

# Конечнозонный подход к пространственно–двумерным аномальным волнам и уравнение Дэви–Стюардсона.

П.Г.Гриневич<sup>1</sup>, P.M. Santini<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Математический Институт имени В.А. Стеклова РАН,  
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН  
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва.

<sup>2</sup>Dipartimento di Fisica, Università di Roma "La Sapienza", Italy  
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma, Italy.  
Исследования были поддержаны грантами РФФИ №18-11-00316 и  
№21-11-00331

“Dynamics in Siberia–2023”, 1 марта 2023 г.

Волны-убийцы в океане, также называемые аномальными волнами (English: rogue waves, freak waves, anomalous waves) – это гиганские волны (обычно требуют, чтобы их амплитуда, как минимум, втрое превышала амплитуду соседних), которые появляются как бы из ниоткуда и исчезают как бы в никуда.

В отличие от цунами, источник, их порождающий, не столь очевиден.

Ниже несколько фотографий из Интернета:



Рис.: Корабль "Академик Иоффе" в проливе Дрейка

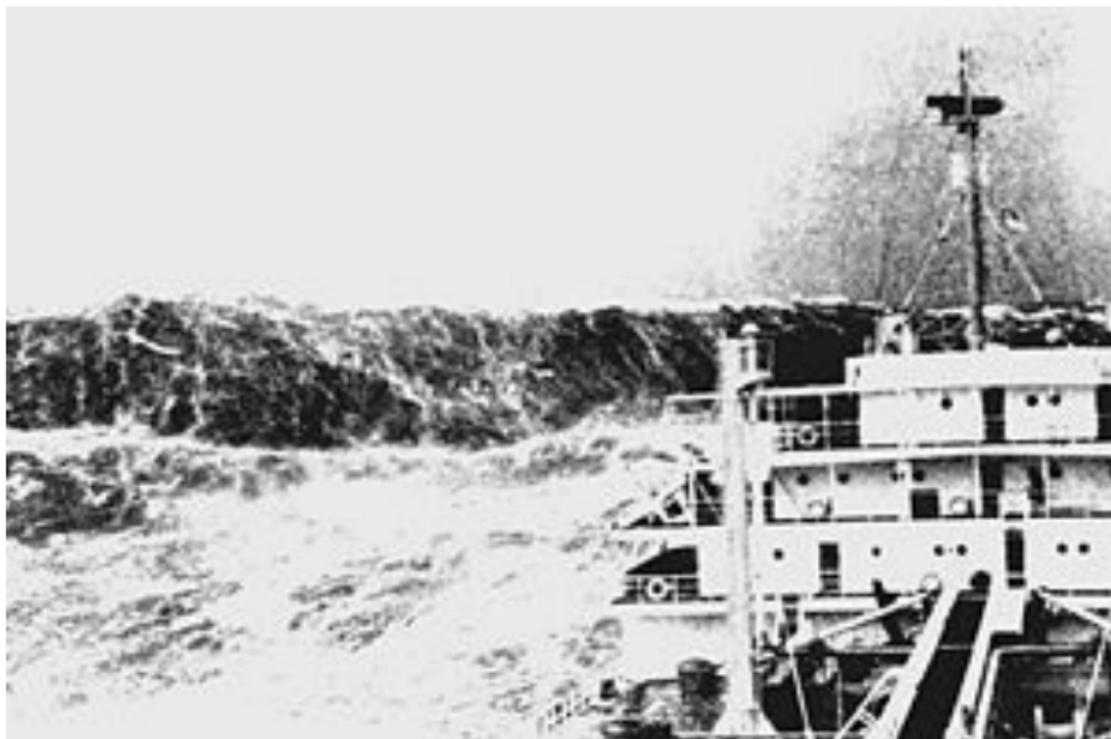


Рис.: Фотография из Бискайского залива.

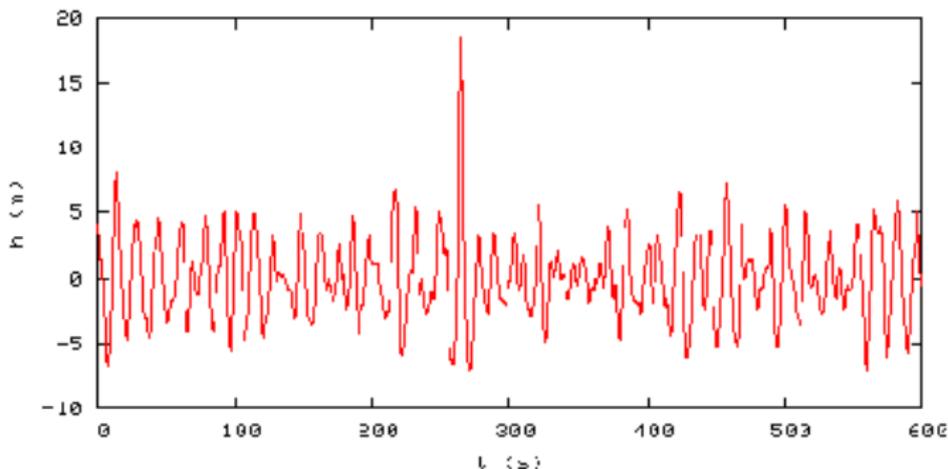
<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wea00800,1.jpg>



Рис.: Пирамидальная волна у берегов Японии, фотография Fukui Kuriyami

# Волна Дропнер

Сообщения о таких волнах были достаточно давно, однако долгое время они воспринимались как матросские байки (типа рассказов о том, что кто-то видел русалок).



Впервые такая волна была зарегистрирована приборами на нефтяной платформе Дропнер в 160 юго-западнее южной оконечности Норвегии 1 января 1995 года. Ее называют волна Дропнер или Новогодняя волна.

# Волны-убийцы как нелинейный феномен

На сегодняшний день работа по созданию полной теории волн-убийц далека от завершения, несмотря на то, что в ней участвуют ведущие ученые, включая группу В.Е. Захарова в России. Это – живая задача. Споры о возможных механизмах генерации этих волн пока на завершены.

Одна из попыток объяснить рождение аномальных волн – случайная синхронизация фаз в рамках линейной теории.

Напомним, что в теории колебаний один из основных инструментов – представление исследуемой функции в виде ряда Фурье, т.е. как суммы Фурье-гармоник.

Поведем очень простой численный эксперимент.

# Волны-убийцы как нелинейный феномен

Рассмотрим пару функций, которые есть сумма гармоник с одинаковыми амплитудами

$$f_1(x) = \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=-100}^{100} \exp(ikx) \right], \quad f_2(x) = \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=-100}^{100} \exp(ikx + \phi_k) \right],$$

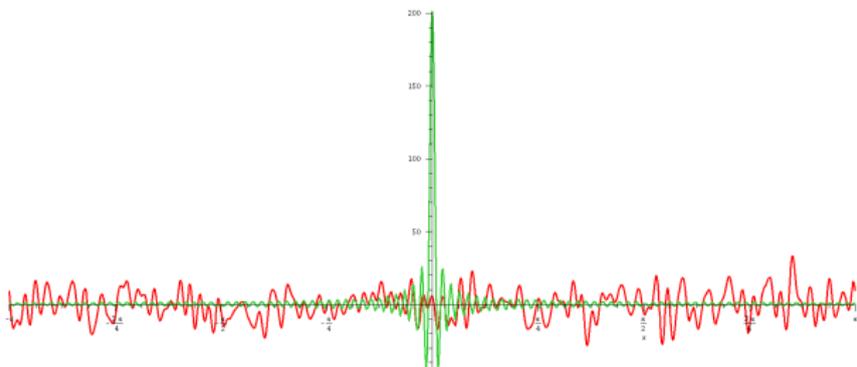


Рис.: График  $f_1$  нарисован зеленым, график  $f_2$  – красным.

однако все фазы  $f_1$  синхронизированы в 0, а фазы  $\phi_k$  функции  $f_2$  – выбраны случайными.

# Волны-убийцы как нелинейный феномен

Одна из работ, посвященная объяснению волны Дропнер, использует линейную теорию

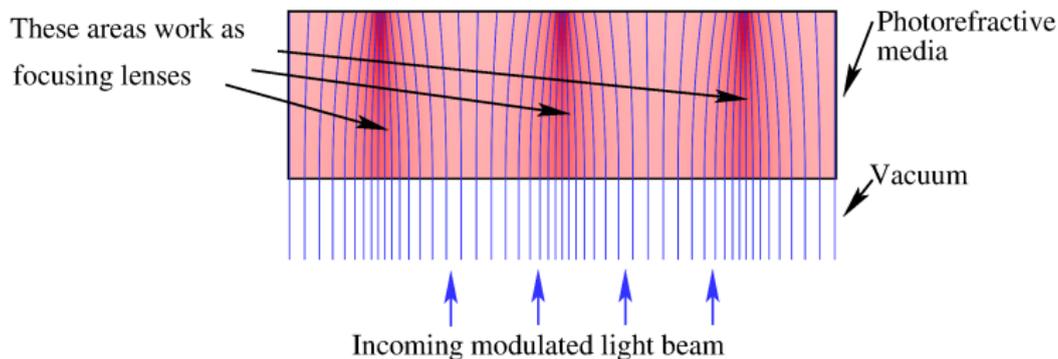
F. Fedele, J. Brennan, S. Ponce de León, J. Dudley, F. Dias, “Real world ocean rogue waves explained without the modulational instability”, *Scientific Reports*, **6** (2016), 27715.

В настоящее время наиболее распространенная точка зрения состоит в том, что **волны-убийцы – это нелинейный феномен, связанный с модуляционной нестабильностью.**

С точки зрения математики нелинейные модели – модели, описываемые нелинейными уравнениями. С точки зрения физики нелинейные среды – это среды, параметры которых меняются при прохождении волны и возможна перекачка энергии между различными Фурье-компонентами (колебаниями различных частот, различными модами).

# Модуляционная неустойчивость – пример из оптики

**Пример:** Модуляционная неустойчивость света в среде, коэффициент преломления которой **растет** с ростом его интенсивности.



**Рис.:** Густота лучей кодирует интенсивность света, а цвет – коэффициент преломления. Чем выше коэффициент преломления, тем интенсивнее красный. Рисунок сделан “от руки” и не является решением точной модели.

# Волны-убийцы как нелинейный феномен

В настоящее время имеется много экспериментальных работ по наблюдению аномальных волн в других нелинейных средах:

- Волоконной оптике (оптические кабели);
- Фоторефрактивных кристаллах (оптических средах, коэффициент преломления меняется под действием проходящего света);
- Бозе-конденсаты с притяжением;
- Ленгмюровские волны (волны электронной плотности) в плазме;
- ...

Одна из идей состоит в использовании в теории аномальных волн **вполне интегрируемых (солитонных) уравнений**. В частности, важные результаты в этой области были получены группой Захарова.

Интегрируемые модели для физиков обычно являются приближенными, и это тоже надо учитывать.

### 3 классических работы по модуляционной неустойчивости в нелинейных системах

- 1) В.И. Беспалов, В.И. Таланов, “О нитевидной структуре пучков света в нелинейных жидкостях”, Письма в ЖЭТФ, **3**:12 (1966), 471–476.
- 2) Т. В. Benjamin, J. E. Feir, “The disintegration of wave trains on deep water”. Part I. Theory, Journal of Fluid Mechanics **27** (1967) 417–430.
- 3) В.Е. Захаров, “Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости”, Прикладная механика и техническая физика, **9**:2 (1968), 86–94.

В работах 1) и 3) в качестве основной математической модели было выведено **Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)**

$$iu_t + u_{xx} \pm 2u^2\bar{u} = 0, \quad u = u(x, t) \in \mathbb{C}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

# Нелинейное уравнение Шредингера

НУШ имеет две вещественных формы:

$$iu_t + u_{xx} + 2u^2\bar{u} = 0, \quad \text{фокусирующий НУШ}, \quad (2)$$

$$iu_t + u_{xx} - 2u^2\bar{u} = 0, \quad \text{дефокусирующий НУШ}, \quad (3)$$

В оптике **фокусирующий** НУШ описывает среды, у которых электрическое поле световой волны **увеличивает** коэффициент преломления, а **дефокусирующий** НУШ – те, у которых электрическое поле световой волны **уменьшает** коэффициент преломления

Для моделирования аномальных волн используется **фокусирующий** НУШ.

