершины x_i и y_i соответственно.

В настоящей работе исследуется функционирование данной системы в случае, когда $f_0 = f_1 = \ldots = f_{n-1} = f$ и $g_0 = g_1 = \ldots = g_{n-1} = g$, причем функции f и g являются аддитивной или мультипликативной (антимонотонными симметрическими пороговыми функциями, отрезающими 0 или 1 соответственно). Заметим, что система на циркулянте с аддитивными и мультипликативными функциями в вершинах является дискретной моделью регуляторного контура генной сети [1,2].

Для рассматриваемой дискретной динамической системы описаны все стационарные состояния и оценено их число. В отличие от системы на одном циркулянте, число стационарных состояний растет экспоненциально от n. Также описаны состояния системы, в которые нельзя попасть из других состояний и состояния, которые могут повторяться после нескольких тактов работы системы.

Работа выполнена при поддержке Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный проект № 80).

ЛИТЕРАТУРА

1. Григоренко Е.Д., Евдокимов А.А., Лихошвай В.А., Лобарева И.А. Неподвижные точки и циклы автоматных отображений, моделирующих функционирование генных сетей // Вестник ТГУ. 2005 № 14. С. 206–212.

2. Демиденко Г.В., Колчанов Н.А., Лихошвай В.А., Матушкин Ю.Г., Фадеев С.И. Математическое моделирование регулярных контуров генных сетей // Журн. вычисл. мат. мат. физ. 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.

Нажмиденова Ажар Маратовна, НГУ, Новосибирск, e-mail:deviliona@yandex.ru
Пережогин Алексей Львович, ИМ СО РАН, Новосибирск, e-mail:pereal@math.nsc.ru

АЛГОРИТМ ПОКРЫТИЯ ПЛОСКОГО ГРАФА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЦЕПЕЙ С УПОРЯДОЧЕННЫМ ОХВАТЫВАНИЕМ

Т.А. Панюкова

Пусть S – плоскость; $G = (V, E)$ – плоский граф. Рассмотрим f_0 – внешнюю грань графа G. Для любого подмножества $H \subset S$ определим $\mathrm{Int}(H)$ как подмножество S, являющееся объединением всех связных компонент множества $S \backslash H$, за исключением внешней грани f_0.

Будем говорить, что минимальная по мощности последовательность реберно-непересекающихся цепей

$$C^0 = v^0 e_1^0 v_1^0 e_2^0 ... e_{k_0}^0 v_{k_0}^0, \quad C^1 = v^1 e_1^1 v_1^1 e_2^1 ... e_{k_1}^1 v_{k_1}^1, \quad \ldots,$$
$$C^{n-1} = v^{n-1} e_1^{n-1} v_1^{n-1} e_2^{n-1} \ldots e_{k_{n-1}}^{n-1} v_{k_{n-1}}^{n-1}$$

с упорядоченным охватыванием, такая что

$$(\forall m : m < n) \quad \left(\bigcup\nolimits_{l=0}^{m-1} \mathrm{Int}(C^l)\right) \cap \left(\bigcup\nolimits_{l=m}^{n-1} C^l\right) = \emptyset$$

является эйлеровым покрытием с упорядоченным охватыванием для плоского графа $G = (V, E)$.

Рассмотрим алгоритм построения такой цепи для многосвязного графа. Этот алгоритм использует понятие уровня вложенности, введенное в предыдущих работах автора (например, в [1]).

Алгоритм OptimalMultiComponent

Входные данные: плоский граф G.

Выходные данные: C_j^s, $j = 1, ..., |V_{odd}|/2$, – покрытие графа G цепями с упорядоченным охватыванием, $s = 1, 2, ...$ – номер компоненты связности.

Шаг 1. Выявить множество S всех компонент связности графа G и $\forall s \in S$ найти уровень вложенности $K(s)$.

Шаг 2. Построить полный абстрактный граф $\Im$, вершинами которого являются компоненты связности S графа G, а длины ребер равны расстоянию между ближайшими вершинами компонент связности.

Шаг 3. Найти остовное дерево минимального веса $T(\Im)$ в $\Im$.

Шаг 4. Добавить ребра найденного остовного дерева в граф G: $G_\Im = G \cup T(\Im)$.

Шаг 5. Выполнить алгоритм `OptimalCover` [1] для графа $G_\Im$.

Алгоритм **OptimalMultiComponent** позволяет решить поставленную задачу за полиномиальное время $O(|V|^3)$.

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки РФ, соглашение 14.B37.21.0395.

ЛИТЕРАТУРА

1.Панюкова, Т.А. Эйлерово покрытие с упорядоченным охватыванием для многосвязного графа. // Материалы 3-й международной конференции «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии». – Кишинев: Evrica, 2012. – С. 429–438.

Панюкова Татьяна Анатольевна, Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия, e-mail: kwark@mail.ru

СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ПОЛНОГО ИНВАРИАНТА АЦИКЛИЧЕСКОГО ГРАФА К ЗАДАЧЕ ПРОВЕРКИ НЕПРИВОДИМОСТИ МНОГОЧЛЕНА НАД ПОЛЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

А.В. Пролубников

В задаче проверки изоморфизма графов даны два невзвешенных неориентированных графа G и H. Необходимо проверить, существует ли для этих графов изоморфизм — отображение, биективно отображающее множество вершин $V(G)$ графа G на множество вершин $V(H)$ графа H, сохраняя смежность соответствующих по изоморфизму вершин. $V(G) = V(H) = \{1, \ldots, n\}$. Инвариант графа — это некоторая его характеристика равная для двух изоморфных графов. Инвариант является полным, если из равенства его значений для двух графов следует их изоморфизм.

Канонический код графа, то есть максимальное число, двоичная запись которого может быть получена конкатенацией строк верхне-треугольной подматрицы матрицы смежности — единственный известный полный инвариант для общего случая задачи [1]. Известные полные инварианты для частных случаев также представляют собой код, который находится в ходе некоторой переборной процедуры. В работах [2], [3] представлены полные инварианты для ациклических и планарных графов, для которых перебор может быть произведён за полиномиальное от n время.

Предлагаемый полный инвариант ациклических графов представляет собой многочлен, ставящийся в соответствие графу. Для дерева G многочлен $\eta_G(v, d, t)$ строится так: $\eta_G(v, d, t) = \det A_v(d, t)$, где $v \in V(G)$, $d \in Q$, t — переменная. $A_v(d, t) = A + dI + J_v(t)$, где A — матрица смежности G, I — единичная матрица, $J_v(t)$ — диагональная матрица с элементами $(J_v(t))_i = t^{2^{\rho(v,i)}}$, $\rho(v, i)$ — расстояние между v и $i \in V(G)$. Для леса $G = G_1 \cup \ldots \cup G_k$: $\eta_G(v_1, \ldots, v_k, d, t) = \eta_{G_1}(v_1, d, t) \cdot \ldots \cdot \eta_{G_k}(v_k, d, t)$, $v_j \in V(G_j)$. Если для ациклических графов G и H многочлены указанного вида равны, то в случае неприводимости над Q таких многочленов для деревьев, образующих G и H, следует и равенство многочленов указанного вида для этих деревьев. Добиться неприводимости многочленов можно варьируя d.

Таким образом, предложен полный инвариант ациклического графа, представляющий собой многочлен, ставящийся в соответствие графу. Полнота инварианта обеспечивается возможностью сделать этот многочлен неприводимым над полем Q.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Balasubramanian, K.R. Parthasarathy. In search of a complete invariant for graphs // Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin/Heidelberg, Vol. 885/1981, P. 42-59.

2. S. Lindell. A Logspace Algorithm for Tree Canonization. Proceedings of the 24th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (1992), P. 400-404.

3. S. Datta, N. Limaye, P. Nimbhorkar, T. Thierauf, F. Wagner. Planar Graph Isomorphism is in Log-Space // 2009 24th Annual IEEE Conf. on Comp. Complexity. Paris, France, July 15-July 18. ISBN: 978-0-7695-3717-7

Пролубников Александр Вячеславович, Омский государственный университет,
e-mail: a.v.prolubnikov@mail.ru

МУЛЬТИРАСКРАСКА РЕБЕР ВЗВЕШЕННЫХ УНИЦИКЛИЧЕСКИХ ГРАФОВ

А.В. Пяткин

Пусть каждому ребру e графа $G = (V, E)$ приписано целое положительное число $w(e)$, называемое весом ребра e. Взвешенной степенью графа G назовем величину Δ, равную максимуму суммы весов ребер, инцидентных одной вершине. Будем говорить, что интервал $I = [a, b]$ нормальный, если a и b являются целыми неотрицательными числами, причем $b \geq a$. Число a будем называть левым, а число b — правым концами интервала $I = [a, b]$ и обозначать через $l(I)$ и $r(I)$ соответственно. Под длиной интервала $[a, b]$ понимается величина $b - a$. *Мультираскраской* ребер графа G называется назначение каждому ребру некоторого нормального интервала, длина которого равна весу этого ребра; такой интервал называется *мультицветом* данного ребра. Говорим, что мультираскраска *правильная*, если мультицвета смежных ребер не пересекаются по внутренним точкам. Максимум разности $r(I) - l(J)$ по всем мультицветам I и J, использованных в мультираскраске, будем называть числом цветов этой раскраски. *Реберным мультихроматическим числом* $\mu'(G)$ называется минимальное число цветов, необходимое для правильной мультираскраски всех ребер графа.

Задача поиска реберного мультихроматического числа является обобщением сразу двух известных NP-трудных задач: задачи о реберной раскраске графа (случай, когда все веса равны 1) и задачи теории расписаний open shop без прерываний (случай, когда граф G двудольный). Отметим, что более общая задача о мультираскраске вершин графа рассматривалась в [1].

Для реберного хроматического числа известна оценка Шеннона [2] $\chi' \leq \lfloor 3\Delta/2 \rfloor$. В теории расписаний имеется "фольклорная" гипотеза, что длина минимального расписания в задаче open shop без прерываний может превышать тривиальную нижнюю оценку не более чем в полтора раза. Обобщением данных двух утверждений является гипотеза, что для любого взвешенного графа $G = (V, E)$ выполняется оценка $\mu'(G) \leq \lfloor 3\Delta/2 \rfloor$.

В данной работе эта гипотеза подтверждена для унициклических графов, т. е. доказана следующая

Теорема. Если граф удовлетворяет условию $|V(G)| = |E(G)|$, то $\mu'(G) \leq \lfloor 3\Delta(G)/2 \rfloor$.

Работа поддержана грантами РФФИ 12-01-33028, 12-01-00090, 12-01-00093, 12-01-00184 и 13-07-00070.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Г. Визинг. О мультираскраске вершин взвешенных графов // Дискретный анализ и исследование операций, серия 1, 2007. Т. 14, № 4. С. 17–26.

2. C. E. Shannon. A theorem on coloring the lines of a networks // J. Math. Phys., 1949. V. 28, P. 148–151.

Пяткин Артем Валерьевич, ИМ СО РАН, Новосибирск, e-mail:artem@math.nsc.ru

КУМУЛЯТИВНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СРЕДНЕЙ ВЕРОЯТНОСТИ СВЯЗНОСТИ ПАРЫ ВЕРШИН СЛУЧАЙНОГО ГРАФА

А.С. Родионов

В работе рассматривается задача нахождения кумулятивных оценок средней вероятности связности пары вершин $\bar{R}(G)$ случайного графа G с надёжными вершинами и независимо выходящими из строя рёбрами. Данная характеристика характеризует вероятность возможности установления произвольного соединения в одноранговых сетях. Кумулятивные оценки позволяют принять решение о надёжности (ненадёжности) сети без точного расчёта характеристики при пересечении одной из оценок (нижней либо верхней) заданного порогового значения. Ранее этот подход был предложен для оценивания вероятности связности случайного графа [1].

Работа содержит развитие идей автора, представленных на конференции ICUIMC 2013 [2]. Для получения оценок $\bar{R}(G)$ используются оценки математического ожидания числа несвязных пар вершин случайного графа $N(G)$, связанного с исследуемой характеристикой очевидными соотношениями

$$\bar{R}(G) = \frac{C_n^2 - N(G)}{C_n^2}, \tag{1}$$

$$N(G) = C_n^2 \left(1 - \bar{R}(G)\right). \tag{2}$$

В отличие от предложенных ранее алгоритмов, впервые предлагается использовать возможное наличие цепей для редукции размерности оцениваемого графа при получении кумулятивных оценок. Доказаны леммы и теорема, позволяющие ускорять получение $N(G)$ и его оценок используя структурные особенности оцениваемых графов.

В качестве базового метода получения точного значения $N(G)$ используется метод факторизации.

Работа поддержана грантами РФФИ 12-01-00727 и 13-07-00589, а также грантом Президента России поддержки ведущих научных школ НШ 5176.2010.9.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.-M. Won and F. Karray. Cumulative Update of All-Terminal Reliability for Faster Feasibility Decision // IEEE Trans. Reliability, vol.59, no. 3, September 2010, pp. 551–562.

2. A.S. Rodionov, O.K. Rodionova. Exact Bounds for Average Pairwise Network Reliability // Proc. ACM IMCOM (ICUIMC) 2013, paper 13-5, 6 pages.

Родионов Алексей Сергеевич, ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, e-mail:alrod@sscc.ru

МАЖОРАНТЫ И МИНОРАНТЫ КЛАССА n-ВЕРШИННЫХ ГРАФОВ ДИАМЕТРА d

Т. И. Федоряева

Пусть $\tau_i(G)$ — число всех различных шаров радиуса i в метрическом пространстве обыкновенного связного графа G с обычным расстоянием между вершинами (т.е. длиной кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины). В [1,2] сформулирована задача нахождения точных верхних и точных нижних оценок числа различных шаров радиуса i в графах из заданного класса Ω, т.е. $\overline{\tau}_i(\Omega) = \max\limits_{G\in\Omega} \tau_i(G)$ и $\underline{\tau}_i(\Omega) = \min\limits_{G\in\Omega} \tau_i(G)$. В дальнейшем эта задача решена [2,3] для классов графов наперёд фиксированного "объема": класса Γ_n (T_n) всех n-вершинных обыкновенных связных графов (деревьев) и класса $\Gamma_{n,d}$ ($\mathrm{T}_{n,d}$) всех n-вершинных обыкновенных связных графов (деревьев) диаметра d. Заметим, что для классов графов Γ_n, T_n, $\mathrm{T}_{n,d}$ в [2] доказана достижимость точных верхних (точных нижних) оценок числа различных шаров заданного радиуса в одном и том же графе из соответствующего класса независимо от рассматриваемого радиуса шаров, и описаны такие экстремальные графы.

Определение. Граф $G \in \Omega$ называется мажорантой (минорантой) класса Ω, если $\tau_i(G) = \overline{\tau}_i(\Omega)$ ($\tau_i(G) = \underline{\tau}_i(\Omega)$) при всех $i \geq 0$.

В [2] доказано, что n-вершинная цепь P_n есть мажоранта классов Γ_n и T_n, полный граф K_n — миноранта класса Γ_n, а минорантами класса T_n являются звезда $K_{1,n-1}$ при $n \geq 2$, и граф K_1 при $n = 1$. Такие экстремальные графы оказываются единственными с точностью до изоморфизма в классах Γ_n и T_n. В классе деревьев $\mathrm{T}_{n,d}$ также существует мажоранта и миноранта при всех n и d, в [2] с точностью до изоморфизма подсчитаны и найдены все такие экстремальные деревья.

В настоящей работе изучаются мажоранты и миноранты класса n-вершинных графов диаметра d. Явно описываются миноранты при всех значениях параметров n и d. При исследовании мажорант класса $\Gamma_{n,d}$ выделяются следующие три случая: $n \geq 2d$, $d+1 \leq n \leq d+1+\lfloor d/2 \rfloor$ и $d+1+\lfloor d/2 \rfloor < n < 2d$. Рассматривая эти случаи, устанавливается, когда в классе n-вершинных графов диаметра d существуют мажоранты, и описываются такие экстремальные графы.

Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00997.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоряева Т.И. Векторы разнообразия шаров и свойства их компонент // Труды VII Международной конференции "Дискретные модели в теории управляющих систем"(Москва, 4–6 марта 2006г.). М.: Изд-во МГУ, 2006. С. 374–378.

2. Федоряева Т.И. Векторы разнообразие шаров для графов и оценки их компонент // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2007. Т. 14, № 2. С. 47–67.

3. Федоряева Т.И. Точные верхние оценки числа различных шаров заданного радиуса в графах с фиксированными числом вершин и диаметром // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 6. С. 74–92.

Федоряева Татьяна Ивановна, Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, Новосибирск, e-mail: tatiana.fedoryaeva@gmail.com

ИНВЕСТИЦИОННАЯ ЗАДАЧА МАРКОВИЦА В УСЛОВИЯХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОСТИ, НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА

В.А. Емеличев, В.В. Коротков

Введем следующие обозначения: $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ – альтернативные инвестиционные проекты (активы); N_m – возможные состояния финансового рынка (рыночные ситуации); N_s – виды рисков; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X \subseteq \mathbf{E}^n = \{0, 1\}^n$ – инвестиционный портфель, где $x_j = 1$, если проект $j \in N_n$ реализуется, $x_j = 0$ в противном случае; r_{ijk} – оценка риска, которому подвергается инвестор, выбирая проект $j \in N_n$ по критерию (виду риска) $k \in N_s$ в том случае, когда рынок находится в состоянии $i \in N_m$; $R = [r_{ijk}] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$.

Аналогично [1] под s-критериальной инвестиционной задачей с критериями рисков Сэвиджа

$$Z^s(R): \quad f_k(x) = \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} r_{ijk} x_j \to \min_{x \in X}, \qquad k \in N_s,$$

будем понимать задачу поиска множества Парето $P^s(R)$. Тем самым, непредсказуемость состояния рынка учитывается путем использования минимаксных критериев риска упущенных возможностей. Следуя [1], радиусом устойчивости задачи $Z^s(R)$ назовем число $\rho(m, n, s) = \sup\ \Xi$, если $\Xi \neq \emptyset$, и $\rho(m, n, s) = 0$, если $\Xi = \emptyset$, где $\Xi = \{\varepsilon > 0 : \quad (P^s(R + R') \subset P^s(R))$ для всех $R' \in \Omega(\varepsilon)\}$, $\Omega(\varepsilon) = \{R' \in \mathbf{R}^{m \times n \times s} : \|R'\| < \varepsilon\}$, $\|R'\| = \max\limits_{k \in N_s} \sum\limits_{i \in N_m} \sum\limits_{j \in N_n} |r'_{ijk}|$, $R' = [r'_{ijk}]$.

Теорема. Пусть $m, n, s \in \mathbf{N}$; $P^s(R) \neq X$; $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x))$, $P^s(x, R) = \{x' \in X : \ f(x) \geq f(x')\ \&\ f(x) \neq f(x'))\}$,

$$\varphi(m, n, s) = \min_{x \notin P^s(R)} \max_{x' \in P^s(x,R)} \min_{k \in N_s} (f_k(x) - f_k(x')).$$

Тогда

$$\varphi(m, n, s) \leq \rho(m, n, s) \leq mn\varphi(m, n, s).$$

Следствие. Существуют такие классы задач $Z^s(R)$ что $\rho(m, n, s) = \varphi(m, n, s)$ и $\rho(1, n, 1) = n\varphi(1, n, 1)$.

Работа поддержана грантом Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований Ф11К-095.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Емеличев, В.В. Коротков. Устойчивость векторной инвестиционной булевой задачи с критериями Вальда // Дискретная математика. 2012. Т. 24, № 3. С. 3–16.

Емеличев Владимир Алексеевич, Коротков Владимир Владимирович,
Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail:emelichev@tut.by, wladko@tut.by

ОЦЕНКИ РАДИУСА УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ РАЗРЕЗЕ ГРАФА

В.А. Емеличев, К.Г. Кузьмин

Рассмотрим связный граф $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ и множеством ребер E, занумерованных числами $r \in N_m$. Пусть $(S, \overline{S})$ – разбиение множества V вершин графа G на два непересекающихся непустых подмножества S и $\overline{S}$. Тогда множество ребер графа G, концевые вершины которых находятся в разных подмножествах, называется разрезом графа и обозначается $(S, \overline{S})$. Всякий разрез $(S, \overline{S})$ графа G порождает булев вектор $x \in \mathbf{E}^n = \{0, 1\}^n$ с компонентами $x_i = 1$, если $i \in S$, и $x_i = 0$, если $i \in \overline{S}$. Тем самым множеству всех разрезов графа порядка n ставится в соответствие множество булевых векторов $X \subset \mathbf{E}^n$. Все ребра $\{i, j\}$ графа G ориентируем так, что $E \subseteq \big\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n\big\}$, т. е. превратим их в дуги. Каждой дуге сопоставим вектор-столбец $(w_{ij}^1, w_{ij}^2, \ldots, w_{ij}^s)^T$, где $w_{ij}^k \in \mathbf{R}$ – вес дуги (i, j), соответствующий критерию $k \in N_s$. Из этих m столбцов, упорядоченных в соответствии с порядком ребер множества E, образуем матрицу $W = [w_{ij}^k] \in \mathbf{R}^{s\times m}$ со строками $W_k \in \mathbf{R}^m$, $k \in N_s$. Очевидно, что квадратичная функция $f_k(x, W_k) = \sum_{(i,j)\in E} w_{ij}^k (x_i - x_j)^2$, заданная на множестве векторов X, представляет собой суммарный вес разреза $(S, \overline{S})$ по критерию k, где $S = \{i \in V : x_i = 1\}$, $\overline{S} = \{i \in V : x_i = 0\}$. В результате возникает векторный (s-критериальный) вариант классической задачи о максимальном разрезе графа (MAX-CUT problem)

$$Z^s(W): \qquad f(x, W) = \big(f_1(x, W_1), f_2(x, W_2), \ldots, f_s(x, W_s)\big) \to \max_{x\in X},$$

состоящей в поиске множества Парето $P^s(W)$.

Радиусом устойчивости задачи $Z^s(W)$, $s \in \mathbf{N}$, в метрике Гельдера l_p, $p \in [1, \infty]$, назовем число $\rho^s(p) = \sup\{\varepsilon > 0 : \forall U \in \Omega_p(\varepsilon) \quad (P^s(W + U) \subseteq P^s(W))\}$, если множество, по которому берется супремум, непусто. В противном случае полагаем, что $\rho^s(p) = 0$. Здесь $\Omega_p(\varepsilon) = \{U \in \mathbf{R}^{s\times m} : \|U\|_p < \varepsilon\}$, $\|U\|_p$ – норма Гельдера l_p вектора, составленного из всех элементов матрицы U. Каждому вектору $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ и всякой дуге $(i, j) \in E$ с номером $r \in N_m$ поставим в соответствие число $\gamma_r(x) = |x_i - x_j|$.

Теорема. *Если $P^s(W) \neq X$, то при любых $s \in \mathbf{N}$ и $p \in [1, \infty]$ для радиуса устойчивости задачи $Z^s(W)$ в метрике Гельдера l_p справедливы следующие достижимые оценки $\varphi^s(p) \leq \rho^s(p) \leq \psi^s(p)$, где*

$$\varphi^s(p) = \min_{x\notin P^s(W)} \max_{x'\in P(x,W)} \min_{k\in N_s} \frac{\langle W_k, \sigma(x', x)\rangle}{\|\sigma(x', x)\|_q}, \quad \psi^s(p) = \min\left\{(ms)^{1/p}\varphi^s(\infty), \min_{k\in N_s} \|W_k\|_p\right\},$$

$$P(x, W) = \{x' \in P^s(W) : f(x, W) \leq f(x', W)\}, \qquad 1/p + 1/q = 1,$$

$$\sigma(x', x) = \big(\sigma_1(x', x), \sigma_2(x', x), \ldots, \sigma_m(x', x)\big), \qquad \sigma_r(x', x) = \gamma_r(x') - \gamma_r(x),\ r \in N_m.$$

Работа поддержана грантом Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований Ф11К-095.

