Формальная устойчивость, устойчивость по большинству начальных данных и диффузия в аналитических системах дифференциальных уравнений

В. В. Козлов

Математичексий институт им. В.А. Стеклова

$$\dot{x} = v(x), \quad v(0) = 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

v — аналитическое векторно поле.
Определения устойчивости равновесия $x = 0$:

1. $x = 0$ устойчиво по Ляпунову, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $|x^0| < \delta \Rightarrow |x(t, x^0)| < \varepsilon$ для всех $t \in \mathbb{R}$.
2. $x = 0$ формально устойчиво, если имеется интеграл в виде формального степенного ряда $F_2(x) + F_3(x) + \dots$, причем F_2 положительно определена.
3. Системы с инвариантной мерой $\mathrm{mes} D = \int_D \rho(x) d^n x$: $x = 0$ устойчиво по большинству начальных данных, если $\forall \varepsilon > 0$ найдется шар B_δ радиуса $\delta(\varepsilon) > 0$ и измеримое подмножество $S_\delta \subset B_\delta$ такие, что
   1) решения с начальными данными из S_δ остаются в шаре B_ε при всех $t \in \mathbb{R}$,
   2) $\mathrm{mes} S_{\delta(\varepsilon)} / \mathrm{mes} B_{\delta(\varepsilon)} \to 1$ при $\varepsilon \to 0$.

4. $x = 0$ условно устойчиво с индексом $k \in \{1, \ldots, n\}$, если найдется вложенный в $\mathbb{R}^n$ k-мерный диск D^k, содержащий $x = 0$, и $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех $x^0 \in D^k \cap B_\delta$ решение с начальным условием x^0 не выходит за пределы B_ε.

Уиттекер (1916)

Биркгоф "Chicago Colloqium"лекции (1920)

Мозер (1955), Glimm (1964), Bryuno (1967), Douady, Le Calvez (1983)

B. Fayad, Lyapunov unstable elliptic equilibria. arXiv: 1809.09059.v3 [math.DS] 23 Jul 2020.

$$\dot{x}_1 = x_2[\omega_1 + \alpha_1(x_1^2 + x_2^2)], \qquad \dot{x}_2 = -x_1[\omega_1 + \alpha_1(x_1^2 + x_2^2)],$$
$$\dot{x}_3 = x_4[\omega_2 + \alpha_2(x_3^2 + x_4^2)], \qquad \dot{x}_4 = -x_3[\omega_2 + \alpha_2(x_3^2 + x_4^2)],$$
$$\dot{x}_5 = x_6 + f(x_1, x_2, x_3, x_4), \qquad \dot{x}_6 = -x_5.$$

Первые интегралы:

$$I_1 = \frac{\omega_1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\alpha_1}{4}(x_1^2 + x_2^2)^2, \quad I_2 = \frac{\omega_2}{2}(x_3^2 + x_4^2) + \frac{\alpha_2}{4}(x_3^2 + x_4^2)^2.$$

Система интегрируется в квадратурах.

f аналитическая в окрестности точки $x_1 = \cdots = x_4 = 0$ и ее ряд Маклорена начинается с членов порядка $\geqslant 2$. Так что $x = 0$ — положение равновесия. Считаем $\omega_1, \omega_2 > 0$.

Теорема 1. Пусть ω_1 и ω_2 таковы, что

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 1 \tag{1}$$

для всех целых k_1, k_2. Тогда преобразованием $u_1 = x_1, \ldots, u_4 = x_4$, $u_5 = x_5 + X_5, u_6 = x_6 + X_6$, где X_5 и X_6 — некоторые формальные степенные ряды по $x_1, \ldots, x_4$, начинающиеся с членов порядка $\geqslant 2$, система приводится к виду:

$$
\begin{aligned}
&\dot u_1 = u_2[\omega_1 + \alpha_1(u_1^2+u_2^2)], \quad \dot u_2 = -u_1[\omega_1 + \alpha_1(u_1^2+u_2^2)],\\
&\dot u_3 = u_4[\omega_2 + \alpha_2(u_3^2+u_4^2)], \quad \dot u_4 = -u_3[\omega_2 + \alpha_2(u_3^2+u_4^2)],\\
&\dot u_5 = u_6, \quad \dot u_6 = -u_5.
\end{aligned}
$$

Следствие 1. При выполнении (1) система приводится к каноническому гамильтоновому виду с помощью формального степенного преобразования.
Следствие 2. При выполнении (1) равновесие $x = 0$ формально устойчиво.

