

27-вершинные триангуляции 16-мерных многообразий, похожих на октавную проективную плоскость

А. А. Гайфуллин

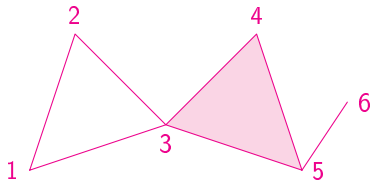
«Динамика в Сибири»

Новосибирск, 27 февраля – 4 марта 2023 г.

Триангуляции многообразий

Симплициальный комплекс K с множеством вершин V :

- ▶ на некоторые конечные подмножества множества вершин V натянуты симплексы;
- ▶ если на σ натянут симплекс, то на всякое подмножество $\tau \subset \sigma$ тоже натянут симплекс.



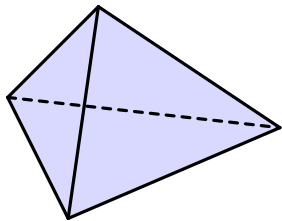
Максимальные симплексы:

$\{1, 2\}$ $\{1, 3\}$ $\{2, 3\}$
 $\{3, 4, 5\}$ $\{5, 6\}$

Если симплициальный комплекс K гомеоморфен топологическому многообразию M , то K называется **триангуляцией** многообразия M .

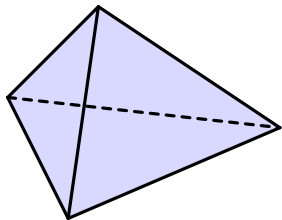
Все рассматриваемые многообразия будут замкнутыми, то есть компактными и без края.

Триангуляции многообразий: примеры

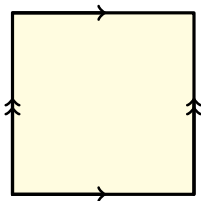


$$S_4^2$$

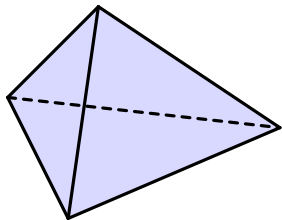
Триангуляции многообразий: примеры



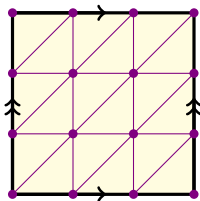
S_4^2



Триангуляции многообразий: примеры

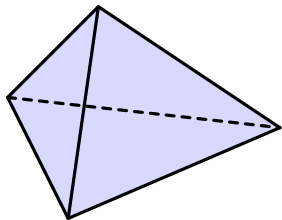


S_4^2

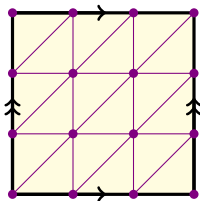


T_9^2

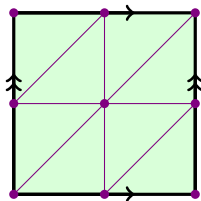
Триангуляции многообразий: примеры



S^2_4

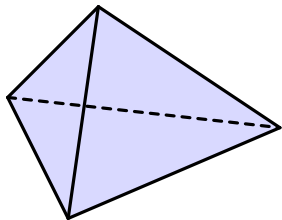


T^2_9

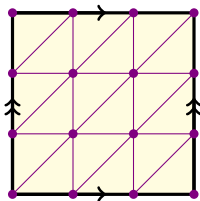


$T^2_4 ?$

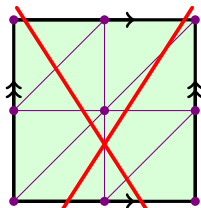
Триангуляции многообразий: примеры



S^2_4

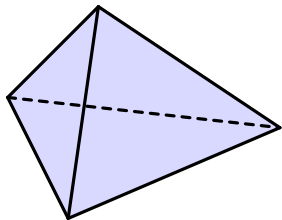


T^2_9

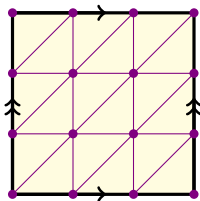


$T^2_4 ?$

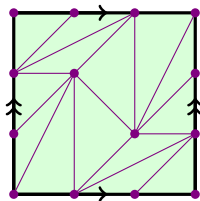
Триангуляции многообразий: примеры



S^2_4

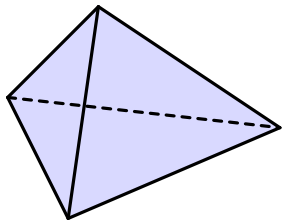


T^2_9

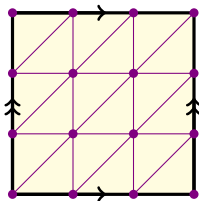


T^2_7

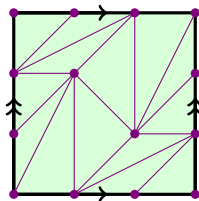
Триангуляции многообразий: примеры



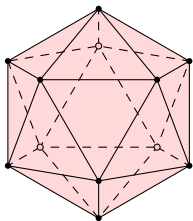
S_4^2



T_9^2

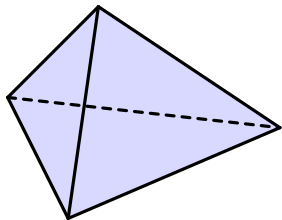


T_7^2

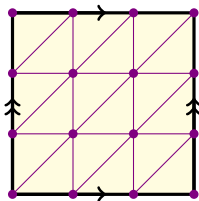


правильный икосаэдр

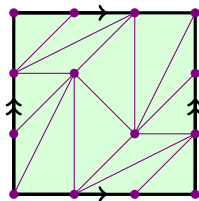
Триангуляции многообразий: примеры



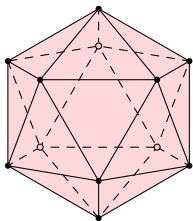
S_4^2



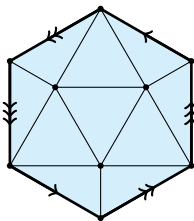
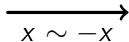
T_9^2



T_7^2



правильный икосаэдр



$\mathbb{RP}_6^2$

Минимальные триангуляции

Триангуляция K многообразия M называется **минимальной**, если она имеет наименьшее количество вершин среди всех триангуляций многообразия M .

