

n -значные группы: теория и приложения

В. М. Бухштабер

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
Математический центр мирового уровня МИАН
buchstab@mi-ras.ru

Конференция «Динамика в Сибири — 2023»
Новосибирск, 27 февраля — 4 марта 2023 г.

- В различных областях исследований встречается естественное умножение на пространстве, скажем X , при котором произведением пары точек является подмножество в X
- Литература по многозначным группам и их приложениям велика и включает статьи начиная с XIX века, в основном, контексте понятия гипергруппы
- В 1971 г. С.П. Новиков и автор ввели конструкцию, подсказанную теорией характеристических классов векторных расслоений, в которой произведение каждой пары элементов есть n -мультимножество, т.е. неупорядоченное множество из n точек, возможно с повторениями
- Эта конструкция привела к понятию n -значной группы

- Вскоре после этого автор дал аксиоматическое определение n -значных групп и получил первые результаты об их алгебраическом строении
- Эти результаты нашли применение в решении известной проблемы алгебраической топологии
- В настоящее время рядом авторов развивается теория n -значных групп (конечных, дискретных, топологических, алгебраических, алгебро-геометрических) с приложениями в различных областях математики и математической физики

- С 1996 года А. Веселов и автор начали работать над приложениями теории n -значных групп к динамическим системам с дискретным временем
- В 2010 году В. Драгович показал, что уравнение ассоциативности для двузначной группы объясняет механизм интегрирования волчка Ковалевской
- В последующих работах В. Драговича и К. Кукич были получены приложения теории n -значных групп в задачах известных динамических систем

- В настоящем докладе мы введём ключевые понятия теории n -значных групп и обсудим, полученные недавно результаты, связанные с известными задачами многозначных динамических систем с дискретным временем
- В центре внимания будет тема: n -значные группы и квазикристаллы

- В 2011 году Дан Шехтман стал лауреатом Нобелевской премии по химии с формулировкой «за открытие квазикристаллов»
- Сообщение об открытии было опубликовано в статье «Металлическая фаза с дальним ориентационным порядком и отсутствием трансляционной симметрии»
- D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, J. W. Cahn. *Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry*, *Physical Review Letters*. — 1984. — Vol. 53. — p. 1951—1953

- Введено бесконечное ориентированное дерево Γ , корень которого соответствует единице группы

$$G = \mathbb{Z}/3 * \mathbb{Z}/3 = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = 1 \rangle,$$

а вершины — это слова в алфавите $\{a, b\}$, которые взаимно однозначно соответствуют элементам двузначной косет-группы пары $(G, \mathbb{Z}/2)$, где $\mathbb{Z}/2$ действует перестановкой образующих a и b

- Пространству Γ мы сопоставляем пространство $P\Gamma$ путей на Γ и пополняем его бесконечными путями, которые соответствуют бесконечным словам с началом в некоторой точке дерева Γ

- На группе G определена динамика, задаваемая оператором подстановки $L : G \rightarrow G$ по формуле $L(a) = ab$ и $L(b) = a$, который продолжается на накрост пространства PG
- Траектория этого отображения с началом в единице группы G задаёт последовательность слов Фибоначчи, пределом которой является бесконечное слово Фибоначчи Φ
- Используя операцию умножения в двузначной группе, мы определяем положение пути Фибоначчи в пространстве PG
- Будет описана связь с известными результатами символической динамики, комбинаторной теории слов и конструкциями квазикристаллов

Конечные слова Фибоначчи Φ_k

Определение 1 (локальное)

Пусть $\{0, 1\}^*$ — множество всех слов в алфавите $\{0, 1\}$.

Рассмотрим оператор подстановки

$L : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$, $0 \mapsto 01$, $1 \mapsto 0$. Конечными словами Фибоначчи называется следующая последовательность слов:

$$\Phi_1 = 0, \quad \Phi_{k+1} = L(\Phi_k).$$

Определение 2 (глобальное)

Конечными словами Фибоначчи называется следующая рекуррентная последовательность

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k \Phi_{k-1}, \quad \text{где } \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 01.$$

Бесконечное слово Фибоначчи

Предложение

Определения 1 и 2 конечных слов Фибоначчи эквивалентны

Определение

Словом Фибоначчи Φ называется предел конечных слов Фибоначчи: $\Phi = \lim_k \Phi_k$.