$$
F = \omega_1(x_1^2+x_2^2) + \omega_2(x_3^2+x_4^2) + x_5^2 + x_6^2 + \dots
$$

Положим

$$
\begin{aligned}
f = \sum_{\substack{m\geqslant 0, n\geqslant 0\\ m+n\geqslant 2}} \frac{1}{\varkappa_n \varkappa_m} \big[&(m x_2^{m-1} x_1 - C_m^3 x_2^{m-3} x_1^3 + \dots)(x_4^n - C_n^2 x_4^{n-2} x_3^2 + \dots)\\
&-(x_2^m - C_m^2 x_2^{m-2} x_1^2 + \dots)(n x_4^{n-1} x_3 - C_n^3 x_4^{n-3} x_3^3 + \dots)\big],
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $\varkappa_k = \exp(\alpha_k k)$, $\alpha_k > 0$ и $\alpha_k \uparrow \infty$ при $k \to \infty$.

Предложение 1. f — голоморфная функция в $\mathbb{C}^4$.

Теорема 2. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то в положительном квадранте $\mathbb{R}^2 = \{\omega_1, \omega_2\}$ всюду плотны точки, удовлетворяющие условию (1), и для которых почти все траектории системы с функцией f вида (2) неограничены. Исключение составляют траектории, лежащие на двух инвариантных многообразиях

$$x_1 = x_2 = 0 \quad \text{или} \quad x_3 = x_4 = 0.$$

Следствие 1. При подходящем выборе частот ω_1, ω_2 и функции f вида (2) равновесие формально устойчиво, но неустойчиво по Ляпунову.

Следствие 2. В предположениях теоремы 2 расходится преобразование системы к нормальной форме и ряд для формального интеграла.

Следствие 3. Формально устойчивое равновесие неустойчиво по большинству начальных данных.

Следствие 4. Формально устойчивое равновесие не является условно устойчивым с индексами $k = 5$ и $k = 6$.

Теорема 3. Если $\omega_1 \geqslant 0$, $\omega_2 \geqslant 0$ и $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, то система с функцией f вида (2) имеет трехмерные инвариантные торы с условно периодичсекими траекториями, причем их объединение K обладает следующими свойствами:

1. $\mathrm{mes}(\mathbb{R}^6 \setminus K) = 0$,
2. множество $\mathbb{R}^6 \setminus K$ всюду плотно в $\mathbb{R}^6$,
3. в $\mathbb{R}^6 \setminus K$ всюду плотны траектории, которые неограничены.

Вырожденная диффузия: всюду плотны инвариантные торы и неограниченные траектории.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и пусть K_ε — подмножество K инвариантных торов, которые целиком расположены в шаре B_ε, а S_δ — совокупность пересечений торов из K_ε с шаром B_δ. Тогда найдет $\delta(\varepsilon) \downarrow 0$ при $\varepsilon \to 0$ такая, что

$$\mathrm{mes} S_{\delta(\varepsilon)} / \mathrm{mes} B_{\delta(\varepsilon)} \to 1$$

при $\varepsilon \to 0$.

Следствие. При выполнении условий теоремы 3 равновесие $x = 0$ устойчиво по большинству начальных данных, но неустойчиво по Ляпунову.

Приложение к гамильтоновым системам

$\dot{x} = v(x) = Ax +$ члены порядка $\geqslant 2$; $x \in \mathbb{R}^n$.
$H(x, p) = \sum p_j v_j(x) = (p, v)$, $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = v(x)$, $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^\top$
Пусть найдется преобразование $x = X +$ члены порядка $\geqslant 2$ такое, что $\dot{X} = AX$.
Тогда имеем формальное каноническое преобразование

$$x, p \mapsto X, P; \quad P = \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^\top p.$$

При этом $H = (p, v) = (P, w(X))$, где $w = AX$, $\dot{P} = -\left(\frac{\partial w}{\partial X}\right)^\top P = -A^\top P$.

Пусть (как в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & & & \\ -\omega_1 & 0 & & \text{\huge 0} & \\ & & \ddots & & \\ & \text{\huge 0} & & 0 & \omega_k \\ & & & -\omega_k & 0 \end{bmatrix}$$

Тогда $A^\top = -A$ и уравнения для X и P совпадают. В частности, нормализованная система имеет квадратичный интеграл

$$\sum \pm\omega_j (X_j^2 + X_{j+1}^2) + \sum \pm\omega_j (P_j^2 + P_{j+1}^2).$$

Тривиальное решение $x = p = 0$ гамильтоновой системы формально устойчиво.

Если взять систему, удовлетворяющую условиям теоремы 2, то получим гамильтонову систему с шестью степенями свободы, аналитическим гамильтонианом и формально устойчивым состоянием равновесия, которое в действительности неустойчиво по Ляпунову.

Спасибо за внимание