Минимальные триангуляции

Триангуляция K многообразия M называется **минимальной**, если она имеет наименьшее количество вершин среди всех триангуляций многообразия M .

d		число вершин n	
любое	S^d	$d + 2$	
2	Σ_g^2	$\left\lceil \frac{7 + \sqrt{48g + 1}}{2} \right\rceil, \quad g \neq 2$ $10, \quad g = 2$	М. Юнгерман, Г. Рингель, 1980
2	N_k^2	$\left\lceil \frac{7 + \sqrt{24k + 1}}{2} \right\rceil, \quad k \neq 2, 3$ $8, \quad k = 2$ $9, \quad k = 3$	Г. Рингель, 1955
четное	$S^{d-1} \times S^1$	$2d + 3$	В. Кюнель, 1986
нечетное	$S^{d-1} \rtimes S^1$	$2d + 3$	В. Кюнель, 1986

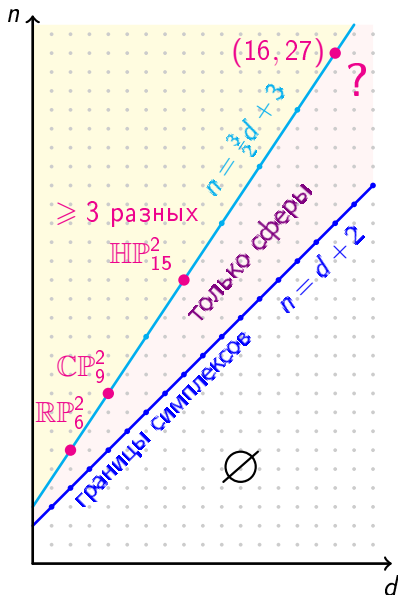
Минимальные триангуляции

d	многообразие	n	
3	$S^2 \times S^1$	10	Д. Уолкап, 1970
	$\mathbb{RP}^3$	11	Д. Уолкап, 1970
	$L(3, 1)$	12	У. Брем, 1990-е (построение); Б. Багчи, Б. Датта, 2005 (мин.)
4	$\mathbb{CP}^2$	9	В. Кюнель, 1983
	$S^2 \times S^2$	11	Ф. Лутц, 1999
	$(S^2 \times S^2) \# (S^2 \times S^2)$	12	Э. Кёлер, Ф. Лутц, 2005
	$\mathbb{RP}^4$	16	Ф. Лутц, 1999
	K3 поверхность	16	М. Каселла, В. Кюнель, 2001
5	$S^3 \times S^2$	12	Ф. Лутц, 2005
6	$S^3 \times S^3$	13	Ф. Лутц, 2005
8	$\mathbb{HP}^2$	15	У. Брем, В. Кюнель, 1987; Д. А. Городков, 2016 ($\approx \mathbb{HP}^2$)

Минимальные триангуляции

d	многообразие	n	
3	$S^2 \times S^1$	10	Д. Уолкап, 1970
	$\mathbb{RP}^3$	11	Д. Уолкап, 1970
	$L(3, 1)$	12	У. Брем, 1990-е (построение); Б. Багчи, Б. Датта, 2005 (мин.)
4	$\mathbb{CP}^2$	9	В. Кюнель, 1983
	$S^2 \times S^2$	11	Ф. Лутц, 1999
	$(S^2 \times S^2) \# (S^2 \times S^2)$	12	Э. Кёлер, Ф. Лутц, 2005
	$\mathbb{RP}^4$	16	Ф. Лутц, 1999
	$K3$ поверхность	16	М. Каселла, В. Кюнель, 2001
5	$S^3 \times S^2$	12	Ф. Лутц, 2005
6	$S^3 \times S^3$	13	Ф. Лутц, 2005
8	$\mathbb{HP}^2$	15	У. Брем, В. Кюнель, 1987; Д. А. Городков, 2016 ($\approx \mathbb{HP}^2$)
16	$\sim \mathbb{OP}^2$	27	Г., 2022

Граница Брема–Кюнеля



У. Брем, В. Кюнель, 1987:

Если $n < 3d/2 + 3$, то K – сфера.

Если $n = 3d/2 + 3$, то либо K – сфера, либо

- ▶ $d \in \{2, 4, 8, 16\}$,
- ▶ K – многообразие, похожее на проективную плоскость.

Теорема Зака

Пусть $X \subset \mathbb{CP}^{n-1}$ – гладкое неприводимое проективное алгебраическое многообразие размерности d , не содержащееся ни в какой гиперплоскости.

Многообразием секущих $\text{Sec}(X)$ называется замыкание по Зарискому объединения всевозможных прямых, проходящих через пары точек многообразия X .