Две вещественных формы НУШ эквивалентны на уровне алгебры, однако аналитические свойства их решений существенно отличаются. Аналитическая теория фокусирующего НУШ значительно сложнее и интереснее.

# Нелинейное уравнение Шредингера

В настоящее время существует огромная литература, посвященная применению НУШ в теории аномальных волн и привести сколь-нибудь разумный список в рамках доклада просто нереально.

Вопрос о применимости НУШ в реальной физике достаточно деликатен. Тем не менее, в ряде случаев, выводы, полученные при помощи НУШ достаточно хорошо согласуются с экспериментом.

А.В. Слюняев, Д.Е. Пелиновский, Е.Н. Пелиновский, “Морские волны-убийцы: наблюдения, физика и математика”, *УФН*, **193**:2 (2023), 155–181.

# Нелинейное уравнение Шредингера

Нелинейное уравнение Шредингера является вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системой. В частности:

- Это уравнение обладает бесконечным набором законов сохранения, более того, число законов сохранения равно  $\infty/2$ . Я не хочу придавать последнему утверждению точного смысла.
- Оно тригамильтоново, т.е. допускает три согласованных гамильтоновых структуры (одна локальная и две слабонелокальных).
- Если наложить граничные условия, можно определить торы Лиувалля и переменные действие-угол.
- Для него можно выписать много точных решений.
- Оно линеаризуемо при помощи спектрального преобразования.

# Представление нулевой кривизны

Для простоты мы будем обсуждать **только фокусирующее** НУШ.

$$iu_t + u_{xx} + 2u^2\bar{u} = 0, \quad u = u(x, t).$$

Его интегрируемость основано на представлении нулевой кривизны:

$$\vec{\Psi}_x(\lambda, x, t) = U(\lambda, x, t)\vec{\Psi}(\lambda, x, t), \quad \vec{\Psi}_t(\lambda, x, t) = V(\lambda, x, t)\vec{\Psi}(\lambda, x, t),$$

$$U = \begin{bmatrix} -i\lambda & iu(x, t) \\ i\overline{u(x, t)} & i\lambda \end{bmatrix},$$

$$V(\lambda, x, t) = \begin{bmatrix} -2i\lambda^2 + iu(x, t)\overline{u(x, t)} & 2i\lambda u(x, t) - u_x(x, t) \\ 2i\lambda\overline{u(x, t)} + \overline{u_x(x, t)} & 2i\lambda^2 - iu(x, t)\overline{u(x, t)} \end{bmatrix},$$

где

$$\vec{\Psi}(\lambda, x, t) = \begin{bmatrix} \Psi^1(\lambda, x, t) \\ \Psi^2(\lambda, x, t) \end{bmatrix}.$$

**В.Е. Захаров, А.Б. Шабат**, “Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах”, ЖЭТФ, **61:1** (1971), 118–134.

# Вспомогательная линейная задача

Первое уравнение представления нулевой кривизны можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{L}\vec{\Psi}(\lambda, x, t) = \lambda\vec{\Psi}(\lambda, x, t),$$

где  $\mathcal{L}$  – одномерный оператор Дирака:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} i\partial_x & u(x, t) \\ -u(x, t) & -i\partial_x \end{bmatrix}.$$

Оператор  $\mathcal{L}$  не самосопряжен, и его спектр как правило, содержит комплексные точки. В значительной мере это и обеспечивает богатство задачи.

Мы заинтересовались этой задачей, когда Paolo Maria Santini и меня пригласили участвовать в качестве теоретиков в экспериментальной работе по наблюдению повторяемости аномальных волн типа Ферми-Паста-Улама-Цингу в фоторефрактивном кристалле.

Одна из задач – повторяемость аномальных волн в нелинейных системах, которые описываются уравнениями, близкими к интегрируемым.

Приведем некоторые работы (экспериментальный и теоретические) по этой тематике:

Van Simaeys, G., Emplit, P., Haelterman, M. “Experimental demonstration of the Fermi-Pasta-Ulam recurrence in a modulationally unstable optical wave”, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 033902.

Onorato, M., Residori, S., Bortolozzo, U., Montina, A., Arecchi F.T. “Rogue waves and their generating mechanisms in different physical contexts”, *Phys. Rep.* **528** (2013) 47–89.

Kimmoun O., Hsu H.C., Branger H., Li M. S., Chen Y.Y., Kharif C., Onorato M., Kelleher E.J.R., Kibler B., Akhmediev N., Chabchoub A. “Modulation Instability and Phase-Shifted Fermi-Pasta-Ulam Recurrence”, *Scientific Reports*, **6**:28516.

Mussot A., Naveau C., Conforti M., Kudlinski A., Copie F., Szriftgiser P., Trillo S. “Fibre multi-wave mixing combs reveal the broken symmetry of Fermi-Pasta-Ulam recurrence”, *Nature Photonics*, **12** (MAY 2018), 303–308.

Pierangeli D., Flammini M., Zhang L., Marcucci G., Agranat A.J., Grinevich P.G., Santini P.M., Conti C., DelRe E. “Observation of Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou recurrence and its exact dynamics”, *Physical Review X*, **8**:4 (2018), p. 041017 (9 pages); doi:10.1103/PhysRevX.8.041017;

Naveau C., Szriftgiser P., Kudlinski A., Conforti M., Trillo S., Mussot A. “Experimental characterization of recurrences and separatrix crossing in modulational instability”, *Optics Letters*, **44**:22 (15 November 2019).

# Эксперимент Ферми-Паста-Улама-Цингу

E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam "Studies of nonlinear problems", Los Alamos preprint LA-1940 (7 November 1955): "We thank Miss Mary Tsingou for efficient coding of the problem and for running the computations on the Los Alamos MANIAC machine".

В классической термодинамике каждая степень свободы содержит энергию  $kT/2$  – гипотеза равномерного распределения. Как происходит переход от начального распределения к равномерному (термализация).

В линейных системах энергия каждой моды сохраняется, т.е. термализация невозможна. Были численно исследованы простые нелинейные модели:

$$\ddot{x}_i = (x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) + \alpha[(x_{i+1} - x_i)^2 - (x_i - x_{i-1})^2],$$

$$\ddot{x}_i = (x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) + \beta[(x_{i+1} - x_i)^3 - (x_i - x_{i-1})^3],$$

$$\ddot{x}_i = \delta_1(x_{i+1} - x_i) - \delta_2(x_i - x_{i-1}) + c,$$

где  $\delta_1(x)$ ,  $\delta_2(x)$  – непрерывные кусочно линейные функции, с периодическими граничными условиями с периодом 64 :

$$i = 1, \dots, 64, \quad x_0 = x_{64}$$

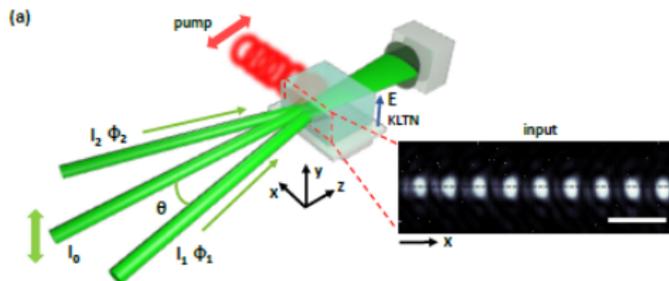
Результат эксперимента оказался полностью неожиданным: термализация происходила много медленнее, чем ожидалось.

Более того, наблюдалось перераспределение энергии между линейными модами, однако по прошествии некоторого времени система возвращалась **почти в начальное состояние**.

Объяснение этого феномена было получено много позднее в рамках теории интегрируемых систем, когда стало понятно, что в первом порядке возмущения система остается интегрируемой, а неинтегрируемость возникает в следующих порядках.

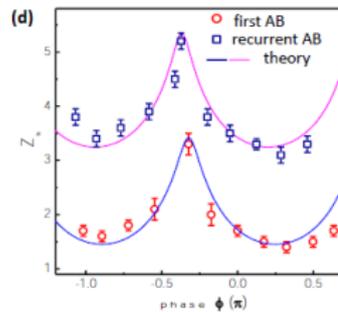
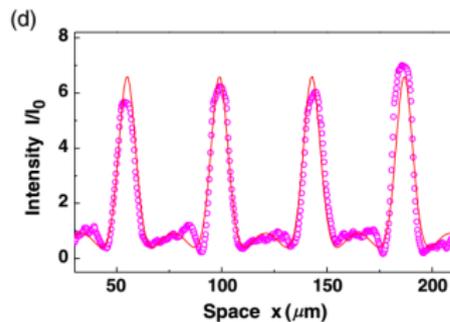
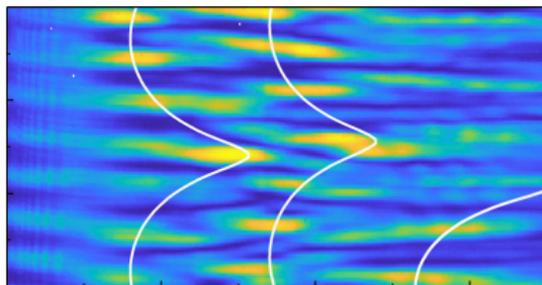
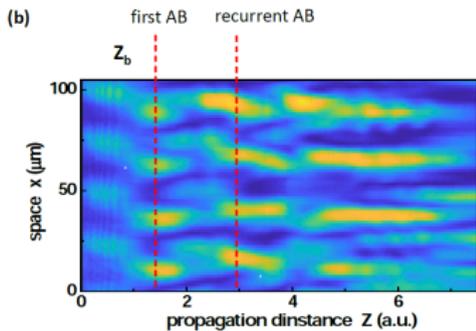
**Повторяемость Ферми-Паста-Улама-Цингу:** Повторное появление когерентных структур в системах, близких к интегрируемым.

Pierangeli D., Flammini M., Zhang L., Marcucci G., Agranat A.J., Grinevich P.G., Santini P.M., Conti C., DelRe E.



Симметричный 3-волновой интерферометр создает фон с одномодовым возмущением, далее распространяющиеся внутри кристалла KLTN (калий-литий-тантал-ниобий). С высокой точностью процесс моделируется НУШ, где время – расстояние до торца кристалла.

Поскольку НУШ – это лишь приближенная модель, имеет место повторяемость типа “Ферми-Паста-Улама-Цингу”, пока термализация не разрушит ее.



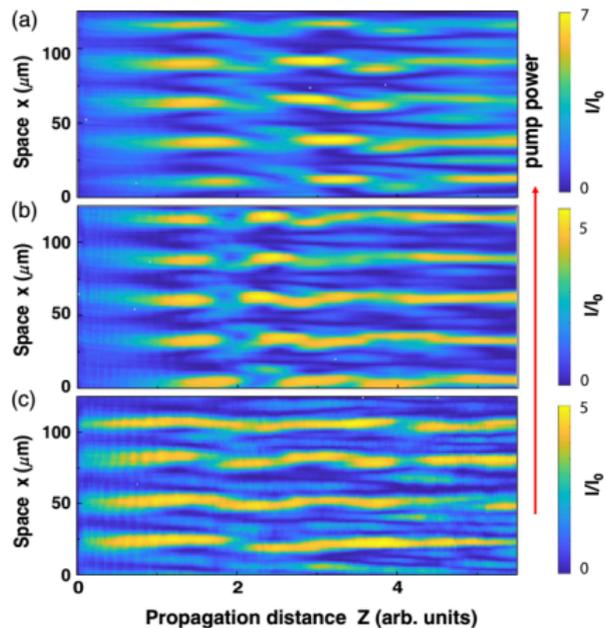


Рис.: Переход от интегрируемого к неинтегрируемому режиму.

# Задача Коши для аномальных волн НУШ

Мы изучаем фокусирующее Нелинейное уравнение Шредингера с периодическими граничными условиями:

$$iu_t + u_{xx} + 2u^2\bar{u} = 0, \quad u(x + L, t) = u(x, t).$$

Задачей Коши для аномальных волн назовем следующую задачу Коши:

$$u(x, 0) = a + \epsilon v(x), \quad v(x + L) \equiv v(x), \quad |\epsilon| \ll 1,$$
$$v(x) = \sum_{j \geq 1} (c_j e^{ik_j x} + c_{-j} e^{-ik_j x}), \quad k_j = \frac{2\pi}{L} j, \quad |c_j| = O(1),$$

Для упрощения вычислений предположим, что период  $L$  – общего положения:  $L \neq \frac{\pi n}{|a|}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Напомним основные классы аналитических решений НУШ:

- 1 Локализованне по пространственной переменной решения строятся с помощью задачи Римана-Гильберта;
- 2 Точные решения в терминах элементарных функций – преобразования Дарбу или эквивалентные методы;
- 3 Конечнозонные (периодические и квазипериодические решения).

