Коммутирующие элементы в теле Оре отношений линейных обыкновенных дифференциальных операторов

С.П.Царев

Сибирский Федеральный Университет, Красноярск

21.12.2017

План

- Коммутирующие ЛОДО, теорема Берчнала-Чаунди, результаты И.Шура, алгебро-геометрический подход (напоминание)

План

- Коммутирующие ЛОДО, теорема Берчнала-Чаунди, результаты И.Шура, алгебро-геометрический подход (напоминание)
- Почти коммутирующие тройки линейных операторов с частными производными, dim=2.
  БЧ-теорема

План

- Коммутирующие ЛОДО, теорема Берчнала-Чаунди, результаты И.Шура, алгебро-геометрический подход (напоминание)
- Почти коммутирующие тройки линейных операторов с частными производными, dim=2.
  БЧ-теорема
- Линейные операторы с частными производными, почти коммутирующие с $H = -\Delta + u(x, y)$, dim=2. Теоремы сложения

План

- Коммутирующие ЛОДО, теорема Берчнала-Чаунди, результаты И.Шура, алгебро-геометрический подход (напоминание)
- Почти коммутирующие тройки линейных операторов с частными производными, dim=2.
  БЧ-теорема
- Линейные операторы с частными производными, почти коммутирующие с $H = -\Delta + u(x, y)$, dim=2. Теоремы сложения
- Связь с коммутирующими элементами в теле Оре отношений линейных обыкновенных дифференциальных операторов.

План

- Коммутирующие ЛОДО, теорема Берчнала-Чаунди, результаты И.Шура, алгебро-геометрический подход (напоминание)
- Почти коммутирующие тройки линейных операторов с частными производными, dim=2.
  БЧ-теорема
- Линейные операторы с частными производными, почти коммутирующие с $H = -\Delta + u(x, y)$, dim=2. Теоремы сложения
- Связь с коммутирующими элементами в теле Оре отношений линейных обыкновенных дифференциальных операторов. Контрпримеры к БЧ-теореме.

План

- Коммутирующие ЛОДО, теорема Берчнала-Чаунди, результаты И.Шура, алгебро-геометрический подход (напоминание)
- Почти коммутирующие тройки линейных операторов с частными производными, dim=2.
  БЧ-теорема
- Линейные операторы с частными производными, почти коммутирующие с $H = -\Delta + u(x, y)$, dim=2. Теоремы сложения
- Связь с коммутирующими элементами в теле Оре отношений линейных обыкновенных дифференциальных операторов. Контрпримеры к БЧ-теореме. Случаи выполнения БЧ-теоремы.

Коммутирующие ЛОДО, теорема Берчнала-Чаунди

Рассмотрим ЛОДО L_1, $L_2 \in \mathcal{F}_1[\partial_x]$, такие, что $[L_1, L_2] = 0$.

Коммутирующие ЛОДО, теорема Берчнала-Чаунди

Рассмотрим ЛОДО L_1, $L_2 \in \mathcal{F}_1[\partial_x]$, такие, что $[L_1, L_2] = 0$.

Theorem (теорема Берчнала-Чаунди, 1924)

ЛОДО L_1 и L_2, такие, что $[L_1, L_2] = 0$, связаны полиномиальным соотношением $Q(L_1, L_2) = 0$ с постоянными коэффициентами.

Коммутирующие ЛОДО, теорема Берчнала-Чаунди

Рассмотрим ЛОДО L_1, $L_2 \in \mathcal{F}_1[\partial_x]$, такие, что $[L_1, L_2] = 0$.

Theorem (теорема Берчнала-Чаунди, 1924)

ЛОДО L_1 и L_2, такие, что $[L_1, L_2] = 0$, связаны полиномиальным соотношением $Q(L_1, L_2) = 0$ с постоянными коэффициентами.

$\Rightarrow$ можно применить алгебро-геометрическую технику.

Рассмотрим ЛОДО L_1, $L_2 \in \mathcal{F}_1[\partial_x]$, такие, что $[L_1, L_2] = 0$.

Theorem (теорема Берчнала-Чаунди, 1924)

ЛОДО L_1 и L_2, такие, что $[L_1, L_2] = 0$, связаны полиномиальным соотношением $Q(L_1, L_2) = 0$ с постоянными коэффициентами.

$\Rightarrow$ можно применить алгебро-геометрическую технику.

Приложения к теории интегрируемых уравнений с частными производными $+ \ldots$

Результаты И.Шура

Основное утверждение работы
I. Schur, *Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke*, Sitzungsber. Berliner Math. Gesellschaft (1904):

Theorem

Если два ЛОДО L_1, L_2 коммутируют с третьим L_3, не равным константе, то L_1 и L_2 коммутируют между собой.

Результаты И.Шура

Основное утверждение работы
I. Schur, *Über vertauschbare lineare Differentialausdrücke*, Sitzungsber. Berliner Math. Gesellschaft (1904):

Theorem

Если два ЛОДО L_1, L_2 коммутируют с третьим L_3, не равным константе, то L_1 и L_2 коммутируют между собой.

