О ФУЛЛЕРЕНЕ C_{60} И ДРУГИХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКАХ С СИММЕТРИЯМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

НИКОЛАЙ АБРОСИМОВ

Мы рассматриваем выпуклые трехмерные многогранники в пространствах постоянной кривизны: евклидовом E^3, сферическом S^3 и гиперболическом H^3.

Определение. *Выпуклый многогранник* — это выпуклая комбинация (в соответствующей геометрии) конечного набора точек, называемых *вершинами многогранника*.

Ребро многогранника — это отрезок геодезической, соединяющей пару его соседних вершин. *Грань* — это геодезический многоугольник, лежащий на гиперплоскости, проходящей через соответствующие вершины.

Такое определение позволяет корректно находить длины ребер, двугранные углы между гранями, «плоские» углы между ребрами, площадь поверхности многогранника и его объем. Если на время забыть о геометрии, то каждый многогранник имеет еще комбинаторную структуру.

Определение. Два многогранника имеют один и тот же *комбинаторный тип*, если их реберные скелеты эквивалентны как топологические графы.

Наша цель — получение точных формул для объемов сферических и гиперболических многогранников заданного комбинаторного типа. Нами ранее были получены точные формулы для объемов сферического и гиперболического тетраэдра, сферических и гиперболических октаэдров с различными симметриями, сферических гексаэдров с симметриями и др. (подробнее об этом можно прочитать в нашей совместной статье с А.Д. Медных [1]). Указанные формулы выражают объем через двугранные углы. На пути к получению этих формул требуется установить теоремы существования для многогранников соответствующего типа, то есть необходимые и достаточные условия, при каких значениях двугранных углов многогранник заданного типа реализуется в той или иной геометрии. Также требуется установить вспомогательные соотношения между длинами и углами. При этом в общем случае получить формулу объема крайне сложно. Но если допустить, что многогранник имеет определенную симметрию, то работа упрощается, а формула объема в результате имеет более красивый вид. Можно сказать, что впервые эту роль симметрии обнаружил сам Лобачевский, вычислив объем идеального гиперболического тетраэдра, который по определению является симметричным.

Определение. *Фуллерен (хим.)* — молекулярное соединение, принадлежащее классу аллотропных форм углерода и представляющее собой выпуклые замкнутые многогранники, составленные из четного числа трехкоординированных атомов углерода, имеющие пятиугольные и шестиугольные грани.

Теорема Эйлера для многогранников. Пусть v — число вершин, e — число ребер и f — число граней замкнутого многогранника. Тогда

$$v - e + f = 2.$$

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам при Президенте РФ (грант МК-9572.2016.1).

Из приведенной теоремы непосредственно следует, что для существования замкнутого многогранника, имеющего только пятиугольные и шестиугольные грани, необходимо, чтобы пятиугольных граней было ровно 12, а шестиугольных $v/2 - 10$.

Наименьшим из фуллеренов является так называемый *бакминстерфуллерен* или C_{60} (см. Рис. 1). Как видно из названия, эта молекула состоит из шестидесяти атомов углерода.

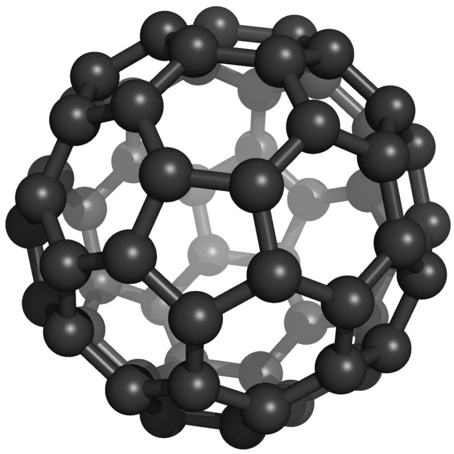

Рис 1. *Бакминстерфуллерен или* C_{60}

Многогранник C_{60} может быть получен из правильного икосаэдра усечением всех его двенадцати вершин с сохранением симметрии, то есть так, чтобы полученный в результате многогранник имел ту же группу симметрий, что и исходный икосаэдр (см. Рис. 2).