Начало конечнозонному методу интегрирования солитонных систем дала работа:

**С.П. Новиков**, “Периодическая задача для уравнения Кортевега–де Фриза. I”, Функциональный анализ и его приложения, **8:3** (1974), 54–66,  
Авторы первых работ – С.П. Новиков, Б.А. Дубровин, В.Б. Матвеев, А.Р. Итс, P. Lax, H. McKean, P. van Moerbeke, И.М. Кричевер.

Конечнозонные решения комплексифицированного НУШ (когда  $u(x, t)$  и  $\bar{u}(x, t)$  считаются независимыми функциями) были впервые выписаны в работе

А.Р. Итс, В.П. Котляров, “Явные формулы для решения нелинейного уравнения Шредингера”, ДАН УССР, серия А, **1051** (1976), 965–968.

Отбор спектральных данных, отвечающих фокусирующему НУШ (эта задача оказалась далеко не тривиальной) был осуществлен в работе

И.В.Чередник, “Об условиях вещественности в “конечнозонном интегрировании””, ДАН СССР, **252**:5 (1980), 1104–1108.

- 1 Задача Римана-Гильберта дает ответ в терминах решений линейных интегральных уравнений. Использование получающихся решений требует серьезной дополнительной работы.
- 2 Точные решения в элементарных функциях отвечают специальным начальным данным, и их поведение отличается от поведения решений общего положения. Так, например, бризеры Ахмедиева возникают лишь однократно, а для общих начальных данных имеет место повторяемость аномальных волн.
- 3 Внешняя простота конечнозонных формул обманлива, поскольку тета-функции Римана многих переменных – крайне нетривиальный объект и, кроме того, параметры в формулах – трансцендентные выражения от параметров спектральной кривой.

Наша идея состояла в следующем: для специальных данных Коши, описывающих аномальные волны, спектральные кривые получаются **близкими к вырожденным**, поэтому можно выписать хорошие простые приближенные формулы для конечнозонных решений. Важно, что при этом теория остается **сильно нелинейной**.

# Линеаризованная теория возмущений вблизи фона

Начнем с неустойчивого фона: ( $\epsilon = 0$ ):

$$u_0(x, t) = ae^{2i|a|^2 t}.$$

Удобно сделать следующую подстановку

$$u(x, t) = \exp(2|a|^2 it)U(x, t),$$

после которой уравнение приобретает вид

$$iU_t + U_{xx} + 2|U|^2U - 2|a|^2U = 0.$$

Рассмотрим возмущение фона:

$$U(x, t) = a + \delta U(x, t),$$

Линеаризованное НУШ приобретает вид:

$$i\delta U_t + \delta U_{xx} + 2|a|^2\delta U + 2a^2\delta\bar{U} = 0.$$

# Линеаризованная теория возмущений вблизи фона

Рассмотрим гармоническое возмущение:

$$\delta U = e^{\sigma t} (\alpha e^{ikx} + \beta e^{-ikx}).$$

Подставляя в линеаризованное НУШ

$$i \delta U_t + \delta U_{xx} + 2|a|^2 \delta U + 2a^2 \delta \bar{U} = 0.$$

получаем:

$$\sigma = \pm |a|k \sqrt{4|a|^2 - k^2}.$$

При этом  $\sigma$  вещественна если  $|k| \leq 2|a|$ , поэтому гармоническое возмущение

$$U(x, 0) = a + \epsilon e^{ikx}$$

**неустойчиво** если  $|k| < 2|a|$  и **устойчиво** если  $|k| \geq 2|a|$ .

Мы исследуем периодическую задачу, поэтому мы считаем, что все возмущения периодичны с периодом  $L$ .

$$k = k_j = \frac{2\pi}{L}j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Первые  $N$  гармоник неустойчивы, где  $N$  дается формулой

$$N = \left[ \frac{|a|L}{\pi} \right]$$

и их инкременты неустойчивости имеют вид:

$$\sigma_j = |a|k_j \sqrt{4|a|^2 - k_j^2}, \quad 1 \leq j \leq N,$$

Все остальные моды устойчивы. В нашем приближении мы ими пренебрегаем.

Для интегрирования НУШ используется следующая пара спектральных задач:

- 1 Спектральная задача на всей прямой в  $L^2(\mathbb{R})$ . Ее спектр называют **основным спектром**.
- 2 Спектральная задача на интервале  $[x_0, x_0 + L]$  с граничными условиями Дирихле:

$$\Psi^1(\lambda, x_0) = \Psi^1(\lambda, x_0 + L) = 0.$$

Ее спектр называется **вспомогательным спектром** или **дивизором**.

**Замечание.** Во многих работах используется более симметричная задача Дирихле:

$$\Psi^1(\lambda, x_0) + \Psi^2(\lambda, x_0) = \Psi^1(\lambda, x_0 + L) + \Psi^2(\lambda, x_0 + L) = 0.$$

В симметричном варианте все точки дивизора лежат в компактной области, однако их оказывается на одну больше, что усложняет формулы.

Вместо основного спектра удобнее работать со спектральной кривой, на которой определены блоховские функции. Рассмотрим уравнение на матричнозначную функцию:

$$L\hat{\Psi}(\lambda, x) = \lambda\hat{\Psi}(\lambda, x),$$

с начальными условиями

$$\hat{\Psi}(\lambda, x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица монодромии  $\hat{T}(\lambda, x_0)$  задается формулой:

$$\hat{T}(\lambda, x_0) = \hat{\Psi}(\lambda, x_0 + L).$$

Собственные значения и собственные функции  $T(\lambda, x_0, t_0)$  определены на двулистом накрытии плоскости переменной  $\lambda$ . Эта риманова поверхность  $\Gamma$  называется **спектральной кривой**.

Используя второе уравнение представления нулевой кривизны, несложно проверить, что в силу динамики по переменной  $t$  матрица монодромии преобразуется путем сопряжения. Отсюда следует, что ее собственные числа не зависят от  $t$ , а, значит, спектральная кривая  $\Gamma$  тоже не зависит от  $t$  и все ее точки ветвления и кратные точки – интегралы движения для НУШ.

В отличие от спектральной кривой, спектр задачи Дирихле зависит от точки нормировки  $x_0$  и  $t$ . Однако для конечнозонных потенциалов имеет место следующая:

**Теорема:** После применения к спектру задачи Дирихле преобразования Абеля зависимость спектра Дирихле от  $x_0$  и  $t$  становится линейной.

Имеет место следующая формула (Итс-Котляров):

$$u(x, t) = C \exp(\mathcal{U}x + \mathcal{V}t) \frac{\theta(\vec{A}(\infty_-) - \vec{U}_1 x - \vec{U}_2 t - \vec{A}(\mathcal{D}) - \vec{K}|B)}{\theta(\vec{A}(\infty_+) - \vec{U}_1 x - \vec{U}_2 t - \vec{A}(\mathcal{D}) - \vec{K}|B)},$$

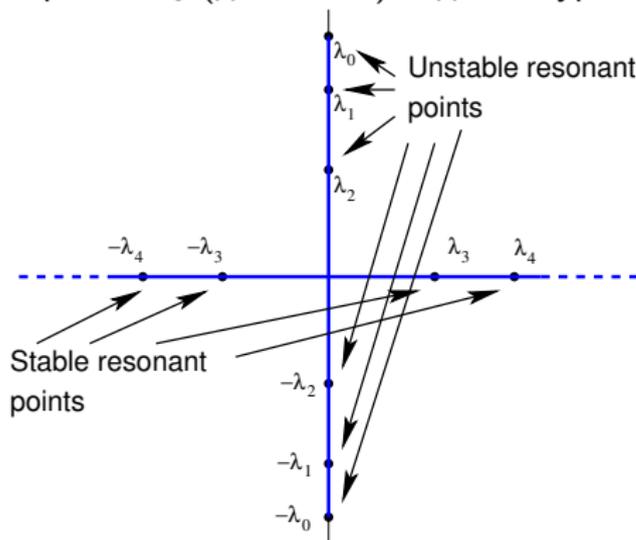
где  $C$ ,  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  – константы, определенные в терминах спектральной кривой,  $\vec{A}(\mathcal{D})$ ,  $\vec{A}(\infty_+)$ ,  $\vec{A}(\infty_-)$  – преобразование Абеля дивизора и бесконечно удаленных точек  $\Gamma$ , соответственно,  $\vec{K}$  – вектор римановых констант,  $B$  матрица периодов Римана кривой  $\Gamma$ ,  $\vec{U}_1$ ,  $\vec{U}_2$  –  $b$ -периоды дифференциалов квазиимпульсов и квазиэнергии, соответственно, и  $\theta(z|B)$  обозначает тета-функцию Римана рода  $g$

$$\theta(z|B) = \sum_{\substack{n_j \in \mathbb{Z} \\ j = 1, \dots, g}} \exp \left[ \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^g b_{jk} n_j n_k + \sum_{j=1}^g n_j z_j \right].$$

где  $b_{jk}$  – компоненты матрицы периодов кривой.

# Явные формулы.

В общем случае входящие в решения константы достаточно сложно вычислить. Однако для начальных условий, моделирующих аномальные волны, нам удалось получить простые приближенные формулы, используя теорию возмущений. Невозмущенная спектральная кривая  $\Gamma_0$  (для  $a = 1$ ) задается уравнением



$$\mu^2 = \lambda^2 + 1.$$

$$\mu_n = \frac{\pi n}{L}, \quad \lambda_n = \sqrt{\mu_n^2 - 1}, \quad \text{Re } \lambda_n + \text{Im } \lambda_n > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty.$$

**Замечание.** Появление “длинных” торов в указанной задаче обсуждалось в литературе, см., например,

McLaughlin, D., Overman, E. A. “Whiskered tori for integrable PDEs: Chaotic behavior in near integrable PDEs”, In *Surveys in applied mathematics*, Vol. 1, pp. 83-203 (1994). Plenum Press.

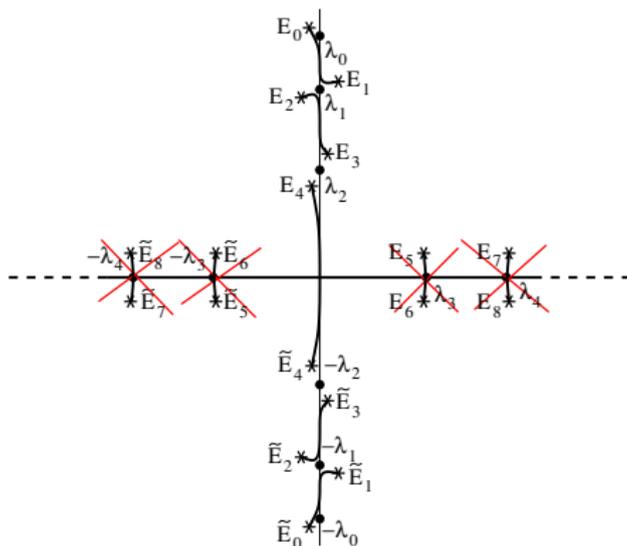
A. Calini, N. M. Ercolani, D. W. McLaughlin, C. M. Schober, “Mel’nikov analysis of numerically induced chaos in the nonlinear Schrödinger equation”, *Phys. D*, **89**:3-4 (1996), 227–260.

В частности, было показано, что длины торов растут как  $\log(|\epsilon|)$ , однако вычисления не были доведены до явных формул.

Трехэтапное упрощение:

- Шаг 1: Конечнзонное приближение. Мы закрываем бесконечное число зон, отвечающих устойчивым модам, сохраняя только  $2N$  зон отвечающих неустойчивым модам;
- Шаг 2. Явная аналитическая аппроксимация всех параметров  $\theta$ -функциональных решений.
- Шаг 3. Элементарная аппроксимация  $\theta$ -функций Римана. Поскольку в задаче есть малый параметр  $\epsilon$ , в каждый момент времени достаточно суммировать лишь по подмножеству набора  $4^N$  точек, являющихся вершинами элементарного гиперкуба в многомерной решетке, содержащего точку траектории. В результате ось времени распадается на интервалы, на каждом из которых решение аппроксимируется  $\mathcal{N}(t)$ -солитонными решениям Ахмедиевского типа.