Для доказательства И.Шур вводит формальные ряды

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} p_{n-i}(x) X^{n-i} = p_n(x) X^n + p_{n-1}(x) X^{n-1} + \ldots \in \mathcal{F}_1((\partial_x))$$

где $X = \frac{d}{dx}$.

Результаты И.Шура

Theorem

Для любого $L \in \mathcal{F}_1((\partial_x))$ *ненулевого порядка* n *существует корень* $R = \sqrt[n]{P}$ *степени* n*, имеющий тем самым порядок 1.*

Результаты И.Шура

Theorem

Для любого $L \in \mathcal{F}_1((\partial_x))$ ненулевого порядка n существует корень $R = \sqrt[n]{P}$ степени n, имеющий тем самым порядок 1.

Theorem

Если $L_1, L_2 \in \mathcal{F}_1((\partial_x))$ (порядков n и $m \neq 0$ соответственно) коммутируют, то существуют такие постоянные $c_0, c_1, \ldots,$ что

$$L_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k R_2^{n-k}, \qquad R_2 = \sqrt[m]{L_2}. \tag{1}$$

Результаты И.Шура

Theorem

Для любого $L \in \mathcal{F}_1((\partial_x))$ *ненулевого порядка* n *существует корень* $R = \sqrt[n]{P}$ *степени* n*, имеющий тем самым порядок 1.*

Theorem

Если $L_1, L_2 \in \mathcal{F}_1((\partial_x))$ *(порядков* n *и* $m \neq 0$ *соответственно) коммутируют, то существуют такие постоянные* $c_0, c_1, \ldots,$ *что*

$$L_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k R_2^{n-k}, \qquad R_2 = \sqrt[m]{L_2}. \tag{1}$$

$\Rightarrow$ коммутативность централизаторов элементов в $\mathcal{F}_1((\partial_x))$ и $\mathcal{F}_1[\partial_x]$

Результаты И.Шура

Theorem

Для любого $L \in \mathcal{F}_1((\partial_x))$ *ненулевого порядка* n *существует корень* $R = \sqrt[n]{P}$ *степени* n*, имеющий тем самым порядок 1.*

Theorem

Если $L_1, L_2 \in \mathcal{F}_1((\partial_x))$ *(порядков* n *и* $m \neq 0$ *соответственно) коммутируют, то существуют такие постоянные* $c_0, c_1, \ldots,$ *что*

$$L_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k R_2^{n-k}, \qquad R_2 = \sqrt[m]{L_2}. \tag{1}$$

$\Rrightarrow$ коммутативность централизаторов элементов в $\mathcal{F}_1((\partial_x))$ и $\mathcal{F}_1[\partial_x]$

БЧ-теорема $\Rrightarrow$ *алгебраичность ряда* (1) для ЛОДО!

Результаты И.Шура

Theorem

Для любого $L \in \mathcal{F}_1((\partial_x))$ ненулевого порядка n существует корень $R = \sqrt[n]{P}$ степени n, имеющий тем самым порядок 1.

Theorem

Если $L_1, L_2 \in \mathcal{F}_1((\partial_x))$ (порядков n и $m \neq 0$ соответственно) коммутируют, то существуют такие постоянные c_0, c_1, ..., что

$$L_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k R_2^{n-k}, \qquad R_2 = \sqrt[m]{L_2}. \tag{1}$$

$\Rightarrow$ коммутативность централизаторов элементов в $\mathcal{F}_1((\partial_x))$ и $\mathcal{F}_1[\partial_x]$

БЧ-теорема $\Rightarrow$ *алгебраичность ряда* (1) для ЛОДО!

В $\mathcal{F}_1((\partial_x))$ ряды не обязательно алгебраические!

Идея доказательства

Lemma

Если $L_1 = p_n(x)X^n + p_{n-1}(x)X^{n-1} + \ldots$,
$L_2 = q_m(x)X^m + q_{m-1}(x)X^{m-1} + \ldots$ *коммутируют, то*

$$nq'_m p_n - mp'_n q_m = 0.$$

Идея доказательства

Lemma

Если $L_1 = p_n(x)X^n + p_{n-1}(x)X^{n-1} + \ldots$,
$L_2 = q_m(x)X^m + q_{m-1}(x)X^{m-1} + \ldots$ *коммутируют, то*

$$nq'_m p_n - mp'_n q_m = 0.$$

$\Rightarrow p_n = \lambda_1 \phi(x)^n$, $q_m = \lambda_2 \phi(x)^m$.

Идея доказательства

Lemma

Если $L_1 = p_n(x)X^n + p_{n-1}(x)X^{n-1} + \ldots,$
$L_2 = q_m(x)X^m + q_{m-1}(x)X^{m-1} + \ldots$ *коммутируют, то*

$$nq_m' p_n - mp_n' q_m = 0.$$

$\Rightarrow p_n = \lambda_1 \phi(x)^n,\ q_m = \lambda_2 \phi(x)^m.$

Замечание. Сходимость рядов в каком-либо смысле не очевидно:

$$X^{-1}u = -\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i u^{(i-1)} X^{-i}.$$

Для $u(x) = 1/(1-x)$ имеем $u^{(k)} \sim k!$.