Теорема (Ф. Л. Зак, 1985)

1. Если $n < \frac{3}{2}d + 3$, то $\text{Sec}(X) = \mathbb{CP}^{n-1}$.
2. Если $n = \frac{3}{2}d + 3$, то либо $\text{Sec}(X) = \mathbb{CP}^{n-1}$, либо $d \in \{2, 4, 8, 16\}$ и $X \subset \mathbb{CP}^{n-1}$ – одно из четырех вложений:
 - ▶ вложение Веронезе $\mathbb{CP}^2 \hookrightarrow \mathbb{CP}^5$,
 - ▶ вложение Сегре $\mathbb{CP}^2 \times \mathbb{CP}^2 \hookrightarrow \mathbb{CP}^8$,
 - ▶ вложение Плюккера $G_{\mathbb{C}}(2, 6) \hookrightarrow \mathbb{CP}^{14}$,
 - ▶ вложение Лазарсфелда $E_6/P_1 \hookrightarrow \mathbb{CP}^{26}$.

Проективные плоскости

$\mathbb{R}$ -алгебры с делением: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ (кватернионы), $\mathbb{O}$ (октавы)
размерностей 1, 2, 4, 8.

Проективные плоскости $\mathbb{RP}^2$, $\mathbb{CP}^2$, $\mathbb{HP}^2$, $\mathbb{OP}^2$ имеют
размерности 2, 4, 8, 16.

При $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{KP}^2 &= \text{множество прямых через } 0 \text{ в } \mathbb{K}^3 \\ &= \frac{\mathbb{K}^3 - (0, 0, 0)}{\{(x, y, z) \sim (x\lambda, y\lambda, z\lambda)\}}\end{aligned}$$

При $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ это определение не годится. Общее определение:

$$\mathbb{KP}^2 = \{P \in \text{Mat}_{3 \times 3}(\mathbb{K}) \mid P^t = \overline{P}, P^2 = P, \text{tr } P = 1\}$$

Функции Морса

Определение

Гладкая функция f на гладком многообразии M называется **функцией Морса**, если в каждой критической точке (т.е. такой, в которой $df = 0$) второй дифференциал d^2f невырожден.

Функции Морса можно определить и в **кусочно линейной** и в **топологической** категориях.

Теорема (Ж. Риб, 1946)

Если замкнутое многообразие допускает функцию Морса с двумя критическими точками, то оно гомеоморфно сфере.

Свойства проективных плоскостей

Многообразия $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$, обладают следующими свойствами:

1. на $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ существует функция Морса с тремя критическими точками индексов 0 , m и $2m$, где $m = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$;
2. $\mathbb{K}\mathbb{P}^2$ имеет клеточное разбиение на 3 клетки размерностей 0 , m и $2m$, то есть

$$\mathbb{K}\mathbb{P}^2 = S^m \cup_f D^{2m}, \quad f: S^{2m-1} \rightarrow S^m.$$

Многообразия, похожие на проективные плоскости

Определение (Дж. Илс, Н. Кёйпер, 1962)

Замкнутое многообразие M размерности $2m$ называется **многообразием, похожим на проективную плоскость**, если оно обладает одним из следующих (эквивалентных) свойств:

1. на M существует функция Морса с тремя критическими точками индексов 0 , m и $2m$;
2. M имеет клеточное разбиение на 3 клетки размерностей 0 , m и $2m$, то есть

$$M = S^m \cup_f D^{2m}, \quad f: S^{2m-1} \rightarrow S^m.$$

Из теоремы **Дж. Ф. Адамса (1960)** об отображениях с единичным инвариантом Хопфа следует, что многообразия, похожие на проективные плоскости, существуют только в размерностях 2, 4, 8 и 16.

Классификация

- $d = 2$: Всякое многообразие, похожее на проективную плоскость, гомеоморфно $\mathbb{RP}^2$.
- $d = 4$: Всякое (кусочно линейное) многообразие, похожее на проективную плоскость, гомеоморфно $\mathbb{CP}^2$ (следует из результатов [М. Фридмана, 1982](#)).
- $d = 8$: Полная классификация ([Л. Крамер, 2002](#)): бесконечное семейство PL многообразий $Y_h^8 = Y_{1-h}^8$, где $h \in \mathbb{Z}$, различающихся (с точностью до PL гомеоморфизма) своими числами Понтрягина:

$$p_1^2[Y_h^8] = 4(2h - 1)^2$$

- $d = 16$: Полная классификация ([Л. Крамер, 2002](#)): аналогичный результат, $Y_{t,\kappa} = Y_{1-t,\kappa}$, где $t \in \mathbb{Z}$, $\kappa \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,

$$p_2^2[Y_{t,\kappa}^{16}] = \frac{36}{49}(2t - 1)^2$$

и есть доп. экзотический PL инвариант $\kappa \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Результат Д. А. Городкова

Есть известная старая задача о вычислении рациональных классов Понтрягина многообразия по его триангуляции.

Частичные результаты: А. М. Габриэлов, И. М. Гельфанд, М. В. Лосик (1975), Р. МакФерсон (1977), Дж. Чигер (1983), И. М. Гельфанд и Р. МакФерсон (1992).

Г., 2004: Полностью комбинаторная формула для первого рационального класса Понтрягина, пригодная для вычислений.