# Аппроксимирующая конечнозонная спектральная кривая



$\Gamma$  инвариантна относительно комплексного сопряжения.

Возмущения **вещественных** резонансных точек отвечают **устойчивым** возмущениям начальных условий и мы ими пренебрегаем.

Возмущения **чисто мнимых** резонансных точек отвечают **неустойчивым** модам, и мы их оставляем. Их конечное число.

$$u(x, 0) = a + \epsilon v(x), \quad v(x + L) \equiv v(x), \quad |\epsilon| \ll 1,$$

$$v(x) = \sum_{j \geq 1} (c_j e^{ik_j x} + c_{-j} e^{-ik_j x}), \quad k_j = \frac{2\pi}{L} j, \quad |c_j| = O(1),$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha_j = \left( \frac{(\mu_j - \lambda_j) \bar{c}_j}{|a| \bar{c}_0} - \frac{(\mu_j + \lambda_j) c_{-j}}{|a| c_0} \right),$$

$$\beta_j = \left( \frac{(\mu_j + \lambda_j) \bar{c}_{-j}}{|a| \bar{c}_0} - \frac{(\mu_j - \lambda_j) c_j}{|a| a} \right),$$

$$\mu_j = \frac{\pi j}{L}, \quad \lambda_j = \pm \sqrt{\mu_j^2 - |a|^2}, \quad \operatorname{Re} \lambda_j + \operatorname{Im} \lambda_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, \infty.$$

**Теорема: (Прямое спектральное преобразование):**

$$E_0 = i|a| + O(\epsilon^2), \quad E_l = \lambda_j \mp \epsilon \frac{|a|^2}{2\lambda_j} \sqrt{\alpha_j \beta_j} + O(\epsilon^2), \quad l = 2j - 1, 2j,$$

$$\lambda(\gamma_n) = \lambda_n + \epsilon \frac{|a|^2}{4\lambda_n} [\alpha_n + \beta_n] + O(\epsilon^2), \quad \rho(\gamma_n) = \epsilon \frac{|a|^2}{4\mu_n} [\alpha_n - \beta_n] + O(\epsilon^2)$$

Здесь  $\exp(\pm iL\rho(\gamma_n))$  – блоховские мультипликаторы для спектра Дирихле.

Для неустойчивых мод введем следующие обозначения:

$$\phi_j = \arccos\left(\frac{\pi}{L|a|}j\right) = \arccos\left(\frac{k_j}{2|a|}\right), \quad j = 1, \dots, N.$$

Тогда

$$\lambda_j = i|a| \sin(\phi_j), \quad \mu_j = |a| \cos(\phi_j), \quad \sigma_j = 2|a|^2 \sin(2\phi_j),$$

$$\alpha_j = e^{-i\phi_j} \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}} - e^{i\phi_j} \frac{c_{-j}}{a}, \quad \beta_j = -e^{i\phi_j} \frac{\bar{c}_{-j}}{\bar{a}} - e^{2i\phi_j} \frac{c_j}{a},$$

где  $\sigma_j$  – инкремент соответствующей моды.

Обозначим:

$$\hat{\lambda}_j = \lambda_j, \quad \hat{\mu}_j = \mu_j, \quad \hat{\phi}_j = \phi_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

$$\hat{\lambda}_{j+N} = -\lambda_j, \quad \hat{\mu}_{j+N} = \mu_j, \quad \hat{\phi}_{j+N} = -\phi_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Получаем следующее приближение ( $g = 2N$ ):

$$b_{jj} = \frac{1}{\pi i} \log \left[ \frac{\epsilon \sqrt{\alpha_j \beta_j}}{4 \sin(2\phi_j) \cos(\phi_j)} \right] + O(\epsilon), \quad b_{j+N, j+N} = -\overline{b_{jj}}, \quad 1 \leq j \leq N,$$

$$b_{kj} = \frac{1}{\pi i} \log \left| \frac{\sin\left(\frac{\hat{\phi}_l - \hat{\phi}_s}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\hat{\phi}_l + \hat{\phi}_s}{2}\right)} \right| + O(\epsilon^2) \quad \text{for all } j \neq k.$$

$$\exp(\pi i b_{jj}) = \frac{\epsilon \sqrt{\alpha_j \beta_j}}{4 \sin(2\phi_j) \cos(\phi_j)} + O(\epsilon^2), \quad 1 \leq j \leq N,$$

Внедиагональные члены в главном порядке вычислены в работе [А.Р. Итс, А.В. Рыбин, М.А. Салль](#), “К вопросу о точном интегрировании нелинейного уравнения Шредингера”, ТМФ, **74**:1 (1988), 29–45

$$u(x, t) = a \exp(2it) \frac{\theta(\vec{z}_+(x, t)|B)}{\theta(\vec{z}_-(x, t)|B)} \times (1 + O(\epsilon)) \quad (4)$$

$$\vec{z}_\pm(x, t) = \mp \vec{A}(\infty_-) - \vec{U}_1 x - \vec{U}_2 t - \vec{A}(D)$$

$$\vec{A}(\infty_-) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} - \frac{\phi_1}{2\pi} \\ \vdots \\ -\frac{1}{4} - \frac{\phi_N}{2\pi} \\ -\frac{1}{4} + \frac{\phi_1}{2\pi} \\ \vdots \\ -\frac{1}{4} + \frac{\phi_N}{2\pi} \end{bmatrix} + O(\epsilon^2), \quad \vec{A}(D) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi i} \log \left[ \frac{e^{i\phi_1} \alpha_1}{\sqrt{\alpha_1 \beta_1}} \right] \\ \vdots \\ \frac{1}{2\pi i} \log \left[ \frac{e^{i\phi_1} \alpha_N}{\sqrt{\alpha_N \beta_N}} \right] \\ \hline \frac{1}{2\pi i} \log \left[ \frac{e^{-i\phi_1} \beta_1}{\sqrt{\alpha_1 \beta_1}} \right] \\ \vdots \\ \frac{1}{2\pi i} \log \left[ \frac{e^{-i\phi_N} \beta_N}{\sqrt{\alpha_N \beta_N}} \right] \end{bmatrix} + \dots,$$

# Конечнозонные формулы

$$\vec{U}_1 = |a| \begin{bmatrix} -\frac{\cos(\phi_1)}{\cos(\phi_1)} \\ -\frac{\cos(\phi_2)}{\pi} \\ \vdots \\ -\frac{\cos(\phi_N)}{\cos(\phi_1)} \\ -\frac{\cos(\phi_2)}{\pi} \\ \vdots \\ -\frac{\cos(\phi_N)}{\pi} \end{bmatrix} + O(\epsilon^2), \quad \vec{U}_2 = |a|^2 \begin{bmatrix} -\frac{\sin(2\phi_1)}{\sin(2\phi_1)} \\ -\frac{\sin(2\phi_2)}{\pi} \\ \vdots \\ -\frac{\sin(2\phi_N)}{\sin(2\phi_1)} \\ \frac{\sin(2\phi_2)}{\pi} \\ \vdots \\ \frac{\sin(2\phi_N)}{\pi} \end{bmatrix} + O(\epsilon^2),$$

$$\theta(z|B) = \sum_{n_j} \exp \left[ 2\pi i \sum_j n_j z_j + \pi i \sum_{j,k} b_{jk} n_j n_k \right], \quad j, k = 1, \dots, 2N.$$

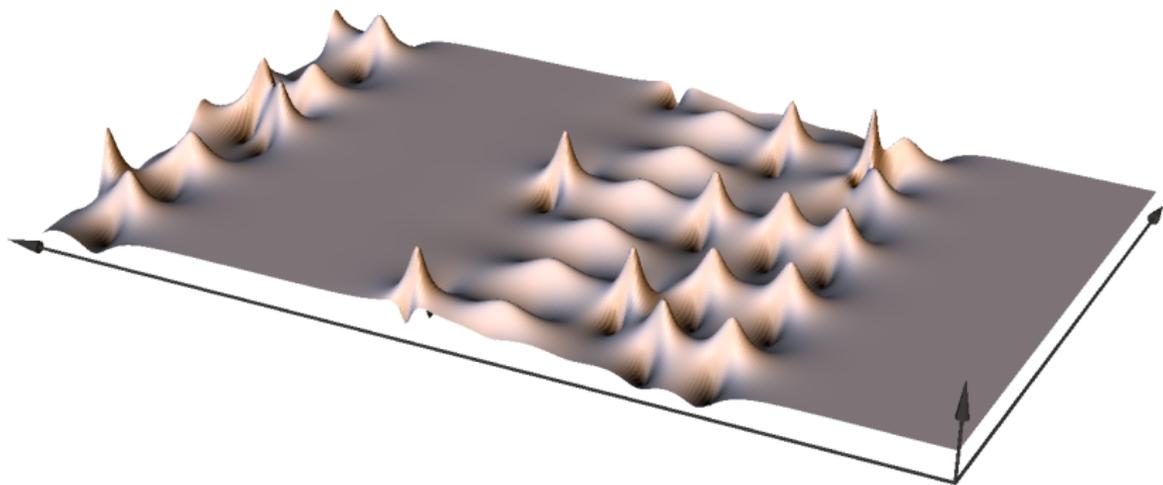


Рис.:  $L = 20$ ,  $0 \leq t \leq 30$ , 6 неустойчивых мод,  $\epsilon = 10^{-6}$ , численное моделирование.

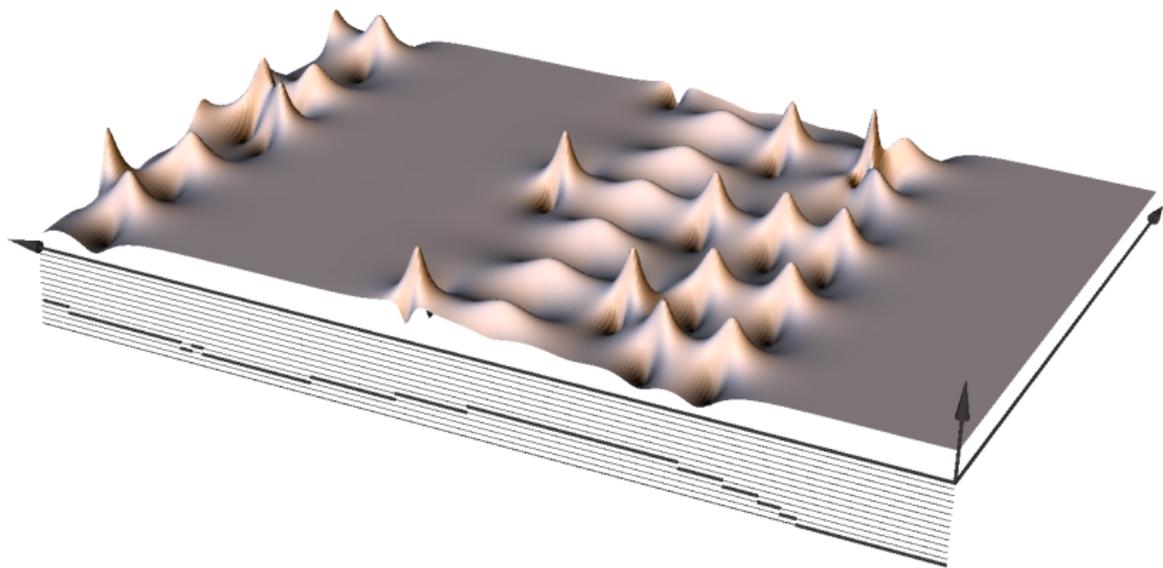


Рис.:  $L = 20$ ,  $0 \leq t \leq 30$ , 6 неустойчивых мод,  $\epsilon = 10^{-6}$ ,  
суммирование по полному гиперкубом

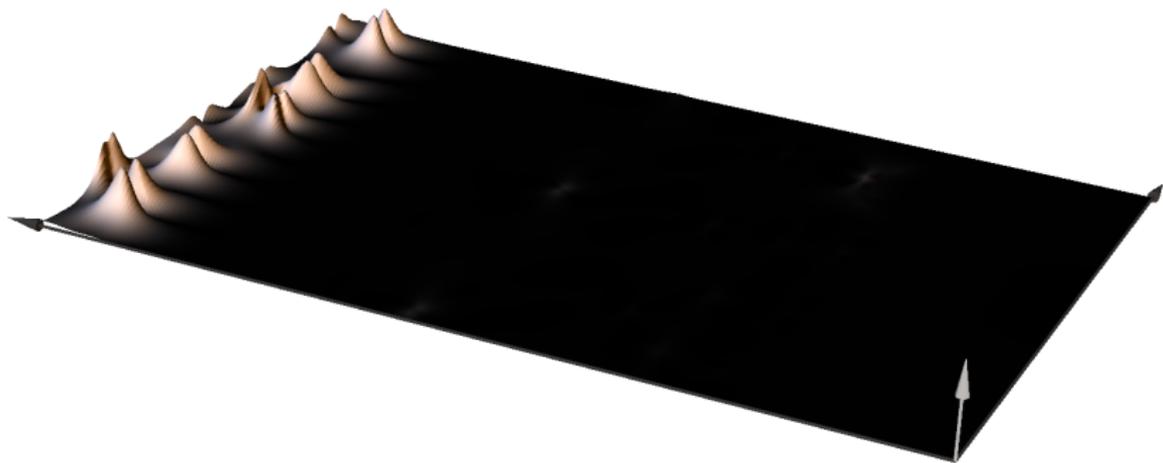


Рис.:  $L = 20$ ,  $0 \leq t \leq 30$ , 6 неустойчивых мод,  $\epsilon = 10^{-6}$ , разность между численным моделированием и суммированием по полному гиперкубом, умноженная на 1000. В левой части картинки – артефакт численного счета.