Подтело "рациональных" элементов $\mathcal{F}_1((\partial_x))$

O. Ore, *Linear equations in non-commutative fields*, Ann. of Math. **32** (1931), 463–477.

Подтело "рациональных" элементов $\mathcal{F}_1((\partial_x))$

O. Ore, *Linear equations in non-commutative fields*, Ann. of Math. **32** (1931), 463–477.
"тело частных Оре" — аналог конструкции поля частных области целостности в коммутативной алгебре:

Подтело “рациональных” элементов $\mathcal{F}_1((\partial_x))$

O. Ore, *Linear equations in non-commutative fields*, Ann. of Math. **32** (1931), 463–477.
“тело частных Оре” — аналог конструкции поля частных области целостности в коммутативной алгебре: рассматриваются формальные элементы вида
$L^{-1} \cdot M$ или $B \cdot A^{-1}$,
где A, B, L, M — дифференциальные операторы (обыкновенные или с частными производными).

Подтело “рациональных” элементов $\mathcal{F}_1((\partial_x))$

O. Ore, *Linear equations in non-commutative fields*, Ann. of Math. **32** (1931), 463–477.

“тело частных Оре” — аналог конструкции поля частных области целостности в коммутативной алгебре: рассматриваются формальные элементы вида

$L^{-1} \cdot M$ или $B \cdot A^{-1}$,

где A, B, L, M — дифференциальные операторы (обыкновенные или с частными производными).

Для сложения элементов необходимо приводить их к общему знаменателю, находя общие кратные (не обязательно наименьшие) знаменателей.

Подтело "рациональных" элементов $\mathcal{F}_1((\partial_x))$

O. Ore, *Linear equations in non-commutative fields*, Ann. of Math. **32** (1931), 463–477.

"тело частных Оре" — аналог конструкции поля частных области целостности в коммутативной алгебре: рассматриваются формальные элементы вида

$L^{-1} \cdot M$ или $B \cdot A^{-1}$,

где A, B, L, M — дифференциальные операторы (обыкновенные или с частными производными).

Для сложения элементов необходимо приводить их к общему знаменателю, находя общие кратные (не обязательно наименьшие) знаменателей.

$F(\partial_x) \equiv F(X)$ — результат применения этой конструкции к кольцу $F[\partial_x] \equiv F[X]$, $X = \frac{d}{dx}$.

Подтело “рациональных” элементов $\mathcal{F}_1((\partial_x))$

O. Ore, *Linear equations in non-commutative fields*, Ann. of Math. **32** (1931), 463–477.
“тело частных Оре” — аналог конструкции поля частных области целостности в коммутативной алгебре:
рассматриваются формальные элементы вида
$L^{-1} \cdot M$ или $B \cdot A^{-1}$,
где A, B, L, M — дифференциальные операторы (обыкновенные или с частными производными).
Для сложения элементов необходимо приводить их к общему знаменателю, находя общие кратные (не обязательно наименьшие) знаменателей.
$F(\partial_x) \equiv F(X)$ — результат применения этой конструкции к кольцу $F[\partial_x] \equiv F[X]$, $X = \frac{d}{dx}$.
Аналогично, результат применения конструкции Оре к $\mathcal{F}_2[\partial_y, \partial_x]$ обозначается $\mathcal{F}_2(\partial_y, \partial_x)$.

Почти коммутирующие тройки LPDO, dim=2

Рассмотрим L_1, $L_2 \in F[\partial_x, \partial_y]$ и оператор Шредингера $H = -\partial_x^2 - \partial_y^2 + u(x, y)$, такие, что

$$[L_1, L_2] = P_0 \cdot H, \quad [L_1, H] = P_1 \cdot H, \quad [L_2, H] = P_2 \cdot H \qquad (2)$$

для некоторых $P_0, P_1, P_2 \in F[\partial_x, \partial_y]$.

Почти коммутирующие тройки LPDO, dim=2

Рассмотрим L_1, $L_2 \in F[\partial_x, \partial_y]$ и оператор Шредингера $H = -\partial_x^2 - \partial_y^2 + u(x, y)$, такие, что

$$[L_1, L_2] = P_0 \cdot H, \quad [L_1, H] = P_1 \cdot H, \quad [L_2, H] = P_2 \cdot H \qquad (2)$$

для некоторых $P_0, P_1, P_2 \in F[\partial_x, \partial_y]$.

Theorem (аналог теоремы Берчнала-Чаунди)

Операторы L_1 и L_2, удовлетворяющие уравнениям (2), связаны полиномиальным соотношением $Q(L_1, L_2) = 0 (mod\ H)$ (Q — с постоянными коэффициентами).

Почти коммутирующие тройки LPDO, dim=2

Рассмотрим L_1, $L_2 \in F[\partial_x, \partial_y]$ и оператор Шредингера $H = -\partial_x^2 - \partial_y^2 + u(x, y)$, такие, что

$$[L_1, L_2] = P_0 \cdot H, \quad [L_1, H] = P_1 \cdot H, \quad [L_2, H] = P_2 \cdot H \tag{2}$$

для некоторых $P_0, P_1, P_2 \in F[\partial_x, \partial_y]$.

