ПРОЕКТИВНЫЕ ТОРИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ОБРАЗУЮЩИЕ В КОЛЬЦЕ КОМПЛЕКСНЫХ КОБОРДИЗМОВ

ГРИГОРИЙ ДМИТРИЕВИЧ СОЛОМАДИН

В 1958 году на пленарном докладе математического конгресса в Эдинбурге Ф. Хирцебрухом [1] была поставлена задача: какие условия нужно наложить на набор целых чисел, чтобы существовало *неприводимое комплексное алгебраическое* многообразие, для которого этот набор представляет собой набор чисел Чженя? В начале 60 годов Милнором (аддитивная структура) и Новиковым (мультипликативная структура) (см. [2]) было вычислено кольцо комплексных кобордизмов: $\Omega^U_* \simeq \mathbb{Z}[a_1, a_2, \dots],\ \deg(a_i) = 2i$. Также из их результатов следует, что наборы чисел Чженя двух комплексных многообразий M^n_1, M^n_2 совпадают тогда и только тогда, когда соответствующие классы комплексных кобордизмов равны в $\Omega^U_*:\ [M^n_1] = [M^n_2]$. Вариант проблемы Хирцебруха в классе стабильно комплексных многообразий решили Стонг и Хаттори (см. [2]). Данный результат дает описание всех наборов чисел Чженя, реализуемых стабильно комплексными многообразиями. Таким образом, вопрос Хирцебруха сводится к описанию всех элементов кольца Ω^U_* комплексных кобордизмов, облададающих представителями — неособыми алгебраическими многообразиями:

Задача 1. *Описать все классы комплексных кобордизмов, имеющие представителем неприводимое комплексное алгебраическое многообразие.*

Решение данной задачи без условия неприводимости имеет классическое решение в терминах гиперповерхностей Милнора. Требование неприводимости алгебраического многообразия оказалось принципиально важным. Так, в вещественной размерности 4 эта задача оказалась тесно связана с глубокими вопросами алгебраической геометрии и в общем виде до сих пор не решена.

В рамках задачи 1 стоял важный частный случай: нахождение представителей специальных элементов – полиномиальных образующих кольца $\Omega^U_* \simeq \mathbb{Z}[a_1, a_2, \dots],\ \deg(a_i) = 2i$, в классе гладких комплексных неприводимых алгебраических многообразий. Данная задача была положительно решена в [3]. Дальнейшее развитие исследований привело к постановке аналогичной задачи в классе *квазиторических* (в смысле Дэвиса-Янушкевича) многообразий, и ее решению [4]. Конструкция *бриллиантовой суммы* для представителя суммы классов кобордизма квазиторических многообразий $[M_1]+[M_2]$, была предъявлена в [5]. Ее применение к построенным в [4] представителям полиномиальных порождающих кольца Ω^U_* позволило найти квазиторического представителя в любом классе комплексных кобордизмов (см. [5]). Однако квазиторические многообразия не являются, вообще говоря, алгебраическими; данное требование выделяет класс торических многообразий. Это приводит к задаче:

Задача 2. *Построить гладкие проективные (алгебраические) торические многообразия в каждой (комплексной) размерности n, являющиеся полиномиальными порождающими кольца Ω^U_*.*

Согласно теореме Милнора-Новикова, задача 2 эквивалентна нахождению многообразий в данном классе со специальными значениями старшего числа Чженя (числа Милнора).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (грант є 14-11-00414).

Задача вычисления последнего является сложной. Вильфонг [6] достиг существенного продвижения в решении задачи 2: им были построены торические многообразия, являющиеся полиномиальными порождающими кольца кольца Ω_*^U в (комплексных) размерностях n вида $n = p^s - 1$, где p простое, а также нечетных n. Конструкция Вильфонга [6] основывалась на раздутиях некоторых проективных расслоений (обобщенных башен Ботта высоты 2) в неподвижных точках и инвариантных рациональных кривых.

В докладе будет представлен совместный результат докладчика и Ю. Устиновского [7]: полное решение задачи 2. Наш метод состоит в использовании семейства эквивариантных модификаций (бирациональных изоморфизмов) торического многообразия X комплексной размерности n ($n \geq 2$). Каждая из данных модификаций является результатом последовательного раздутия $\widetilde{X}$ многообразия X в произвольной неподвижной точке $x_0 \in X$, и раздутия полученного многообразия $\widetilde{X}$ вдоль инвариантного проективного подпространства исключительного дивизора раздутия в точке: $\mathbb{C}P^k \subset \mathbb{C}P^{n-1} \cong E \subset \widetilde{X}$. Изменение числа Милнора при любой из описанных модификаций определяется лишь числами n и k, в частности не зависит от самого многообразия X. Данные модификации позволяют строить торические многообразия с нужными значениями числа Милнора в размерностях, не покрываемых результатами Вильфонга [6]. Отметим, что наш подход [7] и подход Вильфонга [6] дополняют друг друга.

Список литературы

[1] *Международный математический конгресс в Эдинбурге (1958г.) (обзорные доклады).* Физматгиз, Москва (1962).

[2] Р. Стонг *Заметки по теории кобордизмов.* Мир, Москва (1973).

[3] B. Johnston “The values of the Milnor genus on smooth projective connected complex varieties”, *Topology and its Applications*, vol. 138, no.1-3, 189–206, (2004).

[4] В. М. Бухштабер, Н. Рэй “Торические многообразия и комплексные кобордизмы”, *УМН*, vol. 53, no.2, 139-140, (1998).

[5] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray “Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds”, *Mosc. Math. J.*, vol. 7, no.2, 219-242, (2007).

[6] A. Wilfong “Toric Polynomial Generators of Complex Cobordism”, *http://arxiv.org/abs/1308.2010* (2013).

[7] Y. Ustinovskiy, G. Solomadin ”Projective toric generators in the unitary cobordism ring”, *http://arxiv.org/abs/1602.02448* (2016)

Соломадин Григорий Дмитриевич,
Математический Институт им. В. А. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8,
119991, Москва, Россия
E-mail address: grigory.solomadin@gmail.com