Емеличев Владимир Алексеевич, Кузьмин Кирилл Геннадьевич,
Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь,
e-mail: emelichev@bsu.by, kuzminkg@mail.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ В ЗАДАЧЕ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КАК ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ «АДАПТИРУЕМОСТЬ» ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ МНОЖЕСТВА НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Е.Е. Иванко

Пусть X — множество всевозможных допустимых начальных данных некоторой фиксированной задачи комбинаторной оптимизации. Для всякого $S \subseteq X$ задано множество состояний данной задачи $M(S)$, реализующихся на множестве начальных данных S. Для всякого возможного состояния задан его вес: $D\colon \bigcup_{\forall S \subseteq X} M(S) \to \mathbb{R}$. Пусть далее $N(S,D) \subseteq M(S)$ — множество оптимальных состояний на фиксированном множестве начальных данных: $\forall S \subseteq X \quad N(S,D) \triangleq \{\alpha \in M(S)\colon D(\alpha) = \min_{\beta \in M(S)} D(\beta)\}$.

В известных автору работах при исследовании устойчивости задачи комбинаторной оптимизации обычно рассматривают возмущения начальных данных, касающиеся функции веса на состояниях ($D \to D^*$) при сохранении множества S. Например, для заданного $\alpha \in N(S,D)$ может ставиться задача нахождения совокупности таких D^*, для которых $\alpha \in N(S,D^*)$ [1]. В цикле работ автора (см., например, [2,3]) рассматривается обратный случай возмущения множества начальных данных $S \to S^*$ при «максимально возможном» сохранении функции D.

В предлагаемом подходе для выбранной задачи, начальных данных $S \subseteq X$ и возмущения $S \to S^*$ фиксируется *полиномиальный* алгоритм $\mathcal{B}$ (*адаптирующий*), который всякому $\alpha \in M(S)$ ставит в соответствие некоторое множество состояний $\mathcal{B}(\alpha) \subseteq M(S^*)$, причем $|\mathcal{B}(\alpha)| \leq |S|$. Произвольное оптимальное состояние $\alpha \in N(S,D)$ при этом считается *устойчивым* (в смысле «адаптации» $\mathcal{B}$) к возмущению $S \to S^*$, если $\mathcal{B}(\alpha) \cap N(S^*,D) \neq \varnothing$.

На основе принципа Беллмана автором разработаны различные условия такой «адаптивной устойчивости» для задачи коммивояжера и распределительной задачи [2,3]. Готовится к публикации работа, посвященная общему случаю абстрактной задачи комбинаторной оптимизации, удовлетворяющей ряду ограничений.

Работа поддержана грантами РФФИ 10-01-96020-р_урал_а и 10-08-00484-а

ЛИТЕРАТУРА

1. Гордеев Э.Н., Леонтьев В.К. Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1996 – Т.36, №1 – С. 66–72.

2. Е.Е. Иванко. Достаточные условия устойчивости в задаче коммивояжера. Труды ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2011, №3, с.155–168.

3. Е.Е. Иванко. Критерий устойчивости оптимальных решений минимаксной задачи о разбиении на произвольное число подмножеств при изменении мощности исходного множества. Труды ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2012, №4, с. 180–194.

Иванко Евгений Евгеньевич, Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия, e-mail:viatore@ya.ru

ЗАДАЧА ВЫБОРА ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНОГО В СЛУЧАЕ НОРМЫ ГЕЛЬДЕРА В КРИТЕРИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.В. Коротков, Р.П. Шацов

Рассмотрим многокритериальный дискретный (булевый) вариант задачи управления инвестициями Марковица. Для этого введем ряд обозначений: $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ – альтернативные инвестиционные проекты; N_m – возможные состояния рынка (рыночные ситуации); N_s – виды (показатели) экономической эффективности инвестиционного проекта; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in X \subseteq \mathbf{E}^n = \{0, 1\}^n$ – инвестиционный портфель, где $x_j = 1$, если проект j реализуется, и $x_j = 0$ в противном случае; e_{ijk} – ожидаемая оценка экономической эффективности вида $k \in N_s$ инвестиционного проекта $j \in N_n$ в случае, когда рынок находится в состоянии $i \in N_m$; $E_k \in \mathbf{R}^{m\times n}$ – k-е сечение матрицы $E = [e_{ijk}] \in \mathbf{R}^{m\times n\times s}$.

Аналогично [1], под многокритериальной инвестиционной булевой задачей $Z^s(E)$, $s \in \mathbf{N}$, с критериями Вальда

$$f_k(x) = \min_{i\in N_m} \sum_{j\in N_n} e_{ijk}x_j \to \max_{x\in X}, \qquad k \in N_s,$$

будем понимать задачу поиска множества Парето-оптимальных инвестиционных портфелей $P^s(E)$.

Радиусом устойчивости портфеля $x^0 \in P^s(E)$ задачи $Z^s(E)$ называется число $\rho^s(x^0, p, m) = \sup\ \Xi_p$, если $\Xi_p \neq \emptyset$, и $\rho^s(x^0, p, m) = 0$, если $\Xi_p = \emptyset$, где $\Xi_p = \{\varepsilon > 0 : \ \forall E' \in \Omega_p(\varepsilon) \quad (x^0 \in P^s(E + E'))\}$, $\Omega_p(\varepsilon) = \{E' \in \mathbf{R}^{m\times n\times s} : \ \|E'\|_p < \varepsilon\}$, $E' = [e'_{ijk}]$, $\|E'\|_p = \|(\|E'_1\|, \|E'_2\|, \ldots, \|E'_s\|)\|_p$– норма Гельдера l_p, $1 \le p \le \infty$, $\|E'_k\| = \max\limits_{i\in N_m} \max\limits_{j\in N_n} |e'_{ijk}|$, $k \in N_s$.

Теорема. При любых $m, s \in \mathbf{N}$ и $1 \le p \le \infty$ справедливы следующие достижимые оценки для радиуса устойчивости Парето-оптимального портфеля $x^0 \in P^s(E)$

$$\min_{x\in X\setminus\{x^0\}} \frac{\|[f(x^0) - f(x)]^+\|_p}{\|x^0 + x\|_1} \le \rho^s(x^0, p, m) \le \min_{x\in X\setminus\{x^0\}} \frac{\|[f(x^0) - f(x)]^+\|_p}{\|x^0 - x\|_1},$$

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_s(x))$, а знак + означает положительную срезку вектора.

Работа частичной поддержана грантом Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований Ф11К-095.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Емеличев, В.В. Коротков. Постоптимальный анализ векторной инвестиционной задачи с максиминными критериями Вальда // Дискретный анализ и исследования операций. 2012. Т. 19, № 6. С. 23-36.

Коротков Владимир Владимирович, Шацов Роман Павлович,
Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
e-mail:wladko@tut.by, roshats@gmail.com

ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ И ПОСТРОЕНИЕ РАЗДЕЛЯЮЩЕЙ ГИПЕРПЛОСКОСТИ

О.В. Муравьева

Рассматривается система линейных неравенств $Ax \le b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ в условиях неточных данных. Определим меру устойчивости решения x^0 как величину минимального изменения параметров, в результате которого x^0 не является решением системы

$$\Phi(x^0) = \inf_{H,h}\{\|[-h, H]\| \colon \ x^0 \text{ не является решением } (A+H)x \le b+h\}.$$

Для критерия $\|H\|_\infty = \max\limits_{i,j}|h_{ij}|$, задача $\max\{\Phi(x) \colon Ax \le b\}$ сводится к задаче линейного программирования.

Теорема[1]. Решение системы линейных неравенств, наиболее устойчивое к изменению всех параметров, определяется формулами

$$\sup_{x\colon Ax\le b}\inf_{H,h}\{\|[-h, H]\|_\infty \colon (A+H)x \not\le b+h\} = u*, \quad x^* = \frac{1}{v^*}s^*,$$

где $u^*, v^* \in \mathbb{R}$, $s^*, z^* \in \mathbb{R}^n$ — решение задачи линейного программирования:

$$\begin{gathered}\max u,\\ 0 \le u \le vb_i - (a_i, s), \quad i = 1, \dots, m,\\ -z_j \le s_j \le z_j, \quad j = 1, \dots, n,\\ \sum_j z_j + v = 1, \quad v \ge 0.\end{gathered}$$

Данный метод применяется для построения линейного решающего правила в задаче классификации. Два класса заданы обучающей выборкой с числовыми признаками. Среди всех гиперплоскостей, разделяющих представителей классов, предлагается выбрать в качестве решающего правила наиболее устойчивую к изменениям параметров (информационной матрицы обучающей выборки). Критерием оптимальности (мерой устойчивости гиперплоскости) является максимальное изменение по всем параметрам, в пределах которого гиперплоскость остается разделяющей. Коэффициенты такой гиперплоскости определяются как решение задачи линейного программирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. О.В. Муравьева. Возмущение и коррекция систем линейных неравенств // Управление большими системами. 2010. Вып.28. С.40–57.

Муравьева Ольга Викторовна,
Московский педагогический государственный университет, Москва, muraveva@tidm.ru

РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ АРГУМЕНТАЦИИ В ТЕОРИИ ВАЖНОСТИ КРИТЕРИЕВ

А.П. Нелюбин

В отличие от всех других подходов к анализу многокритериальных задач принятия решений, теория важности критериев [1] опирается на формальные определения понятий равенства и превосходства в важности одних критериев над другими. Она позволяет корректно сравнивать варианты решений по предпочтительности и использовать систему аргументации, которая позволяет строго и просто объяснить, почему один вариант предпочтительнее другого.

Предполагается, что все частные критерии $K_1, \ldots, K_m$ имеют общую шкалу $Z_0 = \{1, \ldots, q\}$, предпочтения вдоль которой возрастают. Каждый вариант x характеризуется своей *векторной оценкой* $y(x) = (K_1(x), \ldots, K_m(x))$. Предпочтения ЛПР моделируются на множестве всех векторных оценок $Z = Z_0^m$ при помощи отношения нестрогого предпочтения R. Оно пополняется при поступлении информации о важности критериев и изменении предпочтений вдоль их шкалы Z_0. При отсутствии такой информации в качестве R выступает отношение Парето R^0.

Качественная информация о важности критериев Ω состоит из сообщений вида $i \sim j$ ("Критерии K_i и K_j равноважны") и $i \succ j$ ("Критерий K_i важнее критерия K_j"), которые задают на Z соответственно отношения безразличия $I^{i\sim j}$ и предпочтения $P^{i\succ j}$. Отношение R^Ω, порождаемое на Z информацией Ω, определяется как транзитивное замыкание объединения отношений R^0, $I^{i\sim j}$ и $P^{i\succ j}$ для всех сообщений $i \sim j$ и $i \succ j$ из Ω. Т.е. $yR^\Omega z$ верно тогда и только тогда, когда существует цепочка вида

$$yR^{\omega 1}u^1, u^1R^{\omega 2}u^2, \ldots, u^{r-1}R^{\omega r}z,$$

в которой u^k - векторные оценки из Z, а в качестве $R^{\omega k}$ выступают R^0, $I^{i\sim j}$ или $P^{i\succ j}$. Такую цепочку называют *объясняющей*, поскольку она показывает, на основании каких сообщений о предпочтениях ЛПР сделан вывод о том, что yRz.

В докладе будут представлены результаты исследований, выполненных за последние годы под руководством и при участии проф. В.В. Подиновского. Были уточнены оценки сверху максимальной длины объясняющей цепочки в зависимости от m и q. Разработаны алгоритмы для проверки существования и построения объясняющей цепочки в случае, когда дополнительно известно, что рост предпочтений вдоль шкалы Z_0 замедляется (при такой информации $\Delta\downarrow$ появляются дополнительные отношения предпочтения $P^{i\succ j\Delta\downarrow}$ и $P^{i\succ j\Delta\downarrow}$). Новые алгоритмы реализуются в системе DASS [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. В.В. Подиновский. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений / Учебное пособие. М.: Физматлит, 2007.

2. В.В. Подиновский, М.А. Потапов. Важность критериев в многокритериальных задачах принятия решений: теория, методы, софт и приложения // Открытое образование. 2012. №2. С. 55-61.

Нелюбин Андрей Павлович, ИМАШ РАН, Москва, e-mail:nelubin@gmail.com

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ГРАДИЕНТНОГО АЛГОРИТМА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

А. Б. Рамазанов

На основе меры изменения градиентов целевой функции получено необходимое и достаточное условие устойчивости градиентного алгоритма в одной задаче дискретной оптимизации.

Пусть $Z_+^n(R_+^n)$ — множество n-мерных неотрицательных целочисленных (действительных) векторов, $P \subseteq Z_+^n$ – порядково–выпуклое множество [1]. Для функции $f \mid Z_+^n \to R$ (R — множество действительных чисел) введем понятие i – градиента

$$\Delta_i f(x) = f(\pi_i(x)) - f(x),$$

где $\pi_i(x) = (x_1, ..., x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, ..., x_n)$.

Пусть $\rho = (\rho_1, ..., \rho_n) \in R_+^n$, $\Re_\rho(Z_+^n)$ — класс ρ-координатно-выпуклых функций на Z_+^n [1]. $f(x)$ — неубывающая ρ-координатно — выпуклая функция на множестве $P \subseteq Z_+^n$. Крутизной функции $f(x)$ намножестве $P \subseteq Z_+^n$ называется величина [1]

$$c = c(f) = \min \left\{ \frac{\Delta_i f(x) - \Delta_j f(y)}{\Delta_i f(x)} \mid (i, j, x, y) \in I^+(f) = I^+ \right\},$$

где $I^+ = I^+(f) = \{(i, j, x, y) \mid \Delta_i f(x) > \Delta_j f(y) \geq 0, i \in fes(x, P), j \in fes(y, P), x < y\}$, $fes(x, P) = \{i \in \{1, 2, ..., n\} \mid \pi_i(x) \in P, x \in P\}$.

Рассматривается следующая задача A выпуклой дискретной оптимизации: найти

$$\max\{f(x) \mid x = (x_1, ..., x_n) \in P \subseteq Z_+^n\},$$

где $f(x) \in \Re_\rho(Z_+^n)$, $f(x) -$ неубывающая функция на множестве P.

При изменении параметра $c(f)$ полученную задачу будем называть возмущением задачи A [1]. То есть, получаем следующую задачу A_1: найти

$$\max\{\phi(x) \mid \ x \in P \subseteq Z_+^n\},$$

где $\phi(x) \in \Re_q(Z_+^n)$ — неубывающая функция на множестве P, $q = (q_1, ..., q_n) \in R_+^n$.

Пусть ε_1 и ε соответственно гарантированные оценки возмущенной задачи A_1 и исходной задачи A. Градиентный алгоритм назовем устойчивым [1] для задачи A, если $\varepsilon_1 \leq K(\delta)\varepsilon$, где $K(\delta) \to 1$ при $\delta \to 0$, $\delta \in R_+^1$.

Теорема. *Для устойчивости градиентного алгоритма в задаче A необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $c(\phi) \geq c(f) + \delta$, где $\delta \in R_+^1$.*

Замечание. По существу теорема позволяет выделить класс задач, для которого при "малых" колебаниях параметров задачи (в частности, крутизны целевой функции), гарантированные оценки для возмущенных задач не ухудшаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. A.B. Ramazanov. On stability of the gradient algorithm in convex discrete optimization problems and related questions //Discrete Math. and Appl. 2011. V. 21, N 4. P. 465-476.

Рамазанов Али Багдаш, Бакинский государственный университет, Баку,Азербайджан, e-mail: rab-unibak@rambler.ru, ram-bsu@mail.ru

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ЭВРИСТИКА ЛАГРАНЖА ДЛЯ ЗАДАЧИ О P-МЕДИАНЕ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

И.Л. Васильев, А.В. Ушаков

В работе рассматривается задача о p-медиане в классической постановке. Пусть даны два множества: множество возможных пунктов размещения предприятий $I = \{1, \ldots, m\}$, множество клиентов $J = \{1, \ldots, n\}$, а также матрица $d_{ij} > 0$, определяющая затраты (расстояния) на обслуживание клиента $j \in J$ из предприятия, размещенного в пункте $i \in I$. Ставится задача поиска таких мест $i \in I$ для размещения p предприятий, чтобы суммарные затраты на обслуживание всех клиентов были минимальны. Таким образом, задача о p-медиане может быть представлена в виде следующей задачи комбинаторной оптимизации

$$\min_{S \subseteq I} \Big\{ \sum_{j \in J} \min_{i \in S} d_{ij} : \ |S| = p \Big\}.$$

Задача о p-медиане является мощным инструментом моделирования широкого набора практических приложений, возможно, наиболее интересным из которых является задача кластерного анализа. Отметим, что любое допустимое решение задачи о p-медиане дает решение задачи кластерного анализа известное как «минимум суммы звезд». В работе предлагается параллельный алгоритм поиска субоптимальных решений в задаче о p-медиане, представляющий собой параллельную версию известного метода Лагранжевой эвристики. Разработанный алгоритм тестируется на широком наборе тестовых примеров большой размерности, взятых из известных библиотек, а также на искусственно сгенерированных задачах кластерного анализа, содержащих до одного миллиона объектов.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов 12-01-31198-мол_а, 12-07-33045-мол_а_вед, а также междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН 21.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Avella, M. Boccia, S. Salerno, I. Vasilyev. An aggregation heuristic for large scale p-median problem // Computers & Operations Research. 2012. V. 39. P. 1625–1632.
2. S. Hanafi, S. Salerno, A. Ushakov, I. Vasilyev. A parallel subgradient algorithm for Lagrangean dual function of the p-median problem // Studia Informatica Universalis. 2011. V. 9. P. 105–124.
3. T. Zhang, R. Ramakrishnan, M. Livny. BIRCH: an efficient data clustering method for very large data bases // Proceedings of the 1996 ACM SIGMOD international conference on Management of data. 1996. P. 103–114.
4. И.Л. Васильев, А.В. Ушаков. Параллельная реализация субградиентного алгоритма для максимизации двойственной функции Лагранжа в задаче о p-медиане // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т. 14. С. 9–16.

Васильев Игорь Леонидович, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия, e-mail: vil@icc.ru
Ушаков Антон Владимирович, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия, e-mail: aushakov@icc.ru

О МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ ВЕБЕРА НА ПЛОСКОСТИ С ЗАПРЕЩЕННЫМИ ЗОНАМИ

Г.Г. Забудский, Н.С. Веремчук

Рассматривается задача Вебера в следующей постановке. На плоскости размещается n точечных объектов $X_1, ..., X_n$ среди m фиксированных $P_1, ..., P_m$. Заданы: запрещенные прямоугольные зоны Z_i, $Z = \bigcup Z_i$, $i = 1, ..., g$, стороны которых параллельны осям координат; w_{ij} и v_{jk} – удельные стоимости связей между фиксированным i и размещаемым j и размещаемыми j и k объектами. Необходимо разместить объекты вне запрещенных зон таким образом, чтобы максимальное взвешенное расстояние между всеми объектами было минимальным. Математическая модель задачи имеет вид [1, 2]:

$$\max\{\max_{1\le i\le m, 1\le j\le n}(w_{ij}d(P_i, X_j)), \max_{1\le j<k\le n}(v_{jk}d(X_j, X_k))\} \to \min, \quad (1)$$

$$X_j \notin intZ, j = 1, ..., n, \quad (2)$$

где $d(\cdot, \cdot)$ – некоторая метрика.

Задача без ограничений (2) хорошо исследована для прямоугольной метрики [3]. Процедура построения моделей целочисленного линейного программирования для минимаксного и минисуммного критериев задачи с запрещенными зонами предложена в [1]. В работе [2] разработаны эффективные алгоритмы для частных случаев задачи (1)-(2).

В докладе рассматривается общий случай задачи (1)-(2) с прямоугольной метрикой. Для произвольного числа запрещенных зон и размещаемых объектов предложен алгоритм ветвей и границ. Ветвление и вычисление нижних оценок осуществляются с помощью построения разрешенных областей по заданным запрещенным зонам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.Г. Забудский. Построение моделей и решение задач размещения на плоскости с запрещенными зонами // Автоматика и телемеханика. 2006. №12. С. 136–141.
2. Г.Г. Забудский, Н.С. Котенева. Алгоритмы решения минимаксной задачи размещения на плоскости с запрещенными областями // Тезисы XII Всероссийской конференции "Математическое программирование и приложения". Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2003. С. 112.
3. H.V. Dearing, R.L. Francis. A network flow solution to a multifacility minimax location problem involving rectilinear distances //Tranportation Science. 1974. V. 8. P.126–141.

Забудский Геннадий Григорьевич,
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия, e-mail: zabudsky@ofim.oscsbras.ru
Веремчук Наталья Сергеевна,
Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия, Омск, Россия, e-mail: n-veremchuk@rambler.ru

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ С ОДИНАКОВЫМИ ОБЪЕМАМИ ПРОИЗВОДСТВА НА СЛУЧАЙНЫХ ВХОДНЫХ ДАННЫХ

А.А. Курочкин

Исследуется Задача Размещения с одинаковыми объемами производства на случайных входных данных. Предполагается, что транспортные расходы являются случайными величинами, равновероятно принимающими целочисленные значения из некоторого отрезка. Ранее в работе [1] для этой задачи был предложен полиномиальный алгоритм решения, имеющий трудоемкость $O(n \log n)$, где n — общее число потребителей. В [1] проведен вероятностный анализ работы алгоритма и найдены условия, при которых он является асимптотически точным. Стоит отметить, что данные условия вносят существенные ограничения на входных данные задачи. В частности, для асимптотической точности алгоритма требуется, чтобы функция спроса потребителей являлась кусочно-постоянной с точками излома кратными некоторому множителю. Подобные ограничения существенно ограничивают возможность применения алгоритма.

В данной работе предложена модификация алгоритма, рассмотренного в [1]. Стоит отметить, что новый алгоритм, ровно как и предложенный в [1], основывается на процедуре поиска совершенного паросочетания в случайном n-вершинном графе, между любыми двумя вершинами которого с вероятностью p существует ребро. Эта задача исследовалась в [2], где был построен приближенный алгоритм решения с трудоемкостью $O(n \log n)$. В данной работе мы предлагаем другую процедуру поиска совершенного паросочетания, которая имеет ту же трудоемкость, но является гораздо более простой в понимании и использовании. Модификация алгоритма решения Задачи Размещения имеет ту же трудоемкость $O(n \log n)$, что и алгоритм в [1], но при этом является асимптотически точной без дополнительных ограничений на входные данные задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Курочкин, Э.Х. Гимади. Одна задача размещения с одинаковыми объемами производства на случайных входных данных, Вестник Новосибирского Государственного Университета, Выпуск 1, 2011.

2. D. Angluin and L. G. Valiant. Fast probabilistic algorithms for Hamiltonian circuits and matchings, Journal of Computer System Sciences, Volume 188, Number 2, 1979.