Некоторые свойства Φ

- Φ может содержать повторение трёх последовательных идентичных подслов, но никогда не содержит четырёх повторений подслова.
- Цифра с номером n в слове Фибоначчи Φ есть

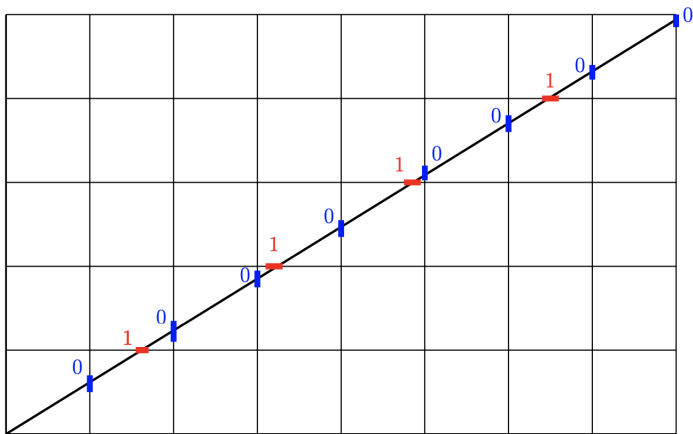
$$2 + \lfloor n\varphi \rfloor - \lfloor (n+1)\varphi \rfloor,$$

где $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.

- Две последние цифры Φ либо 01, либо 10.
- Подслова 11 и 000 никогда не встречаются.

Связь с квазикристаллами

- Рассмотрим прямую $y = \psi x$, $\psi = 1/\varphi$, где $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$, и закодируем при помощи неё слово Φ

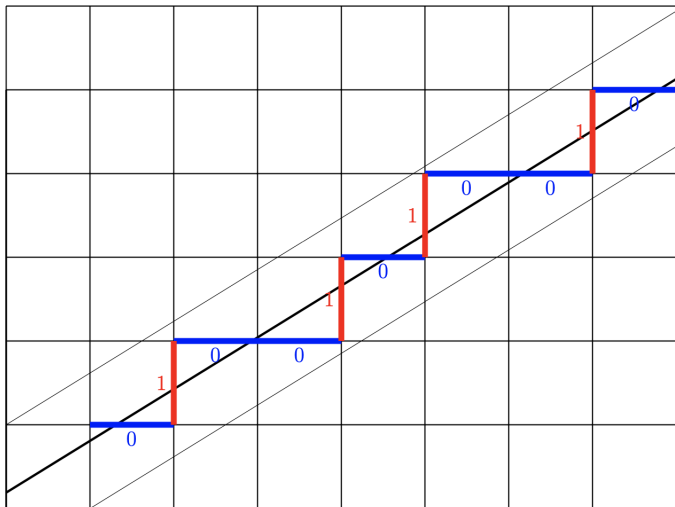


$$\Phi_5 = 010010100100$$

- На прямой

$$y = \psi x + \frac{1 - \psi}{2}, \quad \psi = 1/\varphi$$

метод *cut-and-projection* даёт слово Фибоначчи



1-равномерные слова

Определение

Слово в алфавите $\{a, b\}$ называется *1-равномерным*, если для любых двух подслов одинаковой длины количество букв a (или, что эквивалентно, b) отличается не более, чем на 1

Определение

Бесконечное слово в двухбуквенном алфавите называется *геометрическим*, если оно кодирует пересечения прямой $y = \alpha x + \rho$ с вертикальными и горизонтальными линиями целочисленной решётки

- Если α рационально, то получающаяся динамика является периодической. Особый интерес представляет случай, когда α иррационально — получается одномерная модель квазикристалла с квазипериодическим словом

Функция сложности слова

Определение

Функцией сложности бесконечного слова x называется функция

$$p_x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$$

для которой $p_x(n)$ равно числу всех возможных различных подслов длины n в слове x

Свойства

- $p_x(n) \leq |A|^n$, где A — алфавит
- $p_x(n)$ неубывающая функция
- $p_\Phi(n) = n + 1$

Теорема Морса-Хедлунда

Определение

Слово $x \in A^*$ в алфавите A называется *апериодическим*, если оно не имеет вида $v v v \dots$ или $u v v v \dots$ ни для каких слов u и v .

