ВЕКТОРНОЕ РАССЛОЕНИЕ АБЕЛЕВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ НАД ПРОСТРАНСТВАМИ ТЕЙХМЮЛЛЕРА ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПРОКОЛАМИ

ВИКТОР ВАСИЛЬЕВИЧ ЧУЕШЕВ, АЛЕНА АЛЕКСЕЕВНА КАЗАНЦЕВА

Теория функций на компактных римановых поверхностях существенно отличается от теории функций на конечных римановых поверхностях даже для класса абелевых (однозначных) дифференциалов. Пусть F — фиксированная гладкая компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$, с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$ для $\pi_1(F)$, а F_0 — компактная риманова поверхность с фиксированной комплексно-аналитической структурой на F. Зафиксируем различные точки $P_1, \ldots, P_n \in F$. Пусть $F' = F \backslash \{P_1, \ldots, P_n\}$ — поверхность типа $(g,n),\ n \geq 1,\ g \geq 2$, и Γ' — фуксова группа первого рода, инвариантно действующая в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $F_0' = U/\Gamma'$. Любая другая комплексно-аналитическая структура на F' задается некоторым дифференциалом Бельтрами μ на F_0', т. е. выражением вида $\mu(z)d\overline{z}/dz$, которое инвариантно относительно выбора локального параметра на F_0', где $\mu(z)$ — комплекснозначная функция на F_0'. Эту структуру на F' будем обозначать через F'_μ. *q-дифференциалом* относительно фуксовой группы Γ' называется дифференциал $\omega(z)dz^q$ такой, что $\omega(Tz)(T'z)^q = \omega(z), z \in U, T \in \Gamma'$. Дивизором на F_μ назовем формальное произведение $D = P_1^{n_1} \ldots P_k^{n_k}, P_j \in F_\mu, n_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, \ldots, k$.

Обозначим через $\Omega^q(\frac{1}{Q_1^{\alpha_1} \ldots Q_l^{\alpha_l} Q_{l+1} \ldots Q_s}; F_\mu)$ при $q > 1$ пространство q-дифференциалов на F_μ, кратных дивизору $\frac{1}{Q_1^{\alpha_1} \ldots Q_l^{\alpha_l} Q_{l+1} \ldots Q_s}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \geq 2,\ s \geq 1,\ 0 \leq l \leq s$ и точки $Q_1, \ldots, Q_s$ попарно различны, а через $\Omega^q(1; F_\mu)$ — подпространство голоморфных q-дифференциалов на F_μ.

Рассмотрим наборы q-дифференциалов:

$$\tau_{q,Q_1}^{(1)}, \tau_{q,Q_1}^{(2)}, \ldots, \tau_{q,Q_1}^{(\alpha_1)}, \ldots, \tau_{q,Q_l}^{(1)}, \tau_{q,Q_l}^{(2)}, \ldots, \tau_{q,Q_l}^{(\alpha_l)}, \tau_{q,Q_1 Q_{l+1}}, \ldots, \tau_{q,Q_1 Q_s}, \tag{1}$$

или

$$\tau_{q,Q_1}^{(1)}, \tau_{q,Q_1}^{(2)}, \ldots, \tau_{q,Q_1}^{(\alpha_1)}, \ldots, \tau_{q,Q_l}^{(1)}, \tau_{q,Q_l}^{(2)}, \ldots, \tau_{q,Q_l}^{(\alpha_l)}, \tau_{q,Q_{l+1}}, \ldots, \tau_{q,Q_s}, \tag{2}$$

при $l \geq 1, q > 1$;

$$\tau_{q,Q_1}^{(1)}, \tau_{q,Q_2 Q_1}, \ldots, \tau_{q,Q_s Q_1}, \tag{3}$$

или

$$\tau_{q,Q_1}^{(1)}, \ldots, \tau_{q,Q_s}^{(1)}, \tag{4}$$

при $l = 0, q > 1$.

Теорема 1. *Векторное расслоение $E = \bigcup\limits_{[\mu]} \Omega^q(\frac{1}{Q_1^{\alpha_1} \ldots Q_l^{\alpha_l} Q_{l+1} \ldots Q_s}; F_\mu)/\Omega^q(1; F_\mu)$ будет голоморфным векторным расслоением ранга $\alpha_1 + \cdots + \alpha_l + s - l$ над $\mathbb{T}_g$, где $g \geq 2,\ \alpha_1, ..., \alpha_l \geq 2,\ s \geq 1,\ 0 \leq l \leq s,\ q > 1$ и точки $Q_1, \ldots, Q_s$ попарно различны. При этом классы смежности q-дифференциалов из наборов $(1), (2), (3), (4)$ дают базис локально голоморфных сечений этого расслоения над $\mathbb{T}_g$.*

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} E' = \cup \dfrac{\Omega^q(\frac{1}{Q_1^{\alpha_1}\ldots Q_l^{\alpha_l}Q_{l+1}\ldots Q_s}, F'_\mu) \cap M_1}{\Omega^q(1, F'_\mu) \cap M_1} & \to & \cup \dfrac{\Omega^q(\frac{1}{Q_1^{\alpha_1}\ldots Q_l^{\alpha_l}Q_{l+1}\ldots Q_s}, F_\mu)}{\Omega^q(1, F_\mu)} = E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T}_{g,n} & \to & \mathbb{T}_g. \end{array} \tag{5}$$

Теорема 2. *Диаграмма (5) является коммутативной диаграммой из голоморфных векторных расслоений, у которых соответствующие слои изоморфны, и голоморфных $n!$-листных отображений над базами из пространств Тейхмюллера.*

References

[1] Чуешев В.В., Якубов Э.Х. “Мультипликативные точки Вейерштрасса на компактной римановой поверхности”, *Сиб. мат. журн.*, Том 43, №6, 1408-1429 (2002).

[2] Тулина М.И., Чуешев В.В. “Дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности”. *Математические заметки.* Том 95, №3, 459-476 (2014).

Чуешев Виктор Васильевич,
Кемеровский государственный университет,
ул. Красная, 6,
650043, Кемерово, Россия
E-mail address: vvchueshev@ngs.ru

Казанцева Алена Алексеевна,
Горно-Алтайский государственный университет,
ул. Ленкина, 1,
649000, Горно-Алтайск, Россия
E-mail address: albesik@mail.ru