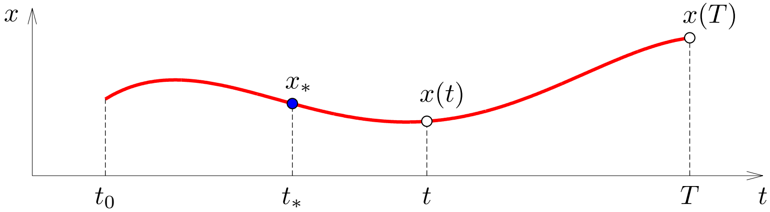
Наследственные уравнения Гамильтона-Якоби

Лукоянов Н.Ю.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
УрО РАН



Уравнение движения

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad u(t) \in P, \quad t_0 \le t \le T$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Состояние в момент } t_* : \\ \qquad x(t_*) = x_* \\ \text{Программа управления:} \\ u(\cdot) = \big\{u(t) \in P, t_0 \le t \le T\big\} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Движение системы:} \\ x(\cdot) = \big\{x(t), t_0 \le t \le T\big\} \end{array}$$

Цель управления

$$\gamma = \sigma\big(x(T)\big) \;\to\; \min$$

Функция оптимального результата

$$\varphi(t_*, x_*) = \inf_{u(\cdot)} \sigma\big(x(T)\big)$$

Скорость изменения функции φ вдоль движения

$$\dot{\varphi}\big(t, x(t)\big) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\big(t, x(t)\big) + \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}\big(t, x(t)\big), f\big(t, x(t), u(t)\big) \right\rangle$$

Уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t, x) + H\left(t, x, \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t, x)\right) = 0, \quad H(t, x, s) = \min_{u \in P} \langle s,\ f(t, x, u)\rangle$$

Краевое условие

$$\varphi(T, x) = \sigma(x)$$

Оптимальная стратегия управления

$$U^0(t, x) \in \arg\min_{u \in P} \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t, x),\ f(t, x, u) \right\rangle$$

Задача Коши

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x) + H\left(t, x, \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x)\right) = 0, \quad t \in [t_0, T),\ x \in \mathbb{R}^n$$

$$\varphi(T,x) = \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

- Функции H и σ непрерывны
- Существует $c > 0$ такое, что

  $$|H(t,x,s) - H(t,x,r)| \le c(1 + \|x\|)\|s - r\|$$

  для любых $t \in [t_0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ и s, $r \in \mathbb{R}^n$
- Для любого ограниченного $D \subset \mathbb{R}^n$ найдется $\lambda > 0$ такое, что

  $$|H(t,x,s) - H(t,y,s)| \le \lambda(1 + \|s\|)\|x - y\|$$

  для любых $t \in [t_0, T]$, x, $y \in D$ и $s \in \mathbb{R}^n$

Минимаксное решение: нелокальная форма определения

Функция $\varphi : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется минимаксным решением задачи Коши, если она непрерывна, удовлетворяет краевому условию

$$\varphi(T, x) = \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

и обладает следующим свойством: для любых $(t, x) \in [t_0, T) \times \mathbb{R}^n$ и $s \in \mathbb{R}^n$ существует липшицева функция $y(\cdot)$ такая, что

$$y(t) = x, \qquad \|\dot{y}(\tau)\| \le c(1 + \|y(\xi)\|) \text{ при п.в. } \tau \in [t, T],$$

$$\varphi(\tau, y(\tau)) - \varphi(t, x) = \langle s, y(\tau) - x \rangle - \int_t^\tau H(\xi, y(\xi), s)\, \mathrm{d}\xi, \quad \tau \in [t, T].$$

Слабая инвариантность графика решения $z = \varphi(t, x)$ относительно характеристического дифференциального включения:

$$(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in E(t, x(t), s), \quad t \in [t_0, T]$$

$$E(t, x, s) = \{(f, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ \|f\| \le c(1 + \|x\|),\ h = \langle s, f \rangle - H(t, x, s)\}$$