Курочкин Александр Александрович, Институт Математики им. С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия, e-mail:alkurochkin@ngs.ru

ЭВРИСТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ДВУХСТАДИЙНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА МОЩНОСТИ

Т.В. Леванова, А.И. Пузиков

Задачи размещения образуют важную область дискретной оптимизации и привлекают к себе внимание многих исследователей [1, 2]. Значительный интерес представляют двухстадийные модели размещения, в которых продукция проходит две стадии производства. Наличие в них ограничений на мощности предприятий существенно усложняет поиск оптимального решения. Подобные двухстадийные задачи являются обобщениями известной простейшей задачи размещения и относятся к классу NP-трудных задач [2].

В работе рассматривается задача в следующей формулировке [3]. Имеются открытые предприятия, производящие однородный продукт в заданном объёме, пункты возможного размещения складов определённой вместимости и клиенты с известным спросом. Даны затраты на поставки продукта с предприятий на склады и от складов клиентам. Каждый клиент обслуживается только одним складом, однако, склад может снабжать несколько клиентов. Необходимо разместить склады и прикрепить к ним клиентов таким образом, чтобы удовлетворить спрос с минимальными суммарными затратами.

Для решения указанной задачи построена гибридная схема на основе алгоритма муравьиной колонии. В её рамках предложен способ получения допустимого решения, разработан вариант алгоритма локального поиска с целью улучшения найденного рекордного значения целевой функции. Кроме того, для данной задачи модифицирована процедура локального поиска с чередующимися окрестностями (VNS).

Экспериментальные исследования проводились на специально построенных по известным правилам [3] сериях тестовых примеров. Осуществлялось сравнение предложенного алгоритма с VNS и системой GAMS (http://www.gams.com/). В результате численных экспериментов сформулированы рекомендации по использованию разработанного алгоритма, выявлено семейство трудных задач для GAMS.

Работа поддержана грантом РФФИ 13-01-00862.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Л. Береснев, Э.Х. Гимади, В.Т. Дементьев. Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.

2. Discrete Location Theory / Ed. by Pitu B. Mirchamdani and Richard L. Franscis. By John Wiley & Sons, Inc. 1990.

3. A. Klose. A Lagrangean relax-and-cut approach for the two-stage capacitated facility location problem. // European J. Oper. Res. V. 126. No. 2. 2000. P. 408-421.

Леванова Татьяна Валентиновна, ОФ ИМ СО РАН, Омск, Россия,
Пузиков Антон Игоревич, ОмГУ им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия
e-mail: levanova@ofim.oscsbras.ru

АЛГОРИТМ МУРАВЬИНОЙ КОЛОНИИ ДЛЯ ВАРИАНТНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ ЦЕНТРОВ

Ю.С. Поздняков

Изучается NP-трудная вариантная задача размещения телекоммуникационных центров (телецентров) [1] в следующей постановке. Имеется множество населенных пунктов $J = \{1, \ldots, n\}$, в которых возможно открытие телецентров, известны расстояния d_{ij} между ними. Каждый центр может быть оборудован одним из нескольких вариантов $R = \{1, \ldots, k\}$ транслирующих станций, отличающихся стоимостью c_r и дальностью распространения сигнала b_r. Необходимо найти размещение телецентров, при котором во всех пунктах имеется возможность получения телевизионного сигнала и суммарная стоимость выбранных станций минимальна.

Модель ЦЛП имеет вид:

$$\sum_{r \in R} c_r \sum_{i \in J} z_i^r \to min$$

при условиях

$$y_{ij} d_{ij} \leqslant \sum_{r \in R} z_i^r b_r, i, j \in J,$$

$$\sum_{i \in J} y_{ij} \geqslant 1, j \in J,$$

$$\sum_{r \in R} z_i^r \leqslant 1, i \in J,$$

$$y_{ij}, z_i^r \in \{0, 1\}, i, j \in J, r \in R.$$

Здесь переменная $z_i^r = 1$, если в пункте i размещен телецентр со станцией r, 0 – в противном случае; $y_{ij} = 1$, если в населенном пункте j имеется прием сигнала телецентра, находящегося в пункте i, иначе $y_{ij} = 0$.

В данной работе для решения рассматриваемой задачи предлагается алгоритм муравьиной колонии, с помощью которого находится размещение телецентров и определяется вариант используемого оборудования в каждом из них. Статистическая информация, накопленная на предыдущих итерациях, влияет на вероятность выбора той или иной станции.

Проведено экспериментальное исследование разработанного алгоритма на тестовых примерах различной структуры [1], показывающее высокую точность получаемых решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Колоколов, Т. В. Леванова, Ю. С. Поздняков. Алгоритмы искусственной иммунной системы для вариантной задачи размещения телекоммуникационных центров // Известия ИГУ. Серия «Математика». Том 6. №1. 2013. С. 35–44.

Поздняков Юрий Сергеевич,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия,
e-mail: yura.pozdnyakov@gmail.com

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ МАРШРУТИЗАЦИИ

Е.М.Бронштейн, Р.В.Гиндуллин

Рассматривается следующая ситуация. Транспортное средство (ТС) должно доставить однородный груз от некоторых производителей потребителям. Процесс погрузки и разгрузки является весьма трудоемким, в связи с чем в каждом пункте производства и потребления ТС загружается (разгружается) один раз. ТС движется по циклическому маршруту, началом и концом которого является база (обозначена 0). Известны величины $a_i (i = 0, ..., n)$ - веса груза в пунктах производства (в этом случае $a_i > 0$) или потребность в пунктах потребления (в этом случае $a_i < 0$), вместимость ТС S и расстояния между всеми парами пунктов. Полагаем, что $\sum_{i=0}^{n} a_i = 0$.

Задача 1 Найти S_{min} – минимальную допустимую вместимость ТС.

С использованием матрицы перестановки задача 1 сведена к задаче линейного булего программирования.

Справедливы следующие оценки.

Предложение

$$max\{|a_i|\} \leq S_{min} < 2 \cdot max\{|a_i|\},$$

причем оценки являются точными.

Задача 2

Найти цикл минимальной длины, обеспечивающий доставку груза от пунктов производства в пункты потребления.

Приведены две формализации задачи:

- в виде задачи булевой квадратичной оптимизации;
- в виде задачи целочисленного линейного программирования.

Во втором случае размерность задачи существенно выше.

Реализованы три метода точного решения задачи 2. Наряду с линейной и квадратичной задачами использовался метод ветвей и границ. Вычислительный эксперимент показал, что наименее трудоемким оказалось использование булевой квадратичной оптимизации.

Экспериментально исследована зависимость длины маршрута от вместимости ТС. При этом минимальная допустимая вместимость определялась как решение задачи 1. Установлено, что в среднем длина маршрута практически стабилизируется при $S > 1,7 \cdot S_{min}$.

Разработаны также некоторые эвристические подходы к решению задачи 2 [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Е.М.Бронштейн, Р.В.Гиндуллин Об одном классе задач маршрутизации. // Математическое моделирование , т. 23, № 6, 2011, С.123-132

Бронштейн Ефим Михайлович, Гиндуллин Рамиз Вилевич,
Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия,
e-mail:bro-efim@yandex.ru, gramiz@mail.ru

ЗАДАЧА О ДОСТАВКЕ ОДНОРОДНОГО ПРОДУКТА РАЗЛИЧНЫМ ПОТРЕБИТЕЛЯМ

А.Ф. Валеева, Ю.А. Гончарова, И.С. Кощеев

В работе рассматривается задача доставки однородного продукта различным потребителям. Фирма, производящая горючесмазочные материалы, имеет клиентов в различных регионах регионах России и поставляет свою продукцию в требуемом количестве арендуемыми автомобильными транспортными средствами (ТС). В одном ТС находится груз, предназначенный для нескольких потребителей. Перед транспортировкой он размещается на поддонах. Фирма располагает складом(депо) или несколькими складами для хранения сырья и произведенной продукции, в которых каждое ТС начинает и заканчивает свой маршрут. Фирма может установить временной период в размере нескольких дней, в течение которых груз должен быть доставлен потребителям. По пути доставки груза ТС разрешается остановка в некоторые интервалы времени. Фирма заинтересована в увеличении прибыли и минимизации затрат на перевозку своей продукции. Рассматриваемая задача (3L-EVRP) относится к классу задач маршрутизации ТС, которые являются NP-трудными.

Решение задачи 3L-EVRP включает в себя следующие подзадачи: 1. Прогнозирование объемов спроса горючесмазочных материалов. 2. Составление рациональных маршрутов доставки груза автомобильными ТС различным потребителям (при этом учитываются временные окна, период планирования, раздельная доставка [1], наличие множества депо [2], неоднородность парка ТС). 3. Выбор емкостей для перевоза в них горючесмазочных материалов в ТС [3]. 4. Размещение емкостей в ТС. Данная подзадача относится к классу задач трехмерной упаковки, являющейся NP-трудной. При этом осуществляется размещение в ТС емкостей параллелепипедной и цилиндрической форм с учетом того, чтобы масса емкостей и используемых поддонов не должна превышать вместимости ТС [3], а также дополнительные ограничения. Разработаны математическая модель задачи 3L-EVRP, а также алгоритм муравьиной колонии, основанный на популяции, для решения задачи составления рациональных маршрутов доставки груза различным потребителям с учетом выше указанных ограничений и эволюционный алгоритм для решения задачи 3D-BPP с учетом технологических ограничений. Приводятся результаты численных экспериментов.

Работа поддержана грантом РФФИ № 12-07-00579.

ЛИТЕРАТУРА

1. Archetti C., Hertz A., Speranza M.G. A tabu search algorithm for the split delivery vehicle routing problem. // Transportation Science. 2006. V. 40. P. 64-73.

2. Surekha P., Dr.S. Sumathi. Solution To Multi-Depot Vehicle Routing Problem Using Genetic Algorithms. // World Applied Programming. 2011. V. 1. N. 1. P. 118–131.

3. Юсупова Н.И., Валеева А.Ф., Рассадникова Е.Ю., Кощеев И.С., Латыпов И.М. Многокритериальная задача доставки грузов различным потребителям. // Логистика и управление цепями поставок. 2011 V. 5. N. 46. P. 60-82.

Валеева Аида Фаритовна, Гончарова Юлия Александровна, Кощеев Иван Сергеевич, УГАТУ, г. Уфа, e-mail: aida_val2004@mail.ru, yuliagonch@mail.ru

О ЗАДАЧЕ НЕСКОЛЬКИХ КОММИВОЯЖЁРОВ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПРОПУСКНЫЕ СПОСОБНОСТИ РЁБЕР ГРАФА С ОБЩЕЙ И РАЗЛИЧНЫМИ ВЕСОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Э.Х.Гимади, А.М.Истомин, И.А.Рыков

Рассматривается задача m коммивояжёров с ограничениями пропускной способности рёбер (m-Capacitated Peripatetic Salesman Problem) [3], в модификациях с общей (m-CPSP) и различными (m-CPSP^d) весовыми функциями циклов. В полном неориентированном взвешенном графе G, каждое ребро e которого имеет заданную пропускную способность $C_e \in \{1, 2, \ldots, m\}$, требуется найти m гамильтоновых циклов экстремального суммарного веса с использованием каждого ребра e не более C_e раз. Известно, что задача m-CPSP NP-трудна.

В работе рассматривается случай, при котором рёбра принимают значения из целочисленного сегмента $\{1, q\}$, каждое ребро e графа имеет пропускную способность $C_e = 2$ с вероятностью p и $C_e = 1$ с вероятностью $1 - p$. В предположении, что известен некоторый Δ-приближённый алгоритм решения задачи $TSP_{min}(TSP_{max})$ на графе G на основании идей из [1] построены полиномиальные алгоритмы A_{min} и A^d_{min} (A_{max} и A^d_{max}) решения задач 2-$CPSP_{min}$ и 2-$CPSP^d_{min}$ (2-$CPSP_{max}$ и 2-$CPSP^d_{max}$) соответственно. Обоснованы гарантированные оценки точностей алгоритмов в среднем по всем возможным входам.

В частности, для задач с весами рёбер $\{1, 2\}$, при использовании алгоритма решения TSP_{min} с оценкой точности 7/6 [4] алгоритмы A_{min} и A^d_{min} имеют оценку точности $(19 - 5p)/12$. Соответственно, A_{max} и A^d_{max}, при использовании алгоритма решения TSP_{max} с оценкой точности 8/9 [2], имеют оценку точности $(25 + 7p)/36$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 12-01-00093, 12-01-33028 и 13-07-00070), целевой программы президиума РАН (проект № 227) и междисциплинарного интеграционного проекта ИМ СО РАН(№ 7Б).

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Е.Бабурин, Э.Х.Гимади, Н.М.Коркишко. Приближенные алгоритмы для нахождения двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального веса // Дискретный анализ и исследование операций, Сер. 2, 11(1), 2004, С. 11–25.

2. Э.Х.Гимади, Е.В.Ивонина. Приближённые алгоритмы решения задачи о двух коммивояжёрах на максимум // Дискретн. анализ и исслед. опер., 19(1), 2012, С. 17–32.

3. E.Duchenne, G.Laporte, F.Semet. The undirected m-Capacitated Peripatetic Salesman Problem. // European Journal of Operational Research, 2012, 223-3, P. 637–643.

4. C.H. Papadimitriu, M. Yannakakis. The travelling salesman problem with distance One and Two // Math. Oper. Res., 18(1), 1993. P. 1–11.

Гимади Эдуард Хайрутдинович, Истомин Алексей Михайлович, Рыков Иван Александрович.
ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия,
e-mail:gimadi@math.nsc.ru, alexeyistomin@gmail.com, rykovweb@gmail.com

2/3-ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ О ДВУХ КОММИВОЯЖЕРАХ НА МАКСИМУМ

А.Н. Глебов, Д.Ж. Замбалаева

Рассматривается несимметричная задача о двух коммивояжерах на максимум, состоящая в нахождении двух реберно непересекающихся ориентированных гамильтоновых циклов с максимальным суммарным весом ребер в полном взвешенном ориентированном графе. Данная задача является обобщением классической задачи коммивояжера на максимум, которая активно исследуется на протяжении последних десятилетий.

Поскольку задача коммивояжера и все содержательные варианты задачи о двух коммивояжерах NP-трудны, основные усилия исследователей направлены на поиск полиномиально разрешимых случаев этих задач и на построение эффективных приближенных алгоритмов для их решения, включая алгоритмы с гарантированными оценками точности и временной сложности. Например, для симметричной задачи одного коммивояжера на максимум наилучшую известную гарантированную оценку точности $\frac{25}{33} - \varepsilon$ имеет алгоритм из [3], а для задачи о двух коммивояжерах на максимум в неориетированном случае наилучшей оценкой $7/9$ обладает алгоритм из [1].

Для несимметричной задачи одного коммивояжера на максимум в [2] был построен эффективный алгоритм с оценкой точности $2/3$. Авторами доклада, совместно с А.А. Скретневой, получен аналогичный результат для несимметричной задачи о двух коммивояжерах на максимум. Сначала (в 2012 г.) Глебов и Скретнева разработали эффективный алгоритм для решения указанной задачи, имеющий гарантированную асимптотическую оценку точности $2/3$ и оценку временной сложности $O(n^3)$, где n — число вершин графа. Позднее Замбалаевой удалось избавиться от свойства асимптотичности, в результате чего был построен эффективный алгоритм с чистой (неасимптотической) оценкой точности $2/3$.

Работа поддержана грантами РФФИ 12-01-00090, 12-01-00093 и 12-01-00448.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н. Глебов, Д.Ж. Замбалаева. Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 7/9 для задачи о двух коммивояжерах на максимум. // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, №4. С. 17-48.

2. H. Kaplan, M. Lewenstein, N. Shafrir, M. Sviridenko. Approximation algorithms for asymmetric TSP by decomposing directed regular multigraphs. Proc. of the 44th Ann. IEEE Symp. on Foundations of Computer Science (FOCS), 2003. P. 56-65.

3. A. van Zuylen. Multiplying Pessimistic Estimators: Deterministic Approximation of Max TSP and Maximum Triangle Packing. // Computing and Combinatorics, 16th Annual International Conference (COCOON 2010). Nha Trang, Vietnam, July 19-21, 2010. Proceedings. Lecture Notes in Computer Science. V. 6196. P. 60-69.

Глебов Алексей Николаевич, Замбалаева Долгор Жамьяновна,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия.
E-mail: angle@math.nsc.ru, dolgorzam@gmail.com

ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ДОСТАВКИ ГРУЗОВ НА ДОРОЖНОМ ГРАФЕ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

А.В. Зиновьев

Для эффективного управления потоками в транспортной системе, построения оптимальных маршрутов, принятия решений по развитию дорожной сети, в качестве модели используется дорожный граф. В работе [2] описан процесс построения такой модели дорожного графа на основе актуальных данных о текущем состоянии сети. Для получения первичных геоданных используются возможности проекта Open Street Maps. При помощи эвристического алгоритма Cook-raw geodata строится дорожный граф, имеющий приемлемое число вершин и ребер для различных задач, например, для оценки возможностей транспортной сети в задаче оптимальной доставки грузов из [1].

Сеть G задается множество узлов V и множеством ребер E. Пусть имеются некоторое количество выделенных пунктов $W \subset V$, между которыми перемещаются грузы. Задан объем перевозок v_{kl} из $k \in W$ в $l \in W$ и штраф за недопоставку h_{kl}. Для каждой дуги $(i,j) \in E$ заданы ограничения на пропускную способность d_{ij} и затраты s_{ij} при перемещении по ней единицы груза. В качестве переменных используем объем перевозки груза $x_{ij}^{kl} \geq 0$ из k в l по дуге (i,j). Требуется с учетом различных ограничений минимизировать затраты на перевозку:

$$\sum_{k \in W} \sum_{l \in W} \Big(\sum_{(i,j) \in E} x_{ij}^{kl} s_{ij} + h_{kl} \big(v_{kl} - \sum_{(i,l) \in E} x_{il}^{kl} \big) \Big) \to \min .$$

Пространство поиска столь велико, что для сокращения перебора решено использовать распараллеленный генетический алгоритм. В работе предлагается оригинальный механизм кодирования решений, позволяющий экономить память для хранения популяции. Также производится сравнение двух подходов к построению алгоритма, один из которых использует штрафование особей, соответствующих недопустимым решениям, а другой состоит в определении операторов таким образом, чтобы они порождали лишь допустимые решения. В докладе приведены результаты вычислительного эксперимента по оценке эффективности предложенного алгоритма на реальных данных большой размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зиновьев А.В. О задаче распределения ресурсов при развитии транспортной сети // Материалы I Всероссийской конференции "Статистика. Моделирование. Оптимизация."Челябинск, ЮУрГУ, 2011. – С. 290.

2. Зиновьев А. В. Моделирование транспортной сети города Омска на основе открытых геоданных // Материалы школы-конференции "CSEDays 2012: Graphs theory and applications". Екатеринбург, УрО РАН, 2012 – С. 21-26.

Зиновьев Алексей Викторович,
Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия.
E-mail: zaleslaw.sin@gmail.com

ИНФОРМАЦИОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ АНАЛИЗА И ПЛАНИРОВАНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ S-ГИПЕРСЕТЕЙ

В. К. Попков

В докладе рассматривается развитие теории S-гиперсетей [1] которая является новым подходом к решению проблем связанных с созданием и эксплуатацией транспортных систем больших городов и регионов. План работ состоит из следующих этапов:
1. Постановка задач моделирования и анализа транспортных процессов и систем.
2. Развитие теории S-гиперсетей для постановки и решения задач.
3. Разработка алгоритмов и программ решения сформулированных ниже задач, которые могут быть сформулированы и решены с помощью методов дискретной оптимизации и теории нестационарных S-гиперсетей.

В докладе рассматриваются следующие задачи:
1. Технологии построения графических гиперсетевых моделей мегаполисов и регионов с учетом климатических и других системо-образующих связей и параметров транспортных систем [2].
2. Гиперсетевые модели и методы оптимальной трассировки транспортных магистралей для всех видов транспорта.
3. S-гиперсетевые нестационарные модели современных транспортных систем.
4. Гиперсетевые нестационарные модели потоков различных транспортных систем.
5. Алгоритмы анализа и синтеза транспортных потоков с помощью теории нестационарных S-гиперсетей.
6. Гиперсетевые модели оптимизации транспортных развязок.
7. Гиперсетевые модели передвижения грузов и пассажиров.
8. Решение задач оптимизации маршрутов городского и личного транспорта.
9. S-гиперсетей модели грузопотоков и их оптимизация.
10. S-гиперсетевые модели управления транспортными системами.
11. Задачи управления потоками транспортных средств с помощью S-гиперсетей.
12. Задачи оптимального управления городскими транспортными системами и алгоритмы маршрутизации транспортных единиц.
13. Модели и задачи размещения пунктов обслуживания для транспортной системы.
14. Разработка современных информационных систем для городского транспорта.
15. Разработка и развитие пленочных технологий для информационного обеспечения, а также для питания аппаратуры связи и мониторинга.
16. Мониторинг движения транспорта и пешеходов, определение мест нахождения конкретных транспортных единиц и людей.
17. Оптимальное размещение камер и датчиков для эффективного мониторинга транспорта, а также нарушителей правил дорожного движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попков В. К. Теория S-гиперсетей и ее применение в задачах оптимизации систем сетевой структуры // Материалы Рос. конф. “Дискретная оптимизация и исследование операций”, Новосибирск — Алтай, 27 июня — 3 июля 2010 г. С. 49–53.
2. Попков В. К. Применение теории S-гиперсетей для моделирования систем сетевой структуры // Пробл. информатики. 2010. №4. С. 17–45.

Попков Владимир Константинович, Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики, Новосибирск, e-mail: popkov@sscc.ru

ЗАДАЧА ТРАНСПОРТИРОВКИ НЕСКОЛЬКИХ ВИДОВ ГОТОВОЙ ПРОДУКЦИИ РАЗЛИЧНЫМИ ТРАНСПОРТНЫМИ СРЕДСТВАМИ

Е.Ю. Рассадникова

В работе рассматривается задача транспортировки готовой продукции(ГП). ГП доставляется в города России. Компания производит несколько видов продукции на нескольких пунктах производства (ПП), склады ГП находится также на ПП. Каждый склад может вместить определенное количество ГП. Парк транспортных средств (ТС), которым владеет компания, состоит из ТС с одним отсеком и различной вместимостью, а также из ТС с несколькими отсеками различной вместимости. Все клиенты должны быть обслужены. Время обслуживания клиентов определенно заранее, если обслуживание происходит не во время, компания несет убытки. ТС должно вернуться в ПП в заранее определенное время, если ТС по каким-либо причинам не возвращается, компания несет убытки. Необходимо доставлять ГП с минимальными затратами, при этом необходимо учесть такие факторы как риск аварии на дорогах, качество дорог, плата за использование дорог, уровень преснупности на дорогах.

Для нахождения маршрута минимальной стоимости была разработана модель. Эта модель базируется на модели задачи маршрутизации с временными окнами с несколькими депо с транспортными средствами различной грузоподьемностью [1]. В отличии от модели [1] в новой модели рассматривается функция которая включает не только фиксированную стоимость использования транспортного средства, стоимости зависящие от времени «путешествия» и от пройденного расстояния в маршруте, время ожидания и обслуживания, и величины стоимостных штрафов, но также стоимостную величину связанную с риском от аварии для предприятия. Также в модели рассматривается несколько типов готовой продукции, а ТС рассматриваются не только с одним отсеком, но также с несколькими отсеками, также модель позволяет рассматривать при выборе маршрута только безопасные и качественные дороги, а также не превышать допустимую норму платы за использование дорог. Для решения данной задачи можно использовать Variable Neighborhood Search.