Theorem (аналог теоремы Берчнала-Чаунди)

Операторы L_1 и L_2, удовлетворяющие уравнениям (2), связаны полиномиальным соотношением $Q(L_1, L_2) = 0(mod\ H)$ (Q — с постоянными коэффициентами).

Далее для простоты мы будем работать с $H = -\partial_x \partial_y + u$.

Связь с телом Оре отношений ЛОДО

Введем

$$M = -X^{-1} \cdot H = Y - X^{-1} \cdot u \in \mathcal{F}_2(X)[Y], \tag{3}$$

где $H = -\partial_x \partial_y + u = -XY + u$.

Связь с телом Оре отношений ЛОДО

Введем

$$M = -X^{-1} \cdot H = Y - X^{-1} \cdot u \in \mathcal{F}_2(X)[Y], \qquad (3)$$

где $H = -\partial_x \partial_y + u = -XY + u$.
Разделим с остатком L_1 и L_2 на M в кольце $\mathcal{F}_2(X)[Y]$:

$$L_1 - Q_1 \cdot M = R_1 \in \mathcal{F}_2(X), \quad L_2 - Q_2 \cdot M = R_2 \in \mathcal{F}_2(X) \qquad (4)$$

с $Q_i \in \mathcal{F}_2(X)[Y]$.

Связь с телом Оре отношений ЛОДО

Введем

$$M = -X^{-1} \cdot H = Y - X^{-1} \cdot u \in \mathcal{F}_2(X)[Y], \qquad (3)$$

где $H = -\partial_x \partial_y + u = -XY + u$.
Разделим с остатком L_1 и L_2 на M в кольце $\mathcal{F}_2(X)[Y]$:

$$L_1 - Q_1 \cdot M = R_1 \in \mathcal{F}_2(X), \quad L_2 - Q_2 \cdot M = R_2 \in \mathcal{F}_2(X) \qquad (4)$$

с $Q_i \in \mathcal{F}_2(X)[Y]$.

Theorem

Если L_1, L_2, H — почти коммутирующая тройка, то

1. $[R_1, R_2] = 0$ *в* $\mathcal{F}_2(X)$;
2. $[R_1, M] = [R_2, M] = 0$ *в* $\mathcal{F}_2(X)[Y]$;
3. *если существует полином* $Q(L_1, L_2)$ *с постоянными коэффициентами, такой, что* $Q(L_1, L_2) = 0 \ (mod \ H)$ *в* $\mathcal{F}_2[X, Y]$, *то* $Q(R_1, R_2) = 0$ *в* $\mathcal{F}_2(X)$.

Преобразования, упрощающие вид почти коммутирующих троек операторов

Преобразования, упрощающие вид почти коммутирующих троек операторов

- замена $\widehat{H} = fH$, где $f(x, y) \in \mathcal{F}_2$.

Преобразования, упрощающие вид почти коммутирующих троек операторов

- замена $\widehat{H} = fH$, где $f(x, y) \in \mathcal{F}_2$.
- Для $H = -\partial_x \partial_y + u$, упрощаем вид

$$L = L_{(1)}(X) + L_{(2)}(Y) + L_{(1,2)}(X, Y) + a_{00}(x, y),$$

вычитая из него $P \cdot H$, получаем

$$\widehat{L} = \sum_{k=1}^{n} p_k(x, y) X^k + \sum_{k=1}^{m} q_k(x, y) Y^k + p_{00}(x, y), \qquad (5)$$

Преобразования, упрощающие вид почти коммутирующих троек операторов

- замена $\widehat{H} = fH$, где $f(x, y) \in \mathcal{F}_2$.
- Для $H = -\partial_x \partial_y + u$, упрощаем вид
$$L = L_{(1)}(X) + L_{(2)}(Y) + L_{(1,2)}(X, Y) + a_{00}(x, y),$$
вычитая из него $P \cdot H$, получаем
$$\widehat{L} = \sum_{k=1}^{n} p_k(x, y) X^k + \sum_{k=1}^{m} q_k(x, y) Y^k + p_{00}(x, y), \qquad (5)$$
- приведение старших коэффициентов p_n, q_m к постоянным с помощью замен независимых переменных x, y.

Вспомогательные теоремы

Theorem

Если операторы M, R_1, R_2 попарно коммутируют, т.е. $[M, R_1] = [M, R_2] = [R_1, R_2] = 0$, и $\operatorname{ord} R_1 = 1$, то существуют такие постоянные c_0, c_1, $c_2, \dots,$ что

$$R_2 = \sum_{i=0}^{\infty} c_i R_1^{k-i}. \tag{6}$$

(доказывается по схеме И.Шура).

Вспомогательные теоремы

Theorem

Если операторы M, R_1, R_2 попарно коммутируют, т.е. $[M, R_1] = [M, R_2] = [R_1, R_2] = 0$*, и* $\operatorname{ord} R_1 = 1$*, то существуют такие постоянные* c_0, c_1, $c_2, \ldots,$ *что*

$$R_2 = \sum_{i=0}^{\infty} c_i R_1^{k-i}. \tag{6}$$

(доказывается по схеме И.Шура).