Минимаксное решение: инфинитезимальная форма определения

Функция $\varphi : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — минимаксное решение задачи Коши, если она непрерывна, удовлетворяет краевому условию

$$\varphi(T, x) = \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

и паре следующих дифференциальных неравенств:

$$\begin{aligned}
\min_{f \in B(x)} \left[\partial^- \left\{\varphi(t,x) \middle| f\right\} - \langle s, f \rangle\right] + H(t,x,s) \quad &\le \quad 0, \\
\max_{f \in B(x)} \left[\partial^+ \left\{\varphi(t,x) \middle| f\right\} - \langle s, l \rangle\right] + H(t,x,s) \quad &\ge \quad 0,
\end{aligned}$$

$$B(x) = \left\{f \in \mathbb{R}^n : \|f\| \le c(1 + \|x\|)\right\}, \quad t \in [t_0, T),\ x \in \mathbb{R}^n,\ s \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned}
\partial^- \left\{\varphi(t,x) \middle| f\right\} \quad &= \quad \liminf_{\delta \downarrow 0} \ \left[\varphi(t+\delta, x+f\delta) - \varphi(t,x)\right]\delta^{-1} \\
\partial^+ \left\{\varphi(t,x) \middle| f\right\} \quad &= \quad \limsup_{\delta \downarrow 0} \left[\varphi(t+\delta, x+f\delta) - \varphi(t,x)\right]\delta^{-1}
\end{aligned}$$

Вязкостное решение: нелокальная форма определения

Функция $\varphi : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется вязкостным решением задачи Коши, если она непрерывна, удовлетворяет краевому условию

$$\varphi(T, x) = \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

и обладает следующим свойством: для любой гладкой (тестовой) функции $\psi : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- $$\frac{\partial\psi}{\partial t}(t^*, x^*) + H\Big(t^*, x^*, \frac{\partial\psi}{\partial x}(t^*, x^*)\Big) \le 0,$$

  если $\varphi - \psi$ имеет в точке $(t^*, x^*) \in (t_0, T) \times \mathbb{R}^n$ локальный минимум

- $$\frac{\partial\psi}{\partial t}(t_*, x_*) + H\Big(t_*, x_*, \frac{\partial\psi}{\partial x}(t_*, x_*)\Big) \ge 0,$$

  если $\varphi - \psi$ имеет в точке $(t_*, x_*) \in (t_0, T) \times \mathbb{R}^n$ локальный максимум

Вязкостное решение: инфинитезимальная форма определения

Функция $\varphi : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — вязкостное решение задачи Коши, если она непрерывна, удовлетворяет краевому условию

$$\varphi(T, x) = \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

и паре следующих дифференциальных неравенств:

$$\begin{aligned} p_0 + H(t, x, p) &\leq 0, \quad (p_0, p) \in D^-\varphi(t, x), \\ q_0 + H(t, x, q) &\geq 0, \quad (q_0, q) \in D^+\varphi(t, x), \end{aligned}$$

$$(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$$

$$(p_0, p) \in D^-\varphi(t, x) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(t + \tau, x + y) - \varphi(t, x) \geq p_0\tau + \langle p, y\rangle + o\big(\|(\tau, y)\|\big)$$

$$(q_0, q) \in D^+\varphi(t, x) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(t + \tau, x + y) - \varphi(t, x) \leq q_0\tau + \langle q, y\rangle + o\big(\|(\tau, y)\|\big)$$

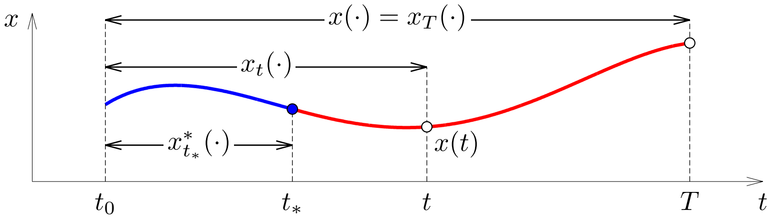
Фундаментальное свойство субдифференциала

