ИЗОМОРФИЗМЫ САМОПОДОБНЫХ МНОЖЕСТВ, НЕ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ WSP

ТЕТЕНОВ АНДРЕЙ ВИКТОРОВИЧ

Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_m\}$ - система сжимающих подобий в $\mathbb{R}^n$, а G – порожденная этой системой полугруппа. Непустое компактное множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется *аттрактором* системы $\mathcal{S}$, если $K = S_1(K) \cup ..., S_m(K)$. Такое множество K существует и однозначно задается системой $\mathcal{S}$. Говорят также, что система $\mathcal{S}$ задает самоподобную структуру $(K, \mathcal{S})$ на множестве K.

Рассмотрим множество $\mathcal{F} = \{g^{-1} \cdot f, f, g \in G\}$, которое называется *ассоциированным семейством подобий для системы* $\mathcal{S}$ [1]. Говорят, что система $\mathcal{S}$ удовлетворяет *слабому условию отделимости* (WSP), если Id является изолированной точкой в $\mathcal{F}$ [4].

Это условие является ключевым при характеризации самоподобных множеств с положительной мерой Хаусдорфа:

Если система $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию (WSP), то её аттрактор K имеет положительную хаусдорфову меру $H^s(K)$ в размерности $s = dim_H(K)$ [1,4].

Однако, нарушение условия WSP дает ряд следствий, важных с точки зрения геометрической структуры самоподобных множеств:

1. Если аттрактор K системы $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_m\}$ является жордановой дугой, а система $\mathcal{S}$ не удовлетворяет условию WSP, то K есть отрезок прямой [2].

2. Более того, такие одномерные самоподобные структуры, не удовлетворяющие WSP, не допускают никаких деформаций и могут быть сопряжены только посредством линейных отображений:

Пусть системы $\mathcal{S} = \{S_1, ..., S_m\}$ и $\mathcal{T} = \{T_1, ..., T_m\}$ – системы сжимающих подобий с аттракторами $K_\mathcal{S}$ и $K_\mathcal{T}$. Непрерывное отображение $\varphi : K_\mathcal{S} \to K_\mathcal{T}$ задает морфизм самоподобных структур $(K_\mathcal{S}, \mathcal{S})$ и $(K_\mathcal{T}, \mathcal{T})$, если для любого $x \in K_\mathcal{S}$ и для любого $i = 1, ..., m$ выполняется равенство $\varphi \cdot S_i(x) = T_i \cdot \varphi(x)$.

Как было доказано автором в 2006 г., если система $\mathcal{S}$, не удовлетворяющая условию WSP, задает самоподобную структуру на отрезке $K_\mathcal{S} = [0, 1]$, то всякий морфизм этой структуры задается линейным отображением $\varphi : [0, 1] \to K_\mathcal{T}$, где $K_\mathcal{T}$ - отрезок прямой [3].

Эти два свойства, связанные с жесткостью одномерных самоподобных структур на континуумах, приводят к постановке следующей задачи:

Работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00414).

Проблема. *При каких значениях $\alpha = dim_H K_{\mathcal{S}}$ и каких дополнительных геометрических условиях всякий морфизм $\varphi : K_{\mathcal{S}} \to K_{\mathcal{T}}$ самоподобной структуры $(K_{\mathcal{S}}, \mathcal{S})$ задается линейным отображением?*

Следующее утверждение даёт частичный ответ на этот вопрос.

Теорема 1. *Существует бесконечное семейство Σ попарно изоморфных самоподобных структур $(K_{pq}, \mathcal{S}_{pq})$, где $\{0,1\} \subset K_{pq} \subset [0,1]$, для которых*

(i) $dim_H K_{pq} < 1/2$;

(ii) $\dfrac{\ln p}{\ln q} \notin \mathbb{Q}$, и поэтому $\mathcal{S}_{pq}$ не удовлетворяет условию WSP;

(iii) Если $(p,q) \neq (p',q')$, то гомеоморфизм $\varphi : K_{pq} \to K_{p'q'}$ не продолжается до гомеоморфизма отрезка $[0,1]$ на себя.

Отметим несколько важных подробностей, связанных как с доказательством теоремы, так и с замечательными свойствами полученного семейства Σ:

Каждая из систем отображений $\mathcal{S}_{pq}$ состоит из отображений
$S_1(x) = px$, $S_2(x) = qx$, $S_3(x) = px + 1 - p$, $S_4(x) = qx + 1 - q$, удовлетворяющих соотношениям $S_1S_2 = S_2S_1$ и $S_3S_4 = S_4S_3$.

Для любого $p \in (0, 1/2)$ существует бесконечно много таких $q > 0$, что
$\sqrt{p} + \sqrt{q} < 1/2$ (что влечет выполнение условия (i))
и для любых $m, n \in \mathbb{N}$,

$$S_1^m(S_3(K_{pq}) \cup S_4(K_{pq})) \cap S_2^n(S_3(K_{pq}) \cup S_4(K_{pq})) = \emptyset,$$

что дает выполнение условия (ii).

Хотя при любых m и n, $S_1^m(K_{pq}) \cap S_2^n(K_{pq}) = S_1^m S_2^n(K_{pq})$, множество K_{pq} является дисконтинуумом.

При этом, для каждого из множеств K_{pq} при $t \to +\infty$ существуют топологические пределы $\lim\limits_{t\to+\infty} tK_{pq} = [0, +\infty)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} tK_{pq} - t + 1 = (-\infty, 1]$. Аналогичные пределы существуют для каждой из точек $S_{i_1\ldots i_n}(0)$ и $S_{i_1\ldots i_n}(1)$.

Список литературы

[1] Bandt Ch., Graf S. “Self-similar sets 7. A characterization of self-similar fractals with positive Hausdorff measure” , *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol.114, No. 4, 995-1001,(1992).

[2] Тетенов А.В. “Самоподобные жордановы дуги и граф-ориентированные системы подобий” , *Сиб. матем. журнал*,Том 47, № 5, 1147-1153, (2006).

[3] Тетенов А.В. “On the rigidity of one-dimensional systems of contraction similitudes” , *Сибирские электронные математические известия*, Том 3, 342-345, (2006).

[4] Zerner M.P.W. “Weak separation properties for self-similar sets” , *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 124, No. 11, 3529-3539 (1996).

Тетенов Андрей Викторович,
Лаборатория прикладной вероятности,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, г. Новосибирск, 630090, Россия

Горно-Алтайский государственный университет,
ул. Ленкина, 1, г. Горно-Алтайск, 649000, Россия
E-mail address: atet@mail.ru