Lemma

Если коммутируют $P \in \mathcal{F}_2((X))$ *порядка* n *и* M*, т.е.* $[P, M] = 0$ *в кольце* $\mathcal{F}_2((X))[Y]$*, то* $R = \sqrt[n]{P}$ *(корень степени* n *из оператора* P*) также коммутирует с* M*:* $[R, M] = 0$*.*

БЧ-теорема для почти коммутирующих троек

Theorem

Для пары операторов L_1, $L_2, \in \mathcal{F}_2[X, Y]$ и $H = -\partial_x \partial_y + u$, образующих почти коммутирующую тройку, существует полином $Q(L_1, L_2)$ с постоянными коэффициентами, такой, что $Q(L_1, L_2) = S \cdot H$, $S \in \mathcal{F}_2[X, Y]$.

Почти коммутирующие пары и теоремы сложения. Операторы порядка (2,2)

$$L = \sum_{k=1}^{2} p_k(x,y)X^k + \sum_{k=1}^{2} q_k(x,y)Y^k + p_{00}(x,y), \qquad (7)$$

Почти коммутирующие пары и теоремы сложения. Операторы порядка (2,2)

$$L = \sum_{k=1}^{2} p_k(x,y)X^k + \sum_{k=1}^{2} q_k(x,y)Y^k + p_{00}(x,y), \tag{7}$$

$p_2 = q_2 = 1$ (либо $p_2 = 1$, $q_2 = -1$). Тогда:

Почти коммутирующие пары и теоремы сложения. Операторы порядка (2,2)

$$L = \sum_{k=1}^{2} p_k(x,y)X^k + \sum_{k=1}^{2} q_k(x,y)Y^k + p_{00}(x,y), \qquad (7)$$

$p_2 = q_2 = 1$ (либо $p_2 = 1$, $q_2 = -1$). Тогда:

- $u_{xx} - u_{yy} = 0$, т.е.

$$u = u_1\left(\frac{x+y}{2}\right) + u_2\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad (8)$$

$\Leftrightarrow$ разделение переменных в операторе Шредингера $H = -XY + u$ в координатах $\hat{x} = (x+y)/2$, $\hat{y} = (x-y)/2$.

Почти коммутирующие пары и теоремы сложения. Операторы порядка (2,2)

$$L = \sum_{k=1}^{2} p_k(x,y)X^k + \sum_{k=1}^{2} q_k(x,y)Y^k + p_{00}(x,y), \tag{7}$$

$p_2 = q_2 = 1$ (либо $p_2 = 1$, $q_2 = -1$). Тогда:

- $u_{xx} - u_{yy} = 0$, т.е.
$$u = u_1\left(\frac{x+y}{2}\right) + u_2\left(\frac{x-y}{2}\right) \tag{8}$$
$\Leftrightarrow$ разделение переменных в операторе Шредингера $H = -XY + u$ в координатах $\hat{x} = (x+y)/2$, $\hat{y} = (x-y)/2$.
- В невырожденном случае остальные условия сводятся к решению функционального уравнения
$$u = u_1((x+y)/2) + u_2((x-y)/2) = \alpha'(x)\beta'(y)\phi'(\alpha(x) - \beta(y)). \tag{9}$$

Почти коммутирующие пары и теоремы сложения. Операторы порядка (2,2)

Интегрируя
$u = u_1((x+y)/2) + u_2((x-y)/2) = \alpha'(x)\beta'(y)\phi'(\alpha(x)-\beta(y))$,
получим функциональное уравнение

$$\Phi(\alpha(x)-\beta(y)) = U_1\left(\frac{x+y}{2}\right) - U_2\left(\frac{x-y}{2}\right) + U_3(x) + U_4(y) \tag{10}$$

для 7 функций одного переменного.

Почти коммутирующие пары и теоремы сложения. Операторы порядка (2,2)

Интегрируя
$u = u_1((x+y)/2) + u_2((x-y)/2) = \alpha'(x)\beta'(y)\phi'(\alpha(x)-\beta(y))$,
получим функциональное уравнение

$$\Phi(\alpha(x)-\beta(y)) = U_1\left(\frac{x+y}{2}\right) - U_2\left(\frac{x-y}{2}\right) + U_3(x) + U_4(y) \tag{10}$$

для 7 функций одного переменного.