- $F \subset \mathbb{R}^n$ — непустой выпуклый компакт
- функция $\varphi : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу
- $(t_*, x_*) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$: $\partial^- \{\varphi(t_*, x_*) \,|\, f\} > 0$ для всех $f \in F$

$$\Downarrow$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n$ и $(p_0, p) \in D^- \varphi(t, x)$ такие, что

- $(t_* - t)^2 + \|x_* - x\|^2 \leq \varepsilon^2$
- $p_0 + \langle p, f \rangle \geq 0$ для всех $f \in F$



Уравнение движения

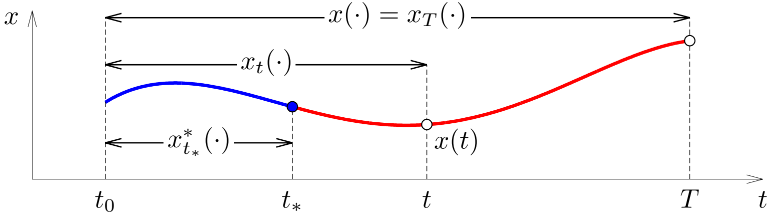
$$\dot{x}(t) = f\big(t, x_t(\cdot), u(t)\big), \quad u(t) \in P, \quad t_0 \le t \le T,$$

$$x_t(\cdot) = \big\{x(\tau), t_0 \le \tau \le t\big\} \text{ — история движения}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Начальная история:} \\ x^*_{t_*}(\cdot) = \big\{x^*(\tau), t_0 \le \tau \le t_*\big\} \\ \text{Программа управления:} \\ u(\cdot) = \big\{u(t) \in P, t_* \le t \le T\big\} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{Движение системы:} \\ x(\cdot) = \big\{x(t), t_0 \le t \le T\big\} \\ x(t) = x^*(t) \text{ при } t_0 \le t \le t_* \end{array}$$

Цель управления

$$\gamma = \sigma\big(x(\cdot)\big) \;\to\; \min$$



Функционал оптимального результата

$$\varphi\big(t_*, x^*_{t_*}(\cdot)\big) = \inf_{u(\cdot)} \sigma\big(x(\cdot)\big)$$

Скорость изменения функционала вдоль движения

$$\dot{\varphi}\big(t, x_t(\cdot)\big) = \boldsymbol{\partial_t \varphi\big(t, x_t(\cdot)\big)} + \Big\langle \boldsymbol{\nabla\varphi\big(t, x_t(\cdot)\big)},\ f\big(t, x_t(\cdot), u(t)\big) \Big\rangle$$

Функциональное уравнение типа Гамильтона-Якоби

$$\boldsymbol{\partial_t \varphi\big(t, x_t(\cdot)\big)} + H\left(t, x_t(\cdot), \boldsymbol{\nabla\varphi\big(t, x_t(\cdot)\big)}\right) = 0$$

Гамильтониан

$$H\big(t, x_t(\cdot), s\big) = \min_{u \in P} \Big\langle s,\ f\big(t, x_t(\cdot), u\big) \Big\rangle$$

Краевое условие

$$\varphi\big(T, x(\cdot)\big) = \sigma\big(x(\cdot)\big)$$

Оптимальная стратегия управления

$$U^0\big(t, x_t(\cdot)\big) \in \arg\min_{u \in P} \Big\langle \boldsymbol{\nabla\varphi\big(t, x_t(\cdot)\big)},\ f\big(t, x_t(\cdot), u\big) \Big\rangle$$

Выбор пространства и метрики ($t_0 = -h,\ h > 0;\ t_* \in [0, T)$)

- Множество $[0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ с равномерной метрикой; неупреждающие функционалы $\varphi : [0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$:

$\varphi(t, x(\cdot)) = \varphi(t, y(\cdot))$ для любых $t \in [0, T)$ и $x(\cdot),\ y(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию $x(\tau) = y(\tau)$, $\tau \in [-h, t]$

