ТЕОРЕМА ОБ ОБЩЕМ ПОЛОЖЕНИИ ДЛЯ ПАР ФРАКТАЛЬНЫХ КРИВЫХ

КИРИЛЛ ГЛЕБОВИЧ КАМАЛУТДИНОВ

Пусть имеется семейство $S = \{\gamma_1(x), \gamma_2(x) : x \in X\}$ пар кривых, параметризованное $X \subseteq \mathbb{R}^m$. Каково множество тех параметров $x \in X$, при которых кривые $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ не пересекаются? Следующая теорема об общем положении для пар фрактальных кривых позволяет выделить достаточное условие для того, чтобы кривые $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ не пересекались в общем положении (т. е. при почти всех $x \in X$).

Теорема 1. *Пусть* $X \subseteq \mathbb{R}^m$. *Пусть функции* $\varphi(x,t)$, $\psi(x,t)$: $X \times I \to \mathbb{R}^n$ — α*-гельдеровы по* $t \in I = [0,1]$, *а функция* $f(x,u) = \varphi(x,t) - \psi(x,s)$, *где* $u = (t,s) \in U = I^2$, *удовлетворяет условию* $|x_1 - x_2| \leq L\,|f(x_1,u) - f(x_2,u)|^\beta$ *при любых* $x_1, x_2 \in X$, $u \in U$. *Тогда множество* $X_1 = \{x \in X|\ \varphi(x,I) \cap \psi(x,I) \neq \varnothing\}$ *имеет хаусдорфову размерность* $\dim X_1 \leq \dfrac{2}{\alpha\beta}$.

Как видно из теоремы 1, при $\dfrac{2}{\alpha\beta} < \dim X$ кривые $\varphi(x,I)$ и $\psi(x,I)$ в общем положении не пересекаются. Таким образом, эта теорема позволяет решить вопрос — можно ли с помощью малой деформации пары фрактальных кривых избавиться от их взаимопересечения.

Для самоподных кривых, являющихся аттракторами систем сжимающих подобий [1], параметр x может играть как роль преобразования пространства $\mathbb{R}^n$, так и роль внутренней деформации, меняющей параметры сжимающих отображений.

Размерностью подобия системы $S = \{S_1, \ldots, S_m\}$ сжимающих отображений называется решение s уравнения Морана: $\sum\limits_{i=1}^{m} (\mathrm{Lip}\ S_i)^s = 1$. Можно показать, что наибольший возможный показатель Гельдера для структурных параметризаций самоподобной кривой [2] равен $\dfrac{1}{s}$, где s — ее размерность подобия.

Поэтому, в частном случае, когда: кривые самоподобны, одна из них неподвижна, а другая подвергается параллельным переносам — они не пересекаются в общем положении, если их размерности подобия меньше $\dfrac{n}{2}$. То же самое верно для самоподобных кривых при $n = 3$, одна из которых подвергается гомотетии и повороту, а другая неподвижна.

Теорема об общем положении может быть использована также для оценки размерности множества тех параметров $x \in X$, при которых некоторая самоподобная кривая $\gamma(x)$ имеет самопересечения, в случае если соседние подкопии кривой пересекаются не более чем по одной точке.

Например, пусть параметр x задает параллельный перенос одной из подкопий кривой γ, соседние к которой подвергаются поворотам, необходимым для сохранения связности. Тогда кривая будет жордановой в общем положении, если ее размерность подобия меньше $\dfrac{n}{2}$, а коэффициенты подобия меньше $\dfrac{1}{3}$.

Список литературы

[1] Barnsley M.F. *Fractals everywhere.* Academic Press, (1988).

Поддержано грантом РФФИ №16-31-00138.

[2] Асеев В.В., Тетенов А.В., Кравченко А.С. “О самоподобных жордановых кривых на плоскости” *Сиб. матем. журн.*, Том. 44, №3, 481-492 (2003).

Камалутдинов Кирилл Глебович,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 4, г. Новосибирск, 630090, Россия
E-mail address: kirdan15@mail.ru