Работа поддержана грантами РФФИ 11-07-00579, 12-07-00631.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Dondo, J. Cerda. A cluster-based optimization approach for the multi-depot heterogeneous fleet vehicle routing problem with time windows // European J. Oper. Res. 2007. V. 176. P. 1478—1507.

2. E. Erkut, S. A. Tjandra, V. Verter. Hazardous Materials Transportation// C. Barnhart, G. Laporte (eds.) Handbook in OR & MS. Elsevier. 2007.

3. G. Wascher, T. Henke. Optimales Recycling - Tourenplanung in der Altglasentsorgung// Presentation in Ruhr-Universitat Bochum. 2013.

4. M. Gendreau, C.D. Tarantilis. Solving Large-Scale Vehicle Routing Problems with Time Windows: The State-of-the Art// Cirrelt. 2010.

Рассадникова Екатерина Юрьевна УГАТУ, Уфа, Россия,
e-mail:rassadnikova.ekaterina@gmail.com

О МАРШРУТНОЙ ЗАДАЧЕ НА УЗКИЕ МЕСТА С ВНУТРЕННИМИ РАБОТАМИ И УСЛОВИЯМИ ПРЕДШЕСТВОВАНИЯ

Я.В. Салий, А.Г. Ченцов

Рассматривается "неаддитивный" вариант задача последовательного обхода мегаполисов с внутренними (в пределах мегаполисов) работами и условиями предшествования. Данная работа обобщает [1]: в отличие от [1] не требуется, чтобы пункт прибытия в мегаполис совпадал с пунктом отправления, что позволяет вводить внутренние работы более общего характера. Исследуется вариант динамического программирования, не предусматривающий построения всего массива значений функции Беллмана. При этом используется расширение исходной задачи с преобразованием ограничений в виде условий предшествования и ограничением на текущие переходы с мегаполиса на мегаполис. Кроме того, в процессе построения удается ограничиться списками заданий, существенных в смысле предшествования, что позволяет сконструировать слои пространства позиций и ограничиться насчитыванием значений функции Беллмана на этих слоях.

Предлагается параллельный алгоритм построения слоев функции Беллмана, реализованный на МВС и многоядерной ПЭВМ (соответствующий "аддитивный" аналог см. в [2]). Программа написана на `C++11`, для параллелизации используется библиотека `OpenMP 3.1`, обеспечивающая работу с общей памятью. Выбор системы с общей памятью обусловлен тем фактом, что подзадачи, находящиеся в одном слое функции Беллмана являются независимыми друг от друга, следовательно, при расчете значений функции Беллмана для следующего слоя у одного исполнителя не возникнет необходимости обращаться к результатам расчетов другого, соответственно, нет необходимости ни в синхронизации (за исключением перехода к следующему слою), ни в блокировке.

Данная работа опирается на результаты [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сесекин А.Н., Ченцов А.А, Ченцов А.Г. Об одной задаче маршрутизации "на узкие места" // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т.16. № 1. С. 152–170.

2. Григорьев А.М., Иванко Е.Е., Ченцов А.Г. Динамическое программирование в обобщенной задаче курьера с внутренними работами // Модел. и анализ информ. систем., 2011. Т.18. № 3. С.101–124.

3. Салий Я.В., Ченцов А.Г. Об одной маршрутной задаче на узкие места с внутренними работами // Вестник Тамбовского университета. 2012. Т.17. № 3. С.827–847.

Салий Ярослав Витальевич, ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия,
e-mail:yvs314@gmail.com
Ченцов Александр Георгиевич, ИММ УрО РАН, Екатеринбург, Россия,
e-mail:chentsov@imm.uran.ru

THE EGALITARIAN PRICE OF ANARCHY IN A SUBCLASS OF SHAPLEY NETWORK COST-SHARING GAMES

P.-A. Chen

We consider the *egalitarian* price of anarchy – the price of anarchy [1], the ratio between the social cost of the worst Nash equilibrium and that of an optimal solution, under a social cost function of the *maximum* individual cost (instead of the sum) – in network design games with Shapley (or, equivalently, fair) cost sharing [2] in the following model. A *fair network cost-sharing game* $(N, G = (V, E), (\mathcal{P}_i)_{i\in N}, (c_e)_{e\in E})$ is defined on a directed graph $G = (V, E)$ with $k = |N|$ source-sink pairs, where each pair (s_i, t_i) is associated with a player i. Player i's strategies are the simple $s_i - t_i$ paths $\mathcal{P}_i$ in G for $\mathcal{P}_i \subseteq 2^E$. Each edge $e \in E$ has an associated *delay function* $d_e : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. An outcome of the game is a vector $P = (P_1, ..., P_k)$ of paths with $P_i \in \mathcal{P}_i$ for each i. We write $x_e(P)$ for the number of players using edge e as part of their strategy, i.e., $x_e(P) = |\{i : e \in P_i\}|$. The individuals' costs are $C_i(P) = \sum_{e\in P_i} d_e(x_e(P)) = \sum_{e\in P_i} c_e/x_e(P)$. This means that the cost c_e of acquiring the necessary edges is shared evenly between all users. In particular, using an edge by multiple players *decreases* the cost to each of them. The social cost function of the maximum individual cost is then $C(P) = \max_{i\in N} C_i(P)$. An outcome is a pure Nash equilibrium if P_i minimizes C_i over $\mathcal{P}_i$ given P_j fixed for $j \neq i$ for each i. Let P_N be a Nash equilibrium of the worst cost C and O an outcome of the optimal cost C. The egalitarian price of anarchy is $C(P_N)/C(O)$. We write $U(P) = \bigcup_{i\in N} P_i$ for the set of all e used by at least one player. For a subclass of fair network cost-sharing games in which the optimal solution covers all the edges, i.e., $U(O) = E$, with restricted $s_i - t_i$ pairs, we give an upper bound of $n - 1$ for $n = |V|$ on the egalitarian price of anarchy by adapting the technique of [3] in selfish routing, and conjecture general bounds in fair network cost-sharing games from examples. The work on price of anarchy is focused more on the *utilitarian* social cost function of total cost summed from individuals'. A variety of cost-sharing protocols [5], models [4], and measures [2] has been studied in the literature of network (cost-sharing) design. We are therefore motivated to investigate the price of anarchy with the less studied egalitarian social cost in fair network cost-sharing games.

This research was supported by NSC grant 101-2218-E-009-011.

REFERENCES

1. E. Koutsoupias and C. H. Papadimitriou. Worst-case equilibria. In Proc. STACS'99 (LNCS vol. 1563), p. 404–413, 1999.
2. E. Anshelevich, A. Dasgupta, J. Kleinberg, E. Tardos, T. Wexler, and T. Roughgarden. The price of stability for network design with fair cost allocation. In Proc. FOCS'04, p. 295-304, 2004.
3. T. Roughgarden. The maximum latency of selfish routing. In Proc. SODA'04, p. 973-974, 2004.
4. H.-L. Chen, T. Roughgarden. Network design with weighted players. In Proc. SPAA'06, p. 29-38, 2006.
5. H.-L. Chen, T. Roughgarden, G. Valiant. Designing networks with good equilibria. In Proc. SODA'08, p. 854-863 , 2008.

Po-An Chen. Institute of Information Management, National Chiao Tung University, Taiwan. Email: poanch@gmail.com.

A HYBRID VARIABLE NEIGHBORHOOD SEARCH FOR THE SPLIT DELIVERY VEHICLE ROUTING PROBLEM

A. Khmelev

In this work we study the Split Delivery Vehicle Routing problem (SDVRP), a variant of the VRP in which multiple visits to customers are allowed. For this NP-hard problem we design a hybrid heuristic. It is based on local search ideas and uses sequences of customers for coding solutions. We apply two decoding procedures with linear and quadratic complexity for the sequences. One of the procedures is a greedy algorithm, which can split demands. Another procedure uses dynamic programming method. Our hybrid algorithm applies the well-known variable neighborhood descent approach (VND) and uses the randomized tabu search procedure (RTS) for diversification. There are three types of neighborhood structures in our VND approach. In the first type of neighborhoods we change the sequences by swap, shift, and 2-opt moves. In the second type we change the solutions by creating or removing some splits. In the third type we use two ejection chain procedures. RTS uses only greedy decoding procedure and randomized 2-opt neighborhood. It helps to change the region of the solution space. For accelerating each iteration we ignore the moves, which generate the long travels between customers.

The problem sets of Archetti et al. [1] and Chen et al. [2] is used in computational experiments. This hybrid algorithm is evaluated and compared with the memetic algorithm with population management of Boudia et al. [3], tabu search with vocabulary building approach of Aleman et al. [4] and hybrid algorithm (EMIP+VRTR) of Chen et al. [2]. Computational experiments indicate that the proposed algorithm is very competitive. It improves 21 best-known solutions in the 70 test instances with number of customers up to 280.

REFERENCES

1. C. Archetti, A. Hertz, M. G. Speranza, A tabu search algorithm for the split delivery vehicle routing problem, Transportation Science 40(1) (2006) 64-73.

2. S. Chen, B. Golden, E. Wasil, The split delivery vehicle routing problem: Applications, algorithms, test problems, and computational results, Networks 49(4) (2007) 318-329.

3. M. Boudia, C. Prins, M. Reghioui, An effective memetic algorithm with population management for the split delivery vehicle routing problem, In Hybrid Metaheuristics, Vol. 4771, Lecture Notes in Computer Science, (2007) 16-30.

4. R.E. Aleman, R.R. Hill, A tabu search with vocabulary building approach for the vehicle routing problem with split demands, Int. J. Metaheuristics, 1(1) (2010) 55-80.

Khmelev Alexey, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia, e-mail:avhmel@gmail.com

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПОКРЫТИЙ И УПАКОВОК ДЛЯ КУБА

С.Н. Астраков

Рассматриваются задачи о покрытиях и упаковках шарами для куба. Достаточно полное представление о данной тематике можно найти в известной работе [1]. Конкретную реализацию заполнения куба шарами (одинаковыми или разными) будем называть *моделью упаковки.* Каждый шар упаковки определяется местом положения его центра и его радиусом, полностью содержится в кубе и не имеет пересечения с другими шарами. Аналогично, *модель покрытия* куба определяется как система расположенных в пространстве шаров, объединение которых содержит данный куб. При этом шар покрытия понимается не как физическое тело, а как некоторая "контролируемая" область. Задачи о покрытиях и упаковках имеют между собой много общего и могут исследоваться похожими методами, как это делается в работе [2].

В данной работе каждая модель упаковки или покрытия будет иметь следующие характеристики: общее число шаров n и количество различных размеров (радиусов) шаров k. Таким образом, можно выделить классы покрытий *П(n,k)* и классы упаковок *У(n,k)*. Показателем эффективности модели служит плотность D, определяемая как отношение суммы объемов шаров к объему куба. При этом для покрытий решается задача поиска моделей с минимальной плотностью в классе *П(n,k)*, а для упаковок - задача поиска моделей с максимальной плотностью в классе *У(n,k)*. Заметим, что показатель n и, в некоторой степени, k определяют сложность класса. Эффективность моделей можно улучшать за счет повышения сложности класса. Однако, основной целью исследования является нахождение лучших моделей при ограниченной сложности.

Обозначая плотности оптимальных моделей через $D_y^*(n,k)$ и $D_n^*(n,k)$, соответственно, в классах *У(n,k)* и *П(n,k)*, приведем основные результаты исследований:

(1) $D_y^*(1,1) > D_y^*(m,1), m = 2,3,...,7.$
(2) $D_y^*(9,2) > D_y^*(m,2), m = 2,3,...,35.$
(3) $D_n^*(1,1) < D_n^*(m,1), m = 2,3,...,7.$
(4) $D_n^*(9,2) < D_n^*(m,2), m = 2,3,...,35.$

Работа поддержана грантом РФФИ 13-07-00139_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Фейеш Тот. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. М.: Физматгиз, 1958.

2. К. Роджер. Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968.

Астраков Сергей Николавич,
Конструкторско-технологический институт вычислительной техники СО РАН,
Новосибирск, E-mail: astrakov90@gmail.com

ПОКРЫТИЕ КОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ КРУГАМИ ЗАДАННОГО РАДИУСА

В.Ю. Воронин, И.А. Рыков

При построении программ для раскроя листового металла на координатно-пробивных станках с ЧПУ возникает задача покрытия связной области, ограниченной замкнутым контуром, состоящим из отрезков прямых и дуг окружностей, множеством кругов, радиус каждого из которых равен одному из радиусов из заданного набора (определяемого множеством доступных инструментов). В настоящей работе рассматривается случай, когда набор инструментов состоит из одного круга радиуса R. В исходной задаче покрытие не должно выходить за границы контура. Однако, граница покрывается специальным образом, сходным с фрезеровкой, при этом оставшаяся часть области имеет границей контур, являющийся эквидистантой исходной границы на величину $2R$. При покрытии этой подобласти разрешается выходить за ее границы. Целью является минимизация времени работы станка, которое пропорционально числу ударов. Таким образом, рассматривается следующая

Задача: покрыть плоскую область, ограниченную замкнутым контуром, состоящим из отрезков прямых и дуг окружностей, минимальным числом кругов заданного радиуса R.

Очевидно, что для решения этой задачи достаточно решить задачу построения покрытия минимальной плотности, т.е. отношения суммарной площади кругов к площади области (см. [1]). В работах [1, 2] рассматривается задача регулярного покрытия плоскости кругами одного или нескольких радиусов. Так, в [2] показано, что оптимальным регулярным покрытием плоскости является покрытие кругами с центрами в узлах регулярной треугольной сетки со стороной треугольника, равной $R\sqrt{3}$. Однако, в случае, когда площадь области сопоставима по порядку величины с радиусом круга, потери плотности за счет выхода за границу области оказываются слишком велики.

В настоящей работе покрытие области строится, исходя из формы ограничивающего её контура C. Центры кругов располагаются на эквидистантах граничного контура, на расстоянии d друг от друга. Расстояние между эквидистантами $w = w(d)$ выбирается так, чтобы круги с соседних эквидистант полностью покрывали область между ними. Используя специфику контура, состоящего из отрезков прямых и дуг окружностей, удаётся установить зависимость $w = w(d)$ и оценить число кругов $N = N(d, w(d))$ в покрытии. Далее, решением оптимизационной задачи выбирается шаг d, минимизирующий N.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Астраков, А. И. Ерзин, В. В. Залюбовский. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами. // Дискретн. анализ и исслед. опер., 16:3 (2009), 3–19.

2. Kershner R. The number of circles covering a set // Amer. J. Mathematics. Vol. 61:3 (1939), 665–671.

Воронин Василий Юрьевич, НГУ, Новосибирск, Россия,
e-mail:voronin.vasily@gmail.com
Рыков Иван Александрович, ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия, e-mail:rykov@ngs.ru

СЕНСОРНЫЕ СЕТИ И ПОКРЫТИЕ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ

А.И. Ерзин

Беспроводная сенсорная сеть (БСС) состоит из автономных устройств – сенсоров, каждый из которых осуществляет мониторинг (покрытие) некоторой области. Форма этой области зависит от назначения сенсора и его технических характеристик и может быть кругом, эллипсом, сектором или другой фигурой [1,2]. Принято считать, что потери энергии сенсора пропорциональны покрытой им площади. Поэтому задача энергоэффективного функционирования БСС сводится к задаче построения наименее плотного покрытия плоской области плоскими фигурами. При этом под плотностью покрытия понимается отношение суммы площадей элементов покрытия к площади покрываемой области. В литературе наиболее изучена проблема построения *регулярных* покрытий [1-4]. В регулярном покрытии покрываемая область разбивается на одинаковые многоугольники (плитки), и все плитки покрываются единообразно. В [3] введена классификация регулярных покрытий плоскости, согласно которой $COV_k(p,q)$ – это класс покрытий, в которых область разбивается на правильные k-угольники, каждый из которых покрывается одинаково p фигурами q различных типов. В [4] введена классификация регулярных покрытий полосы.

Современные сенсоры способны регулировать свои технические характеристики, меняя область мониторинга и, следовательно, форму покрытия. Это позволяет найти оптимальные (или хотя бы рекордные по плотности) покрытия в том или ином классе. Другая актуальная задача – минимизация числа сенсоров, осуществляющих мониторинг области заданной площади, – также может решаться в классе регулярных покрытий.

В данной работе предложен ряд новых регулярных покрытий кругами, эллипсами и секторами, имеющих рекордные плотности; доказана оптимальность некоторых покрытий в своих классах.

Работа поддержана грантом РФФИ 13-07-00139-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Cardei, D.-Z. Du. Improving Wireless Sensor Network Lifetime through Power Aware Organization. // ACM Wireless Networks. 2005. V. 11. No. 3. P. 333–340.

2. J. Wu, S. Yang. Energy-Efficient Node Scheduling Models in Sensor Networks with Adjustable Ranges. // Int. J. of Foundations of Computer Science. 2005. V. 16. No. 1. P. 3–17.

3. С.Н. Астраков, А.И. Ерзин, В.В.Залюбовский. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами. // Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т. 6. №. 3. С. 3–19.

4. С.Н. Астраков, А.И. Ерзин. Построение эффективных моделей покрытия при мониторинге протяженных объектов. // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17. №. 1. С. 26–34.

Ерзин Адиль Ильясович, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия, e-mail:adilerzin@math.nsc.ru

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ КРУГОВ РАЗНЫХ РАДИУСОВ С ПОМОЩЬЮ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

М.С. Лисафина, Ш.И. Галиев

Построены линейные модели для приближенного решения упаковок кругов двух заданных радиусов в произвольную замкнутую ограниченную область G на плоскости, при которой общая площадь упаковываемых кругов принимает наибольшее возможное значение.

Задача упаковок в заданную область кругов одинакового или разного радиусов имеет важные приложения в технике и экономике. Для решения таких задач разработано большое множество методов; см., например, работы [1-3] и библиографии в них.

В данной работе на области G строятся сетки, узлы которых порождают конечное множество точек W, и считается, что центры упаковываемых кругов могут быть только в некоторых точках множества W. Задача упаковки кругов двух заданных радиусов с центрами в W сводятся к целочисленной задаче линейного программирования, размерность которой определяется числом элементов множества W.

Для решения полученной целочисленной задачи линейного программирования при больших размерностях предлагается эвристический алгоритм. Этот алгоритм основан на введении уровней возможных положений центров упаковываемых кругов, весов уровней и поэтапной упаковки кругов используя упаковки, полученные как на данном этапе, так и на предыдущих этапах. При этом почти на каждом этапе дважды решается задача целочисленного линейного программирования, размерность которой существенно меньше размерности исходной задачи.

Для реализации алгоритма метода разработана программа с использованием библиотеки CPLEX 11.2. Программа позволяет находить приближенные решения задачи упаковок кругов двух заданных радиусов для ограниченных областей вне зависимости от формы ограниченной области. Приводятся результаты расчетов для упаковок от 10 до 100 кругов двух выбранных радиусов в невыпуклые области и в прямоугольную область. Численные расчеты показывают результативность предложенного подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Addisa, M. Locatelli, F. Schoena. Efficiently packing unequal disks in a circle. // Operations Research Letters 2008. V. 36(1). P. 37–42.

2. W. Q. Huang. Greedy algorithms for packing unequal circles into a rectangular container // European Journal of Operational Research. 2005 V. 56. P. 539–548.

3. Y.G. Stoyan, G. N. Yaskov A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip // Europ. J. Oper. Res. 2004. V. 156. P. 590–600.

Лисафина Мария Сергеевна, Галиев Шамиль Ибрагимович,
Казанский Национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева (КНИТУ-КАИ), г. Казань, Россия, e-mail: e_marie@mail.ru, sh.galiev@mail.ru

ГИБРИДНЫЙ ГЕНЕТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО КОММУНИКАЦИОННОГО ДЕРЕВА

Р.В. Плотников

Рассматривается следующая задача. Пусть задан простой неориентированный взвешенный граф G с множеством вершин V и множеством ребер E. Пусть $c_{ij} \geq 0$ — *вес* ребра $(i, j) \in E$. Требуется найти остовное дерево T^* графа G, являющееся решением задачи:

$$\sum_{i \in V} \max_{j \in N_i(T)} c_{ij} \to \min_{T},$$

где $N_i(T)$ — множество вершин, смежных с вершиной i в дереве T.

Рассматриваемая задача возникает при минимизации энергопотребления коммуникационных сетей, элементы которых способны регулировать дальность передачи данных. При этом потери энергии элемента пропорциональны d^s, где $s \geq 2$, а d — дальность передачи [1]. В этом случае вершины графа G соответствуют элементам сети, а веса рёбер соответствуют потерям энергии на связь между вершинами в течение одного временного такта функционирования сети. Решение задачи позволяет определить для всех элементов сети радиусы передачи данных, при которых сохраняется связность графа и минимизируются суммарные энергозатраты на связь. В англоязычной литературе данную содержательную проблему принято называть Min-Power Symmetric Connectivity Problem [1].

Известно, что рассматриваемая задача является NP-трудной в сильном смысле [2,3]. В [4] найдена граница аппроксимируемости рассматриваемой задачи. В данной работе для приближенного решения задачи предлагается генетический алгоритм, в котором в качестве мутации используется новый метод локальных улучшений. Проведен численный эксперимент, демонстрирующий высокую эффективность предлагаемого алгоритма.

Работа поддержана грантом РФФИ 13-07-00139_а

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Althaus, et al. Power Efficient Range Assignment for Symmetric Connectivity in Static Ad Hoc Wireless Networks. // Wireless Networks, 2006, v. 12, No. 3, p. 287–299.

2. A.E.F. Clementi, P. Penna, R. Silvestri. On the Power Assignment Problem in Radio Networks. // Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC), (054), 2000.

3. L.M. Kirousis, E. Kranakis, D. Krizanc, A. Pelc. Power consumption in packet radio networks. // Theoretical Computer Science, 2000, No. 243, p. 289–305.

4. А.И. Ерзин, Р.В. Плотников, Ю.В. Шамардин. О некоторых полиномиально разрешимых случаях и приближенных алгоритмах для задачи построения оптимального коммуникационного дерева // Дискретный анализ и исследование операций, Т. 20, № 1, 2013, 12–27

Плотников Роман Викторович, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, e-mail: nomad87@ngs.ru

РАВНОВЕСНАЯ УПАКОВКА ШАРОВ В ШАР МИНИМАЛЬНОГО РАДИУСА

П.И. Стецюк, Т.Е. Романова

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве имеется семейство шаров S_i с радиусами r_i и весами w_i, $i = 1, \ldots, m$. Полагаем, что центр тяжести шара S_i находится в его центре. Равновесной упаковкой n-мерных шаров S_i, $i = 1, \ldots, m$, назовем такую их упаковку в шар S, чтобы радиус шара S был минимальным и центр тяжести семейства шаров S_i, $i = 1, \ldots, m$, совпадал с центром шара S.