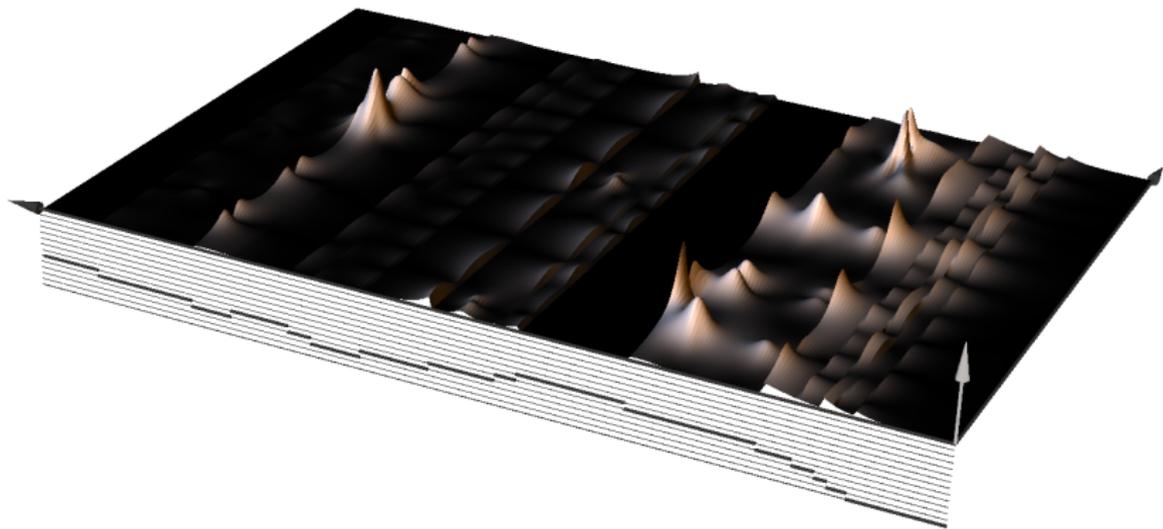


Рис.:  $L = 20$ ,  $0 \leq t \leq 30$ , 6 неустойчивых мод,  $\epsilon = 10^{-6}$ , разность между суммой по полному гиперкубу и аппроксимацией меньшим числом солитонов, умноженная на 100. Линии внизу – число солитонов в данный момент.

# Случай одной неустойчивой моды

Пусть:  $\pi/|a| < L < 2\pi/|a|$  т.е. мы имеем ровно одну неустойчивую моду. Мы ограничиваемся следующим возмущением фона:

$$u(x, 0) = a \left( 1 + \epsilon (c_1 e^{k_1 x} + c_{-1} e^{-ik_1 x}) \right), \quad k_1 = \frac{2\pi}{L}, \quad \epsilon \ll 1,$$

где  $c_1$  и  $c_{-1}$  – комплексные коэффициенты порядка 1.

## Для интерпретации экспериментов Мы хотим:

- 1 Вычислить момент первого появления аномальной волны;
- 2 Вычислить точку первого появления аномальной волны;
- 3 Вычислить период повторяемости аномальных волн;
- 4 Вычислить фазовые сдвиги между последовательными аномальными волнами.

Одна неустойчивая модв описывается тета-функциями Римана от 2 переменных.

Однако, если мы стартуем с малого возмущения неустойчивого фона, эти решения аппроксимируются последовательностью бризеров Ахмедиева (Гриневич–Santini).

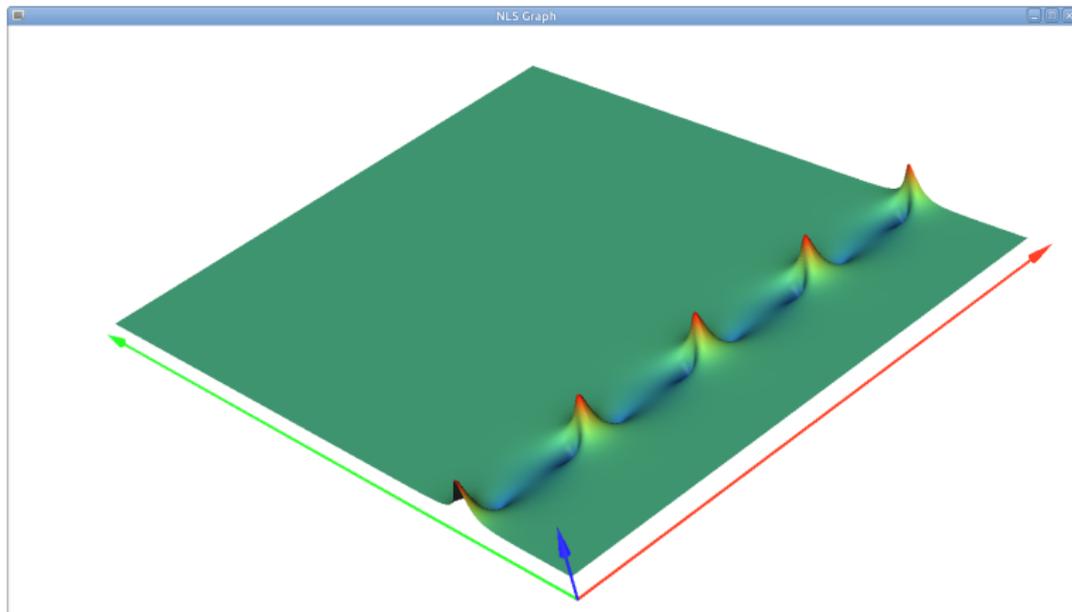
## Бризеры Ахмедиева:

Н.Н. Ахмедиев, В.М. Елеонский, Н.Е. Кулагин, “Точные решения первого порядка нелинейного уравнения Шредингера”, ТМФ, **72**:2 (1987), 183–196.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, t; \theta, X, T) = \\ = a e^{2i|a|^2 t} \cdot \frac{\cosh[\sigma(\theta)(t - T) + 2i\theta] + \sin \theta \cos[k(\theta)(x - X)]}{\cosh[\sigma(\theta)(t - T)] - \sin \theta \cos[k(\theta)(x - X)]}, \end{aligned}$$

$$k_1 = k(\theta) = 2|a| \cos \theta, \quad \sigma(\theta) = k(\theta) \sqrt{4|a|^2 - k^2(\theta)} = 2|a|^2 \sin(2\theta),$$

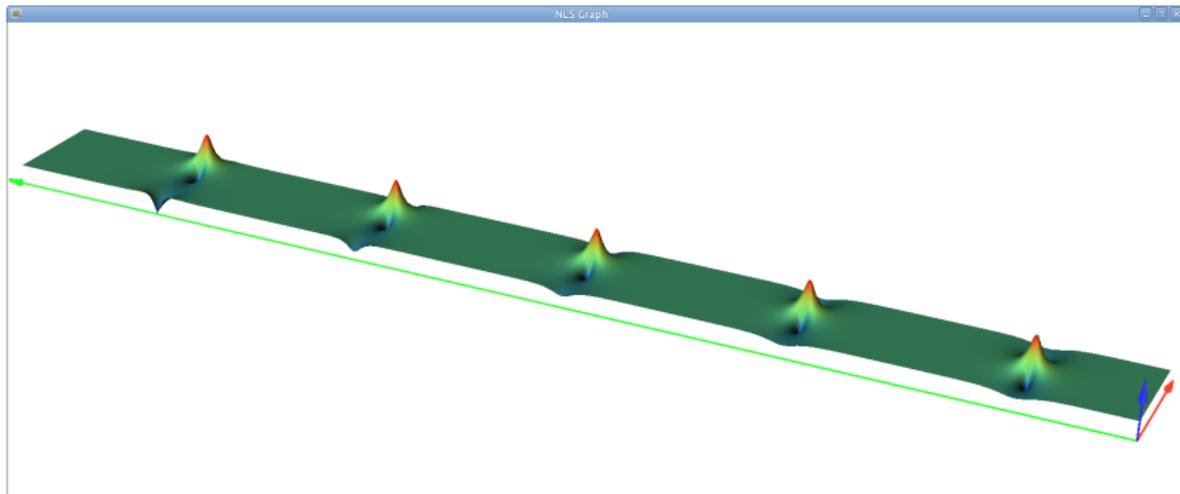
Они периодичны по пространственной переменной и локализованы по времени



Ось  $x$  отмечена красным, ось  $t$  – зеленым. Далее мы будем рисовать только один период по  $x$ .

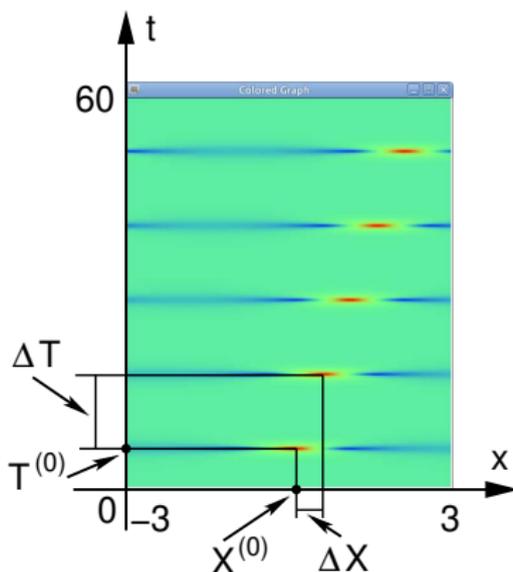
# Одна неустойчивая мода

Общее решение с  $N = 1$  хорошо приближается последовательностью бризеров Ахмедиева:



На рисунке изображен лишь один период и  $L = 6$

# Одна неустойчивая мода



То же решение – вид сверху и изменен масштаб ( $L = 6$ ).

Параметры решения:

Время первого появления  $T^{(0)}$ , место первого появления  $X^{(0)}$ , временной интервал между последующими появлениями  $\Delta T$ , пространственное расстояние между местами последовательных появлений  $\Delta X$ .