- Множество $[0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ с псевдометрикой
$$\rho\big((t, x(\cdot)), (\tau, y(\cdot))\big) = |t - \tau| + \|x(\cdot \wedge t) - y(\cdot \wedge \tau)\|_{[-h,T]};$$
функционалы $\varphi : [0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ — автоматически неупреждающие

- Множество $G = \big\{(t, w(\cdot)) :\ t \in [0, T],\ w(\cdot) \in C([-h, t], \mathbb{R}^n)\big\}$ с метрикой
$$\rho_*\big((t, w(\cdot)), (\tau, r(\cdot))\big) = |t - \tau| + \|w(\cdot \wedge t) - r(\cdot \wedge \tau)\|_{[-h,T]};$$
функционалы $\varphi : G \to \mathbb{R}$

- Множество G с метрикой Хаусдорфа между графиками функций $w(\cdot)$ и $r(\cdot)$; функционалы $\varphi : G \to \mathbb{R}$

Коинвариантные (ci-) производные функционалов

Функционал $\varphi : [0,T] \times C([-h,T],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ называется коинвариантно (ci-) дифференцируемым в точке $(t,x(\cdot)) \in [0,T) \times C([-h,T],\mathbb{R}^n)$, если

существуют $\partial_t\varphi(t,x(\cdot)) \in \mathbb{R}$ и $\nabla\varphi(t,x(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ такие, что для любых $y(\cdot) \in \mathrm{Lip}(t,x(\cdot))$ и $\tau \in (t,T]$ выполнено соотношение

$$\varphi(\tau,y(\cdot))-\varphi(t,x(\cdot)) = \partial_t\varphi(t,x(\cdot))(\tau-t)+\langle\nabla\varphi(t,x(\cdot)),y(\tau)-x(t)\rangle+o(\tau-t),$$

где $o(\cdot)$ может зависеть от $y(\cdot)$ и $o(\delta)/\delta \to 0$ при $\delta \downarrow 0$.

$\mathrm{Lip}(t,x(\cdot))$ — множество функций $y(\cdot) \in C([-h,T],\mathbb{R}^n)$, которые удовлетворяют равенству $y(\tau) = x(\tau)$, $\tau \in [-h,t]$, и являются липшицевыми на $[t,T]$

$\partial_t\varphi(t,x(\cdot))$ и $\nabla\varphi(t,x(\cdot))$ — ci-производные φ в точке $(t,x(\cdot))$

Если функционал $\varphi(t,x(\cdot))$ ci-дифференцируем в каждой точке $(t,x(\cdot))$, то он сам и его ci-производные $\partial_t\varphi(t,x(\cdot))$ и $\nabla\varphi(t,x(\cdot))$ являются неупреждающими

Коинвариантные (ci-) производные функционалов

- Ким А.В. (1985): Инвариантные и коинвариантные производные функционалов

$$[0,T]\times\mathbb{R}^n\times PC([-h,T],\mathbb{R}^n)\ni(t,z,x(\cdot))\mapsto\Phi(t,z,x(\cdot))\in\mathbb{R}$$

- Л. (2000): Коинвариантные производные функционалов

$$\varphi:[0,T]\times C([-h,T],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$$

- Aubin J.P., Haddad G. (2002): Clio-производные функционалов

$$\varphi:[0,T]\times C((-\infty,T],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$$

- Dupire B. (2009): Горизонтальные и вертикальные производные функционалов

$$\Phi:[0,T]\times\mathcal{D}([-h,T],\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$$

Наследственное уравнение Гамильтона — Якоби

Задача Коши

$$\partial_t \varphi(t, x(\cdot)) + H\big(t, x(\cdot), \nabla\varphi(t, x(\cdot))\big) = 0,$$
$$(t, x(\cdot)) \in [0, T) \times C([-h, T], \mathbb{R}^n)$$

$$\varphi(T, x(\cdot)) = \sigma(x(\cdot)), \quad x(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n)$$

