О НЕЕВКЛИДОВОЙ ВЕРСИИ ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНЕРА

ЕКАТЕРИНА СЕРГЕЕВНА КУДИНА

В одном из пространств постоянной кривизны $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{S}^3$ рассмотрим тетраэдр с длинами сторон a, b, c при одной из вершин и длинами a_1, b_1, c_1 противолежащих ребер. Согласно классической формуле Сервуа [1, с. 99] объем евклидова тетраэдра выражается как: $V = \frac{1}{6} a a_1 \delta sin\varphi$, где δ и φ — соответственно расстояние и угол между данными ребрами. Непосредственным следствием этого равенства является теорема Штейнера: объем тетраэдра не изменяется, если его противоположные ребра перемещать без изменения длины по прямым, содержащим эти ребра.

В неевклидовой геометрии аналог формулы Сервуа получен в работе [2]:

$$\tilde{V} = \operatorname{sh} a \operatorname{sh} a_1 \operatorname{sh} \delta \sin\varphi.$$

Здесь псевдообъем гиперболического тетраэдра определяется матрицей Грама данного тетраэдра

$$\tilde{V} = \sqrt{-\det G}.$$

Следствием этого равенства является теорема Штейнера для гиперболического тетраэдра: псевдобъем гиперболического тетраэдра не изменяется, если его противоположные ребра перемещать без изменения длины по прямым, содержащим эти ребра.

Аналогичный результат имеет место и в сферическом пространстве.

Для обычных объемов в гиперболическом и сферическом пространствах данная теорема не верна. Существуют соответствующие контрпримеры.

Список литературы

[1] Понарин Я.П. *Элементарная геометрия: в 2 т.* — Т.2: Стереометрия, преобразования пространства. М.: МЦНМО, (2006).

[2] McConnell B.D.S. “Hedronometric formulas for a hyperbolic tetrahedron.” http://daylateanddollarshort.com/mathdocs/Hedronometric-Formulas-for-a-Hyperbolic-Tetrahedron.pdf

Кудина Екатерина Сергеевна,
Горно-Алтайский государственный университет,
ул. Социалистическая, 32
г. Горно-Алтайск, 649000, Россия
E-mail address: eskudina@hotmail.com

Работа поддержана РФФИ (грант №16-31-50009).