# Одна неустойчивая мода

Приближенная формула для решений

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^n \mathcal{A}(x, t; \phi_1, x^{(m)}, t^{(m)}) e^{i\rho^{(m)}} - \frac{1 - e^{4in\phi_1}}{1 - e^{4i\phi_1}} a e^{2i|a|^2 t}, \quad x \in [0, L],$$

где:

$$x^{(m)} = X^{(1)} + (m-1)\Delta X, \quad t^{(m)} = T^{(1)} + (m-1)\Delta T,$$

$$X^{(1)} = \frac{\arg \alpha}{k_1} + \frac{L}{4}, \quad \Delta X = \frac{\arg(\alpha\beta)}{k_1}, \quad (\text{mod } L),$$

$$T^{(1)} = \frac{1}{\sigma_1} \log \left( \frac{\sigma_1^2}{2|a|^4 \epsilon |\alpha|} \right), \quad \Delta T = \frac{1}{\sigma_1} \log \left( \frac{\sigma_1^4}{4|a|^8 \epsilon^2 |\alpha\beta|} \right),$$

$$\rho^{(m)} = 2\phi_1 + (m-1)4\phi_1, \quad n = \left\lceil \frac{T - T^{(1)}}{\Delta T} + \frac{1}{2} \right\rceil,$$

$$\cos \phi_1 = \frac{\pi}{L|a|}, \quad k_1 = \frac{2\pi}{L} = 2|a| \cos(\phi_1), \quad \sigma_1 = k_1 \sqrt{4|a|^2 - k_1^2} = 2|a|^2 \sin(2\phi_1),$$

$$\alpha = e^{-i\phi_1} \bar{c}_1 - e^{i\phi_1} c_{-1}, \quad \beta = e^{i\phi_1} \bar{c}_{-1} - e^{-i\phi_1} c_1.$$

# Одна неустойчивая мода

Род спектральной кривой равен  $g = 2$  и имеется 6 точек ветвления:  $E_0, E_1, E_2, \bar{E}_0, \bar{E}_1, \bar{E}_2$ . Пара  $E_1, E_2$  получается из резонансной точки  $\lambda_1 = i|a| \sin \phi_1$ :

$$E_l = \lambda_1 + (-1)^l \frac{\epsilon |a|^2}{2\lambda_1} \sqrt{\alpha\beta} + O(\epsilon^2), \quad l = 1, 2,$$

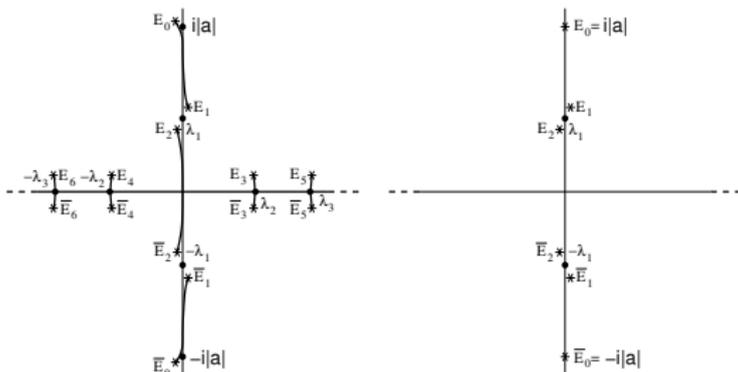


Рис.: Справа – точный спектр, слева – используемое приближение.

# Две симметричных конфигурации:

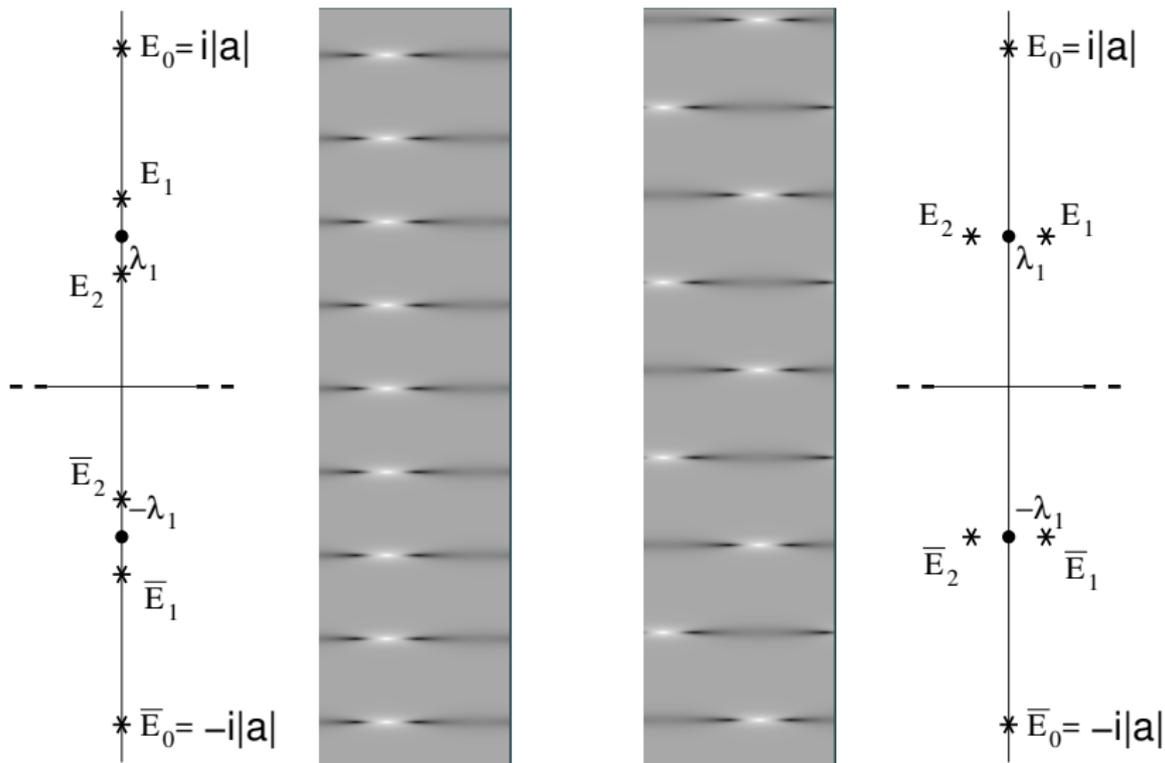


Рис.: Слева – вертикальный разрез, справа – горизонтальный.

# Две симметричных конфигурации:

В указанных случаях решения рода 2 сводятся к роду 1

① Эллиптические решения:

Н.Н. Ахмедиев, В.М. Елеонский, Н.Е. Кулагин, “Точные решения первого порядка нелинейного уравнения Шредингера”, ТМФ, **72**:2 (1987), 183–196.

② Редукция для произвольных параметров:

А.О. Смирнов, “Периодические двухфазные “волны-убийцы” ”, Матем. заметки, **94**:6 (2013), 871–883;

③ Сведение в терминах  $\sigma$ -функций:

Ayano T., Buchstaber V.M., “Relationships between hyperelliptic functions of genus 2 and elliptic functions”, SIGMA **18** (2022), 010, 30 pages.

# Эффект малых потерь/усиления.

Для гамильтоновых возмущений эффект в первом порядке исчезает. Если же возмущение негамильтоново, он может оказаться очень сильным.

Эффект малых потерь/усиления

$$iu_t + u_{xx} + 2u^2\bar{u} = -i\nu u, \quad u = u(x, t), \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad |\nu| \ll 1.$$

Аналитическая модель построена в работе:

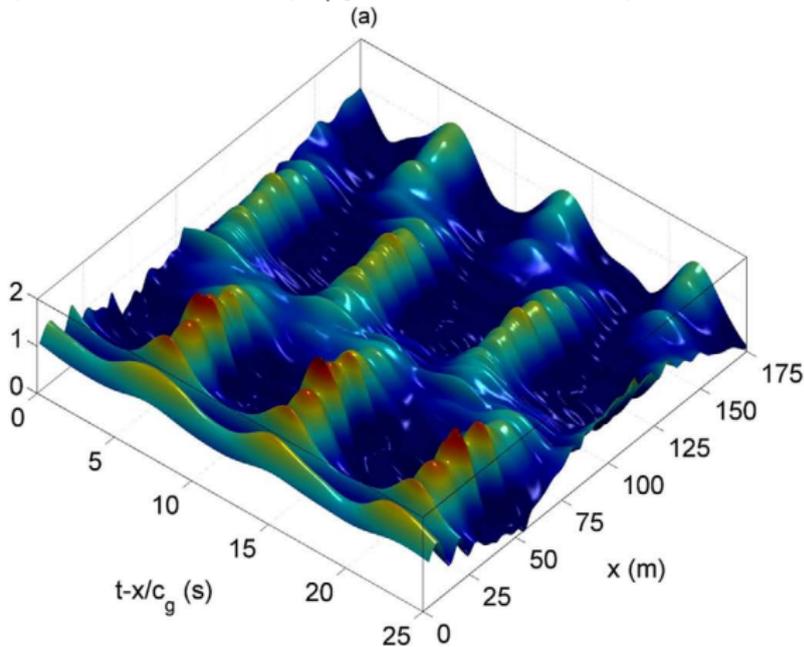
Coppini F., Grinevich P.G., Santini P.M. "The effect of a small loss or gain in the periodic NLS anomalous wave dynamics. I," *Phys. Rev. E*, **101**:3 (2020), 032204, 8 pages, - Published 6 March 2020; doi:10.1103/PhysRevE.101.032204.

Наша задача – объяснить результаты натуральных и численных экспериментов:

O. Kimmoun, H.C. Hsu, H. Branger, M.S. Li, Y.Y. Chen, C. Kharif, M. Onorato, E.J.R. Kelleher, B. Kibler, N. Akhmediev, A. Chabchoub, “Modulation Instability and Phase-Shifted Fermi-Pasta-Ulam Recurrence”, *Scientific Reports*, **6**, Article number: 28516 (2016), doi:10.1038/srep28516.

J.M. Soto-Crespo, N. Devine, and N. Akhmediev, “Adiabatic transformation of continuous waves into trains of pulses”, *PHYSICAL REVIEW A*, **96**, 023825 (2017).

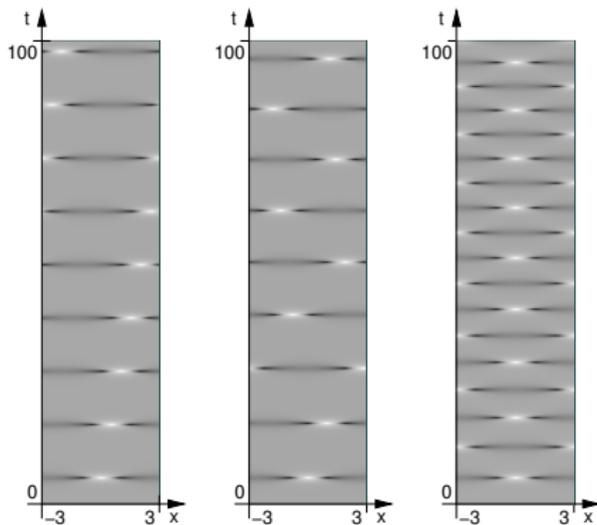
## Эффект малых потерь/усиления – эксперимент и теория.



**Рис.:** Измерение аномальных волн в длинном волновом бассейне. Рисунок взят из работы O. Kimmoun et al, doi:10.1038/srep28516. Фазовый сдвиг между последовательными аномальными волнами равен полупериоду.

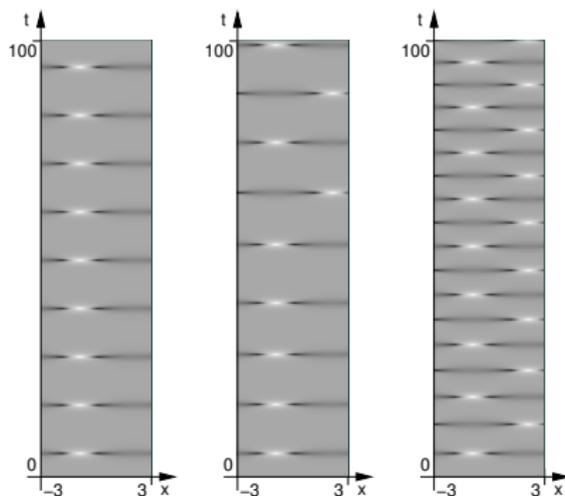
# Начальные данные общего положения:

Численный эксперимент с **очень малыми** потерями:



**Рис.:**  $-L/2 \leq x \leq L/2$ ,  $0 \leq t \leq 100$ ,  $L = 6$ ,  $\epsilon = 10^{-4}$ , начальные данные общего положения:  $c_1 = 0.5$  и  $c_{-1} = 0.15 - 0.2i$ . Слева направо:  $\nu = 0$ ,  $\nu = 10^{-9}$  и  $\nu = 10^{-5}$ . Во всех случаях первое появление практически одно и то же.