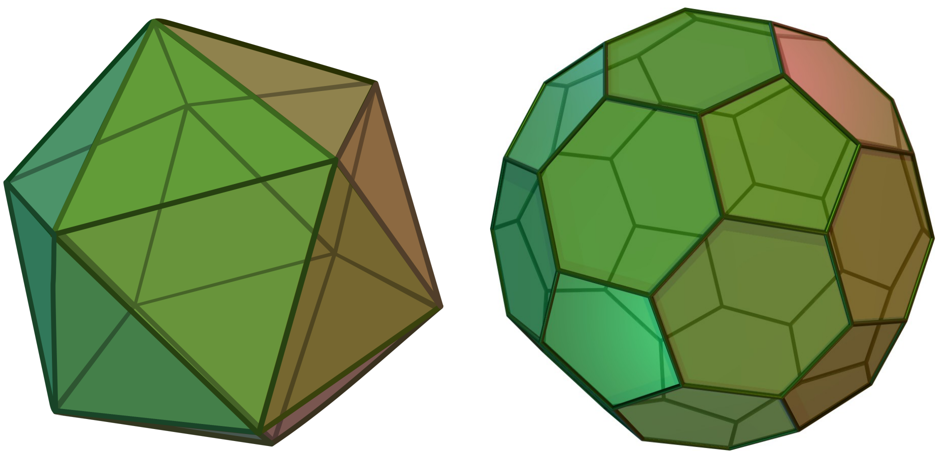

Рис 2. *Правильный икосаэдр и усеченный икосаэдр —* C_{60}

Таким образом, вращение пятого порядка вокруг оси, проходящей через центр C_{60} и середину любой из его пятиугольных граней, переводит C_{60} в себя. Также сохраняет C_{60} и вращение третьего порядка вокруг оси, проходящей через его центр и середину любой из его шестиугольных граней. Наконец, имеется зеркальная симметрия относительно плоскости (гиперплоскости в H^3), проходящей через середину любого ребра между пятиугольной и шестиугольной гранями ортогонально этому ребру. Иными словами, C_{60} обладает $(2,3,5)$-*симметрией*.

Группа симметрий C_{60} в H^3 или E^3 (группа икосаэдра) порождается двумя эллиптическими элементами: вращением пятого порядка и вращением третьего порядка. При этом угол между их осями удовлетворяет соотношению

$$\tan\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Как видно из определения, многогранник C_{60} имеет 12 правильных пятиугольных граней и 20 полуправильных шестиугольных граней (имеющих симметрию третьего порядка).

Ребра — двух типов: между двумя шестиугольными гранями (обозначим такие ребра через ℓ) и между пяти- и шестиугольной гранями (такие обозначим через L). При этом окрестности всех 60 вершин устроены одинаково: в каждой вершине сходятся два ребра L и одно ℓ.

Фуллерен C_{60} является полуправильным многогранником и одним из тринадцати архимедовых тел.

Нами получены следующие утверждения.

Теорема 1. В фуллерен C_{60} в E^3 может быть вписан шар, касающийся всех его граней, тогда и только тогда, когда длины его ребер двух типов удовлетворяют соотношению

$$\frac{\ell}{L} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

Также показано, что полученное соотношение является решением изопериметрической задачи. То есть при таком соотношении между длинами ребер максимизируется объем евклидова фуллерена C_{60}, нормированный по площади поверхности.

Теорема 2. В фуллерен C_{60} в H^3 может быть вписан шар, касающийся всех его граней, тогда и только тогда, когда длины его ребер двух типов удовлетворяют соотношению

$$\frac{\operatorname{sh}\ell/2}{\operatorname{sh}L/2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

Также показано, что полученное соотношение является решением изопериметрической задачи. То есть при таком соотношении между длинами ребер максимизируется объем гиперболического фуллерена C_{60}, нормированный по площади поверхности.

Отдельный интерес представляет фуллерен C_{60} с прямыми двугранными углами. Несложно показать, что такой многогранник реализуется в гиперболическом пространстве, причем все его плоские углы между ребрами, имеющими общую вершину, тоже прямые. Копиями такого многогранника можно замостить все пространство H^3 без самопересечений.

Теорема 3. Площадь поверхности гиперболического фуллерена C_{60} с прямыми углами равна $46\,\pi$.

Рассмотрим еще раз правильный икосаэдр и полученный из него усечением вершин фуллерен C_{60} (Рис. 2). Двугранные углы икосаэда соответствуют двугранным углам между парами шестиугольных граней C_{60}. Удивительный факт: хотя гиперболический C_{60} с прямыми двугранными углами существует, но правильный икосаэдр с прямыми двугранными углами не может быть реализован в H^3. Предположим, что это не так, и прямоугольный гиперболический икосаэдр существует. Тогда рассмотрим его сечение сферой достаточно малого радиуса с центром в любой его вершине. В сечении получим сферический пятиугольник с прямыми углами, что невозможно, так как сумма углов в любом сферическом n-угольнике больше $(n-2)\,\pi$.

Список литературы

[1] Abrosimov N., Mednykh A. “Volumes of polytopes in constant curvature spaces”, *Fields Institute Communications*, Vol. 70, 1–26 (2014). arXiv:1302.4919 [math.MG]

Абросимов Николай Владимирович,
Институт математики им. С.Л. Соболева,
пр. Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия

Лаборатория квантовой топологии,
Челябинский государственный университет,
ул. Бр. Кашириных 129,
Челябинск, 454001, Россия
E-mail address: abrosimov@math.nsc.ru