- В символической динамике известна теорема Морса-Хедлунда, утверждающая, что равномерность слова эквивалентна его геометричности

Теорема (M. Morse, G. Hedlund, 1940)

- ❶ Бесконечное слово x является апериодическим $\Leftrightarrow$

$$p_x(n) \geq n + 1 \text{ для любого } n$$

- ❷ Для бесконечного слова x выполнено равенство $p_x(n) = n + 1 \Leftrightarrow x$ апериодическое и 1-равномерное

Теорема (А. А. Марков, 1882)

Пусть $\alpha = [0; a_1, a_2, \dots]$ — разложение в цепную дробь числа $\alpha \in (0, 1)$. Тогда слово $S(\alpha)$, кодируемое прямой $y = \alpha x$, получается как предел

$$S(\alpha) = \lim_k S_k(\alpha),$$

где

$$S_k = S_{k-1}^{a_k} S_{k-2}$$

с начальными условиями $S_{-1} = b$ и $S_0 = a$. Буква a отвечает пересечению с вертикальной прямой, а буква b — с горизонтальной

Пример

- Рассмотрим прямую $y = \psi x$, где $\psi = 1/\varphi$, $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$
- Разложим ψ в цепную дробь

$$\psi = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

- В этом случае $S_n = S_{n-1}S_{n-2}$ — получили слово Фибоначчи

Симметрические степени пространства

- Для пространства X обозначим через $(X)^n$ его n -кратную симметрическую степень, т.е. $(X)^n = X^n / \Sigma_n$, где симметрическая группа Σ_n действует перестановкой сомножителей.
- Точку в $(X)^n$ будем рассматривать как подмножество в X , состоящее из n точек (возможно с повторениями), т.е. как n -мультимножество (далее, n -множество).

Пример

Пространства $(\mathbb{C})^n = \mathbb{C}^n / \Sigma_n$ и $\mathbb{C}^n$ можно отождествить

$$\mathcal{S} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n : (z_1, z_2, \dots, z_n) \rightarrow \sigma_r(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad 1 \leq r \leq n,$$

где σ_r – r -тый элементарный симметрический полином.

- Проективизация отображения $\mathcal{S}$ индуцирует гомеоморфизм $(\mathbb{C}P^1)^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$.

- n -значное умножение на X задаётся отображением

$$\mu : X \times X \rightarrow (X)^n$$

$$\mu(x, y) = x * y = [z_1, z_2, \dots, z_n],$$

$$z_k = (x * y)_k$$

- **Ассоциативность.** n^2 -множества

$$[x * (y * z)_1, x * (y * z)_2, \dots, x * (y * z)_n]$$

$$[(x * y)_1 * z, (x * y)_2 * z, \dots, (x * y)_n * z]$$

совпадают для всех $x, y, z \in X$.

- **Единица.** Точка $e \in X$, такая, что $e * x = x * e = [x, x, \dots, x]$ для всех $x \in X$

- **Обратный элемент.** Отображение $\text{inv}: X \rightarrow X$, такое, что

$$e \in \text{inv}(x) * x \text{ and } e \in x * \text{inv}(x) \text{ для всех } x \in X$$

- **Коммутативность.** n -множества $x * y$ и $y * x$ совпадают для всех $x, y \in X$

Определение

Отображение μ определяет структуру n -значной группы на X , если оно ассоциативно и существуют e и inv

Структура 2-значной группы на $\mathbb{Z}_+$

- Рассмотрим полугруппу по сложению неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}_+$
- Введем коммутативное умножение

$$\mu: \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow (\mathbb{Z}_+)^2 : x * y = [x + y, |x - y|].$$

- Единица: $e = 0$.
- Обратный элемент: $\text{inv}(x) = x$
- Ассоциативность: 4-множества из $\mathbb{Z}_+$

$$[x + y + z, |x - y - z|, x + |y - z|, |x - |y - z||]$$

и

$$[x + y + z, |x + y - z|, |x - y| + z, ||x - y| - z|]$$

совпадают для любых $x, y, z \in \mathbb{Z}_+$.