# Симметричные начальные данные:



**Рис.:** Функция  $|u(x, t)|$  с  $-L/2 \leq x \leq L/2$ ,  $0 \leq t \leq 100$ ,  $L = 6$ ,  $\epsilon = 10^{-4}$ , с вещественными начальными условиями ( $c_{-j} = \overline{c_j}$ ,  $\forall j$ ), with  $c_1 = 0.3 + 0.4i$  и  $\alpha\beta > 0$ . Слева:  $\nu = 0$  и  $\Delta X = 0$ . В центре:  $\nu = 10^{-9}$ ; и для  $\tilde{m} = 6$ ,  $Q_m$  меняет знак с положительного на отрицательный, а  $\Delta X_m$  меняется с 0 на  $L/2$ . Справа:  $\nu = 10^{-5}$ ; все  $Q_m$  отрицательны и  $\Delta X_m = L/2 \forall m$ . Во всех случаях первое появление практически одно и то же.

# Сильные и слабые потери.

Эффект сильных потерь обсуждался в работе :

H. Segur, D. Henderson, J. Carter, J. Hammack, C.-M. Li, D. Pheiff, and K. Socha, "Stabilizing the Benjamin-Feir instability", *J. Fluid Mech.* 539, 229 (2005).

Поскольку условие неустойчивости фона имеет вид:

$$\cos \phi_1 = \frac{\pi}{L|a|}, \Rightarrow \left| \frac{L|a|}{\pi} \right| > 1.$$

То убывание  $a$  приводит к потере неустойчивости.

Нас интересовал противоположный случай:  $\nu \sim \epsilon^2$  и  $|a|$  почти **постоянно**, однако повторяемость **сильно меняется**.

При наличии потерь спектральная кривая не постоянна, а меняется при каждом появлении аномальной волны:

$$(E_1 - E_2)^2 \Big|_{t=0} = -\frac{\epsilon^2 |a|^2 \alpha \beta}{\sin^2 \phi_1},$$

$$(E_1^{(m)} - E_2^{(m)})^2 = -\frac{\epsilon^2 |a|^2 \alpha \beta}{\sin^2 \phi_1} + 4m\nu \cot \phi_1, \quad m \geq 0,$$

где  $E_1^{(m)}, E_2^{(m)}$  точки ветвления после появления  $m$ -го бризера.  
Следовательно:

$$\begin{aligned} \Delta X_m &:= \tilde{\chi}^{(m+1)} - \tilde{\chi}^{(m)} = \frac{\arg(Q_m)}{k_1} \pmod{L}, \\ \Delta T_m &:= \tilde{t}^{(m+1)} - \tilde{t}^{(m)} = \frac{1}{\sigma_1} \log \left( \frac{\sigma_1^4}{4\epsilon^2 |Q_m|} \right), \end{aligned}$$

где

$$\epsilon^2 Q_m = \epsilon^2 \alpha \beta - \frac{\nu \sigma_1}{|a|^4} m, \quad m \geq 1, \quad (5)$$

# Эволюция точек ветвления.

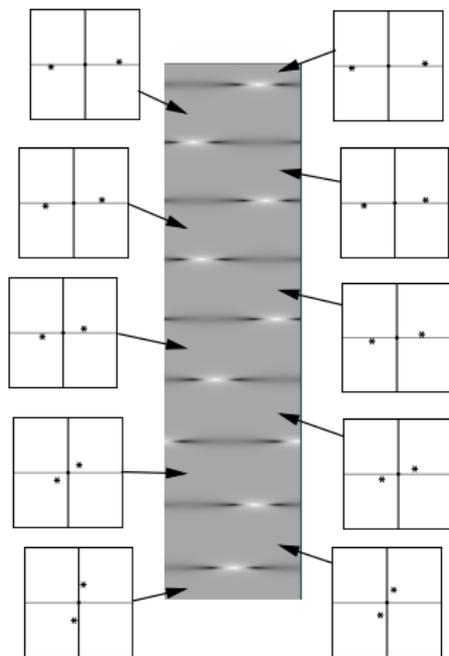
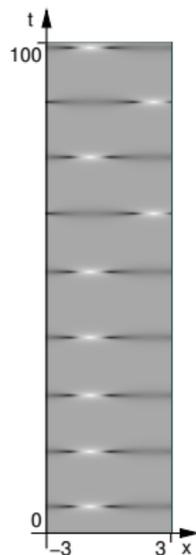


Рис.: Эволюция точек ветвления.

# Сопоставление аналитических формул с численным счетом:



$$\begin{aligned}\tilde{t}^{(1)} &= 5.51209 \text{ (theory)} \\ \Delta T_1 &= 11.18230 \text{ (theory)} \\ \Delta T_2 &= 11.40337 \text{ (theory)} \\ \Delta T_3 &= 11.77375 \text{ (theory)} \\ \Delta T_4 &= 13.31847 \text{ (theory)} \\ \Delta T_5 &= 11.84989 \text{ (theory)} \\ \Delta T_6 &= 11.44140 \text{ (theory)} \\ \Delta T_7 &= 11.20765 \text{ (theory)} \\ \Delta T_8 &= 11.04319 \text{ (theory)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{t}^{(1)} &= 5.51208 \text{ (numerics)} \\ \Delta T_1 &= 11.18230 \text{ (numerics)} \\ \Delta T_2 &= 11.40338 \text{ (numerics);} \\ \Delta T_3 &= 11.77376 \text{ (numerics);} \\ \Delta T_4 &= 13.31848 \text{ (numerics);} \\ \Delta T_5 &= 11.84988 \text{ (numerics);} \\ \Delta T_6 &= 11.44142 \text{ (numerics);} \\ \Delta T_7 &= 11.20766 \text{ (numerics);} \\ \Delta T_8 &= 11.04320 \text{ (numerics)}\end{aligned}$$

# Аномальные волны в размерности $2+1$

Проблемы в размерности более 1.

- 1 Большинство физически интересных моделей в размерности  $n > 1$ , как правило, неинтегрируемы.
- 2 Многомерные интегрируемые системы, как правило, нелокальны.
- 3 Спектральные кривые - общие кривые. Нет естественного представления точками ветвления.

Что можно сделать?

Для фокусирующего уравнения Дэви-Стюардсона 2 наша программа проходит.

# Аномальные волны в уравнении Дэви-Стюардсона

Уравнении Дэви-Стюардсона – интегрируемая система в размерности 2+1.

$$\begin{aligned}iu_t + u_{xx} - \nu^2 u_{yy} + 2\eta qu &= 0, \quad \eta = \pm 1, \quad \nu^2 = \pm 1, \\q_{xx} + \nu^2 q_{yy} &= (|u|^2)_{xx} - \nu^2 (|u|^2)_{yy}, \\u = u(x, y, t) \in \mathbb{C}, \quad q &= q(x, y, t) \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

Представление нулевой кривизны

$$\begin{aligned}\nu \vec{\psi}_y &= i\sigma_3 \vec{\psi}_x + U\vec{\psi}, \\ \vec{\psi}_t &= 2i\sigma_3 \vec{\psi}_{xx} + 2U\vec{\psi}_x + V\vec{\psi},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & u \\ -\eta \bar{u} & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} -\eta(w - iq) & u_x - i\nu u_y \\ -\eta(\bar{u}_x + i\nu \bar{u}_y) & -\eta(w + iq) \end{bmatrix}, \\ \nu w_y &= (q - |u|^2)_x, \quad w_x = -\nu(q + |u|^2)_y.\end{aligned}$$

# Вещественные формы уравнения Дэви-Стюардсона

НУШ:

$$iu_t + u_{xx} + 2u^2\bar{u} = 0, \quad \text{фокусирующий НУШ,}$$

ДС:

$$iu_t + u_{xx} - \nu^2 u_{yy} + 2\eta qu = 0, \quad \eta = \pm 1, \quad \nu^2 = \pm 1,$$

$$q_{xx} + \nu^2 q_{yy} = (|u|^2)_{xx} - \nu^2 (|u|^2)_{yy},$$

$$u = u(x, y, t) \in \mathbb{C}, \quad q = q(x, y, t) \in \mathbb{R},$$

- ДС1:  $\nu = i$ , спектральная задача – гиперболическая;
- Дефокусирующий ДС2:  $\nu = 1, \eta = -1$ , спектральная задача – эллиптическая;
- Фокусирующий ДС2:  $\nu = 1, \eta = 1$ , спектральная задача – эллиптическая.

Для фокусирующего ДС2 с двоякопериодическими граничными условиями можно построить теорию аномальных волн, аналогичную построенной для НУШ (Гриневич–Santini).

В уравнении ДС2 присутствует нелокальный член:

$$q_{xx} + q_{yy} = (|u|^2)_{xx} - (|u|^2)_{yy},$$

при этом функция  $q$  определена с точностью до произвольной константы интегрирования

$$q(x, y, t) \rightarrow q(x, y, t) + f(t).$$

К счастью, добавление этой константы эквивалентно калибровочному преобразованию:

$$u(x, y, t) \rightarrow u(x, y, t) \exp\left(-i\frac{\eta}{2} \int^t f(\tau) d\tau\right).$$

Без потери общности можно положить

$$\iint_{T^2} q(x, y, t) dx dy = 0, \quad \text{для всех } t.$$

Периодическая задача для двумерного оператора Дирака 2-D и соответствующие решения ДС2 обсуждались в серии работ Тайманова (частью с С.П. Царевым и Р.М. Мауевым):

- Приложения к геометрии торов в  $\mathbb{R}^3$  и  $\mathbb{R}^4$ ;
- Доказательство существования спектральной кривой с использованием результатов Келдыша;
- Построение сингулярных решений с использованием конформных преобразований  $\mathbb{R}^4$ ;
- Применение преобразований Мутара к построению решений ДС2.
- Роль кривых с двойными точками в теории регулярных двоякопериодических потенциалов. Как мы увидим, эти двойные точки в точности отвечают неустойчивым модам и аномальным волнам.

Мы используем подход к построению спектральной кривой, развитый Кричевером для двумерного оператора Шредингера при одной энергии.

# Задача Коши для аномальных волн

Мы рассматриваем следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned}u(x, y, 0) &= a + \varepsilon v_0(x, y), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \ll 1, \\v_0(x + L_x, y) &= v_0(x, y + L_y) = v_0(x, y).\end{aligned}$$

Разложим  $v_0(x, y)$  в ряд Фурье:

$$v_0(x, y) = \sum_{n_x, n_y \neq (0,0)} c_{n_x, n_y} e^{i(k_x x + k_y y)},$$

где

$$k_x = n_x \frac{2\pi}{L_x}, \quad k_y = n_y \frac{2\pi}{L_y}, \quad n_x, n_y \in \mathbb{Z}.$$

# Резонансные пары

Спектральная кривая получается приклейкой тонких ручек к резонансным парам на плоскости

- 1 Резонансные пары, отвечающие неустойчивым модам  $k_x^2 + k_y^2 < 4$ :

$$\tau_1 = \frac{k_x + ik_y}{2} \left[ -1 \pm i \sqrt{\frac{4 - k_x^2 - k_y^2}{k_x^2 + k_y^2}} \right], \quad (6)$$

$$\tau_2 = \frac{k_x + ik_y}{2} \left[ 1 \pm i \sqrt{\frac{4 - k_x^2 - k_y^2}{k_x^2 + k_y^2}} \right], \quad |\tau_1| = |\tau_2| = 1$$