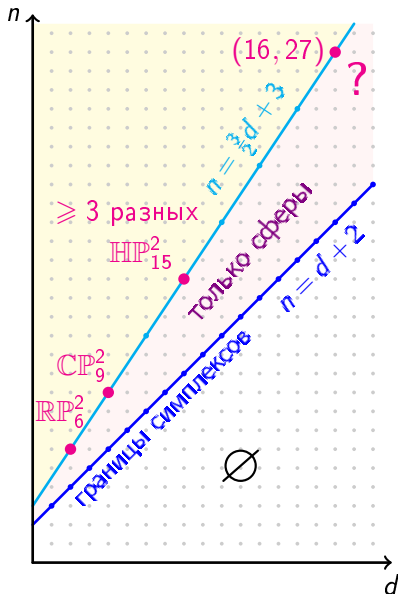
Д. А. Городков, 2016: Применив эту формулу, вычислил, что для 15-вершинных триангулированных многообразий Брема–Кюнеля M_{15}^8 имеет место равенство

$$p_1^2[M_{15}^8] = 4 = p_1^2[\mathbb{HP}^2].$$

Следовательно, эти многообразия PL гомеоморфны $\mathbb{HP}^2$.

Для второго класса Понтрягина не известно эффективной комбинаторной формулы, поэтому метод не работает в 16-мерном случае.

Граница Брема–Кюнеля



У. Брем, В. Кюнель, 1987:

Если $n < 3d/2 + 3$, то K – сфера.

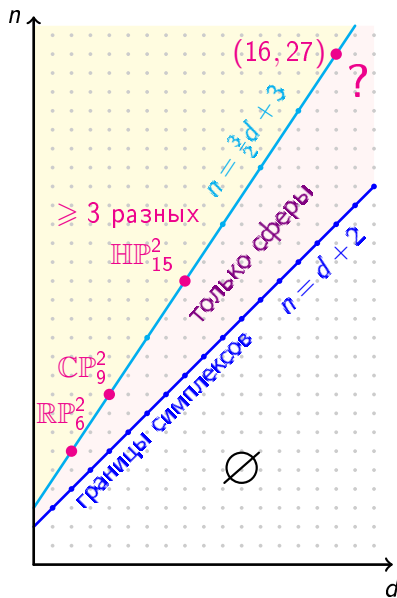
Если $n = 3d/2 + 3$, то либо K – сфера, либо

- ▶ $d \in \{2, 4, 8, 16\}$,
- ▶ K — многообразие, похожее на проективную плоскость.
- ▶ П. Арну, А. Маран, 1991:
Двойственность: $\forall \sigma \subset V$
ровно одно из σ и $V \setminus \sigma$
натягивает симплекс.
В частности, K является $(d/2 + 1)$ -смежностным.

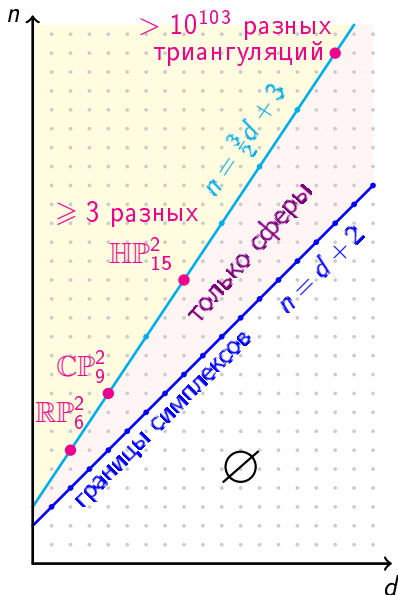
Количества симплексов

$d = 2$	$d = 4$	$d = 8$	$d = 16$
6	9	15	27
15	36	105	351
10	84	455	2925
	90	1365	17550
	36	3003	80730
		4515	296010
		4230	888030
		2205	2220075
		490	4686825
			8335899
			12184614
			14074164
			12301200
			7757100
			3309696
			853281
			100386
$2^5 - 1 = 31$	$2^8 - 1 = 255$	$2^{14} - 1 = 16383$	$2^{26} - 1 = 67108863$

Основной результат



Основной результат



Теорема (Г., 2022)

Имеется по крайней мере

$$\frac{(2^{351} + 13 \cdot 2^{118} + 81 \cdot 2^{29})}{351} + 2 \approx 1.3 \cdot 10^{103}$$

различных 27-вершинных
16-мерных
триангулированных
многообразий, похожих на
проективную плоскость.

Группы симметрий триангуляций

d	K	Sym(K)	Sym(K)	в. т.?
2	$\mathbb{RP}_6^2$	A_5	60	да
4	$\mathbb{CP}_9^2$	$C_3^2 \rtimes C_6$	54	да
8	$\mathbb{HP}_{15}^2$	A_5	60	да
	$\widetilde{\mathbb{HP}}_{15}^2$	A_4	12	нет
	$\widetilde{\widetilde{\mathbb{HP}}}_{15}^2$	S_3	6	нет
16	4 триангуляции	$C_3^3 \rtimes C_{13}$	351	да
	630 триангуляций	C_3^3	27	да
	$\approx 1.3 \cdot 10^8$ триангуляций	C_{13}	13	нет
	$\approx 1.8 \cdot 10^{11}$ триангуляций	C_3^2	9	нет
	$\approx 1.8 \cdot 10^{34}$ триангуляций	C_3	3	нет
	$\approx 1.3 \cdot 10^{103}$ триангуляций	1	1	нет

Замечание. $C_3^3 \rtimes C_{13} = \mathbb{F}_{27} \rtimes S$, где $\mathbb{F}_{27}$ – поле из 27 элементов и $S \subset \mathbb{F}_{27}^\times$ – подгруппа индекса два, состоящая из квадратов.

Алгоритм поиска триангуляций

Пусть $V = \{1, \dots, 27\}$, $G \subset S_{27}$ – некоторая подгруппа.