Не ограничивая общности будем считать, что центр шара S находится в начале координат. Пусть $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$ – неизвестный центр шара S_i, r – неизвестный радиус шара S. Обозначим известные величины $\lambda_i = w_i / \sum_{i=1}^{m} w_i$, $i = 1, \ldots, m$, и очевидную нижнюю границу на искомый радиус $R = \max_{i=1,\ldots,m} r_i$. Тогда равновесной упаковке n-мерных шаров S_i, $i = 1, \ldots, m$, соответствует многоэкстремальная задача нелинейного программирования:

$$r^* = \min_{r \geq R} \; r \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2 \leq (r - r_i)^2, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (x_{ik} - x_{jk})^2 \geq (r_i + r_j)^2, \quad 1 \leq i < j \leq m, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_{ik} = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Ограничения (2) гарантируют, что каждый шар S_i содержится внутри шара S, а ограничения (3) – что никакие два шара из S_i, $i = 1, \ldots, m$, не пересекаются (не имеют общих внутренних точек). Ограничения (4) означают, что центр тяжести семейства шаров S_i, $i = 1, \ldots, m$, находится в начале координат (центре шара S).

В докладе обсуждаются методы поиска локальных минимумов задачи (1)–(4) с помощью модификации r-алгоритма, в которой величина шага адаптивно настраивается с помощью ряда параметров [1]. В первом методе задача (1)–(4) с помощью негладких штрафов сводится к задаче минимизации почти-дифференцируемой функции. Во втором методе учитывается проектирование на гиперплоскости, заданные ограничениями-равенствами (4).

Работа поддержана совместным грантом НТЦУ и НАНУ (проект № 5710).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.З. Шор, П.И. Стецюк. Использование модификации r-алгоритма для нахождения глобального минимума полиномиальных функций // Кибернетика и системный анализ. 1997. №4. С. 28-49.

Стецюк Петр Иванович, Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, Украина, e-mail: stetsyukp@gmail.com

Романова Татьяна Евгеньевна, Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина, e-mail: tarom7@gmail.com

ГРАФ МНОГОГРАННИКА ЗАДАЧИ РАЗБИЕНИЕ НА ТРЕУГОЛЬНИКИ

А.И. Антонов, В.А. Бондаренко

Рассмотрим задачу следующего вида. Задан полный граф G с множеством вершин $N_n = \{1, \ldots, n\}$, где $n = 3k$, для каждого ребра (t, s) $(t < s)$ которого задана его длина c_{ts}. Требуется множество вершин N_n разбить на k троек так, чтобы сумма периметров соответствующих треугольников была минимальной.

Сужением этой задачи служит известная *NP*-полная задача РАЗБИЕНИЕ НА ТРЕУГОЛЬНИКИ [1].

Определим многогранник рассматриваемой задачи. С этой целью в пространстве R^m, где m равно количеству ребер графа G, т.е. $m = n\,(n-1)\,/2$, для каждого разбиения δ на треугольники рассмотрим его характеристический вектор $x = x\,(\delta)$. Пусть X - множество всех таких x. Многогранником M нашей задачи служит выпуклая оболочка $\mathrm{conv}X$. Очевидно, что X - множество вершин многогранника M. Множество его ребер описывает следующая

Теорема 1. *Вершины x_1 и x_2 $(x_i = x\,(\delta_i))$ многогранника M будут смежны в том и только том случае, когда множество вершин исходного графа G, получающееся после отбрасывания общих для δ_1 и δ_2 троек, нельзя разбить на два подмножества, каждое из которых распадается на тройки для δ_1 и для δ_2.*

Для доказательства теоремы 1 можно воспользоваться следующим простым утверждением: x_1 и x_2 не смежны в том и только том случае, когда существует $x \in X$, $x \neq x_1$, $x \neq x_2$, для которого выполняется неравенство $x \leq x_1 + x_2$.

С помощью теоремы 1 удается получить экспоненциальную нижнюю оценку кликового числа графа многогранника M.

Теорема 2. *Максимальное количество p попарно смежных вершин многогранника M удовлетворяет неравенству*

$$p\,(X) \geq 2^{\sqrt{k}/2-2}.$$

Работа поддержана грантом Правительства РФ по постановлению N 220, договор № 11.G34.31.0053.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Гэри, Д. Джонсон. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

Антонов Анатолий Игоревич, Бондаренко Владимир Александрович,
ЯрГУ им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия,
e-mail: anatoly.i.antonov@gmail.com, bond@bond.edu.yar.ru

БЫСТРЫЙ МЕТОД ПРОВЕРКИ ПРАВИЛА ЧЕРНИКОВА В МЕТОДЕ ИСКЛЮЧЕНИЯ ФУРЬЕ–МОЦКИНА

С. И. Бастраков, Н. Ю. Золотых

Рассматривается задача исключения неизвестных из системы линейных неравенств. Исключение переменной x_i из системы вида $Ax \leq b$ состоит в построении системы $A'x \leq b'$, являющейся следствием исходной, в которую не входит переменная x_i.

Классический метод исключения Фурье–Моцкина выполняет исключение переменной x_i следующим образом. Все неравенства разбиваются по знаку коэффициента перед x_i на множества J_+, J_- и J_0. Новые неравенства составляются путем комбинирования всевозможных пар неравенств из $J_+ \times J_-$. Все неравенства из J_+ и J_- удаляются. Данный метод мало применим на практике, так как порождает огромное количество неравенств, большинство из которых обычно являются избыточными.

С. Н. Черников [1] предложил алгоритм сокращенного фундаментального свертывания (алгоритм Фурье–Черникова), являющийся модификацией алгоритма Фурье–Моцкина с добавлением двух правил, позволяющих исключить некоторые избыточные неравенства. С каждым неравенством ассоциируется индекс, являющийся множеством целых чисел. Индексы неравенств исходной системы состоят из их номеров в матрице системы, при комбинировании пары неравенств их индексы объединяются. Первое правило Черникова состоит в комбинировании лишь пар, объединение индексов которых имеет достаточно малую мощность. Второе правило состоит в отбрасывании неравенств, индексы которых содержат индекс другого неравенства.

Предлагается быстрый способ проверки второго правила Черникова, являющийся адаптацией графового теста для проверки смежности в задаче построения двойственного описания полиэдра [2]. Вычислительный эксперимент показывает, что использование данного способа значительно снижает общее время работы. Как правило, новый метод опережает по производительности и способ, предложенный в [3].

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», госконтракт № 14.B37.21.0393.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.Н. Черников. Линейные неравенства. М.: Наука, 1968.

2. Н.Ю. Золотых. Новая модификация метода двойного описания для построения остова многогранного конуса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 1. С. 153–163.

3. А.М. Лукацкий, Д.В. Шапот. Конструктивный алгоритм свертывания систем линейных неравенств высокой размерности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 7. С. 1167–1180.

Бастраков Сергей Иванович, Золотых Николай Юрьевич,
Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия,
e-mail: sergey.bastrakov@itlab.unn.ru, nikolai.zolotykh@gmail.com

О ГРАФАХ КОНУСНЫХ РАЗБИЕНИЙ ЗАДАЧ О МИНИМАЛЬНОМ И МАКСИМАЛЬНОМ РАЗРЕЗЕ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ВЕСАМИ

В.А. Бондаренко, А.В. Николаев

Рассматриваются две известные комбинаторные задачи о максимальном и минимальном разрезе в неориентированном графе на n вершинах с неотрицательными весами ребер. Каждому разрезу в графе ставится в соответствие характеристический $0/1-$вектор из $\mathbb{R}^d$, где $d = C_n^2$, координаты которого равны единице, если соответствующие ребра попали в разрез. Множество всех характеристических векторов разрезов полного неориентированного графа на n вершинах обозначается через Δ_n. Выпуклая оболочка Δ_n известна как разрезной многогранник $CUT(n)$. Введем два конусных разбиения пространства $\mathbb{R}^d$ по множеству Δ_n $(\forall x \in \Delta_n)$:

$$K^+_{max}(x) = \{c \in \mathbb{R}^d,\ c \geq 0 :\ (c,x) \geq (c,y),\ \forall y \in \Delta_n\},$$
$$K^+_{min}(x) = \{c \in \mathbb{R}^d,\ c \geq 0 :\ (c,x) \leq (c,y),\ \forall y \in \Delta_n\}.$$

Объектом исследования является граф конусного разбиения. Его вершины – это различные конусы разбиения, а два конуса являются смежными тогда и только тогда, когда они имеют общую гиперграань. Обозначим через $\omega(K_X)$ кликовое число графа конусного разбиения K пространства $\mathbb{R}^d$ по множеству X. Известно [1,2], что трудоемкость алгоритмов прямого типа, использующих линейные сравнения, по поиску максимума линейной целевой функции (c,x) на множестве X, не может быть меньше значения $\omega(K_X)$. Таким образом, $\omega(K_X)$ является некоторой условной характеристикой сложности задач комбинаторной оптимизации.

Теорема. Кликовые числа графов конусных разбиений для задач о минимальном разрезе $\omega(K^+_{min})$ и максимальном разрезе $\omega(K^+_{max})$ с неотрицательными весами ребер удовлетворяют следующим условиям для любого $n \geq 2$:

$$\omega(K^+_{min}) = 2n - 3,$$
$$\omega(K^+_{max}) \geq C_{n-1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \geq \tfrac{2^{n-1}}{\sqrt{2n}}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ (договор 11.G34.31.0053).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Бондаренко, А. Н. Максименко. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. — М.: ЛКИ, 2008. — 184 с.

2. M. Ju. Moshkov. Time complexity of decision trees. In Transactions on Rough Sets III, James F. Peters and Andrzej Skowron (Eds.). Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 244–459, 2005.

Бондаренко Владимир Александрович, Николаев Андрей Валерьевич,
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия,
e-mail: bond@bond.edu.yar.ru, werdan.nik@gmail.com

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ УНИМОДУЛЯРНОГО КОНУСА С Z^n

С.И. Веселов

Пусть U — унимодулярная матрица полного столбцового ранга, т.е. $U \in Z^{m\times n}$, $rank\ U = n$ и базисные миноры матрицы U равны ± 1. Назовем унимодулярным конус $K = \{x : \ Ux \geq 0\}$. Пусть $V = \{v_1, v_2, ..., v_l\}$ множество всех несократимых целочисленных ребер конуса K.

Теорема 1 V — минимальный базис Гильберта конуса K.

Строки матрицы U обозначим $u_1, u_2, ..., u_m$. Множество $J \subseteq \{1, 2, ..., m\}$ назовем нуль-множеством для K, если из условий $x \in K, u_i x = 0\ \forall i \in J$ следует, что $x = 0$. Нуль-множество называем неприводимым, если оно не имеет собственных нуль-подмножеств. Обозначим символом **J** семейство всех неприводимых нуль-множеств данного конуса K.

Теорема 2 Выпуклая оболочка множества $(K \setminus \{0\}) \cap Z^n$ описывается системой

$$u_i x \geq 0\ \forall\ i \in \{1, 2, .., m\}$$

$$\sum_{i\in J} u_i x \geq 1\ \forall\ J \in \mathbf{J}$$

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», госконтракт 14.B37.21.0393.

ЛИТЕРАТУРА

1. Veselov S.I.,Chirkov A.J. Integer program with bimodular matrix// Discrete Optimization. 2009. V.6. №2. P.220–222.

2. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 2. М.: Мир, 1991.

3. Шевченко В.Н. Качественные вопросы целочисленного программирования. М.: Физматлит, 1995.

Веселов Сергей Иванович,
Нижегородский госуниверситет, Нижний Новгород, Россия, e-mail:veselov@vmk.unn.ru

SOME MAIN PROPERTIES OF THE CONES OF GENERALIZED SUPPORT VECTORS

Z. R. Gabidullina

The purpose of this thesis is to represent our next results regarding to linear separation problem (see [1–3]).

In [3], for a nonempty set Ψ from the Euclidean space $\mathbb{R}^n$, there have been presented the following cones:

$$W_\Psi := \big\{w \in \mathbb{R}^n : \inf_{x\in\Psi} \langle w, x\rangle \geq 0\big\},\ V_\Psi := \big\{v \in \mathbb{R}^n : \inf_{x\in\Psi} \langle v, x\rangle > 0\big\},$$

$$Q_\Psi := \big\{q \in \mathbb{R}^n : \ \langle q, x\rangle > 0,\ \forall x \in \Psi\big\},\ \Omega_\Psi := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x\rangle \geq \|y\|^2\ \forall x \in \Psi\}.$$

The notation $W_\Psi\backslash\{\mathbf{0}\}$ corresponds to a cone of generalized support vectors of the set Ψ. V_Ψ and Q_Ψ denote the cones of generalized strong and strict support vectors of the set Ψ, accordingly.

Our notation is standard: let $cl(\cdot)$, $co(\cdot)$ stand for closure and convex hull of the set Ψ, respectively.

The cones of generalized support vectors have the following principal properties:

$$V_\Psi \subseteq Q_\Psi \subseteq W_\Psi,\ W_\Psi = W_{cl(\Psi)} = W_{co(cl(\Psi))},\ V_\Psi = V_{co(\Psi)} = V_{cl(co(\Psi))}\,,$$

$$V_\Psi = V_{cl(\Psi)} = V_{co(cl(\Psi))},\ W_\Psi = W_{co(\Psi)} = W_{cl(co(\Psi))},\ Q_\Psi = Q_{co(\Psi)}\,.$$

$$\Omega_\Psi = \Omega_{co(\Psi)} = \Omega_{cl(co(\Psi))},\ \Omega_\Psi = \Omega_{cl(\Psi)} = \Omega_{co(cl(\Psi))},\ V_\Psi = E(\Omega_\Psi)\backslash\{\mathbf{0}\},$$

where $E(\Omega_\Psi) := \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda y, \lambda \geq 0,\ y \in \Omega_\Psi\}$.

By definition, W_Ψ is a convex and closed set, the set Q_Ψ is convex and open. There was proved in [3] that the cone V_Ψ is convex and open. The set Ω_Ψ is convex and closed. If there exists at least one point $\bar{x} \in \Psi$ such that $\|\bar{x}\| < +\infty$, then Ω_Ψ is a convex and compact set. In addition, if $\Psi \subset \mathbb{R}^n$ is a convex and closed set, then Ω_Ψ is a convex and compact set.

The important, for the aims of theoretical and practical applications, immediate question is what conditions provide the emptiness or non-emptiness of the cones of generalized support vectors: V_Ψ, $W_\Psi\backslash\{\mathbf{0}\}$, $\Omega_\Psi\backslash\{\mathbf{0}\}$, and Q_Ψ.

REFERENCES

1. Gabidullina Z.R. A Theorem on Separability of a Convex Polyhedron from Zero point of the Space and Its Applications in Optimization // Izvestiya VUZ. Matematika. 2006. N 12. P. 21–26. (Engl.trasl. Russian Mathematics (Iz.VUZ). 2006. V. 50, N 12. P. 18–23.

2. Gabidullina Z.R. A Theorem on Strict Separability of Convex Polyhedra and Its Applications in Optimization // Journal of Optimization Theory and Applications. 2011. V. 148, N 3. P. 550–570.

3. Gabidullina Z.R. A Linear Separability Criterion for Sets of Euclidean Space // Journal of Optimization Theory and Applications. 2012. DOI 10.1007/s10957-012-0155-x

Gabidullina Zulfiya Ravilevna, Volga Region Federal University, Kazan, Russia,
e-mail: zgabid@mail.ru

МИНИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА РАСТРОВЫХ ТОЧЕК ДЛЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ НАБОРОВ

В.М. Картак, А.В. Рипатти

В работе рассматривается задача, которая формулируется следующим образом. Имеется набор $(L, \mathbf{l}) \in R_+ \times R_+^m$, где $0 < l_1 \le l_2 \le \cdots \le l_m \le L$. Определим растровое множество точек следующем образом

$$R(L, \mathbf{l}) = \left\{ \sum_{j=1}^{m} l_j a_j \ : \ \sum_{j=1}^{m} l_j a_j \le L, \ \mathbf{a} \ \in \{0,1\}^m \right\}.$$

Будем говорить, что два набора $(L, \mathbf{l})$ и $(\tilde{L}, \tilde{\mathbf{l}})$ эквивалентны если:

$$P(L, \mathbf{l}) = P(\tilde{L}, \tilde{\mathbf{l}}),$$

где

$$P(L, \mathbf{l}) = \left\{ \mathbf{a} \ : \ \sum_{j=1}^{m} l_j a_j \le L, \ \mathbf{a} \in \{0,1\}^m \right\}.$$

Требуется найти эквивалентный набор $(L^*, \mathbf{l}^*)$ для которого число растровых точек $|R(L^*, \mathbf{l}^*)|$ минимально.

Эта задача возникает при представлении различных задач дискретной оптимизации как задач линейного целочисленного программирования с числом переменных зависящих от числа растровых точек (Arc-flow models [1,2,3]).

В работе предлагается метод сведения этой проблемы к задачи линейного программирования. Рассматриваются различные способы построения множества $P(L, \mathbf{l})$ и выбора целевой функции. Предложен метод оценки значения $|R(L^*, \mathbf{l}^*)|$ снизу. Приведены результаты численного эксперимента.

Работа поддержана грантом РФФИ 12-07-00631-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Clautiaux F., Jouglet A., Carlier J., Moukrim A. A new constraint programming approach for the orthogonal packing problem // Computers and Operations Research. 2008 г. Т. 34, № 8, С. 2223–2250.

2. Lancia, G., Rinaldi, F., Serafini, P.: A time-indexed lp-based approach for min-sum job-shop problems. // Annals of Operations Research 186, 175—198 (2011).

3. Pessoa, A., Uchoa, E., de Aragao, M., Rodrigues, R.: Exact algorithm over an arctime-indexed formulation for parallel machine scheduling problems. // Mathematical Programming Computation 2, 259-–290 (2010).

Картак Вадим Михайлович, УГАТУ, Уфа, Россия, e-mail:kvmail@mail.ru
Рипатти Артем Валерьевич, УГАТУ, Уфа, Россия, e-mail:ripatti@inbox.ru

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ УПАКОВКЕ МНОЖЕСТВА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМОВ ПЕРЕБОРА L-КЛАССОВ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

А.А. Колоколов, М.Ф. Корбут

Задача об упаковке множества занимает важное место в области дискретной оптимизации и имеет широкий круг приложений в экономике, управлении, теории информации и др. Приведем постановку рассматриваемой задачи. Пусть дано множество $I = \{1, ..., m\}$ и семейство его подмножеств $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_n\}$. Упаковкой множества I называется совокупность попарно непересекающихся подмножеств из $\mathcal{S}$. Требуется найти упаковку множества I максимальной мощности. Если известны веса подмножеств $c_j > 0$, $j = \overline{1,n}$, то задача состоит в отыскании упаковки множества наибольшего веса.

Модель целочисленного линейного программирования для этой задачи имеет вид:

$$\max\{cx : Ax \le e, x \in \{0,1\}^n\}.$$

Здесь $A = \|a_{ij}\|_{m\times n}$, $a_{ij} \in \{0,1\}$, причем $a_{ij} = 1$, если $i \in S_j$, иначе $a_{ij} = 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$; переменные задачи: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, где

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{если } S_j \text{ включается в упаковку} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}, \ j = \overline{1,n}.$$

В данной работе продолжен анализ алгоритма LCE (см. [1]) для решения задачи об упаковке множества, в частности с матрицей ограничений блочной структуры. Построены гибридные алгоритмы перебора L-классов, в которых каждая вспомогательная лексикографическая задача линейного программирования (ЛП) решается с использованием метода последовательной оптимизации. Это в свою очередь позволяет применять пакет программ IBM ILOG CPLEX для поиска решений задач ЛП.

Создан комплекс программ с реализацией предложенных алгоритмов и возможностью использования упомянутого пакета программ.

Проведены экспериментальные исследования рассматриваемых алгоритмов на задачах со случайными исходными данными. Выделены группы тестовых примеров, для которых разработанный гибридный алгоритм оказался предпочтительнее чем CPLEX по времени вычислений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №13-01-00862.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Колоколов, Т.Г. Орловская, М.Ф. Рыбалка Исследование алгоритмов целочисленного программирования с использованием регулярных разбиений и унимодулярных преобразований // Автоматика и телемеханика. 2012. № 2. С. 178 – 190.

Колоколов Александр Александрович, Корбут Мария Федоровна
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омск, Россия.
E-mail: kolo@ofim.oscsbras.ru, maria@korbut.pro

РОЛЬ БУЛЕВА КВАДРАТИЧНОГО МНОГОГРАННИКА В КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

А.Н. Максименко

Булев квадратичный многогранник $BQP(n)$ определяется как выпуклая оболочка

$$BQP(n) = conv\Big\{x = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \mid x_{ij} = x_{ii}x_{jj},\ x_{ij} \in \{0,1\}, 1 \le i \le j \le n\Big\}.$$

Семейство всех таких многогранников обозначаем $BQP = \{BQP_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Традиционно, это семейство многогранников ассоциируется с задачей булева квадратичного программирования. Похожим образом определяются семейства многогранников таких NP-полных задач, как 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ, РЮКЗАК, КОММИВОЯЖЕР, РАСКРАСКА ГРАФА, НЕЗАВИСИМОЕ МНОЖЕСТВО, 3-СОЧЕТАНИЕ, ПОКРЫТИЕ МНОЖЕСТВА и многих других.

Рассмотрим следующий способ сравнения таких семейств многогранников.

Определение. Будем говорить, что семейство многогранников P *аффинно сводится* к семейству многогранников Q, если для каждого многогранника $p \in P$ найдется $q \in Q$ такой, что p аффинно эквивалентен некоторой грани многогранника q, или самому q, причем $\dim q = O((\dim p)^k)$ для некоторого фиксированного k.

Такой способ сравнения семейств многогранников оказывается полезен при оценке их комбинаторных характеристик. В частности, преположим, что P аффинно сводится к Q и многогранники из P обладают какими-нибудь из следующих свойств: суперполиномиальное (относительно размерности многогранника) число вершин и фасет, суперполиномиальное кликовое число графа многогранника, суперполиномиальная сложность расширенного описания, NP-полнота проверки вершин на несмежность. Тогда Q наследует от P эти свойства.

Теорема. *Семейство BQP аффинно сводится к семействам многогранников таких задач, как 3-ВЫПОЛНИМОСТЬ, РЮКЗАК, КОММИВОЯЖЕР, РАСКРАСКА ГРАФА, НЕЗАВИСИМОЕ МНОЖЕСТВО, 3-СОЧЕТАНИЕ, ПОКРЫТИЕ МНОЖЕСТВА и некоторых других. Причем аффинное сведе́ние в обратную сторону невозможно.*

Хорошо известно [1], что многогранники семейства BQP обладают суперполиномиальными числами вершин и фасет и суперполиномиальными кликовыми числами графа. Недавно группе исследователей [2] удалось доказать, что сложность расширенного описания этих многогранников тоже суперполиномиальна. Тогда из сформулированной выше теоремы следует, что перечисленные в ней семейства тоже обладают этими свойствами.

Работа поддержана грантом Правительства РФ, проект 11.G34.31.0053.

ЛИТЕРАТУРА

1. М.М. Деза, М. Лоран. Геометрия разрезов и метрик. М.: МЦНМО, 2001. 736 с.

2. S. Fiorini, S. Massar, S. Pokutta, H.R. Tiwary, R. de Wolf. Linear vs. Semidefinite Extended Formulations: Exponential Separation and Strong Lower Bounds // arXiv: 1111.0837, 2011.