Определение

Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *гомоморфизмом n -значных групп*, если

$$\begin{aligned} f(e_X) &= e_Y, \quad f(\text{inv}_X(x)) = \text{inv}_Y(f(x)) \quad \text{для всех } x \in X, \\ \mu_Y(f(x), f(y)) &= (f)^n \mu_X(x, y) \quad \text{для всех } x, y \in X. \end{aligned}$$

Конструкции n -значных групп

- Для любого $m \in \mathbb{N}$, n -значную группу X с умножением μ_n можно рассматривать как mn -значную группу с умножением

$$\mu_n^m : X \times X \xrightarrow{\mu_n} (X)^n \xrightarrow{(D)^m} (X)^{mn}, \text{ где } D - \text{диагональ.}$$

Определение

n -значная группа X называется *приводимой*, если существует изоморфизм $f : X \rightarrow Y$, где Y – n -значная группа с умножением $\mu_n = \mu_k^m$, $n = mk$.

Лемма

Пусть $f : X \rightarrow Y$ — гомоморфизм n -значных групп. Тогда

- $\ker(f) = \{x \in X \mid f(x) = e_Y\}$ — n -значная группа
- $f(x_1) = f(x_2)$ тогда и только тогда, когда $(f)^n(zx_1) = (f)^n(zx_2)$ для всех $z \in \ker(f)$
- Пусть отображение $\text{inv} : X \rightarrow X$ определено однозначно. Тогда $\ker(f) = \{e\}$ тогда и только тогда, когда из равенства $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$
- $\text{Im}(f) = \{y \in Y \mid y = f(x), x \in X\}$ — n -значная группа

Косетные группы

- Пусть G — некоторая (1-значная) группа с умножением μ_0 , единицей e_G и обратным отображением $\text{inv}_G(u) = u^{-1}$
- Пусть A , $|A| = n$, — некоторая конечная подгруппа группы автоморфизмов $\text{Aut } G$
- Введем пространство орбит $X = G/A$ группы G по действию группы A и фактор отображение $\pi: G \rightarrow X$
- Определим n -значное умножение

$$\mu: X \times X \rightarrow (X)^n : \mu(x, y) = [\pi(\mu_0(u, v^a)), a \in A],$$

где $u \in \pi^{-1}(x)$, $v \in \pi^{-1}(y)$ и v^a — образ действия элемента $a \in A$ на $v \in G$

Теорема

Умножение μ задает на $X = G/A$ структуру n -значной косетной группы (G, A) с единицей $e_X = \pi(e_G)$ и однозначно определенным отображением $\text{inv}(x) = \pi(u^{-1})$, где $\pi(u) = x$.

Примеры косетных групп

- 1 2-значная группа $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2)$ на $\mathbb{Z}_+$.
- 2 Аддитивная n -значная группа $(\mathbb{C}, \mathbb{Z}_n)$ на $\mathbb{C}$.
- 3 Пусть $G = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = \{a, b \mid a^2 = b^2 = e\}$ – бесконечная диэдральная группа. Перестановка образующих a и b задает группу автоморфизмов A , $|A| = 2$.

Получаем на $X = G/A = \{u_{2n}, u_{2n+1}\}$, $n \geq 0$, где

$$u_{2n} = [(ab)^n, (ba)^n], \quad u_{2n+1} = [b(ab)^n, a(ba)^n],$$

структуру двузначной группы с умножением

$$\mu: X \times X \rightarrow (X)^2 : \mu(u_k, u_\ell) = [u_{k+\ell}, u_{|k-\ell|}].$$

Следствие

2-значные косетные группы в примерах (1) и (3) изоморфны.

Примеры косетных групп

- 4 Пусть G — конечная группа, $|G| = n$, и $A = G$ — группа её внутренних автоморфизмов, т.е. $g^a = a^{-1}ga$, $g \in G$, $a \in A$

Теорема

Множество характеров $X = G/G$ группы G имеет структуру коммутативной n -значной группы.

Для $G = \Sigma_3$ на множестве $X = \{x_0, x_1, x_2\}$ получаем структуру 6-значной группы с умножением

$$x_1 x_1 = [3x_0, 3x_1], \quad x_1 x_2 = x_2 x_1 = [6x_2], \quad x_2 x_2 = [2x_0, 4x_1].$$

Таким образом, $e = x_0$, $x_1^{-1} = x_1$, $x_2^{-1} = x_2$ и $X = \langle x_2 \rangle$.