Задача алгоритма. Перечислить все G -инвариантные 16-мерные симплицальные комплексы K на множестве вершин V такие, что:

1. для любых двух симплексов σ и τ комплекса K объединение множеств вершин σ и τ не равно всему V ;
2. каждый 15-мерный симплекс комплекса K содержится ровно в двух 16-мерных (K – **псевдомногообразия**);
3. K содержит ровно 100386 16-мерных симплексов.

Такой алгоритм даст нам список кандидатов, который заведомо содержит все G -инвариантные 27-вершинные 16-мерные триангулированные многообразия, похожие на проективные плоскости, но может содержать и что-то лишнее.

Нам нужен такой алгоритм, чтобы он работал разумное время для группы $G_{351} = C_3^3 \rtimes C_{13}$.

Алгоритм поиска триангуляций

Пусть $V = \{1, \dots, 27\}$, $G \subset S_{27}$ – некоторая подгруппа. Пусть $\mathcal{O}$ – множество всех G -орбит 17-элементных подмножеств множества V .

Задача алгоритма – переформулировка. Перечислить все подмножества $\mathcal{X} \subset \mathcal{O}$ такие, что:

1. Если орбиты $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ принадлежат $\mathcal{X}$, $A \in \mathfrak{a}$ и $B \in \mathfrak{b}$, то $A \cup B \neq V$.
2. Каждое 16-элементное подмножество $C \subset V$ либо не содержится ни в одном, либо содержится ровно в двух 17-элементных подмножествах, входящих в орбиты из $\mathcal{X}$.
3. Сумма мощностей орбит из $\mathcal{X}$ равна 100386.

Для G_{351} :

$$|\mathcal{O}| = \frac{1}{351} \cdot \binom{27}{17} = 24035.$$

Искомое подмножество $\mathcal{X}$ должно включать $100386/351 = 286$ орбит.

Запрещенные орбиты и пары орбит

- ▶ Если орбиты $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ из $\mathcal{O}$ содержат множества A и B соответственно такие, что $A \cup B = V$, то орбиты $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ не могут входить в $\mathcal{X}$ одновременно - мы говорим, что пара $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$ запрещена.
- ▶ Если для 16-элементного подмножества $C \subset V$, количество 17-элементных подмножеств $A \in \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ таких, что A содержит C , больше 2, то $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$ тоже запрещена.

Если пара $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{a}\}$ запрещена, то орбита $\mathfrak{a}$ не может входить в $\mathcal{X}$.
Из 24035 орбит остается 18546 допустимых, $\mathcal{O}_{adm} \subset \mathcal{O}$.

Некоторые пары допустимых орбит по-прежнему запрещены.

Для каждой G -орбиты 16-элементных подмножеств $C \subset V$ (количество таких орбит 37145) определим группу примыкания

$$\mathcal{A}_C = \{\mathfrak{a} \in \mathcal{O}_{adm} \mid \text{ровно одно из множеств } A \in \mathfrak{a} \text{ содержит } C\}.$$

Задача алгоритма – дальнейшая переформулировка

Имеется множество $\mathcal{O}_{adm}$ (состоящее из 18546 элементов).
Некоторые пары $\{a, b\} \subset \mathcal{O}_{adm}$ **запрещены**. Имеется 37145
подмножеств $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{O}_{adm}$, называемых **группами примыкания**.

Требуется перечислить все 286-элементные подмножества
 $\mathcal{X} \subset \mathcal{O}_{adm}$ такие, что:

1. $\mathcal{X}$ не содержит ни одной запрещенной пары.
2. Для каждой из групп примыкания $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{O}_{adm}$ множество $\mathcal{X} \cap \mathcal{A}_i$ либо пусто, либо имеет мощность 2.

Алгоритм

1. Изучая по очереди группы примыкания $\mathcal{A}_i$, «улучшаем» наши знания о запрещенных орбитах и парах орбит и о **требованиях $a \rightarrow b$** . Например, если в $\mathcal{A}_i$ осталось ровно 2 еще не запрещенные орбиты, то они требуют друг друга.
2. Когда такой метод не работает, алгоритм ветвится:
выбираем орбиту a и
 - ▶ сначала искусственно берем a в $\mathcal{X}$;
 - ▶ потом, наоборот, запрещаем a .

В каждом из случаев возвращаемся пункту 1.

3. **Эвристика**: в качестве a выбираем орбиту с наибольшим $10r(a) + p(a)$, где $r(a)$ – количество требований $a \rightarrow b$, а $p(a)$ – количество запрещенных пар $\{a, b\}$.
4. Если осталось менее 286 не запрещенных орбит – стоп.
5. **Наблюдение**: алгоритм ветвится слабо – количество искусственно взятых орбит всегда ≤ 4 , а обычно ≤ 1 .
6. **Время работы**: 7.5 часов на обычном ноутбуке.

Результат работы алгоритма

- ▶ Для группы $G = C_3^3 \rtimes C_{13}$ программа выдает список из 24 симплициальных комплексов.
- ▶ Пусть N – нормализатор G в S_{27} . Тогда $|N : G| = 6$.
Если отождествить $G = \mathbb{F}_{27} \rtimes S$, $S \subset \mathbb{F}_{27}^\times$ – квадраты, то $N/G \cong C_2 \times C_3$ порождается **обращением знака** $x \mapsto -x$ и **автоморфизмом Фробениуса** $x \mapsto x^3$.
Группа N/G действует на множестве 24 полученных симплициальных комплексов так, что распадается на 4 группы по 6 изоморфных комплексов. Получаем список из 4 попарно не изоморфных симплициальных комплексов K_1, K_2, K_3, K_4 .
- ▶ Проверяется, что K_i – комбинаторные многообразия. Это непросто; ключевым является использование свойства **неуклончивости (non-evasiveness)**.
- ▶ Легко проверить, что $\chi(K_i) = 3$. Следовательно, K_i – не сферы и, значит, многообразия, похожие на проективные плоскости.