Максименко Александр Николаевич, ЯрГУ, Ярославль, maximenko.a.n@gmail.com

РЕЛАКСАЦИИ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СХЕМЕ ЛОКАЛЬНОГО ЭЛИМИНАЦИОННОГО АЛГОРИТМА

А.В. Свириденко, О.А. Щербина

Основным недостатком локального элиминационного алгоритма (ЛЭА) является его большая вычислительная сложность при решении разреженных задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП) с большими размерами сепараторов. Для снижения объема перебора предлагается ввести в вычислительную схему ЛЭА релаксации, как это с успехом делается в алгоритмах ветвей и границ. При решении задачи ДО можно использовать вместо значений целевой функции значения целевых функций их релаксированных задач (например, линейной релаксации, когда вместо задачи ДО рассматривается соответствующая задача линейного программирования (ЛП); ранцевой релаксации, в которой вместо ограничений исходной задачи рассматривается суррогатное ограничение, являющееся линейной комбинацией исходных ограничений и т.д.). Решая подзадачу Z_r для блока r квазиблочной задачи ЦЛП $\max\{cx\,|Ax \le b,\ x \in \{0,1\}^n\}$: $X_{\sigma_r}\left(\overline{X}_{S_{r,r+1}}\right) = \max\limits_{\overline{X}_{S_{r-1,r}}} \left\{C_{S_r}X_{S_r} + C_{S_{r-1,r}}\overline{X}_{S_{r-1,r}} + \right.$ $\left. + C_{\sigma_{r-1}}X_{\sigma_{r-1}}\left(\overline{X}_{S_{r-1,r}}\right)\right\}$ при ограничениях $A_{S_r}X_{S_r} \le b_r - A_{S_{r-1,r}\cup S_{r,r+1}}\overline{X_{S_{r-1,r}\cup S_{r,r+1}}}$, $x_j \in \{0,1\}$, $j \in S_r$ с помощью ЛЭА, мы должны для каждого фиксированного набора $X_{S_{r,r+1}}$ выполнить перебор всех значений переменных из $X_{S_{r-1,r}}$ и, тем самым решить $2^{\left|X_{S_{r-1,r}}\right|}$ задач ЦЛП. Возможно использовать релаксации с целью снижения объема перебора по $X_{S_{r-1,r}}$. На каждом шаге решения задачи Z_r запоминается текущий рекорд $X^*_{\sigma_r}$ и к релаксированной задаче (РЗ) Z^R_r применяем три теста F1 (анализ РЗ Z^R_r показал, что она не имеет допустимых решений), F2 (анализ РЗ Z^R_r показал, что она не имеет допустимых решений, лучших, чем текущий рекорд) и F3 (анализ РЗ Z^R_r позволил найти оптимальное решение исходной задачи).

Эксперимент был проведен на базе решателя LES (https://github.com/d2rk/les), реализующего ЛЭА, на машине с процессором Intel Core i3 M 390 @ 2.67 ГГц. Все задачи были искусственно сгенерированы и имели квазиблочную структуру с варьирующимся размером сепаратора, не превышающим 11 переменных. В качестве мастер-решателя использовался SCIP (http://scip.zib.de/), являющийся на данный момент одним из самых быстрых некоммерческих решателей для задач частично-целочисленного ЛП. В качестве решателей для релаксаций использовались решатель непрерывной задачи о ранце и решатель для задач ЛП Clp (https://projects.coin-or.org/Clp). Важно отметить, что в эксперименте был отключен пропроцессинг для всех используемых решателей. Все полученные результаты и материалы эксперимента находятся в открытом доступе (https://github.com/d2rk/benchmarking_les_scip). Предварительный эксперимент показал существенное снижение времени счета при использовании релаксаций.

Свириденко Александр Васильевич, Щербина Олег Александрович Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, г.Симферополь,
oleks.sviridenko@gmail.com, oshcherbina@gmail.com,

О РЕЛАКСАЦИОННОМ МНОГОГРАННИКЕ ДЛЯ КВАДРАТИЧНОГО БУЛЕВА ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А.В. Селиверстов

Согласно [1], те $\{0,1\}$-точки, где квадратичный многочлен от n переменных достигает минимума, соответствуют вершинам многогранника BQP_n в $\mathrm{R}^n \oplus \mathrm{R}^N$, где $N = \frac{n(n-1)}{2}$. Релаксационный многогранник L_n задан системой $(2n^2 - 2n)$ неравенств

$$\begin{aligned} x_i + x_j - x_{ij} &\leq 1 \\ -x_i + x_{ij} &\leq 0 \\ -x_j + x_{ij} &\leq 0 \\ -x_{ij} &\leq 0 \end{aligned}$$

где x_i — координаты R^n, x_{ij} при $i < j$ — координаты R^N. Координаты вершин многогранника L_n принадлежат множеству $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, а вершины многогранника BQP_n — это все целые вершины многогранника L_n. Число целых вершин у L_n равно 2^n. Общее число $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$-точек в многограннике L_n равно

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} 2^{n-k+\frac{k(k-1)}{2}}$$

Из них $2^{n-1}(2^n - 1)$ точек являются серединами отрезков, соединяющих целые вершины, следовательно, не являются вершинами L_n. Вычисления программой lrs 4.2c (http://cgm.cs.mcgill.ca) показали, что при $n < 7$ остальные $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$-точки в L_n являются его вершинами, а при $n < 8$ число рёбер в L_n при целой вершине $\mathbf{0}$ равно числу связных подграфов полного графа K_n с n вершинами [2]. Отметим, что группа симметрий n-мерного куба вкладывается в группу автоморфизмов решётки граней L_n и транзитивно действует на множестве целых вершин L_n. Рёбра, соединяющие целые и нецелые вершины, дают информацию о фасетах BQP_n.

Утверждение 1. Существует взаимно однозначное соответствие между связными подграфами полного графа K_n и рёбрами многогранника L_n, содержащими начало координат $\mathbf{0}$.

Утверждение 2. Даны три попарно различные $\{0, \frac{1}{2}\}$-точки $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{v}''$ многогранника L_n. Если вершина $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}''$, то $\mathbf{v}$ не смежна с $\mathbf{0}$.

Утверждение 3. Любые две целые вершины многогранника L_n смежны.

Работа частично поддержана грантом Минобрнауки России 8481 от 07.09.2012.

ЛИТЕРАТУРА

1. Padberg M. The boolean quadric polytope: some characteristics, facets and relatives // Mathematical programming. — 1989. — V. 45, № 1–3. — P. 139–172.

2. Divianszky P. Sequence A167939 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. 2009. Published electronically at http://oeis.org

Селиверстов Александр Владиславович,
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва,
e-mail: slvstv@iitp.ru

НЕКОТОРЫЕ ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

Р. Ю. Симанчев, Б. А. Толстуха

Рассматривается задача обслуживания n требований одним прибором [1]. Каждое требование обслуживается p единиц времени, разрешены прерывания. Для каждого требования i определены момент времени r_i, до которого требование не может поступить в обработку, и положительный вес ω_i. Необходимо минимизировать суммарное взвешенное время завершения обслуживания всех требований. Пусть V — множество требований, $|V| = n$; $D = \{1, \ldots, d\}$ — множество моментов времени (здесь d — некоторый директивный срок, достаточный для обслуживания всех требований). Определим переменные:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если, } i \in V, \text{ обрабатывается в момент } k \in D, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если в момент } k \text{ обслуживание требования } i \text{ еще не завершено,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В этих переменных ЦЛП-модель рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\sum_{i \in V} x_{ik} \le 1,\ k = 1, \ldots, d; \quad \sum_{k=1}^{d} x_{ik} = p,\ i \in V \tag{1}$$

$$\frac{1}{p} \sum_{l=k+1}^{d} x_{il} \le y_{ik} \le \sum_{l=k+1}^{d} x_{il},\ i \in V,\ k = 1, \ldots, d-1 \tag{2}$$

$$x_{ik} \ge 0, i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, d \tag{3}$$

$$x_{ik} = 0, i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, r_i \tag{4}$$

$$y_{ik} \le 1, i \in V,\ k = 1, \ldots, d \tag{5}$$

с целевой функцией $g(x, y) = \sum_{i \in V} \omega_i + \sum_{i \in V} \omega_i (\sum_{k=1}^{d-1} y_{ik}) \to \min$.

В работе описаны свойства вершин полиэдра (1) – (5) и оптимальных решений рассматриваемой задачи. Эти результаты стали основой для разработки алгоритмов решения рассматриваемой задачи. [2]

ЛИТЕРАТУРА

1. Peter Brucker. Scheduling Algorithms. Fifth edition // Germany, 2006.
2. Б. А. Толстуха, И. В. Уразова, Н. Ю. Шерешик. Класс опорных неравенств для задачи $1|pmnt; p_i = p; r_i| \sum \omega_i C_i$ // Сборник трудов международной конференции "Дискретная оптимизация и исследование операций". Новосибирск, 2013 (наст. сборник).

Симанчев Руслан Юрьевич, КНИОРП ОНЦ СО РАН, Омск.
E-mail: osiman@rambler.ru
Толстуха Борис Александрович, ОмГУ им. Ф.М.Достоевского, Омск.
E-mail: boris.tolstukha@gmail.com

КЛАСС ОПОРНЫХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ ЗАДАЧИ $1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum \omega_i C_i$

Б. А. Толстуха, И. В. Уразова, Н. Ю. Шерешик

Рассматривается задача обслуживания различных требований одним прибором [1]. Задано множество $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ требований. Каждое задание $i \in V$ имеет положительный вес ω_i и время ожидания r_i, в течение которого оно недоступно для обслуживания. В работе прибора допускаются прерывания. Длительности обслуживания требований равны между собой $p_i = p,\ i = 1, 2, \ldots, n$. Требуется минимизировать суммарное взвешенное время завершения обслуживания всех требований. Определим величину d – директивный срок окончания работы прибора. В силу возможности декомпозиции рассматриваемой задачи [2], будем полагать $d = pn$. Обозначим множество $D = \{1, \ldots, d\}$.

Введем переменные:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если, } i \in V, \text{ обрабатывается в момент } k \in D, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если в момент } k \text{ обслуживание требования } i \text{ еще не завершено,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Булев вектор (x, y), определенный таким образом, будем называть расписанием. Выпуклую оболочку всех расписаний обозначим $\mathcal{P}$. В [3] описан полиэдр $\mathcal{M}$, являющийся полиэдральной релаксацией $\mathcal{P}$. Кроме того, в [3] было доказано, что точка (x, y) является расписанием тогда и только тогда, когда она целочисленная точка из $\mathcal{M}$.

В работе доказано, что неравенства $\sum\limits_{i=1}^{n} y_{ik} \geq n - [\frac{k}{p}]$, $k = 1, \ldots, d-1$, являются опорными к многограннику $\mathcal{P}$.

Показано, что данные неравенства могут служить отсечениями. Проведен вычислительный эксперимент, подтверждающий перспективность использования этих неравенств в алгоритмах отсечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Peter Brucker, Sigrid Knust, "Complexity Results for Scheduling Problems¨ *URL: www//mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class.*

2. Н. Ю. Шерешик. Декомпозиционный подход в задаче обслуживания различных требований одним прибором // Материалы V Всероссийской конференции "Проблемы оптимизации и экономические приложения". Омск, 2012. С. 168.

3. Р. Ю. Симанчев, Б. А. Толстуха. Некоторые полиэдральные свойства одной задачи теории расписаний // Международная конференция "Дискретная оптимизация и исследование операций": Материалы конференции (см. данный выпуск).

Толстуха Борис Александрович, Уразова Инна Владимировна,
Омский Государственный Университет им. Ф.М.Достоевского, Омск.
E-mail: boris.tolstukha@gmail.com, urazovainn@mail.ru
Шерешик Николай Юрьевич, Омский филиал Института математики им С.Л.Соболева СО РАН, Омск. E-mail: m-m_pikm@mail.ru

НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ВЕСОВ В КОЛЛЕКТИВЕ АЛГОРИТМОВ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА

В.Б. Бериков

В задаче кластерного анализа требуется разбить N объектов, информация о которых имеет форму таблицы данных, на некоторое число групп в соответствии с заданным критерием однородности. Для решения данной задачи существует большое число методов (см., например, обзор [1]), отличающихся разными способами понимания однородности, алгоритмами перебора вариантов разбиений и различными ограничениями, позволяющими учитывать специфику конкретной задачи. Поскольку не всегда ясно, какой из методов является наилучшим, целесообразно применять коллектив (ансамбль) алгоритмов $\mu_1, \ldots, \mu_M$, каждый из которых используется для получения L_m вариантов разбиения, $m = 1, \ldots, M$ (см. обзор коллективного подхода в [2]). При этом качество каждого варианта оценивается с помощью некоторого индекса качества [3] $\gamma_{l,m} \geq 0$, $l = 1, \ldots, L_m$ (считаем, что для $\forall m$, $\sum_l \gamma_{l,m} = 1$). Затем по имеющемуся множеству разбиений строится консенсусное разбиение.

В докладе предлагается метод построения коллективного решения, основанный на нахождении матрицы попарных различий между объектами. Элементы матрицы равны: $h(i,j) = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m(i,j) \sum_{l=1}^{L_m} \gamma_{l,m} h_{l,m}(i,j)$, где $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ – номера объектов ($i \neq j$), $\alpha_m(i,j)$ – некоторые неотрицательные веса ($\sum_m \alpha_m(i,j) = 1$), $h_{l,m}(i,j) = 0$, если пара (i,j) объединена алгоритмом μ_m в l-м варианте разбиения в один кластер, и 1 — если в разные кластеры.

Для нахождения оптимальных весов, во-первых, необходимо разработать и обосновать некоторый критерий, а во-вторых, предложить эффективную процедуру их выбора. В докладе обсуждается критерий, основанный на минимизации верхней оценки вероятности ошибки классификации, найденной в рамках модели ансамблевого кластерного анализа с латентными классами [4]. Указанная (непосредственно ненаблюдаемая) ошибка оценивается по наблюдаемым характеристикам ансамбля. Разработан соответствующий алгоритм; в докладе приводятся примеры его работы на тестовых и реальных данных.

Работа поддержана грантом РФФИ 11-07-00346а.

ЛИТЕРАТУРА

1. A.K. Jain. Data clustering: 50 years beyond K-means // Pattern Recognition Letters. 2010. V. 31(8). P. 651-666.

2. J. Ghosh, A. Acharya. Cluster ensembles // Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery. 2011. V.1. P. 305-315.

3. O. Arbelaitz, I. Gurrutxaga, J. Muguerza, J. Perez, I. Perona. An extensive comparative study of cluster validity indices // Pattern Recognition. 2013. V. 46(1). P. 243-256.

4. V. Berikov. A latent variable pairwise classification model of a clustering ensemble // Lecture Notes on Computer Science. 2011. V.6713. P. 279-288.

Бериков Владимир Борисович, Институт математики СО РАН, Новосибирск, Россия, e-mail:berikov@math.nsc.ru

2-ПРИБЛИЖЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ПОИСКА СЕМЕЙСТВА НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПОДМНОЖЕСТВ ВЕКТОРОВ

А.Е. Галашов, А.В. Кельманов

Рассматривается следующее обобщение NP-трудной [1] в сильном смысле задачи.

Задача FDVS (Family of Disjoint Vector Subsets). *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$ и натуральные числа M_j, $j = 1, \ldots, J$. *Найти*: непересекающиеся подмножества $\mathcal{C}_j \subseteq \mathcal{Y}$, $j = 1, \ldots, J$, векторов такие, что

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{y \in \mathcal{C}_j} \|y - \overline{y}(\mathcal{C}_j)\|^2 \to \min,$$

где $\overline{y}(\mathcal{C}_j) = \frac{1}{|\mathcal{C}_j|} \sum_{y \in \mathcal{C}_j} y$, при ограничениях $|\mathcal{C}_j| = M_j$, $j = 1, \ldots, J$, на мощности искомых подмножеств.

Эта слабо изученная в алгоритмическом плане задача индуцируется, в частности, одной из актуальных проблем помехоустойчивого анализа данных и распознавания образов [1]. В настоящей работе обоснован 2-приближенный алгоритм, имеющий временную сложность $O(N^2(q+N^{J+1}))$. При фиксированном J алгоритм полиномиален. Ранее лишь для простейшего, но труднорешаемого случая (когда $J = 1$) этой задачи были построены алгоритмы с гарантированными оценками точности.

Суть предлагаемого алгоритма состоит в следующем. Для каждого из векторных подмножеств $\{b_1, \ldots, b_J\} \subseteq \mathcal{Y}$ решается задача назначения (в открытой форме) N работ M исполнителям, где $M = M_1 + \ldots + M_J \leq N$. Исполнители разбиты на J групп, j-я группа состоит из M_j исполнителей, имеющих идентичные показатели стоимости выполнения каждой из N работ; j-ой группе соответствует вектор b_j и набор из M_j одинаковых строк матрицы; элементы этих строк — стоимости — квадраты евклидовых расстояний от вектора b_j до каждого вектора множества $\mathcal{Y}$. В семействе из $O(N^J)$ найденных решений задачи о назначениях выбирается наилучшее в смысле минимума суммарной стоимости. В j-ое искомое подмножество включаются векторы, которым соответствуют работы, назначенные алгоритмом j-ой группе исполнителей.

Работа поддержана грантами РФФИ 12-01-00090, 13-07-00070, 12-01-33028-мол-а-вед, а также грантами целевой программы СО РАН (интеграционные проекты 7Б и 21А).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельманов А. В., Пяткин А. В. NP-полнота некоторых задач выбора подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т. 17, № 5. С. 37–45.

Галашов Александр Евгеньевич,
НГУ, Новосибирск, Россия, e-mail: galashov.alexandr@gmail.com
Кельманов Александр Васильевич,
ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия, e-mail: kelm@math.nsc.ru

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СУММИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ДВУХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

А.В. Кельманов, Л.В. Михайлова

Рассматривается следующая экстремальная

Задача SES (Sum of Elements from two Sequences). *Дано*: числовые последовательности $g(n)$ и $f(n)$, $n \in \mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$, натуральные числа J, K, $T_{\min}$ и $T_{\max}$. *Найти*: непересекающиеся наборы $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{N}$ и $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{N}$ номеров элементов этих последовательностей такие, что $|\mathcal{K}| = K$, $|\mathcal{J}| = J$ и

$$\sum_{k \in \mathcal{K}} g(k) + \sum_{j \in \mathcal{J}} f(j) \to \max,$$

а элементы объединенного набора $\mathcal{K} \cup \mathcal{J} = \{n_1, \ldots, n_{K+J}\}$ удовлетворяют ограничениям

$$1 \leq T_{\min} \leq n_m - n_{m-1} \leq T_{\max} \leq N - 1, \quad m = 2, \ldots, K + J.$$

Эта задача актуальна, в частности, при решении ряда проблем помехоустойчивого анализа и распознавания одномерных и многомерных временных рядов (сигналов). Она возникает, например, в ситуации, когда наблюдаемый зашумленный сигнал включает перемешанные в произвольном порядке информационно значимые фрагменты, совпадающие с элементами из двух заданных алфавитов векторов, причем известно, что интервал между двумя такими фрагментами ограничен сверху и снизу заданными константами. При этом требуется обнаружить и идентифицировать эти фрагменты.

В [1] обоснован эффективный алгоритм, который реализует схему динамического программирования и обеспечивает точное решение задачи за время $O(N^5)$. В настоящей работе предложен новый более быстрый полиномиальный алгоритм, реализующий другую схему динамического программирования и гарантирующий оптимальность решения за время $O(N^4)$.

Работа поддержана грантами РФФИ 11-01-00696, 12-01-00090, 13-07-00070, 12-01-33028-мол-а-вед, а также грантами целевой программы СО РАН (интеграционные проекты 7Б и 21А).

ЛИТЕРАТУРА

1. Долгушев А.В., Кельманов А.В. Алгоритм помехоустойчивого распознавания последовательности, включающей повторяющийся вектор, при наличии посторонних векторов-вставок из алфавита // Математические методы распознавания образов: 14-я Всероссийская конференция (ММРО-14): Сборник докладов. М.: МАКС Пресс, 2009. С. 225–228.

Кельманов Александр Васильевич, Михайлова Людмила Викторовна,
ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия, e-mail: kelm@math.nsc.ru, mikh@math.nsc.ru

FPTAS ДЛЯ ОДНОЙ NP-ТРУДНОЙ ЗАДАЧИ ПОИСКА ПОДМНОЖЕСТВА ВЕКТОРОВ

А.В. Кельманов, С.М. Романченко

Рассматривается следующая NP-трудная [1] в сильном смысле

Задача VS–2 (Vector Subset 2). *Дано*: множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$ и натуральное число $M > 1$. *Найти*: подмножество $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Y}$ мощности M такое, что

$$\sum_{y \in \mathcal{C}} \|y - \overline{y}(\mathcal{C})\|^2 \to \min,$$

где $\overline{y}(\mathcal{C}) = \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum_{y \in \mathcal{C}} y$.

В работе [2] предложен 2-приближённый полиномиальный алгоритм решения задачи, временная сложность которого есть величина $O(qN^2)$. Точный псевдополиномиальный алгоритм для случая, когда координаты векторов имеют целочисленные значения, а размерность q пространства фиксирована, построен в [3]. Временная сложность алгоритма есть величина $O(qN(2MB+1)^q)$, где B — максимальное абсолютное значение координаты векторов входного множества. В [4] предложена полиномиальная приближённая схема (PTAS) с временной сложностью $O(qN^{2/\varepsilon+1}(9/\varepsilon)^{3/\varepsilon})$, где ε — относительная погрешность алгоритма.

В настоящей работе для случая фиксированной размерности q пространства обоснована полностью полиномиальная приближённая схема (FPTAS), гарантирующая ε–приближённое решение задачи за время $O(qN^2(M/\varepsilon)^q)$. В основе схемы лежит построение специальной сетки точек пространства. Для каждой точки этой сетки строится допустимое решение задачи. Результатом работы алгоритма объявляется допустимое решение с наименьшим значением целевой функции. Точность приближения определяется шагом сетки.

Работа поддержана грантами РФФИ 12-01-00090, 13-07-00070, 12-01-33028-мол-а-вед, а также грантами целевой программы СО РАН (интеграционные проекты 7Б и 21А).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельманов А.В., Пяткин А.В. NP-полнота некоторых задач выбора подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т.17, № 5. С. 37–45.
2. Кельманов А.В., Романченко С.М. Приближённый алгоритм для решения одной задачи поиска подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т.18, № 4. С. 61–69.
3. Кельманов А.В., Романченко С.М. Псевдополиномиальные алгоритмы для некоторых труднорешаемых задач поиска подмножества векторов и кластерного анализа // Автоматика и телемеханика. 2012. № 2, С. 156–162.
4. Шенмайер В.В. Аппроксимационная схема для одной задачи поиска подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Т.19, № 2. С. 92–100.

Кельманов Александр Васильевич, Романченко Семён Михайлович,
ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия, e-mail: kelm@math.nsc.ru; rsm@math.nsc.ru

2-ПРИБЛИЖЕННЫЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ РАЗБИЕНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

А.В. Кельманов, С.А. Хамидуллин

Рассматривается следующая NP-трудная [1] в сильном смысле

Задача 1-MSSCS-F. *Дано*: последовательность $\mathcal{Y} = (y_1, \ldots, y_N)$ векторов из $\mathbb{R}^q$, натуральные числа $T_{\min}$, $T_{\max}$ и $M > 1$. *Найти*: подмножество $\mathcal{M} = \{n_1, \ldots, n_M\} \subseteq \mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$ номеров элементов последовательности $\mathcal{Y}$ такое, что

$$\sum_{j \in \mathcal{M}} \|y_j - \overline{y}(\mathcal{M})\|^2 + \sum_{i \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}} \|y_i\|^2 \to \min,$$

где $\overline{y}(\mathcal{M}) = \frac{1}{|\mathcal{M}|} \sum_{i \in \mathcal{M}} y_i$, при ограничениях

$$1 \leq T_{\min} \leq n_m - n_{m-1} \leq T_{\max} \leq N - 1, \ m = 2, \ldots, M,$$

на элементы искомого подмножества $\mathcal{M}$.