Следствие

6-значная группа характеров X группы Σ_3 является циклической $\langle x_2 \rangle$ и неприводимой.

Топологические n -значные группы

- Каждая гладкая эллиптическая кривая гомеоморфна тору $\mathbb{T}^2$ с коммутативной групповой структурой

Классический результат

Пусть $A < \text{Aut}_+(\mathbb{T}^2) = SL(2, \mathbb{Z})$ — конечная подгруппа группы автоморфизмов тора $\mathbb{T}^2$, сохраняющих ориентацию. Тогда $A = \mathbb{Z}/n$, где $n \in \{2, 3, 4, 6\}$

Теорема

Автоморфизм гладкой эллиптической кривой порядка $n \in \{2, 3, 4, 6\}$ задаёт на комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$ структуру n -значной косетной группы

Топологические n -значные группы

Лемма

Пространство $X = \ker((\mu)^n : (T^2)^n \rightarrow T^2)$, $n \geq 2$, гомеоморфно проективному пространству $\mathbb{C}P^{n-1}$.

Теорема

Структура эллиптической кривой на T^2 задает на $X = \mathbb{C}P^{n-1}$ структуру $n!$ -значной косетной группы.

Топологические n -значные группы

- Рассмотрим группу Ли $Sp(1) \approx S^3$. Известно, что $Aut(Sp(1)) = SO(3)$

Лемма

Пусть A – конечная подгруппа в $SO(3)$. Пространство орбит $X = Sp(1)/A$ гомеоморфно сфере S^3 .

Теорема (В.М. Бухштабер, Д.В. Гугнин)

Каждая подгруппа $A \subset SO(3)$, $|A| = n$, задает на S^3 структуру n -значной косетной группы

Классический результат

Список конечных групп $A \subset SO(3)$: циклические группы C_n ; группы диэдра D_m , $2m = n$ группы симметрий T , O , I платоновых тел, $|T| = 12$, $|O| = 24$, $|I| = 60$

Обобщение двойственности Понтрягина

- Пусть $X = G/G$ множество классов сопряжённости группы G

Следствие

- Действие группы G на себе внутренними автоморфизмами задает на X структуру коммутативной m -значной косетной группы, где $m = |G|$
- Тензорное произведение неприводимых представлений $\rho_0, \dots, \rho_k$ группы G задает на X структуру коммутативной n -значной группы, где $n = \text{НОК}\{d_i d_j \mid d_i = \dim \rho_i\}$

Пример

Для $G = \Sigma_3$ мы имеем $m = 3!$ и $n = 4$;
для $G = \Sigma_4$ имеем $m = 4!$ и $n = 18$. Если G — коммутативная группа, то $m = n = 1$

Классический результат

Существует взаимно однозначное соответствие между множеством неприводимых унитарных представлений конечной группы G и множеством $X = G/G$ классов сопряжённости группы G

Неприводимые точные представления

- Уильям Бернсайд, 1852–1927 гг.

Теорема (W. Burnside)

Пусть G — конечная группа, обладающая неприводимым точным унитарным представлением ρ . Тогда каждое её неприводимое представление встречается в разложении представления $\rho^k = \rho \otimes \cdots \otimes \rho$ в сумму неприводимых.

Следствие

Пусть ρ — неприводимое точное представление группы G . Тогда n -значная группа на множестве всех неприводимых представлений группы G является циклической $\langle a \rangle$, где $a = \frac{\rho}{\dim \rho}$, и $\text{inv}(a) \in a^k$ для некоторого k .

Неприводимые точные представления

Теорема

Каждая конечная простая группа обладает точным неприводимым представлением.

Определение

Цоколем $\text{Soc}(G)$ конечной группы G называется её подгруппа, порожденная объединением всех минимальных нормальных подгрупп из G

- В 1954 году В. Гашутц (Wolfgang Gaschutz, 1920–2016) доказал, что конечная группа G обладает точным неприводимым представлением тогда и только тогда, когда $\text{Soc}(G)$ является циклической группой.