Примеры получаются логарифмированием из тождеств типа

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y),$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2\operatorname{sh}\frac{x+y}{2}\operatorname{ch}\frac{x-y}{2},$$

Почти коммутирующие пары и теоремы сложения. Операторы порядка (2,2)

$$\Phi(\alpha(x) - \beta(y)) = U_1\left(\frac{x+y}{2}\right) - U_2\left(\frac{x-y}{2}\right) + U_3(x) + U_4(y)$$

также легко получить из

$$\mathrm{sn}(x+y)\,\mathrm{sn}(x-y) = \frac{\mathrm{sn}^2 x - \mathrm{sn}^2 y}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 x\, \mathrm{sn}^2 y}:$$

$$\wp(u) - \wp(v) = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)},$$

$$\wp(u+v) - \wp(u-v) = -\frac{\wp'(u)\wp'(v)}{(\wp(u) - \wp(v))^2}.$$

$$\theta_3(z+y)\theta_3(z-y)\theta_3^2 = \theta_3^2(y)\theta_3^2(z) + \theta_1^2(z)\theta_1^2(y).$$

Замечания

Замечания

- Для случая $p_2 = 1$, $q_2 = -1$ имеем $u_{xx} + u_{yy} = 0$ и "гармоническую теорему сложения"

$$\Phi(\alpha(x) - \beta(y)) = U(x, y) + U_3(x) + U_4(y) \qquad (11)$$

(для гармонической функции $U(x, y)$).

Замечания

- Для случая $p_2 = 1$, $q_2 = -1$ имеем $u_{xx} + u_{yy} = 0$ и "гармоническую теорему сложения"

$$\Phi(\alpha(x) - \beta(y)) = U(x, y) + U_3(x) + U_4(y) \qquad (11)$$

(для гармонической функции $U(x, y)$).

- Условие почти коммутирования $[L, H] = S \cdot H$ эквивалентно $L_1 \cdot H = H \cdot L$.

Замечания

- Для случая $p_2 = 1$, $q_2 = -1$ имеем $u_{xx} + u_{yy} = 0$ и "гармоническую теорему сложения"

$$\Phi(\alpha(x) - \beta(y)) = U(x, y) + U_3(x) + U_4(y) \qquad (11)$$

(для гармонической функции $U(x, y)$).

- Условие почти коммутирования $[L, H] = S \cdot H$ эквивалентно $L_1 \cdot H = H \cdot L$.
Для $dim \geq 3$ изучено!

Замечания

- Для случая $p_2 = 1$, $q_2 = -1$ имеем $u_{xx} + u_{yy} = 0$ и "гармоническую теорему сложения"

$$\Phi(\alpha(x) - \beta(y)) = U(x, y) + U_3(x) + U_4(y) \qquad (11)$$

  (для гармонической функции $U(x, y)$).

- Условие почти коммутирования $[L, H] = S \cdot H$ эквивалентно $L_1 \cdot H = H \cdot L$.
  Для $dim \geq 3$ изучено!
  Случай $dim = 2$ пропущен...

Замечания

- Для случая $p_2 = 1$, $q_2 = -1$ имеем $u_{xx} + u_{yy} = 0$ и "гармоническую теорему сложения"
$$\Phi(\alpha(x) - \beta(y)) = U(x, y) + U_3(x) + U_4(y) \qquad (11)$$
(для гармонической функции $U(x, y)$).

- Условие почти коммутирования $[L, H] = S \cdot H$ эквивалентно $L_1 \cdot H = H \cdot L$.
Для $dim \geq 3$ изучено!
Случай $dim = 2$ пропущен...

- Исследование операторов L порядков, больших (2,2), почти коммутирующих с H, приводит к нетривиальным теоремам сложения (без расщепления оператора Шредингера) и связано с интегрируемыми уравнениями типа ВН и КП.

Коммутирующие элементы тела Оре $\mathcal{F}_1(X)$

Theorem (теорема Берчнала-Чаунди, 1924)

ЛОДО L_1 *и* L_2*, такие, что* $[L_1, L_2] = 0$*, связаны полиномиальным соотношением* $Q(L_1, L_2) = 0$ *с постоянными коэффициентами.*

Коммутирующие элементы тела Оре $\mathcal{F}_1(X)$

Theorem (теорема Берчнала-Чаунди, 1924)

ЛОДО L_1 *и* L_2, *такие, что* $[L_1, L_2] = 0$, *связаны полиномиальным соотношением* $Q(L_1, L_2) = 0$ *с постоянными коэффициентами.*

НЕ ВСЕГДА ВЕРНА: для операторов $L_1 = a(x)$, $L_2 = b(x)$ порядка 0 не обязательно есть полиномиальное соотношение $Q(L_1, L_2) = 0$!

Theorem (теорема Берчнала-Чаунди, 1924)

ЛОДО L_1 и L_2, такие, что $[L_1, L_2] = 0$, связаны полиномиальным соотношением $Q(L_1, L_2) = 0$ с постоянными коэффициентами.

НЕ ВСЕГДА ВЕРНА: для операторов $L_1 = a(x)$, $L_2 = b(x)$ порядка 0 не обязательно есть полиномиальное соотношение $Q(L_1, L_2) = 0$!

В теле Оре $\mathcal{F}_1(X)$ много операторов порядка 0!

Коммутирующие элементы тела Оре $\mathcal{F}_1(X)$

Theorem (теорема Берчнала-Чаунди, 1924)

ЛОДО L_1 и L_2, такие, что $[L_1, L_2] = 0$, связаны полиномиальным соотношением $Q(L_1, L_2) = 0$ с постоянными коэффициентами.