Триангуляция K_1 (страница 1 из 3)

111111111111011100000000	111111010111101111000000	10111101111110110111000000
111111111111011110000000	11111010111111011110000000	11101011111110110111000000
111111101111111110000000	11010111111110111110000000	1101111001111111101110000000
111011111111111110000000	11011110011111111110000000	11111101101110011111000000
11111111111110011100000000	10011110111111111110000000	1111110011111110011111000000
11111111111101101110000000	11111111111110010101000000	1101111011111110011111000000
1111111111110111011100000000	111111111011110110101000000	11110100111111101111000000
11111101111111101110000000	111110111111110110101000000	111110111101011111000000
11101111111111101110000000	101111111111110110101000000	0111111111010111111000000
11111111011110111100000000	01111111111110110101000000	11011111101101011111000000
11111111011110111100000000	11111111101110011101000000	11011111011101011111000000
11111011111111011110000000	111111011111110011101000000	11011011111101011111000000
10111111111111011110000000	110111111111110011101000000	11111111000110111111000000
01111111111111011110000000	111111110011110111101000000	11110111001110111111000000
11111111011101111110000000	111110111101110111101000000	01111111110011011111000000
01111111111101111110000000	10111111101110111101000000	11101111101011011111000000
11111111011011111110000000	011111111011110111101000000	11011111101011011111000000
01111111111101111110000000	111011111011110111101000000	11011111011011011111000000
11111110011111111110000000	110111111011110111101000000	11011011111011011111000000
11101111011111111110000000	110111110111110111101000000	11111101001110111111000000
10111110111111111110000000	110110111111110111101000000	11111010110111011111000000
01111110111111111110000000	100111111111110111101000000	10111110110111011111000000
01111101111111111110000000	010111111111110111101000000	11101011110111011111000000
01101111111111111110000000	111010111111110111011000000	11111100101111011111000000
1111101011111111011110000000	111111011111110010111000000	11101101011110111111000000
1110101111111111011110000000	111110111111010110111000000	11011110101111011111000000
111111101101110111110000000	111111111010110110111000000	11101011101111011111000000
111111001111111011110000000	111110111110110110111000000	11011110011111011111000000
110111101111111011110000000	011111111110110110111000000	11111000111111011111000000
111110111111010111110000000	111111101011110110111000000	11011010111111011111000000
11111111010110111110000000	110111110111110110111000000	10011110111111011111000000
11111111010110111110000000	111110101111110110111000000	

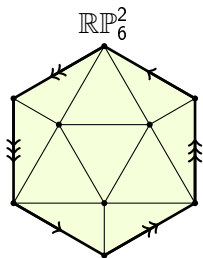
Триангуляция K_1 (страница 2 из 3)

11011100011111111111000000	111111111111110010001100000	110011111111110011101100000
11001110011111111111000000	11111111011110110001100000	101011111111110011101100000
11110000111111111111000000	011111111111110110001100000	11101011111101101101100000
11111111111110110000100000	11111111101110011001100000	1110100111111101101100000
110111111111111110000100000	111110111111110011001100000	01011011111111011101100000
111111011111111011000100000	110111111111110011001100000	01010111111111011101100000
110111111111111011000100000	11111111001110111001100000	01001111111111011101100000
111101011111111011100100000	010111111111110111001100000	111111011111110010011100000
111011011111111011100100000	011111111111110100101100000	11111111010110110011100000
110101111111111011100100000	111111111111010010101100000	11111101011110110011100000
110011111111111011100100000	111111111110110010101100000	11110101111110110011100000
01011101111111111100100000	111111110111110010101100000	101111101111110110011100000
01001111111111111100100000	111011111111110010101100000	11111101011100110011100000
111111011011111011010100000	110111111111110010101100000	11111001111111001011100000
111111001111111011010100000	11111111011010110101100000	1111110101011011011100000
110111101111111011010100000	111101111011110110101100000	11101001111111011011100000
10011110111111111010100000	011101111111110110101100000	11111111000110111011100000
011111111110111100110100000	11111111101110001101100000	11111101001110111011100000
111111111110110010110100000	111110111111110001101100000	111101010110111011101100000
1111111011011011100110100000	110111111111110001101100000	10111101010110111011100000
111111001111111001110100000	11111111001110101101100000	11111001011110111011100000
11111111010110101110100000	111011111011110101101100000	111110001111110111011100000
11111110101110101110100000	010111111111110101101100000	110110101111110111011100000
111111101100111011110100000	11111111100110011101100000	100111101111110111011100000
011111111100111011110100000	11111011111011001101100000	1111111110101110100111100000
111111100101111011110100000	111111110101110011101100000	111111101011110100111100000
111101101101111011110100000	11101111101110011101100000	11110101111110100111100000
111011101101111011110100000	111011111011110011101100000	101111101111110100111100000
111111000111111011110100000	111111010111110011101100000	001111111101111100111100000
111011001111111011110100000	111101011111110011101100000	11111101111010010111100000
110011101111111011110100000	111010111111110011101100000	111111110101100100111100000
11111000011111111110100000	110101111111110011101100000	111111101110110010111100000

