ФУНКЦИОНАЛЬНО ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ МАКСВЕЛЛА

МИХАИЛ ВЛАДИМИРОВИЧ НЕЩАДИМ

В работе строятся решения системы Максвелла, которые можно представить в виде конечного функционального ряда от производных произвольной функции с функциональным аргументом (фазой) и функциональными коэффициентами (амплитудами). В таком виде, развиваемый здесь подход, можно рассматривать как поиск обобщенных функционально инвариантных решений [1] системы Максвелла. С другой стороны, это аналог лучевого метода применительно к системе уравнений Максвелла. Классическое применение лучевого метода [2,3] заключается в том, что лучевой ряд является решением системы Максвелла асимптотически. В настоящей работе предполагается, что лучевой ряд конечный и является точным решением.

Наиболее полно обобщенные функционально инвариантные решения (ОФИР) исследованы для волнового уравнения (см. литературу в [4]). (В литературе используется также термин — относительно неискажающиеся волны [5].) Так в работах [6–8] были детально изучены комплексные функционально инвариантные решения (ФИР) и, как оказалось, эти решения имеют обширные применения в задачах распространения колебаний (акустических, электромагнитных), связанных с волновым уравнением, а также и в более сложных задачах распространения упругих колебаний. Отметим, что ФИР волнового уравнения использовались для построения точных решений системы Максвелла в работах [9–11].

Построенные в данной работе решения системы Максвелла содержат функциональный произвол, что позволяет определять параметры системы Максвелла (диэлектрическую и магнитную проницаемости). Это направление продолжает исследования [12, 13], связанные с конструктивным подходом к решению обратных задач. Кроме того, использование средств группового анализа дифференциальных уравнений [14, 15] позволяет из уже найденных решений строить новые решения системы Максвелла с, вообще говоря, уже тензорными параметрами [16].

Также отметим задачу, поставленную Р. Курантом: найти все линейные гиперболические уравнения второго порядка, для которых существуют семейства решений относительно неискажающихся волн. В двумерном случае найдены необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять коэффициенты линейного дифференциального уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными, при которых существуют ОФИР. В больших размерностях известны только отдельные классы таких уравнений, а в общем случае эта задача остается нерешенной. Результаты данной работы показывают, что система Максвелла имеет ОФИР. Отметим, что в работах [17, 18] построены классы уравнений и систем второго порядка с переменными коэффициентами, допускающие ОФИР и получены некоторые применения данных результатов к обратным задачам.

Приведем формулировки основных результатов.

Система уравнений Максвелла [19] имеет вид:

$$\operatorname{div}(\varepsilon E) = 4\pi\rho,\ \ \operatorname{div}(\mu H) = 0,\ \ \operatorname{rot} E = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t},\ \ \operatorname{rot} H = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}J, \tag{1}$$

Работа поддержана РФФИ (грант 14-01-00014).

где $E = (E_1, E_2, E_3)(\overline{x}, t)$, $H = (H_1, H_2, H_3)(\overline{x}, t)$ — вектора электрической и магнитной напряженности, $\rho = \rho(\overline{x}, t)$ — плотность зарядов, $J = (J_1, J_2, J_3)(\overline{x}, t)$ — ток проводимости, $\varepsilon = \varepsilon(\overline{x})$, $\mu = \mu(\overline{x})$ — диэлектрические функции, зависящие от переменных $\overline{x} = (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$, D — область вещественного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Для обозначения стандартных скалярного и векторного произведений векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ используются обозначения $<,>$, $[\,,\,]$. Через $f^{(s)}(\zeta)$ обозначается производная порядка s от функции $f(\zeta)$ одного аргумента ζ.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Если выполнена система уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\varepsilon}{c} A_k + [\nabla\,\tau, B_k] = \operatorname{rot} B_{k-1} - C_{k-1}, \\
-\frac{\mu}{c} B_k + [\nabla\,\tau, A_k] = \operatorname{rot} A_{k-1}, \\
\operatorname{rot} B_m = C_m, \ \ \operatorname{rot} A_m = 0, \\
< \nabla\,\tau, \mu B_k >= \operatorname{div}(\mu B_{k-1}), \\
< \nabla\,\tau, \varepsilon A_k >= \operatorname{div}(\varepsilon A_{k-1}) - \rho_{k-1}, \\
\operatorname{div}(\mu B_m) = 0, \ \ \operatorname{div}(\varepsilon A_m) = \rho_m, \\
A_{-1} = B_{-1} = C_{-1} = 0, \ \ \rho_{-1} = 0,
\end{gathered} \tag{2}$$

для вектор функций $A_k(\overline{x})$, $B_k(\overline{x})$, $C_k(\overline{x})$ и скалярных функций $\rho_k(\overline{x})$, $k = 0, ..., m$, то для произвольной функции $f(\zeta)$ одного аргумента ζ следующие функции

$$\begin{gathered}
E = \sum_{k=0}^{m} A_k(\overline{x}) f^{(m-k)}(t - \tau(\overline{x})), \qquad H = \sum_{k=0}^{m} B_k(\overline{x}) f^{(m-k)}(t - \tau(\overline{x})), \\
\frac{4\pi}{c} J = \sum_{k=0}^{m} C_k(\overline{x}) f^{(m-k)}(t - \tau(\overline{x})), \quad 4\pi\rho = \sum_{k=0}^{m} \rho_k(\overline{x}) f^{(m-k)}(t - \tau(\overline{x})),
\end{gathered} \tag{3}$$

где $|\nabla\tau|^2 = (\varepsilon\mu)/c^2$, удовлетворяют системе уравнений (1).