- В случае счетных групп аналог результата Гашутца был получен Баширом Бекка и Пьером де ла Арп в 2008 году (Bachir Bekka and Pierre de la Harpe)

Определение

n -значной динамикой T на пространстве Y называется отображение $T: Y \rightarrow (Y)^n$

- 1 Если Y — пространство состояний, то n -значная динамика T определяет возможные состояния $T(y) = [y_1, \dots, y_n]$ в момент времени $(t+1)$ как функцию состояния y в момент t
- 2 Пусть $F(x, y) = b_0(x)y^n + b_1(x)y^{n-1} + \dots + b_n(x)$, $x, y \in \mathbb{C}$.
- 3 Уравнение $F(x, y) = 0$ задает n -значную динамику

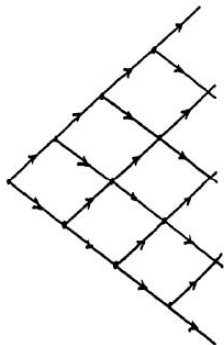
$$T: \mathbb{C} \rightarrow (\mathbb{C})^n : T(y) = [y_1, \dots, y_n],$$

где $[y_1, \dots, y_n]$ — n -множество корней уравнения $F(x, y) = 0$.

- Пусть дана n -значная динамика $T: Y \rightarrow (Y)^n$. Сопоставим точке $y \in Y$ функцию $\xi_y: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, где $\xi_y(k)$ – число различных точек в n^k -множестве $T^k(y)$

Проблема

Характеризовать n -значные динамики T , у которых функции $\xi_y(k)$ растут полиномиально для всех $y \in Y$.



Линейный рост



Экспоненциальный рост

Проблема роста n -значной динамики

- В 1991 году А. П. Веселов ввел лагранжевы системы с дискретным временем, задаваемые многозначной динамикой на симплектическом многообразии M^{2m} , и показал, что интегрируемость по Лиувиллю таких систем приводит к полиномиальным функциям $\xi_y(k)$, $y \in M^{2m}$
- В обзоре А. П. Веселова, “Интегрируемые отображения”, УМН, 1991, 46:5, проблема роста функции $\xi_y(k)$ связана с задачами:
 - 1 о парах коммутирующих полиномиальных отображений $\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$;
 - 2 о коммутирующих дифференциальных операторах

Действие n -значной группы X на пространстве Y задается отображением

$$\varphi: X \times Y \rightarrow (Y)^n : \varphi(x, y) = x \cdot y = [y_1, \dots, y_n],$$

таким что:

- для всех $x_1, x_2 \in X$ и $y \in Y$ совпадают n^2 -множества

$$x_1 \cdot (x_2 \cdot y) = [x_1 \cdot y_1, \dots, x_1 \cdot y_n] \text{ и } (x_1 x_2) \cdot y = [z_1 \cdot y, \dots, z_n \cdot y],$$

$$\text{где } x_2 \cdot y = [y_1, \dots, y_n] \text{ и } x_1 x_2 = [z_1, \dots, z_n];$$

- $e \cdot y = [y, \dots, y]$ для всех $y \in Y$.

Генераторы n -значных динамик

Определение

n -значная динамика $T: Y \rightarrow (Y)^n$ задается циклической n -значной группой $X = \langle a \rangle$, если определено действие $\varphi: X \times Y \rightarrow (Y)^n$, такое, что $T(y) = a \cdot y$ для всех $y \in Y$. Образующая a называется генератором динамики T .

Теорема (А. А. Гайфуллин, П. В. Ягодновский, 2007)

n -значная динамика T имеет генератор $a \in X$ тогда и только тогда, когда существует такая динамика $T^{-1}: Y \rightarrow (Y)^n$, что для любых $y_1, y_2 \in Y$ кратность, с которой y_2 входит в $T(y_1)$, равна кратности, с которой y_1 входит в $T^{-1}(y_2)$.