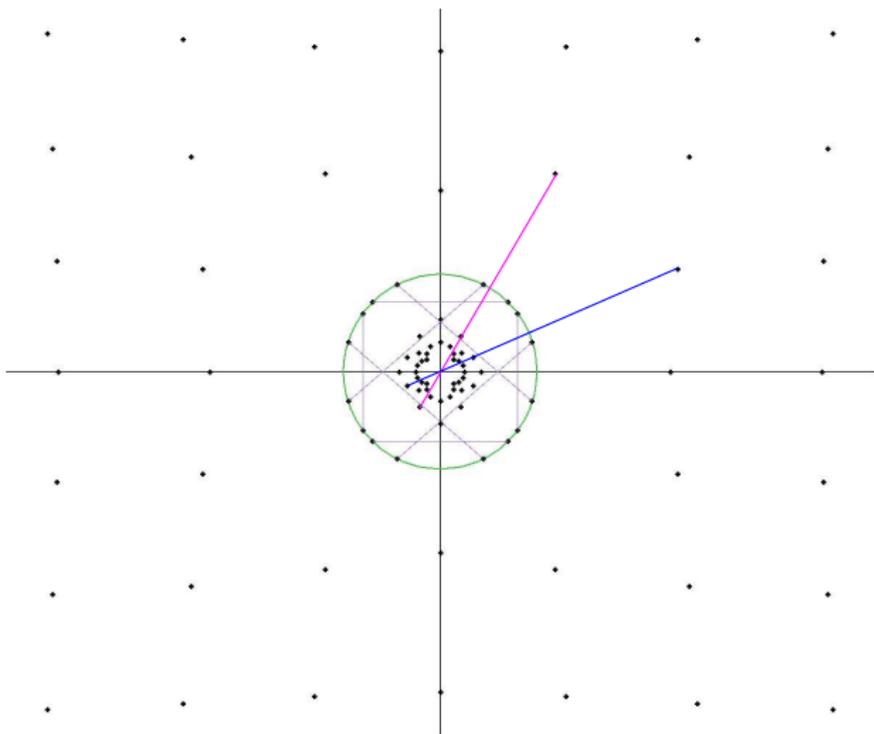
- 2 Резонансные пары, отвечающие устойчивым модам  $k_x^2 + k_y^2 > 4$ ;

$$\tau_1 = \frac{k_x + ik_y}{2} \left[ -1 + \sqrt{\frac{k_x^2 + k_y^2 - 4}{k_x^2 + k_y^2}} \right], \quad \tau_2 = -\frac{1}{\bar{\tau}_1}. \quad (7)$$

**В нашей конечнозонной аппроксимации мы сохраняем лишь ручки, отвечающие неустойчивым модам.**

# Пример

**Пример:** Пусть  $L_x = 2\pi/1.2$ ,  $L_y = 2\pi/1.4$ . Тогда  $k_x = 1.2n_x$ ,  
 $k_y = 1.4n_y$ :



# Циклы на невозмущенной кривой

Базисные циклы на невозмущенной кривой :

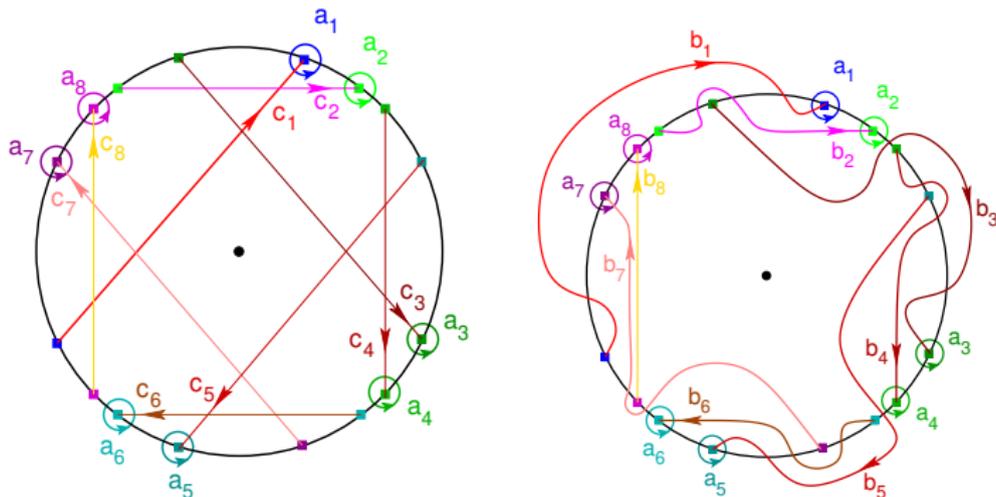


Рис.: Слева: система  $a$  и  $c$ -циклов для нашего примера. Справа: соответствующие  $a$  и  $b$ -циклы, где

$$b_j = c_j - \sum_{k>j} (c_j \circ c_k) c_k,$$

# Спектральная кривая

Проведем разрезы на  $\tau$ -плоскости вдоль интервалов  $(E_{2j-1}, E_{2j})$ . Для каждой резонансной пары  $(\tau_{2j-1}, \tau_{2j})$  склеим разрезы  $(E_{4j-3}, E_{4j-2})$  и  $(E_{4j-2}, E_{4j})$ , причем точка  $E_{4j-3}$  приклеивается к  $E_{4j-1}$ , а  $E_{4j-2}$  к  $E_{4j}$ . Циклы  $a_j$  – овалы, окружающие разрез  $(E_{4j-2}, E_{4j})$  и ориентированные против часовой стрелки, цикл  $c_j$  – объединение интервалов  $[E_{4j-3}, 0]$  и  $[0, E_{4j-1}]$ , циклы  $b_j$  определены как и выше.

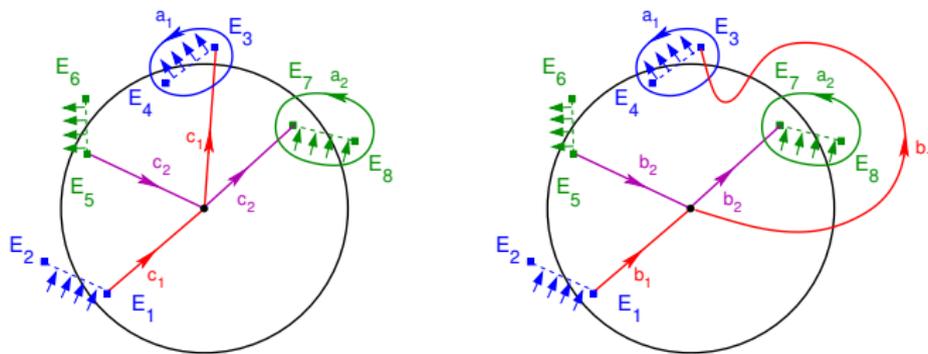


Рис.: Возмущенная кривая. Границы разрезов  $(E_1, E_2)$  и  $(E_5, E_6)$  к  $(E_3, E_4)$  и  $(E_7, E_8)$  соответственно.

Обозначим:

$$-\alpha_j = \frac{\bar{c}_j + \bar{\tau}_{2j-1}\tau_{2j}c_{-j}}{2q_{2j-1}}, \quad \beta_j = \frac{\bar{c}_{-j} + \bar{\tau}_{2j}\tau_{2j-1}c_j}{2q_{2j}}. \quad (8)$$

**Теорема:**

$$E_{4j-4+k} = \tau_{2j-1} + (-1)^{k-1} \frac{2\tau_{2j-1}q_{2j}}{i \operatorname{Im}(\tau_{2j}\bar{\tau}_{2j-1})} \varepsilon \sqrt{\alpha_j \beta_j}, \quad (9)$$

$$E_{4j-2+k} = \tau_{2j-1} + (-1)^{k-1} \frac{2\tau_{2j}q_{2j-1}}{i \operatorname{Im}(\tau_{2j}\bar{\tau}_{2j-1})} \varepsilon \sqrt{\alpha_j \beta_j},$$

**Теорема:** В главном порядке:

$$b_{jj} = \log \left[ \varepsilon^2 \frac{\tau_{2j-1}\tau_{2j}q_{2j-1}q_{2j}}{\operatorname{Im}^2(\tau_{2j}\tau_{2j-1}^{-1})(\tau_{2j-1} - \tau_{2j})^2} \alpha_j \beta_j \right],$$

$$b_{jk} = \log \left[ \frac{(\tau_{2j} - \tau_{2k})(\tau_{2j-1} - \tau_{2k-1})}{(\tau_{2j} - \tau_{2k-1})(\tau_{2j-1} - \tau_{2k})} \right], \quad k \neq j.$$

$$u(z, t) = \frac{\theta(\vec{A}(\infty_2) + \vec{W}_z z + \vec{W}_{\bar{z}} \bar{z} + \vec{W}_t t - \vec{A}(\mathcal{D}) - \vec{K})}{\theta(\vec{A}(\infty_1) + \vec{W}_z z + \vec{W}_{\bar{z}} \bar{z} + \vec{W}_t t - \vec{A}(\mathcal{D}) - \vec{K})},$$

где

$$\left[ \vec{A}_{E_{4j-3}}(\gamma_j) \right]_k = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ \log \left[ \frac{\alpha_j}{\sqrt{\alpha_j \beta_j}} \right] & k = j. \end{cases}$$

$$(W_z)_j = \frac{i}{2} [\bar{\tau}_{2j} - \bar{\tau}_{2j-1}], \quad (W_{\bar{z}})_j = \frac{i}{2} [\tau_{2j} - \tau_{2j-1}], \quad (10)$$

$$(W_t)_j = \text{Im}(\tau_{2j-1}^2 - \tau_{2j}^2), \quad (11)$$

$$A_j(\infty_2) - A_j(\infty_1) = \log \left[ \frac{\tau_{2j-1}}{\tau_{2j}} \right] = \log [\tau_{2j-1} \bar{\tau}_{2j}]. \quad (12)$$

$$K_j = \frac{b_{jj}}{2} - \pi i + A_j(E_{4j-3}) + O(\epsilon).$$

$$A_j(E_{4j-3}) = -\log \left[ \epsilon \frac{\tau_{2j} q_{2j}}{i \operatorname{Im}(\tau_{2j} \tau_{2j-1}^{-1}) (\tau_{2j-1} - \tau_{2j})} \sqrt{\alpha_j \beta_j} \right],$$

$$b_{jj} = \log \left[ \epsilon^2 \frac{\tau_{2j-1} \tau_{2j} q_{2j-1} q_{2j}}{\operatorname{Im}^2(\tau_{2j} \tau_{2j-1}^{-1}) (\tau_{2j-1} - \tau_{2j})^2} \alpha_j \beta_j \right].$$

**Замечание.** Мы снова использовали несимметричную нормировку волновой функции  $\Psi^1(\gamma, 0, 0) \equiv 1$ . При этом по дивизору потенциал восстанавливается с точностью до произвольного фазового множителя  $e^{i\phi(t)}$ , что хорошо согласуется с калибровочной свободой ДС2.

Pierangeli D., Flammini M., Zhang L., Marcucci G., Agranat A.J., Grinevich P.G., Santini P.M., Conti C., DelRe E. “Observation of Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou recurrence and its exact dynamics”, Physical Review X, 2018, v. 8, issue 4, p. 041017 (9 pages); doi:10.1103/PhysRevX.8.041017.

P.G. Grinevich, P.M. Santini “The exact rogue wave recurrence in the NLS periodic setting via matched asymptotic expansions, for 1 and 2 unstable modes”, Physics Letters A, 2018, v. 382, pp. 973-979; doi:10.1016/j.physleta.2018.02.014.

P.G. Grinevich, P.M. Santini “The finite gap method and the analytic description of the exact rogue wave recurrence in the periodic NLS Cauchy problem. 1”, Nonlinearity, 2018, v. 31, No. 11, pp. 5258–5308; doi:10.1088/1361-6544/aaddcf.

Гриневич П.Г., Сантини П.М. “Фазовые резонансы для повторяемости аномальных волн НУШ в квазисимметричном случае” - Теоретическая и математическая физика, 2018, т. 196, №3, с. 404-418; doi:10.4213/tmf9544.

Гриневич П.Г., Сантини П.М. “Конечнозонный подход в периодической задаче Коши для аномальных волн в нелинейном уравнении Шрёдингера при наличии нескольких неустойчивых мод” - Успехи математических наук, 2019, т. 72, №2(446), с. 27-80; doi:10.4213/rm9863.

P.G. Grinevich, P.M. Santini “Numerical instability of the Akhmediev breather and a finite-gap model of it”,- “Recent Developments in Integrable Systems and Related Topics of Mathematical Physics (Kezenoi-Am, Russia, 2016)”, ed. Viktor M. Buchstaber, Sotiris Konstantinou-Rizos, Alexander V. Mikhailov, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, v. 273, Springer 2019, pp. 3-23.

Coppini F., Grinevich P.G., Santini P.M. “The effect of a small loss or gain in the periodic NLS anomalous wave dynamics. I” - Phys. Rev. E, 2020, v.101, No 3, 032204, 8 pages, - Published 6 March 2020; doi:10.1103/PhysRevE.101.032204.

P.G. Grinevich, P.M. Santini, “The linear and nonlinear instability of the Akhmediev breather”, *Nonlinearity*, **34**:12 (2021), 8331–8358.

Гриневич П.Г., Сантини П.М. “Конечнозонный подход в периодической задаче Коши для  $(2+1)$ -мерных аномальных волн фокусирующего уравнения Дэви–Стюартсона 2”, *Успехи мат. наук*, **77:6(468)** (2022), 77-108.

Спасибо за внимание!