Задача моделирует, в частности, одну из актуальных проблем помехоустойчивого анализа многомерных последовательностей (сигналов) [1]. Содержательная проблема заключается в разбиении таблицы с упорядоченными по времени результатами измерения набора числовых характеристик некоторого объекта на два таких подмножества, что одно из них соответствует активному состоянию этого объекта, а другое — пассивному.

В настоящей работе обоснован приближенный алгоритм решения задачи с асимптотически достижимой оценкой точности 2. Трудоёмкость алгоритма есть величина $O(N^2(M(T_{\max} - T_{\min} + 1) + q))$, где множители M и $(T_{\max} - T_{\min} + 1)$ не превосходят N. Поэтому алгоритм полиномиален, а его временную сложность можно оценить как $O(N^2(N^2 + q))$.

Суть предлагаемого подхода к построению приближенного алгоритма состоит в замене решения исходной труднорешаемой задачи 1-MSSCS-F решением более простой вспомогательной задачи и последующей оценкой точности этой замены. Вспомогательная задача состоит в вычислении условных максимумов специальной функции для каждого вектора входной последовательности и последующим выбором в качестве решения наилучшего из найденных условно-максимальных решений. Для вычисления условных максимумов обоснован точный полиномиальный алгоритм, реализующий схему динамического программирования.

Работа поддержана грантами РФФИ 12-01-00090, 13-07-00070, 12-01-33028-мол-а-вед, а также грантами целевой программы СО РАН (интеграционные проекты 7Б и 21А).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач кластерного анализа векторных последовательностей // Дискретный анализ и исследование операций. 2013. Т. 20, № 2. С. 47–57.

Кельманов Александр Васильевич, Хамидуллин Сергей Асгадуллович,
ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия, e-mail: kelm@math.nsc.ru, kham@math.nsc.ru

РАНДОМИЗИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА

А.В. Кельманов, В.И. Хандеев

Рассматривается следующая NP-трудная [1] в сильном смысле

Задача 1-**MSSC-F**. *Дано:* множество $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_N\}$ векторов из $\mathbb{R}^q$ и натуральное число M. *Найти:* подмножество $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Y}$ такое, что

$$\sum_{y \in \mathcal{C}} \|y - \overline{y}(\mathcal{C})\|^2 + \sum_{y \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{C}} \|y\|^2 \to \min,$$

где $\overline{y}(\mathcal{C}) = \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum\limits_{y \in \mathcal{C}} y$ — центр множества $\mathcal{C}$, при ограничении $|\mathcal{C}| = M$ на мощность искомого подмножества.

В работе [2] предложен 2-приближённый полиномиальный алгоритм решения задачи, временная сложность которого есть величина $O(qN^2)$. В [3] обоснована полиномиальная приближённая схема (PTAS) с временной сложностью $O(qN^{2/\varepsilon+1}(9/\varepsilon)^{3/\varepsilon})$, где ε — относительная погрешность алгоритма.

Основным результатом настоящей работы является рандомизированный алгоритм, который находит $(1+\varepsilon_N)$–приближённое решение задачи с вероятностью $1-\delta_N$, где $\delta_N, \varepsilon_N \to 0$ при $N \to \infty$.

Суть алгоритмического решения состоит в следующем. Из множества $\mathcal{Y}$ случайным образом выбирается мультимножество мощности k. Для каждого из его непустых подмножеств вычисляется центр и формируется набор из M векторов исходного множества, имеющих наибольшие проекции на этот центр. Сформированный набор объявляется претендентом на решение. В качестве окончательного решения выбирается подмножество-претендент, для которого значение целевой функции минимально.

Работа поддержана грантами РФФИ 12-01-00090, 13-07-00070, 12-01-33028-мол-а-вед, а также грантами целевой программы СО РАН (интеграционные проекты 7Б и 21А).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач поиска подмножеств векторов и кластерного анализа. // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 11. С. 2059–2067.

2. Долгушев А.В., Кельманов А.В. Приближённый алгоритм решения одной задачи кластерного анализа // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18, № 2. С. 29–40.

3. Долгушев А.В., Кельманов А.В., Шенмайер В.В. Приближенная полиномиальная схема для одной задачи кластерного анализа // Интеллектуализация обработки информации: 9-я международная конференция. Республика Черногория. Сб. докл. М.: Торус Пресс. 2012. С. 242–244.

Кельманов Александр Васильевич,
ИМ СО РАН, Новосибирск, Россия, e-mail: kelm@math.nsc.ru
Хандеев Владимир Ильич,
НГУ, Новосибирск, Россия, e-mail: vladimir.handeev@gmail.com

СЛОЖНОСТЬ ДИЗЪЮНКТИВНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ С МНОЖЕСТВОМ НУЛЕЙ ОГРАНИЧЕННОГО ДИАМЕТРА

Ю.В. Максимов

В работе рассматриваются булевы функции $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, заданные матрицами своих нулевых точек. Предполагается, что мощность множества нулей булевой функции не велико, и, более того, расстояние между всякой парой точек, на которых она обращается в ноль, ограничено сверху величиной $d = d(n)$.

Вопрос сложности реализации рассматриваемых функций дизъюнктивными нормальными формами (ДНФ) важен при решении классификации, кластерного анализа и фильтрации данных, в которых решение представимо в виде функции от элементарных предикатов, заданных на множестве признаков [1,2]. Особый интерес в приложениях представляют функции, все нулевые точки которых содержаться в малой окрестности булева нуля. В докладе рассмотрены именно такие функции.

В работе получены:

- эффективные методы построения ДНФ указанных функций;
- нижние оценки сложности реализации указанных функций дизъюнктивными нормальными формами;
- оценки качества аппроксимации указанных функций множеством конъюнкций малой мощности и простой структуры: множеством монотонных конъюнкций, множеством конъюнкций Хорна (конъюнкций, каждая из которых содержит не более одного отрицательного литерала), множеством произвольных конъюнкций ограниченного ранга.

Предлагаемые в работе методы, в определенном смысле, опираются на алгоритмы, предложенные в работе [3], и развивают их.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории структурных методов анализа данных в предсказательном моделировании, ФУПМ МФТИ, грант правительства РФ дог. 11 11.G34.31.0073.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.И. Журавлёв. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации. // Проблемы кибернетики. 1978. Т. 33. С. 5–68.

2. M. Bilenko, B. Kamath, R. J. Mooney. Adaptive Blocking: Learning to Scale Up Record Linkage and Clustering. // Proceedings of the 6th IEEE International Conference on Data Mining (ICDM-2006). 2006. P. 87–96. Hong Kong.

3. Максимов Ю.В. Сравнительный анализ сложности булевых функций с малым числом нулей. 607–609. // Доклады Академии Наук. 2012. Т. 447. №6 С. 607 – 609.

Максимов Юрий Владимирович, Московский Физико-Технический Институт (Государственный Университет), Московская область, Долгопрудный, Россия, e-mail: yury.maximov@phystech.edu

ОБ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МАТРИЦАХ ПОЛНОГО РАНГА

С. П. Шарый

Интервалами будем называть замкнутые ограниченные и связные подмножества вещественной оси $\mathbb{R}$. Интервалы и интервальные величины обозначаются в работе буквами жирного шрифта, а неинтервальные (точечные) величины никак специально не выделяются. Подчёркивание и надчёркивание — $\underline{\boldsymbol{a}}$, $\overline{\boldsymbol{a}}$ — обозначают левый и правый концы интервала $\boldsymbol{a} \subset \mathbb{R}$, так что в целом $\boldsymbol{a} = [\underline{\boldsymbol{a}}, \overline{\boldsymbol{a}}] = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \underline{\boldsymbol{a}} \le x \le \overline{\boldsymbol{a}}\}$. Кроме того, обозначаем $\operatorname{mid} \boldsymbol{a} = \frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{a}})$ — середину интервала, $\operatorname{rad} \boldsymbol{a} = \frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{a}} - \underline{\boldsymbol{a}})$ — радиус интервала.

Интервальная матрица — это прямоугольная таблица из интервалов, которую мы обозначаем $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})$, имея в виду, что на пересечении её i-ой строки и j-го столбца стоит элемент $\boldsymbol{a}_{ij}$. К интервальным матрицам операции mid и rad будут применяться поэлементно. Аналогично, поэлементным образом понимаются теоретико-множественные включения и принадлежности.

Как известно, квадратная матрица называется неособенной (невырожденной), если её определитель не равен нулю. Иначе матрица называется особенной (вырожденной). Интервальная квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ называется *неособенной*, если неособенны все точечные матрицы $A \in \boldsymbol{A}$. Интервальная квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ называется *особенной*, если она не является неособенной. Это равносильно тому, что $\boldsymbol{A}$ содержит хотя бы одну особенную точечную матрицу. Ближайшим обобщением неособенных матриц, как точечных, так и интервальных, являются матрицы полного ранга.

Рангом матрицы называется максимальное число её линейно независимых строк или столбцов, либо максимальный из порядков ненулевых миноров этой матрицы. Вещественная $m \times n$-матрица называется *матрицей полного ранга*, если её ранг равен минимальному из чисел m и n (бóльшим он быть не может). Назовем интервальную матрицу *матрицей полного ранга*, если она содержит только точечные матрицы полного ранга. Иначе говорим, что данная матрица имеет *неполный ранг*.

Факт полноранговости матрицы интервальных данных важен, в частности, при решении задачи восстановления зависимостей в случае неточных данных, имеющих интервальную неопределённость. Если интервальная матрица, построенная по данным наблюдений, имеет неполный ранг, то это является свидетельством неудачной организации экспериментов, поскольку результаты некоторых из них оказались следствиями (линейными комбинациями) остальных. Напротив, полнорангованая матрица данных является максимально информативной.

Обозначим через $\sigma_{\min}$ и $\sigma_{\max}$ наименьшее и наибольшее сингулярные числа матрицы. Основным результатом работы является следующее

Предложение. Если для интервальной матрицы $\boldsymbol{A}$ имеет место

$$\sigma_{\max}(\operatorname{rad} \boldsymbol{A}) \;<\; \sigma_{\min}(\operatorname{mid} \boldsymbol{A}),$$

то она имеет полный ранг.

Шарый Сергей Петрович, ИВТ СО РАН, Новосибирск, e-mail: shary@ict.nsc.ru

К РАСЧЁТУ РЕНТНЫХ ОЦЕНОК

В.А. Булавский, Н.В. Шестакова

В балансовых экономико-математических моделях для определения экономических нормативов, поддерживающих некоторую заданную производственную программу, реализована идея построения аналога двойственной задачи линейного программирования.

В наиболее общем виде балансовая модель формулируется следующим образом [1]. Рассматривается некоторая экономическая система, в которой земля является единственным производственным ресурсом. В этой системе, состоящей из n территориальных объектов, производится m видов продукции в заданных объёмах, известна также общая площадь земли в каждом объекте и её распределение по продуктам. Пусть каким-то образом (вне рамок модели) назначена общая сумма R, оценивающая весь объем земельных ресурсов в системе.

Целью модели является разнести эту общую сумму по отдельным объектам, учитывая исключительно продуктивность земли и структуру производства.

Обозначим через $R_k,\ k = 1, ..., n$ неизвестную часть общей суммы R, отнесенную к объекту k, так что

$$\sum_{k=1}^{n} R_k = R. \tag{1}$$

Преобразуя имеющуюся экономическую информацию, удается получить такие коэффициенты $a_{kj},\ k = 1, ..., n,\ j = 1, ..., n$, что система балансовых уравнений (2)

$$R_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} R_j,\ k = 1, ..., n, \tag{2}$$

при условии (1) позволяет однозначно определять строго положительные оценки $R_1, R_2, ..., R_n$ при некоторых естественных предположениях относительно матрицы A.

Реальное производство продукции сопряжено, конечно же, с использованием не только главного производственного фактора — земли, оценку которой мы производим. Вводя в модель дополнительную информацию о затратах других факторов, можно рассчитать корректирующие поправки к ранее найденным оценкам, которые также определяются однозначно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булавский В.А., Вирченко М.И., Шестакова Н.В. Модель дифференциации рентных оценок// Сибирский журнал индустриальной математики. 2007. № 3(31). Т.X. С. 29-36.

Булавский Владимир Александрович,
Центральный экономико-математический институт РАН, Москва, Россия,
e-mail: bulavsky@cemi.rssi.ru
Шестакова Надежда Васильевна,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия,
e-mail: nadine@math.nsc.ru

МАКСИМИЗАЦИЯ УДЕЛЬНОЙ ПРИБЫЛИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

Н.И. Бурлакова, В.В. Сервах

В классической модели Вильсона [1] необходимо найти объем заказа, при котором минимизируются удельные затраты на доставку и хранение товара. На практике встречаются ситуации, когда стоимость хранения относительно невелика. Постановки такого типа возникают, например, в торговых сетях при оптимизации закупок радиодеталей, медикаментов и других видов товара, для которых отношение объем/цена является малой величиной. При расчетах по упомянутой модели оптимальный объем заказа получается большим. Это приводит к крупным вложениям и начинают играть роль другие факторы, в частности, неэффективное использование капитала.

Модель будем рассматривать в предположении, что имеется гарантированная возможность альтернативного безрискового размещения капитала под ставку r_0. Пусть λ – интенсивность продажи товара, $\alpha + \beta v$ затраты на закупку и доставку товара объемом v, c – стоимость продажи одной единицы. Интенсивность поступления денег от продажи $c\lambda$ с учетом дисконтирования выражается функцией $\frac{c\lambda}{(1+r_0)^t}$. За период $T = \frac{v}{\lambda}$ прибыль, дисконтированная к начальному моменту времени, равна

$$\int_0^T \frac{c\lambda}{(1+r_0)^t} dt - (\alpha + \beta v) = \frac{c\lambda}{ln(1+r_0)} \cdot \frac{(1+r_0)^T - 1}{(1+r_0)^T} - (\alpha + \beta v).$$

Требуется максимизировать удельную прибыль:

$$\frac{1}{T}\left(\frac{c\lambda}{ln(1+r_0)} \cdot \frac{(1+r_0)^T - 1}{(1+r_0)^T} - \alpha - \beta\frac{T}{\lambda}\right) \to \max.$$

Данная функция является выпуклой вверх и имеет единственную точку максимума.

На основе этого подхода в работе предлагаются алгоритмы решения ряда непрерывных и комбинаторных задач, в которых кроме затрат на закупку, доставку и хранение товара, учитываются и аспекты, связанные с эффективностью использования имеющегося капитала.

Работа поддержана грантами РФФИ (проекты 12-01-00184а, 12-01-00122) и грантом целевой программы СО РАН (интеграционный проект № 7Б).

ЛИТЕРАТУРА

1. Wilson R.H. «A Scientific Routine for Stock Control» Harvard Business Review, 1934. – N. 13. – p.116—128.

Бурлакова Наталия Игоревна, Омский государственный университет,
Омск, Россия, E-mail: surpriz87@yandex.ru
Сервах Владимир Вицентьевич,
Омский филиал Института математики им С.Л.Соболева СО РАН,
Омск, Россия, E-mail: svv_usa@rambler.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КАПИТАЛА В МОДЕЛИ МЕЖВРЕМЕННОГО РАВНОВЕСИЯ ЭКОНОМИКИ РОССИИ

В.П. Вржещ

Работа основана на трехпродуктовой модели межвременного равновесия экономики России, построенной в рамках подхода Системный анализ развивающейся экономики (САРЭ) [1].

В 2010 году была разработана концепция трехпродуктового нелинейного дезагрегирования основного макроэкономического баланса (ОМБ) по использованию [2]. Необходимость в данном подходе была продиктована наблюдающимся в статистике сильным расхождением в индексах цен основных компонент ОМБ. Успешное применение трехпродуктового подхода позволило создать трехпродуктовую модель межвременного равновесия экономики России [3]. Модель основана на замкнутой системе балансов материальных благ и финансовых инструментов. Равновесие на 11 рынках описывается взаимодействием двух групп макроагентов: массовые рациональные агенты (Производитель, Банк, Домохозяйство, Торговец, Собственник) и индивидуальные сценарные агенты (Государство, Центральный банк, Импортер, Экспортер).

Тем не менее, одной из принципиальных проблем долгое время оставались ввоз и вывоз капитала. В работе [3] удавалось моделировать вывоз капитала за счет использования в модели рационального агента Собственник. Однако ввоз капитала, который играл существенную роль в экономическом развитии России в 00-х годах, приходилось задавать экзогенно. В данной работе описывается один подход к эндогенизированию ввоза капитала в российскую экономику с применением вариационного принципа.

Работа поддержана РФФИ, проекты №№12-01-00916-а (2011-2012), 12-01-31333, 12-01-31189; РГНФ, проект №11-02-00241а; ПФИ ОМН РАН №3, проект 3.14; ПФИ Президиум РАН №14, проект 109. Исследование осуществлено в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2013 году. Расчеты выполнены на суперкомпьютере МВС-100К МСЦ РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Петров, И.Г. Поспелов, А.А. Шананин. От Госплана к неэффективному рынку: Математический анализ эволюции российских экономических структур. Lewiston. NY. USA. The Edvin Mellen Press. 1999.

2. В.П. Вржещ, И.Г. Поспелов, М. А. Хохлов. Модельное дезагрегирование макроэкономической статистики // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2010. Т. 14, № 1. С. 88–104.

3. М.Ю. Андреев, В.П. Вржещ, Н.П. Пильник, И.Г. Поспелов, М.А. Хохлов, А.А. Жукова, Радионов С.А. Модель межвременного равновесия экономики России, основанная на дезагрегировании макроэкономического баланса. // Труды семинара имени И. Г. Петровского. Издательство Московского университета. 2012. Вып. 29. С. 41–143.

Вржещ Валентин Петрович, ВЦ РАН, Москва, Россия,
e-mail:valentin.vrzheshch@gmail.com

КЛАССОВАЯ МОДЕЛЬ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА

Н.П. Дементьев

Модели жизненного цикла хорошо известны в литературе. В простейшей модели жизнь индивида распадается на рабочий и пенсионный периоды. В первом периоде жизни индивид работает и его доход состоит из заработной платы w, часть которой он тратит на потребление c_1, а остаток s сберегает на пенсию: $c_1 + s = w$. Сбережения s приносят доход rs, где r - процентная ставка. Во втором периоде жизни индивид не работает и его потребление c_2 финансируется за счет накопленных сбережений: $c_2 = Rs,\ R = 1 + r$. При заданных w, r индивид делит заработную плату так, чтобы его функция полезности $U(c_1, c_2)$ достигла максимума.

В предлагаемой модели рассматривается поведение не одного индивида, а нескольких крупных групп (классов), составляющих все население. Группы различаются лишь функциями полезности (более конкретно, индивид из группы i имеет сепарабельную функцию полезности $U_i(c_1, c_2) = u(c_1) + \rho_i(c_2)$, где коэффициент ρ_i характеризует склонность индивида к сбережению). В отличие от сбережения отдельного индивида, сбережение большой группы населения может оказывать существенное влияние на объем производственных фондов в экономике и, как следствие, на ставки заработной платы и процентные ставки. Для описания такого влияния в модель вводится блок производства, описываемый с помощью однородной первой степени функции $F(K, L)$, где K - объем производственных фондов, а L - количество работающих. Параметры w, R определяются внутри модели как предельные производительности труда и капитала: $R = F'_K(K, L),\ w = F'_L(K, L)$. Кроме того, в модель вводятся элементы обязательной пенсионной системы с соответствующими тарифами пенсионных взносов. Считается, что пенсионеры живут за счет как государственной пенсии, так и своих добровольных сбережений.

Методами сравнительной статистики исследовалось влияние параметров обязательной пенсионной системы на сбережение в экономике, на распределение доходов среди групп населения. Предложенная модель сложна для анализа, но для производственных функций типа Кобба-Дугласа и логарифмических функций полезности удалось получить конкретные содержательные результаты.

Дементьев Николай Павлович,
Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН,
Новосибирск, e-mail: dement@ieie.nsc.ru

МНОГОПОЛОСНАЯ ТРАНСПОРТНАЯ МОДЕЛЬ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

П. С. Кравченко, Г.А. Омарова

Транспортная инфраструктура - одна из важнейших инфраструктур, обеспечивающих жизнь городов и регионов. Особую важность приобретает оптимальное планирование сетей, улучшение организации движения, оптимизация системы маршрутов общественного транспорта. Решение таких задач невозможно без математического моделирования транспортных сетей [1]. Задача математических моделей определение и прогноз всех параметров функционирования транспортной сети, таких как интенсивность движения на всех элементах сети, объемы перевозок в сети общественного транспорта, средние скорости движения, задержки и потери времени и т.д.

Использование клеточных автоматов (КА) при моделирования транспортных потоков является достаточно распространенным подходом [2]. К плюсам такого подхода можно отнести высокую вычислительную скорость и эффективность, к тому же КА обладают естественным параллелизмом. Помимо этого, модели, относящиеся к классу КА, позволяют воспроизводить ряд характерных для транспортных потоков явлений, наблюдаемых в реальной жизни.

Дан граф $G = (V, E)$, $\forall e \in E$ q_e – максимальная пропускная способность, R – множество правил перемещений по ребрам графа. Конечный автомат задается следующим кортежем: $((e, y, x), s, t)$, где $e = (v_1, v_2) \in E$ – это ребро графа G, $y \in \mathbb{N}$ – номер полосы на дороге (нумерация полос начинается с самой правой полосы дороги), $x \in \mathbb{N}$ – номер ячейки на ребре e (нумерация ячеек начинается от начала ребра), описывающий продвижение автомобиля по ребру, s – состояние клетки в конечном автомате, t – момент времени с начала моделирования. Множество допустимых состояний для каждой клетки автомата ограничено тремя следующими состояниями: 0 – участок, соответствующий клетке автомата, свободен; 1 – участок, соответствующий клетке автомата, занят автомобилем, перемещающимся по дороге; 2 – участок, соответствующий клетке автомата, занят и недоступен для проезда длительное время. В это состояние переходят клетки, на которых произошла авария, осуществляется ремонт или припаркован автомобиль.

Целью данной работы является разработка модели клеточных автоматов для реалистичного моделирования движения по улично-дорожной сети (УДС) согласно заданному набору правил движения по УДС. Математическая модель клеточного автомата будет состоять из описания следующих частей: модель УДС, возможные состояния клеток, динамика клеточного автомата и правила перехода.