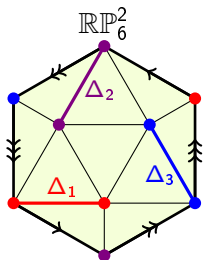
Триангуляция K_1 (страница 3 из 3)

111111100111110010111100000	111111000111110011111100000	1111110101111100111100110000
111101101111110010111100000	111011001111110011111100000	11111100101111011100110000
111011101111110010111100000	1111110110001011111100000	11111100011111011100110000
001111111110111010111100000	0111111110001011111100000	11011010111111011100110000
111111110100101101111100000	11111100101011011111100000	11001110111111011100110000
111111101011010110111100000	11110110110101101111100000	11011010011111111100110000
111111100101101101111100000	11110100111011011111100000	11001111001111111100110000
111111100011101101111100000	11110100110111011111100000	11111100111011001110110000
101111110011110101111100000	11110010110111011111100000	11110101101111001110110000
111111101101110001111100000	11110100011111011111100000	11111100101111001110110000
111111001111110001111100000	11100100111111011111100000	01111010110111101110110000
111111101101011001111100000	11111110000111011111100000	10011111111101111000110000
111101001111111001111100000	11011100011110111111100000	110111110111110011001110000
111111110001101011111100000	11001010011111111111100000	11011110011111011001110000
111011111010110101111100000	10001110011111111111100000	10001111111101111001110000
111111101001101011111100000	111110101111111101010010000	01011111011011110110110000
111110101101110101111100000	111110101111111100110010000	111111111100010011101110000
101111101101110101111100000	111110101101111101110010000	110111110110110011101110000
111111001011110101111100000	11111111101011011001010000	11111110110001011101110000
1110111101011110101111100000	111111111000101110101010000	011111111000101101110110000
111110001111110101111100000	10111111110011011101010000	110111100110111011101110000
110110101111110101111100000	110111110110111100111010000	010111110110111011101110000
110110100111111101111100000	110111100111111100111010000	110111100101111011101110000
1001111100111111101111100000	110111010110111110111010000	01001110011111111101110000
111111111000110011111100000	110111110010111101111010000	01111111110001011011110000
1111111101100110011111100000	111100101101111101111010000	111111001011010111011110000
111111011010110011111100000	11011110001111101111010000	111110101111010100111110000
111011111010110011111100000	11011011111111011000110000	011111111100011010111110000
111111001110110011111100000	10011111111111011000110000	001111110110111010111110000
111111100101110011111100000	11011010111111111000110000	110111110010111001111110000
11101111011011110011111100000	1111111011011111001100110000	
1110111101011110011111100000	111111001111111001100110000	

Триангуляции с меньшими группами симметрий

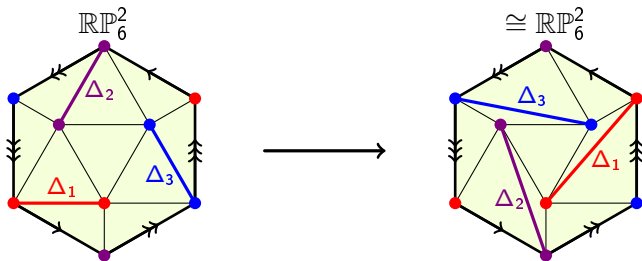


Триангуляции с меньшими группами симметрий



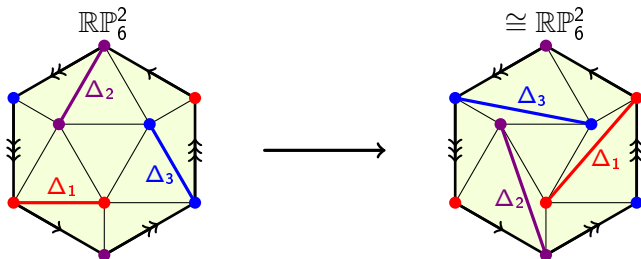
$$(\Delta_1 * \partial \Delta_2) \cup (\Delta_2 * \partial \Delta_3) \cup (\Delta_3 * \partial \Delta_1)$$

Триангуляции с меньшими группами симметрий



$$(\Delta_1 * \partial \Delta_2) \cup (\Delta_2 * \partial \Delta_3) \cup (\Delta_3 * \partial \Delta_1) \mapsto (\partial \Delta_1 * \Delta_2) \cup (\partial \Delta_2 * \Delta_3) \cup (\partial \Delta_3 * \Delta_1)$$

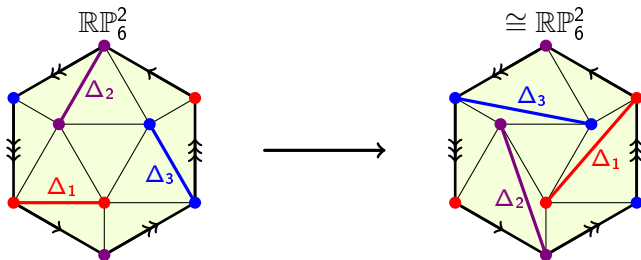
Триангуляции с меньшими группами симметрий



$$(\Delta_1 * \partial \Delta_2) \cup (\Delta_2 * \partial \Delta_3) \cup (\Delta_3 * \partial \Delta_1) \mapsto (\partial \Delta_1 * \Delta_2) \cup (\partial \Delta_2 * \Delta_3) \cup (\partial \Delta_3 * \Delta_1)$$

$\mathbb{CP}_9^2$: такой же подкомплекс с $\dim \Delta_i = 2$; перестройка приводит к триангуляции $\cong \mathbb{CP}_9^2$.