НЕ ВСЕГДА ВЕРНА: для операторов $L_1 = a(x)$, $L_2 = b(x)$ порядка 0 не обязательно есть полиномиальное соотношение $Q(L_1, L_2) = 0$!

В теле Оре $\mathcal{F}_1(X)$ много операторов порядка 0!

K.R. Goodearl, *Centralizers in differential, pseudo-differential, and fractional differential operator rings*, Rocky Mountain Journal of Mathematics. **13:4** (1983), 573–618:

Коммутирующие элементы тела Оре $\mathcal{F}_1(X)$

Theorem (теорема Берчнала-Чаунди, 1924)

ЛОДО L_1 *и* L_2*, такие, что* $[L_1, L_2] = 0$*, связаны полиномиальным соотношением* $Q(L_1, L_2) = 0$ *с постоянными коэффициентами.*

НЕ ВСЕГДА ВЕРНА: для операторов $L_1 = a(x)$, $L_2 = b(x)$ порядка 0 не обязательно есть полиномиальное соотношение $Q(L_1, L_2) = 0$!

В теле Оре $\mathcal{F}_1(X)$ много операторов порядка 0!

K.R. Goodearl, *Centralizers in differential, pseudo-differential, and fractional differential operator rings*, Rocky Mountain Journal of Mathematics. **13:4** (1983), 573–618:
теорема Resco, Small'a и Wadsworth'a, из которой вытекает теорема типа БЧ, когда поле коэффициентов — поле рациональных или алгебраических функций одного переменного.

БЧ-теорема для тела Оре $\mathcal{F}_1(X)$: контрпримеры порядка 0

Пусть $L_1 = A_1 \cdot B_1^{-1}$, $L_2 = A_2 \cdot B_2^{-1}$, где все ЛОДО A_i, B_i — порядка 1.
Можно локально положить, что $L_1 = x + p(x)(X - u(x))^{-1}$.

БЧ-теорема для тела Оре $\mathcal{F}_1(X)$: контрпримеры порядка 0

Пусть $L_1 = A_1 \cdot B_1^{-1}$, $L_2 = A_2 \cdot B_2^{-1}$, где все ЛОДО A_i, B_i — порядка 1.
Можно локально положить, что $L_1 = x + p(x)(X - u(x))^{-1}$.

Theorem

Возможны следующие случаи:

БЧ-теорема для тела Оре $\mathcal{F}_1(X)$: контрпримеры порядка 0

Пусть $L_1 = A_1 \cdot B_1^{-1}$, $L_2 = A_2 \cdot B_2^{-1}$, где все ЛОДО A_i, B_i — порядка 1.
Можно локально положить, что $L_1 = x + p(x)(X - u(x))^{-1}$.

Theorem

Возможны следующие случаи:

- $L_1 = x + (X - u(x))^{-1}$, $L_2 = a(x) + a'(x)(X - u(x))^{-1}$;

БЧ-теорема для тела Оре $\mathcal{F}_1(X)$: контрпримеры порядка 0

Пусть $L_1 = A_1 \cdot B_1^{-1}$, $L_2 = A_2 \cdot B_2^{-1}$, где все ЛОДО A_i, B_i — порядка 1.
Можно локально положить, что $L_1 = x + p(x)(X - u(x))^{-1}$.

Theorem

Возможны следующие случаи:

- $L_1 = x + (X - u(x))^{-1}$, $L_2 = a(x) + a'(x)(X - u(x))^{-1}$;
- $L_1 = x - (X - v(x))^{-1}$, $L_2 = a(x) - a'(x)(X - u(x))^{-1}$, $v = u - a''/a'$;

БЧ-теорема для тела Оре $\mathcal{F}_1(X)$: контрпримеры порядка 0

Пусть $L_1 = A_1 \cdot B_1^{-1}$, $L_2 = A_2 \cdot B_2^{-1}$, где все ЛОДО A_i, B_i — порядка 1.
Можно локально положить, что $L_1 = x + p(x)(X - u(x))^{-1}$.

Theorem

Возможны следующие случаи:

- $L_1 = x + (X - u(x))^{-1}$, $L_2 = a(x) + a'(x)(X - u(x))^{-1}$;
- $L_1 = x - (X - v(x))^{-1}$, $L_2 = a(x) - a'(x)(X - u(x))^{-1}$, $v = u - a''/a'$;
- $L_1 = x - (u \cdot x - 1)X^{-1}$, $L_2 = \frac{1}{x} + \frac{(u \cdot x - 1)}{x^2}(X - u(x))^{-1}$,

($u(x)$ — произвольная функция).

В последнем случае $L_1 L_2 = 1$.

БЧ-теорема для тела Оре $\mathcal{F}_1(X)$: контрпримеры порядка 0

Какое (неалгебраическое) соотношение возможно для операторов $L_1 = x + X^{-1}$, $L_2 = e^x + e^x X^{-1}$?