Проблема роста циклических n -значных групп

- Пусть $X = \langle a \rangle$ — циклическая n -значная группа
- Тогда определено n -значное отображение
 $T: X \rightarrow (X)^n : T(x) = a \cdot x$
- И определена функция роста $\xi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, где $\xi_a(k)$ — количество различных элементов в $T^k(a)$

Случай группы $\mathbb{Z}/3 * \mathbb{Z}/3$ с $\mathbb{Z}/2 < \text{Aut}$

Предложение

Для группы $\mathbb{Z}/3 * \mathbb{Z}/3 = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = 1 \rangle$ и автоморфизма $\varphi : a \mapsto b$ соответствующая 2-значная группа $\mathbb{G}_\varphi(\mathbb{Z}/3 * \mathbb{Z}/3)$ имеет функцию роста

$$\xi_{[a,b]}(k) = F_{k+3} - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{k+3} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{k+3} \right) - 1.$$

В частности, рост экспоненциален:

$$\xi_{[a,b]}(k) \sim \frac{\varphi^{k+3}}{\sqrt{5}}$$

при $k \rightarrow \infty$, где $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Последовательность n -боначчи

Определение

Последовательность целых чисел $\{F_k^{(n)}\}$ называется n -боначчиевой, если она удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$F_k^{(n)} = F_{k-1}^{(n)} + \dots + F_{k-n}^{(n)}$$

и начальным условиям $F_0 = \dots = F_{n-2} = 0$ и $F_{n-1} = 1$.

Пример

Последовательность трибоначчи:

0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, ...

Случай группы $\mathbb{Z}/m * \mathbb{Z}/m$ с $\mathbb{Z}/2 < \text{Aut}$

Предложение

Число S_k новых слов, появляющихся на шаге k равно $(k + m - 2)$ -му $(m - 1)$ -боначчиевому числу

$$S_k = F_{k+m-2}^{(m-1)}$$

при $k \geq -(m - 2)$.

Случай группы $\mathbb{Z}/m * \mathbb{Z}/m \subset \mathbb{Z}/2 < \text{Aut}$

Предложение (М. Корнев)

Для группы $\mathbb{Z}/m * \mathbb{Z}/m = \langle a, b \mid a^m = b^m = 1 \rangle$ с автоморфизмом $\varphi : a \mapsto b$ функция роста при $m \geq 3$

$$\xi_{[a,b]}(k) \sim \frac{r^{k+1}}{mr - 2(m-1)}$$

при $k \rightarrow \infty$, где r — положительный корень многочлена $\chi(\lambda) = \lambda^n - \lambda^{n-1} - \dots - 1$. В частности, рост 2-значной группы $\mathbb{G}_\varphi(\mathbb{Z}/m * \mathbb{Z}/m)$ полиномиален тогда и только тогда, когда $m = 2$.

Случай группы $(\mathbb{Z}/2)^{*s}$ с $\mathbb{Z}/s < \text{Aut}$

Предложение

Для группы $(\mathbb{Z}/2)^{*s} = \langle a_1, \dots, a_s \mid a_1^2 = \dots = a_s^2 = 1 \rangle$ с автоморфизмом $a_i \mapsto a_{i+1}$ (индексы сдвигаются по модулю s) получается s -значная группа с функцией роста

$$\xi_{[a_1, \dots, a_s]}(k) = \begin{cases} \frac{(s-1)^k - 1}{s-2} + 1, & s \geq 3 \\ k + 1, & s = 2 \end{cases}$$

В частности, рост экспоненциален тогда и только тогда, когда $s = 2$.

Последовательность Туэ-Морса

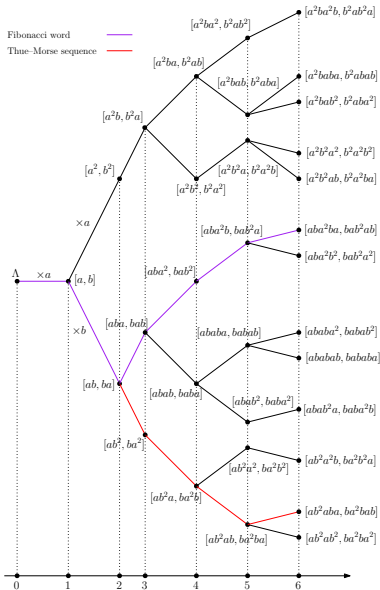
Определение

Последовательность $\mathbf{t} = t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 \dots$ Туэ-Морса определяется рекуррентно:

$$t_0 = 0, \quad t_{2n} = t_n, \quad t_{2n+1} = \bar{t}_n,$$

где $\bar{t}_n$ означает отрицание к t_n в смысле булевой алгебры.