ЛИТЕРАТУРА

1. F.A. Haight. Mathematical Theories of Traffic Flow. // Academic Press New York London, 1963.

2. Maerivoet S., De Moor B. Celular Automata Models of Road Traffic // Phisics Reports. 2005. Vol. 419. No. 1. P. 1-64.

Кравченко Павел Сергеевич, Омарова Гульзира Алимовна, Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия,
e-mail: pavel.s.kravchenko@gmail.com, gulzira@rav.sscc.ru

АЛГОРИТМ СИНТЕЗА БАЛАНСОВОЙ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Д.С. Крупенев, С.М. Пержабинский

Под балансовой надежностью понимается способность электроэнергетической системы (ЭЭС) обеспечить потребителей необходимой электрической мощностью и энергией при учете отключений элементов энергосистемы, ограничений на поставку энергоресурсов. Задача оптимизации (синтеза) надёжности ЭЭС состоит в улучшении значений показателей надежности за счет изменения объема резерва генерирующей мощности и мест ее размещения в энергосистеме, структуры и пропускной способности электрических связей. Решение данной задачи имеет определяющее значение при проектировании развития ЭЭС. В этой связи представляют интерес следующие задачи оптимизации балансовой надежности электроэнергетических систем: минимизации математического ожидания ущерба и приведенных затрат, минимизации приведенных затрат при достижении заданного уровня надежности ЭЭС.

В докладе представлен итеративный алгоритм оптимизации надежности. На каждой итерации алгоритма осуществляется оценка балансовой надёжности электроэнергетической системы. Данные расчеты проводятся (в зависимости от исходной постановки задачи оптимизации надежности) с целью определения принятых за норматив показателей надёжности (вероятность безотказной работы, коэффициент обеспеченности потребителей электроэнергией и др.) или для вычисления ущерба у потребителей, возникающего из-за низкой надежности ЭЭС. Затем определяется состав средств повышения надежности ЭЭС (структура дополнительных генерирующих мощностей, увеличение пропускной способности связей и создание новых связей между узлами) с минимальными затратами. После добавления выбранных средств повышения надежности к составу генерирующего и сетевого оборудования необходима оценка балансовой надежности полученной новой структуры ЭЭС (переход на следующую итерацию).

В алгоритме ключевую роль играет способ выбора средств повышения надежности ЭЭС. Для этого на каждой итерации алгоритма решается вспомогательная задача линейного программирования, согласно которой необходимо покрыть модифицированный график нагрузки с минимальными затратами на выработку электроэнергии и ввод дополнительного энергетического оборудования. Модифицированный график нагрузки формируется на основе исходного графика и итеративно изменяется в зависимости от получаемых показателей надежности в узлах системы. Искусственное увеличение нагрузки в узлах системы стимулирует ввод энергетического оборудования с минимальными затратами при выполнении баланса мощности и энергии. В докладе представлены результаты экспериментальных исследований работы алгоритма, и показали его пригодность для решения задачи оптимизации балансовой надежности ЭЭС.

Крупенев Дмитрий Сергеевич, Пержабинский Сергей Михайлович,
ИСЭМ СО РАН, Иркутск, Россия,
e-mail: krupenev@isem.sei.irk.ru, smper@isem.sei.irk. ru

МОДЕЛИ ГОСУДАРСТВЕННО-ЧАСТНОГО ПАРТНЕРСТВА В РЕСУРСНОМ РЕГИОНЕ

С.М. Лавлинский

В докладе предложен инструментарий разработки программы освоения минерально-сырьевой базы на основе концепции государственно-частного партнерства (ГЧП). Такой инструментарий представляет собой комбинацию модели планирования, генерирующей оптимальный механизм взаимодействия государства и частного инвестора, и модели прогнозирования, назначение которой — оценка последствий реализации программы развития территории, использующей конкретный механизм ГЧП.

Базовая постановка модели планирования представляет собой задачу двухуровневого целочисленного программирования, генерирующую оптимальный механизм взаимодействия государства и частного инвестора, здесь государству отведен верхний уровень, а частному инвестору — нижний.

На входе модели используются следующие данные:

– набор инвестиционных проектов, реализуемых частным инвестором;

– набор инфраструктурных проектов, реализуемых государством;

– перечень экологических проектов, необходимых для компенсации экологических потерь, вызванных реализацией инвестиционных и инфраструктурных проектов;

Не все исходные данные задачи планирования могут быть достаточно корректно определены в реальной жизни — экспертные оценки экологических эффектов, проектных и внепроектных доходов бюджета могут быть использованы только в первом приближении, поскольку все они зависят от реализуемого на практике механизма ГЧП.

Эта проблема может быть решена с помощью модели прогнозирования, существенно более подробно представляющей экономику и экологию проектов с одной стороны, и особенности сложившегося хода социально-экономического развития с другой. Для этого предлагается использовать оригинальную модель пучка инвестиционных проектов, позволяющую "погрузить" найденное в модели планирования оптимальное управленческое решение в региональный воспроизводственный процесс.

Организовав итерационный процесс, на каждом шаге которого информационная база модели планирования подправляется сопряженной моделью прогнозирования, мы получаем комплекс экономико-математических моделей, позволяющий поддержать процесс принятия управленческого решения при разработке эффективного механизма ГЧП, согласующего долгосрочные интересы государства, частного инвестора и населения в процессе социально-экономического развития ресурсного региона.

Работа поддержана грантом РФФИ 13-06-00023.

Лавлинский Сергей Михайлович,
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск,
e-mail: lavlin@math.nsc.ru.

ВЫБОР ЭФФЕКТИВНОГО ВАРИАНТА ОСВОЕНИЯ ГРУППЫ НЕФТЕГАЗОВЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДВУХУРОВНЕВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Н.И.Пляскина

Решение задачи выбора эффективного варианта освоения группы месторождений во взаимосвязи с трубопроводами основано на использовании двухуровневой оптимизации. На первом уровне решается задача оптимального управления на основе принципа максимума, на втором — комбинаторная задача о перестановках с использованием метода последовательного перебора. Используются два критерия: максимум суммарной добычи углеводородов за прогнозируемый период и минимум затрат на добычу и транспортировку по сети трубопроводов. На первом шаге решается задача максимизации суммарной добычи за фиксированный период для группы месторождений

$$\sum_{i=1}^{m} \int_0^T Q_i(t)dt \to \max$$

при выполнении условий на управляющие параметры. Среди множества решений этой задачи ищется единственное, которому соответствуют минимальные затраты на добычу и транспорт газа,

$$K^* \to \min,$$

где $K^* = K^1 + K^2$ — капиталовложения в разработку, обустройство каждого месторождения и транспортировку газа за период прогнозирования, Задача о минимизации стоимости обустройства группы месторождений и сети газопроводов сводится к нахождению оптимального варианта управления $n_i(t)$ разработки группы месторождений и соответствующие им $q_i(t)$ и $N_i(t)$ при наименьшем значении функционала на множестве различных последовательностей разработки месторождений

$$F = K^1 + K^2 = \sum_{i=1}^{m} \left\{ c_i \int_0^{T_n} n_i(t)dt + \alpha_i \sqrt{\int_0^{T_n} n_i(t)dt} \right\}$$

где i — индекс месторождения, n — ввод скважин в эксплуатацию в единицу времени, q — дебит средней скважины, N — фонд скважин на месторождении, $Q_i = N_i q_i$ — добыча газа на месторождении. Возможно m последовательностей разработки месторождений, соответствующих числу заданных перестановок из m месторождений. Длительность периода разработки каждого месторождения определяется с помощью условий задачи о максимизации накопленной добычи.

Для полученного оптимального варианта разработки группы месторождений с помощью правила отбраковки находим множество перестановок и чистый дисконтированный доход

$$NPV_{x(\mu)} = \sum_{t=0}^{T} \frac{CF_t}{(1+r)^t}$$

Пляскина Нина Ильинична, ИЭОПП СО РАН, НГУ, Новосибирск, pliaskina@ieie.nsc.ru

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЗАДАЧ ПОИСКА ПОКРЫВАЮЩИХ МНОЖЕСТВ К АКТУАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЕТЕЙ

О.Д. Соколова, А.Н. Юргенсон

Задача поиска минимального по числу элементов покрывающего множества имеет различные применения в анализе работы современных сетей. Например, задача рассылки сообщений от одного источника множеству получателей в многошаговой беспроводной сети сводится к поиску вершинного покрывающего множества. В качестве модели сети рассматривается граф, в котором из вершины a есть дуга в вершину b, если a находится в зоне приема вершины b. Необходимо минимизировать число трансляторов (транзитных вершин) при широковещательной рассылке сообщений. Авторами исследованы различные методы и получены оценки стоимости передачи. Оптимальный выбор одного из методов передачи информации, применяющихся в современных протоколах — метод блочной передачи и метод безусловных повторных передач, позволяет снизить стоимость маршрута при передаче как голосового трафика, так и видео.

Также к задаче покрытия сводится задача поиска мест расположения устройств мониторинга на узлах и каналах первичной сети. В этом случае в качестве модели сети использовался объект гиперсеть $H = (X, V, R)$, где X — множество вершин, V — множество ветвей, R — множество ребер (потоков), проходящих по ветвям. В терминах теории гиперсетей задача поиска минимального по числу элементов подмножества узлов и каналов, покрывающих все потоки, представляет собой задачу поиска элементов множеств X и V, покрывающих все ребра вторичной сети R. Авторами разработан эвристический алгоритм, решающий задачу поиска покрывающего множества при условии ограничения на суммарную стоимость устройств.

Рассмотрена и обратная задача, где входным параметром является не ограничение на суммарную стоимость, а процент покрытых потоков. В этом случае можно определять количество устройств, необходимых для обеспечения мониторинга заданного процента потоков в сети. Эта задача также является актуальной, т. к. при анализе безопасности сети нередко используется параметр процента наблюдаемого трафика.

Для решения описанных задач разработан генератор случайных графов с наперед заданными свойствами (например ограничение на степень вершины). Это позволяет иметь графы определенной топологии для моделирования сетей в системах имитационного моделирования и анализа результатов поиска покрывающих множеств.

Соколова Ольга Дмитриевна, Юргенсон Анастасия Николаевна,
ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, e-mail: olga@rav.sscc.ru, nastya@rav.sscc.ru

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ОТКАЗОУСТОЙЧИВОСТИ МУЛЬТИСЕРВИСНЫХ СЕТЕЙ

В.В. Шахов

Предлагается подход к решению ряда задач, возникающих при анализе отказоустойчивости мультисервисных сетей. Рассматриваемое разрушающее воздействие обусловлено перегрузкой ресурсов системы запросами на обслуживание. В качестве примера указанной ситуации можно привести DDoS атаку типа SYN Flooding в TCP/IP сетях, когда очередь полуоткрытых соединений атакуемого сервера переполняется фальшивыми предложениями к установлению соединений. Однако заметим, что указанное разрушающее воздействие не обязательно вызвано сфальсифицированными запросами. Организатор атаки может перенаправить легальный трафик на ограниченное подмножество ресурсов, в результате чего наблюдается существенное снижение утилизации большей части ресурсов системы, и катастрофическая перегрузка другой части ресурсов. Кроме того, указанная ситуация не обязательно является продуктом преднамеренных действий, она может возникнуть в результате случайного сбоя протоколов доступа к ресурсам. Таким образом, возникает необходимость оптимизации распределения ресурсов системы с целью снижения последствий разрушающего воздействия. Решаемые задачи могут включать оптимальное перераспределение ресурсов системы с целью минимизировать вероятность блокировки запроса на обслуживание, отбраковку части низкоприоритетного трафика с целью максимизации показателей качества обслуживания высокоприоритетного трафика, минимизацию стоимости подключения дополнительных ресурсов и т.п.

В работе рассматриваются экстремальные задачи, в которых целевая функция или ограничения содержат функцию потерь Эрланга (B-формула Эрланга):

$$B(\rho, n) = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!}}.$$

Здесь ρ – предложенная нагрузка, n – количество обслуживающих устройств (каналов, сервисов). Трудности, связанные с нелинейным характером функции $B(\rho, n)$, обходятся с помощью специальной аппроксимации, изложенной в указанных ниже работах.

Работа поддержана грантом РФФИ 11-07-00183.

ЛИТЕРАТУРА

1. V.V. Shakhov. An Efficient Method for Proportional Differentiated Admission Control Implementation. // LNCS 2010. V. 6235. P. 91–97.

2. V.V. Shakhov, H. Choo. An Efficient Method for Proportional Differentiated Admission Control Implementation. EURASIP J. Wireless Comm. and Networking 2011. Article ID 738386

Шахов Владимир Владимирович, ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск, Россия,
e-mail: shakhov@rav.sscc.ru

О ПОДХОДАХ К УПРАВЛЕНИЮ ЭВАКУАЦИЕЙ ПРИ ПОЖАРЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Д.В. Шихалев, Р.Ш. Хабибулин

Увеличение количества зданий с массовым пребыванием людей (МПЛ) ведет к повышению количества пожаров и гибели людей на таких объектах, что подтверждается статистическими данными. При пожаре в здании с МПЛ для эвакуируемых возникает ряд трудностей связанных с безопасной эвакуацией [1]: посетители не ознакомлены с планом эвакуации, они неспособны оценить ситуацию, возникает блокировка опасными факторами пожара на пути эвакуации. Во многом эти проблемы связаны с тем, что система оповещения и управления эвакуацией не определяет направление безопасной эвакуации. Путь эвакуации считается *безопасным*, если на всех его участках выполняются условия беспрепятственности (не происходит скопления людей) и своевременности (опасные факторы пожара наступают позже времени прохождения людей) эвакуации. Таким образом, сформулирована следующая задача: определить путь эвакуации от места нахождения человека до безопасной зоны, который содержит минимальное расстояние до выхода, причем значения показателей беспрепятственности и своевременности должны иметь минимальные значения.

Для решения поставленной задачи разработаны два подхода. Подход №1 заключается в применении теории графов для нахождения кратчайшего пути эвакуации. Исходя из того, что местоположение очага пожара — изменяющаяся величина, для определения кратчайшего пути эвакуации необходимо знать минимальные расстояния до выходов из каждой точки здания. Целесообразно в таком случае применять алгоритм Флойда-Уоршала (1).

$$d_{ij}^{m} = \min\{d_{im}^{m-1} + d_{mj}^{m-1}; d_{ij}^{m-1}\}, \tag{1}$$

где d_{ij}^{m} — длина кратчайшего пути эвакуации из вершины i в вершину j; m — промежуточная вершина графа. За вершину графа примем место пересечения двух и более путей эвакуации. Для учета пожарной опасности участков пути эвакуации вводится оптимизационный показатель $\varphi = L \cdot a \cdot b$ который будет отражать как длину, так и пожарную опасность участков, где L — длина участка пути эвакуации; a — критерий беспрепятственности; b — критерий своевременности. Таким образом, окончательный вид формулы (1) представим как:

$$\varphi_{ij}^{m} = \min\{\varphi_{im}^{m-1} + \varphi_{mj}^{m-1}; \varphi_{ij}^{m-1}\} \tag{2}$$

Основная идея подхода №2 заключается в оптимальной загруженности участков путей эвакуации. Для реализации данного подхода применен потоковый алгоритм поиска увеличивающейся цепи [2]. Разработаны элементы программного комплекса в системе Matlab, где применены алгоритмы определения направлений безопасной эвакуации согласно предложенным подходам. Проведен ряд численных экспериментов по оценке времени, особенностям протекания процесса эвакуации с учетом работы предложенной системы управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Холщевников В.В., Самошин Д.А. Эвакуация и поведение людей при пожарах: Учебное пособие. - М.: Академия ГПС МЧС России, 2009;

2. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах: Пер. с анг. - М.:Мир, 1981.

Шихалев Денис Владимирович, Хабибулин Ренат Шамильевич,
Академия Государственной противопожарной службы МЧС России, Москва,
evacsystem@gmail.com, kh-r@yandex.ru.

СПИСОК АВТОРОВ

Дискретный анализ и исследование операций

http://math.nsc.ru/publishing/DAOR/daor.html

Журнал «Дискретный анализ и исследование операций» основан в 1994 г. Учредители — Сибирское отделение РАН, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. До 2008 года журнал выходил в двух сериях.

Главный редактор В.Л. Береснев

Переводы статей на английский язык публикуются с 2007 г. в журнале Journal of Applied and Industrial Mathematics. Berlin: Springer-Verl. Журнал включён в российский индекс научного цитирования.

Электронная версия журнала размещена на платформе научной электронной библиотеки: www.elibrary.ru и на общероссийском математическом портале **Math-Net.Ru** www.mathnet.ru.

В журнале публикуются оригинальные статьи, содержащие теоретические результаты в области дискретного анализа и исследования операций, статьи прикладной направленности, представляющие интерес с точки зрения практического приложения полученных результатов, а также обзорные статьи по данной тематике, краткие научные сообщения, информация о новых книгах.

Журнал реферируется РЖ «Математика», «Mathematical Reviews», «Zentralblatt MATH».

В журнале публикуются работы по следующим разделам:

- дискретная оптимизация
- дискретные структуры и экстремальные задачи
- комбинаторика
- контроль и надежность дискретных устройств
- математическое программирование
- модели и методы принятия оптимальных решений
- построение и анализ алгоритмов, синтез и сложность управляющих систем
- теория автоматов
- теория графов
- теория игр и ее приложения
- теория кодирования
- теория функциональных систем
- теория расписаний
- теория размещений
- модели экономики
- моделирование процессов управления
- системы поддержки принятия решения

Информация о подписке:

Журнал распространяется по подписке через агентство «Роспечать» (индекс 73402).

Адрес редакции:

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
пр. Академика Коптюга, 4
630090 Новосибирск, Россия

Тел. (383) 363-46-85
Факс (383) 333-25-98
E-mail **discopr@math.nsc.ru**

Зав. редакцией Наталья Михайловна Пузынина
E-mail: discopr@math.nsc.ru

Более подробную информацию о журнале можно найти в INTERNET по адресу:
http://math.nsc.ru/publishing/DAOR/daor.html. Здесь Вы найдете содержание выпусков за последние три года, аннотации к каждой статье, адреса авторов, а также информацию о книгах, журналах и препринтах, выпускаемых издательством Института математики.

ПЕРВОЕ ИНФОРМАЦИОННОЕ СООБЩЕНИЕ

НА БАЗЕ ИНСТИТУТА СИСТЕМ ЭНЕРГЕТИКИ ИМ. Л. А. МЕЛЕНТЬЕВА СО РАН С УЧАСТИЕМ РЯДА ОРГАНИЗАЦИЙ ПРОВОДИТСЯ

XVI БАЙКАЛЬСКАЯ МЕЖДУНАРОДНАЯ ШКОЛА-СЕМИНАР

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Иркутск, Байкал
июль 2014 г.

Научная программа конференции включает пленарные доклады и доклады на секциях:

Математическое программирование,

Оптимальное управление,

Приложения методов оптимизации.

Специальное внимание планируется уделить теории и методам двухуровневой оптимизации.

Председатель организационного комитета — О. В. Хамисов

e-mail: khamisov@isem.sei.irk.ru

Международная конференция

Дискретная оптимизация и исследование операций

Новосибирск, 24 –28 июня 2013

Материалы конференции

Подписано в печать 01.06.2013. Формат 60x84 1/8. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 21,0. Уч.-изд. л. 9,7. Тираж 150 экз. Заказ № 44.

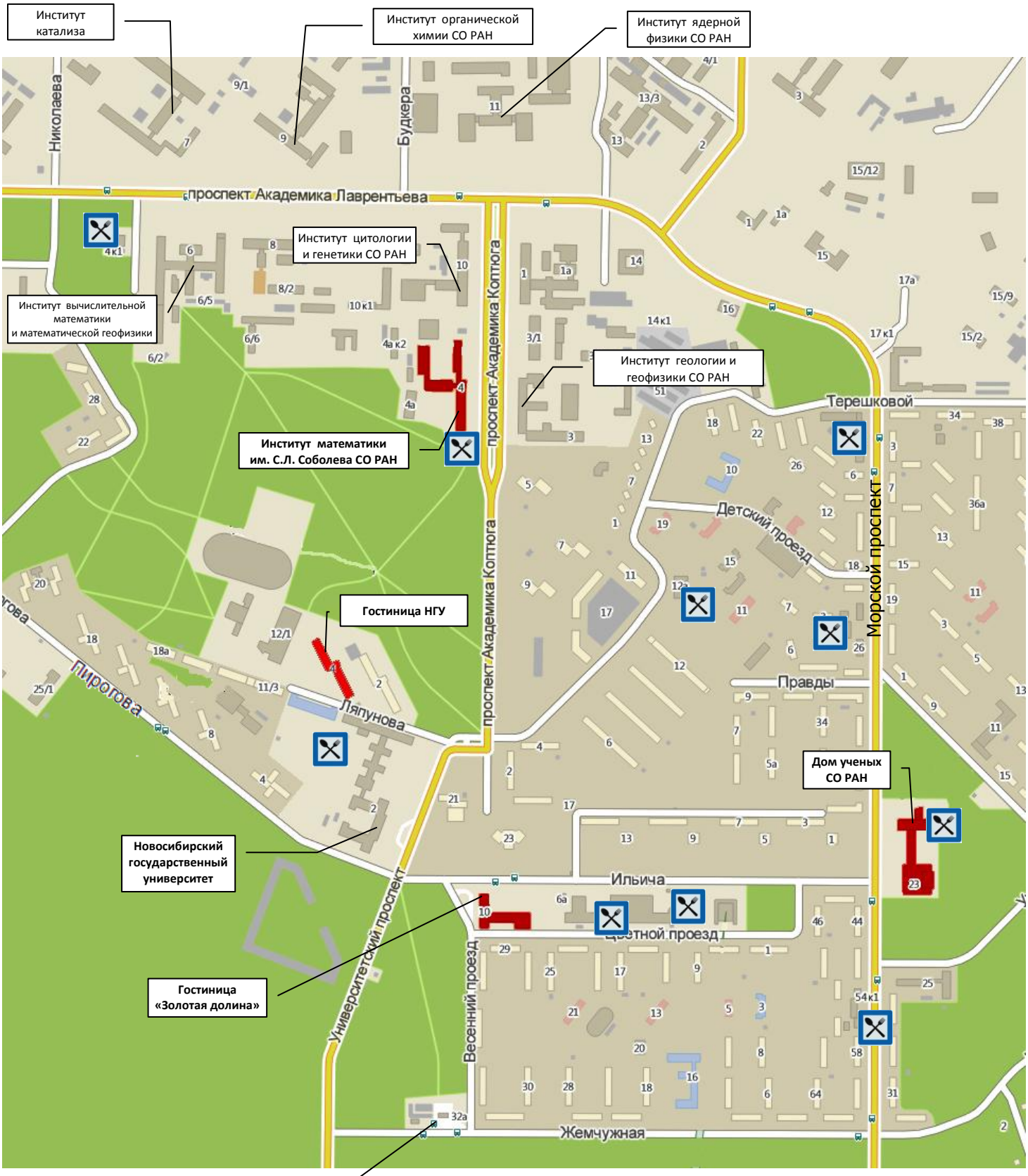
Отпечатано в ООО «Омега Принт»,
пр. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.

P vs. NP


Ты слышал о проблеме P vs. NP? Станет ли компьютер действительно более мощным, если он сможет угадывать правильный ответ? P ≠ NP означало бы, что это действительно так.
Подожди, не торопись! Ты просто ищешь доказательство существования бога, надеясь, что P ≠ NP будет означать существование чего-то всемогущего. Просто признай это!
Да. А доказательство того, что P = NP будет значить, что бога нет либо что он на самом деле не более могущественен, чем все мы.
Да, но как быть с тем, что я сижу напротив тебя и пью кофе? Это значит, что P = NP или P ≠NP?


Кофе как доказательство всемогущества?
Пожалуй, я начинаю верить, что P=NP.
Calvin & Hobbes
Вера — это еще не знание!

Схема Академгородка



— кафе, ресторан или столовая