Триангуляции с меньшими группами симметрий



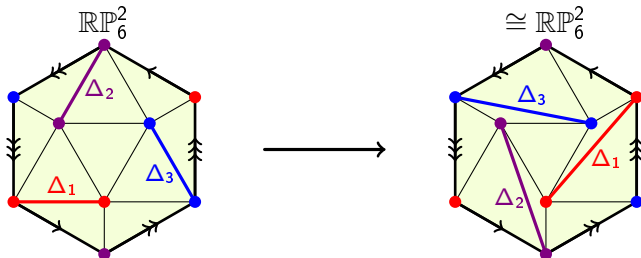
$$(\Delta_1 * \partial \Delta_2) \cup (\Delta_2 * \partial \Delta_3) \cup (\Delta_3 * \partial \Delta_1) \mapsto (\partial \Delta_1 * \Delta_2) \cup (\partial \Delta_2 * \Delta_3) \cup (\partial \Delta_3 * \Delta_1)$$

$\mathbb{CP}_9^2$: такой же подкомплекс с $\dim \Delta_i = 2$; перестройка приводит к триангуляции $\cong \mathbb{CP}_9^2$.

$\mathbb{HP}_{15}^2$: 5 таких же подкомплексов с $\dim \Delta_i = 4$; одна орбита по действию $\text{Sym}(\mathbb{HP}_{15}^2) \cong A_5$. Перестройки не мешают друг другу!

- ▶ Если выполнить сразу все 5 получим снова $\cong \mathbb{HP}_{15}^2$.
- ▶ Если выполнить 1 или 4 перестройки, получим $\widetilde{\mathbb{HP}}_{15}^2$.
- ▶ Если выполнить 2 или 3 перестройки, получим $\widetilde{\widetilde{\mathbb{HP}}}_{15}^2$.

Триангуляции с меньшими группами симметрий



$$(\Delta_1 * \partial \Delta_2) \cup (\Delta_2 * \partial \Delta_3) \cup (\Delta_3 * \partial \Delta_1) \mapsto (\partial \Delta_1 * \Delta_2) \cup (\partial \Delta_2 * \Delta_3) \cup (\partial \Delta_3 * \Delta_1)$$

K_2 : 351 таких же подкомплексов с $\dim \Delta_i = 8$; одна орбита по действию $G = C_3^3 \rtimes C_{13}$. Перестройки не мешают друг другу!

- ▶ Если выполнить перестройки с номерами из подмножества $A \subset G$, получим некоторую триангуляцию K_A . При этом $K_{A_1} \cong K_{A_2}$ тогда и только тогда, когда $A_2 = gA_1$ для некоторого $g \in G$.
- ▶ Если выполнить сразу все 351 перестроек, получим K_3 .
- ▶ K_1 и K_4 не содержат подкомплексов указанного вида.

Гипотеза

Гипотеза

Все построенные 27-вершинные триангулированные многообразия гомеоморфны $\mathbb{O}P^2$.

Почему именно такая группа симметрий ($G = C_3^3 \rtimes C_{13}$)?

- ▶ Если наделять $\mathbb{CP}^2$ метрикой Фубини–Штуди, то $\text{Isom}(\mathbb{CP}^2) \cong F_4$ (исключительная компактная односвязная простая группа Ли).
- ▶ **А. В. Алексеевский (1974)** изучал конечные коммутативные подгруппы простых комплексных групп Ли, не содержащиеся в торах и имеющие конечные нормализаторы.

В частности, он нашел подгруппу $C_3^3 \subset F_4$, нормализатор которой имеет вид $C_3^3 \rtimes \text{SL}(3, \mathbb{F}_3)$.

- ▶ Весь этот нормализатор слишком большой, чтобы быть группой симметрий триангуляции $\mathbb{CP}^2$, но естественно попробовать разные его подгруппы. Так как в $\text{SL}(3, \mathbb{F}_3)$ есть элемент порядка 13, то одной из таких подгрупп является группа $G = C_3^3 \rtimes C_{13}$.

$\mathbb{CP}_9^2$ внутри K_i

Рассмотрим подгруппу $C_3 \subset G_{351} = C_3^3 \rtimes C_{13}$ (с порождающим ω) и множество неподвижных точек $K_i^{C_3}$.

Каждая точка p в симплицальном комплексе K_i имеет вид

$$p = \sum_{v \in V} \lambda_v v, \quad \sum_{v \in V} \lambda_v = 1$$

Пусть p неподвижна при действии группы C_3 . Тогда

$$\lambda_v = \lambda_{\omega v} = \lambda_{\omega^2 v}$$

Значит, $K_i^{C_3}$ – симплицальный комплекс на 9 вершинах

$$\frac{1}{3}(v + \omega v + \omega^2 v)$$

Теорема

$$K_i^{C_3} \cong \mathbb{CP}_9^2.$$

Бизвездные преобразования



$$\Delta_1 * \partial\Delta_2 \leftrightarrow \partial\Delta_1 * \Delta_2$$

Теорема (У. Пахнер, 1987)

Любая (комбинаторная) триангуляция $(n - 1)$ -мерной сферы может быть превращена в границу симплекса $\partial\Delta^n$ при помощи конечного числа бизвездных преобразований.

Пусть L_i – линк вершины в триангуляции K_i .

Теорема

К 26-вершинным триангуляциям 15-мерной сферы L_1 и L_4 нельзя применить ни одно бизвездное преобразование, не увеличивающее количества вершин.

По-видимому, это первые отличные от границ симплексов триангуляции сфер с таким свойством.

Спасибо за внимание!