Связь $\mathbb{Z}/3 * \mathbb{Z}/3$ с символической динамикой



Связь $\mathbb{Z}/3 * \mathbb{Z}/3$ с символической динамикой

- Алгоритм построения ориентированного дерева Γ , в вершинах которого стоят элементы 2-значной группы $\mathbb{G}$, с каноническим вложением в плоскость:
 - 0 На шаге 0 начнём с вершины, отвечающей пустому слову Λ — это корень нашего дерева
 - 1 На шаге 1 образуем смежную с корнем вершину $[a, b]$
 - 2 На шаге 2 от последней вершины отведём два ребра, каждое из которых соответствует приписыванию справа буквы a или b . Получатся две вершины со словами длины 2: $[a^2, b^2]$ и $[ab, ba]$

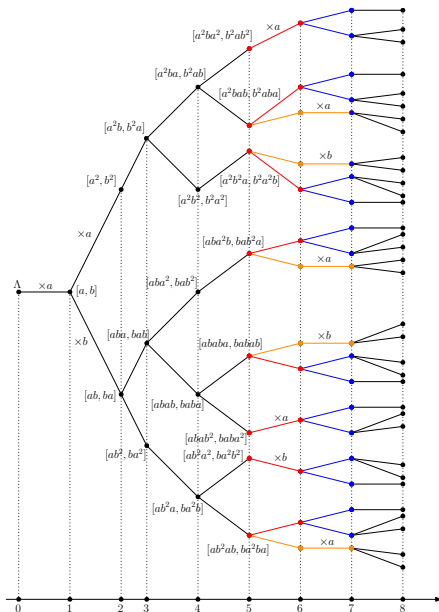
Связь $\mathbb{Z}/3 * \mathbb{Z}/3$ с символической динамикой

- 4 На шаге k мы стартуем со всех бескубных слов длины $k - 1$ и отводим от каждой вершины 1 или 2 ребра, руководствуясь следующим принципом:
- Если слово оканчивается на первую степень буквы, то от данной вершины будет отходить ровно 2 ребра, соответствующих умножению на a или b
 - Если слово оканчивается на квадрат буквы, то от данной вершины будет отходить в точности одно ребро, соответствующее дополнительной букве
 - Ребро, соответствующее умножению на a , лежит выше ребра, соответствующего умножению на b

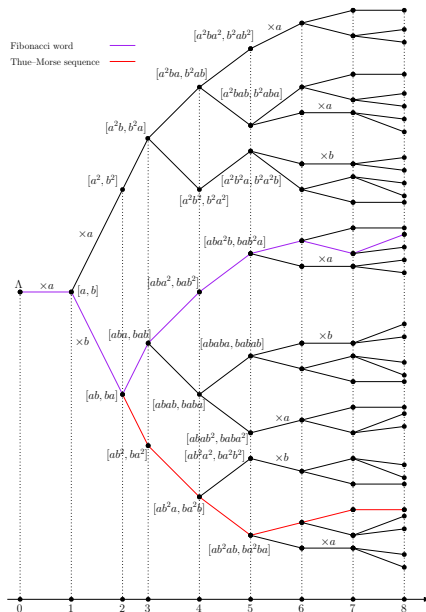
Свойство дерева Γ

На уровне k дерева Γ сверху вниз находятся все бескубные слова длины k в лексикографическом порядке возрастания и их число равно F_{k+1}

Связь $\mathbb{Z}/3 * \mathbb{Z}/3$ с символической динамикой



Связь $\mathbb{Z}/3 * \mathbb{Z}/3$ с символической динамикой



Связь $\mathbb{Z}/3 * \mathbb{Z}/3$ с символической динамикой

Определение

Будем называть *бескубным* любое слово в нормальной форме группы $\mathbb{Z}/3 * \mathbb{Z}/3 = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = 1 \rangle$.

Предложение (М. Корнев)

Рассмотрим последовательность Θ_k подслов произвольного бескубного слова вида

$$\Psi a a b a a b a a b \dots = \Psi(a a b),$$

где последняя буква слова-предпериода Ψ отлична от a . Тогда число Q_k бескубных слов, не меньших слова Θ_k в лексикографическом порядке удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$Q_k = Q_{k-1} + Q_{k-2}.$$

Спасибо за внимание!