Таким образом, формулы (3) дают точное решение системы (1), при условии выполнения (2). Общее решение системы (2) дается следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть $\tau(\overline{x})$, $\varphi(\overline{x})$ — произвольные функции, $A_0(\overline{x})$ — произвольная вектор функция ортогональная τ:

$$< A_0, \nabla\tau >= 0,$$

$A_1(\overline{x}), ..., A_{m-1}(\overline{x})$ — произвольные вектор функции. Тогда вектор функции $A_m(\overline{x})$, $B_k(\overline{x})$, $C_k(\overline{x})$ и функции $\rho_k(\overline{x})$, $k = 0, ..., m$, определенные формулами

$$\begin{gathered}
A_m = \nabla\varphi, \\
B_k = \frac{c}{\mu}\left([\nabla\tau, A_k] - \operatorname{rot} A_{k-1}\right), \\
C_k = \operatorname{rot}\left(\frac{c}{\mu}\left([\nabla\tau, A_k] - \operatorname{rot} A_{k-1}\right)\right) + \frac{c}{\mu}[\nabla\tau, \operatorname{rot} A_k] - \frac{c}{\mu} < \nabla\tau, A_{k+1} > \nabla\tau, \\
\rho_k = \operatorname{div}(\varepsilon A_k) - < \nabla\tau, \varepsilon A_{k+1} >,
\end{gathered} \tag{4}$$

где $A_k = 0$ при $k > m$ или $k < 0$, удовлетворяют системе уравнений (2).

Список литературы

[1] Еругин Н.П., Смирнов М.М. “Функционально-инвариантные решения дифференциальных уравнений”, *Дифф. уравнения*, Т. 17, №5, 853–865, (1981).

[2] Бабич В.М., Булдырев В.С. *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* М.: Наука, 1972.

[3] Бабич В.М. *Многомерный метод ВКБ или лучевой метод. Его аналоги и обобщения. Дифференциальные уравнения с частными производными - 5.* Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 34, ВИНИТИ, М., 1988, 93–134.

[4] Нещадим М.В. “Классы обобщенных функционально инвариантных решений волнового уравнения. I”, *Сибирские электронные математические известия*, Т. 10, 418–435 (2013).

[5] Курант Р. *Уравнения с частными производными.* М.: Мир, 1964.

[6] Смирнов В.И., Соболев С.Л. “Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний”, *Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР*, Т. 20, с. 37, (1932).

[7] Смирнов В.И., Соболев С.Л. “О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии” *Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР*, Т. 29, 43–51, (1933).

[8] Соболев С.Л. “Функционально-инвариантные решения волнового уравнения” *Труды физ.-мат. инст. им. Стеклова В.А.*, Т. 5, 259–264, (1934).

[9] Шнеерсон М.С. “Уравнения Максвелла и функционально-инвариантные решения волнового уравнения”, *Дифф. уравнения*, Т. 4, №4, 743–758, (1968).

[10] Стельмашук Н.Т. “Построение функционально-инвариантных решений системы Максвелла для электромагнитного поля в пустоте”, *Вестник АН БССР. Сер. физ.-мат. науки*, №4, 35–39, (1974).

[11] Нещадим М.В. “Решения системы Максвелла с нулевыми инвариантами”, *Вестник Новосибирского государственного университета Серия математика, механика, информатика*, Т. 6, №3, 59–61, (2006).

[12] Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. “Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. I” *Сибирский журнал индустриальной математики*, Т. 14, №1, 27–39, (2011).

[13] Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. “Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. II” *Сибирский журнал индустриальной математики*, Т. 14, №2, 28–33, (2011).

[14] Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1978.

[15] Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* М.: Мир, 1989.

[16] Neshchadim M.V. “Equivalent transformations and some exact solutions to the system of Maxwell’s equations”, *Selcuk J. Appl. Math.*, V. 3, №2, 99–108, (2002).

[17] Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. “Представления для решений и коэффициентов дифференциальных уравнений 2-го порядка”, *Сибирский журнал индустриальной математики*, Т. 15, №4, 17–23, (2012).

[18] Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. “Представления решений и коэффициентов эволюционных уравнений”, *Сибирский журнал индустриальной математики*, Т. 16, №2, 40–49, (2013).

[19] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля.* М.: Наука, 1988.

Нещадим Михаил Владимирович,
Институт математики им. С.Л. Соболева,
пр. Коптюга 4, 630090, Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2, 630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: neshch@math.nsc.ru