БЧ-теорема для тела Оре $\mathcal{F}_1(X)$: контрпримеры порядка 0

Какое (неалгебраическое) соотношение возможно для операторов $L_1 = x + X^{-1}$, $L_2 = e^x + e^x X^{-1}$?

$$L_2 = exp(L_1). \tag{12}$$

БЧ-теорема для тела Оре $\mathcal{F}_1(X)$: контрпримеры порядка 0

Какое (неалгебраическое) соотношение возможно для операторов $L_1 = x + X^{-1}$, $L_2 = e^x + e^x X^{-1}$?

$$L_2 = exp(L_1). \tag{12}$$

Верна ли теорема типа И.Шура о разложении L_2 по степеням L_1 во всех приведенных случаях?

БЧ-теорема для тела Оре $\mathcal{F}_1(X)$: контрпримеры порядка 0

Какое (неалгебраическое) соотношение возможно для операторов $L_1 = x + X^{-1}$, $L_2 = e^x + e^x X^{-1}$?

$$L_2 = exp(L_1). \tag{12}$$

Верна ли теорема типа И.Шура о разложении L_2 по степеням L_1 во всех приведенных случаях?
Для других случаев проверки трансцендентных соотношений типа (12) необходимо исследовать сходимость разложений в каждом члене по X^{-k}.

БЧ-теорема для тела Оре $\mathcal{F}_1(X)$: пример порядка 1

Theorem

Пусть $L_1 = X + p(x) \cdot (X - u(x))^{-1}$, $L_1 = X + q(x) \cdot (X - v(x))^{-1}$.
Тогда условие $[L_1, L_2] = 0$ *влечет (в невырожденном случае):*

БЧ-теорема для тела Оре $\mathcal{F}_1(X)$: пример порядка 1

Theorem

Пусть $L_1 = X + p(x) \cdot (X - u(x))^{-1}$, $L_1 = X + q(x) \cdot (X - v(x))^{-1}$. *Тогда условие* $[L_1, L_2] = 0$ *влечет (в невырожденном случае):*

- $q = p + c_1$, $u = (v(p + c_1) - c_2)/p$;
- $dp/dx = (-(c_1+p)(c_1 v^2 - 2c_2 v) + (c_1 p^2 - c_2^2) - c_3 p)/(c_1 v - c_2)$;
- $dv/dx = 2p - v(-c_2 v + c_3)/c_2 + c_4(-c_1 v + c_2)$;

  где c_k — *константы;*

БЧ-теорема для тела Оре $\mathcal{F}_1(X)$: пример порядка 1

Theorem

Пусть $L_1 = X + p(x) \cdot (X - u(x))^{-1}$, $L_1 = X + q(x) \cdot (X - v(x))^{-1}$.
Тогда условие $[L_1, L_2] = 0$ *влечет (в невырожденном случае):*

- $q = p + c_1$, $u = (v(p + c_1) - c_2)/p$;
- $dp/dx = (-(c_1+p)(c_1 v^2 - 2c_2 v) + (c_1 p^2 - c_2^2) - c_3 p)/(c_1 v - c_2)$;
- $dv/dx = 2p - v(-c_2 v + c_3)/c_2 + c_4(-c_1 v + c_2)$;
  где c_k *— константы;*
- *При этом выражение*
  $(p^2 c_1^2 c_2 + pv^2 c_1^2 c_2 - pvc_1^2(c_1 c_2 c_4 + c_3) + pc_1^2 c_2^2 c_4 + v^2 c_1^3 c_2 + vc_1(-2c_1 c_2^2 + c_1 c_2 c_3 c_4 - c_2^3 c_4 - c_2 c_4 + c_3^2) + c_2(c_1 c_2^2 - c_1 c_2 c_3 c_4 + c_2^3 c_4 + c_2 c_4 - c_3^2))/(vc_1 c_2 - c_2^2)$ *является законом сохранения динамической системы* (p, v).

Theorem

Пусть $L_1 = X + p(x)\cdot(X - u(x))^{-1}$, $L_1 = X + q(x)\cdot(X - v(x))^{-1}$. *Тогда условие* $[L_1, L_2] = 0$ *влечет (в невырожденном случае):*

- $q = p + c_1$, $u = (v(p + c_1) - c_2)/p$;
- $dp/dx = (-(c_1+p)(c_1v^2-2c_2v)+(c_1p^2-c_2^2)-c_3p)/(c_1v-c_2)$;
- $dv/dx = 2p - v(-c_2v + c_3)/c_2 + c_4(-c_1v + c_2)$;
  где c_k *— константы;*
- *При этом выражение* $(p^2c_1^2c_2 + pv^2c_1^2c_2 - pvc_1^2(c_1c_2c_4 + c_3) + pc_1^2c_2^2c_4 + v^2c_1^3c_2 + vc_1(-2c_1c_2^2 + c_1c_2c_3c_4 - c_2^3c_4 - c_2c_4 + c_3^2) + c_2(c_1c_2^2 - c_1c_2c_3c_4 + c_2^3c_4 + c_2c_4 - c_3^2))/(vc_1c_2 - c_2^2)$ *является законом сохранения динамической системы* (p, v).
- *Существует многочлен* Q *степени 3 с постоянными коэффициентами, такой, что* $Q(L_1, L_2) = 0$;