- Искомым является неупреждающий функционал $\varphi : [0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$
- Предполагается, что для любого $s \in \mathbb{R}^n$ функционал

$$[0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n) \ni (t, x(\cdot)) \mapsto H(t, x(\cdot), s) \in \mathbb{R}$$

  является неупреждающим

Задача оптимального управления

Пусть $(t, x(\cdot)) \in [0,T] \times C([-h,T],\mathbb{R}^n)$. Уравнение динамики:

$$\dot{y}(\tau) = f(\tau, y(\cdot), u(\tau)), \quad \tau \in [t,T], \quad y(\tau) \in \mathbb{R}^n, \quad u(\tau) \in U \subset \mathbb{R}^m,$$

при начальном условии $y(\tau) = x(\tau)$, $\tau \in [-h,t]$. Показатель качества:

$$J = \sigma(y(\cdot)) - \int_t^T g(\tau, y(\cdot), u(\tau))\, \mathrm{d}\tau \longrightarrow \min_{u(\cdot)}.$$

(A.1) Функции $f : [0,T] \times C([-h,T],\mathbb{R}^n) \times U \to \mathbb{R}^n$, $g : [0,T] \times C([-h,T],\mathbb{R}^n) \times U \to \mathbb{R}$ и $\sigma : C([-h,T],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ являются непрерывными.

(A.2) Существует $c > 0$ такое, что

$$\|f(\tau, y(\cdot), u)\| \leq c(1 + \|y(\cdot)\|_{[-h,\tau]})$$

для любых $\tau \in [0,T]$, $y(\cdot) \in C([-h,T],\mathbb{R}^n)$ и $u \in U$.

(A.3) Для любого компакта $D \subset C([-h,T],\mathbb{R}^n)$ найдется $\lambda > 0$ такое, что

$$\|f(\tau, y(\cdot), u) - f(\tau, z(\cdot), u)\| + |g(\tau, y(\cdot), u) - g(\tau, z(\cdot), u)| \leq \lambda \|y(\cdot) - z(\cdot)\|_{[-h,\tau]}$$

для любых $\tau \in [0,T]$, $y(\cdot)$, $z(\cdot) \in D$ и $u \in U$.

Функционал оптимального результата

Предположения $(A.1)$–$(A.3)$ позволяют охватить следующие случаи:

- Постоянные сосредоточенные запаздывания:

$$f(\tau, y(\cdot), u) = f_1\big(\tau, y(\tau), y(\tau - h), u\big),$$

- Переменные сосредоточенные запаздывания:

$$f(\tau, y(\cdot), u) = f_2\big(\tau, y(\tau), y(\tau - k(\tau)), u\big), \quad 0 < k(\tau) \le h,$$

- Распределенные запаздывания:

$$f(\tau, y(\cdot), u) = f_3\Big(\tau, y(\tau), \int_{-h}^{\tau} K(\tau, \xi, y(\xi))\, \mathrm{d}\xi, u\Big).$$

Функционал оптимального результата

$$\varphi(t, x(\cdot)) = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J(t, x(\cdot), u(\cdot)), \quad (t, x(\cdot)) \in [0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n).$$

Гамильтониан

$$H(t, x(\cdot), s) = \min_{u \in U} \big(\langle s, f(t, x(\cdot), u)\rangle - g(t, x(\cdot), u)\big).$$

Основные предположения

$(B.1)$ Функционалы H и σ являются непрерывными.

$(B.2)$ Существует $c > 0$ такое, что

$$|H(t, x(\cdot), s) - H(t, x(\cdot), r)| \leq c(1 + \|x(\cdot)\|_{[-h,t]})\|s - r\|$$

для любых $t \in [0, T]$, $x(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ и s, $r \in \mathbb{R}^n$.

$(B.3)$ Для любого компакта $D \subset C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ найдется $\lambda > 0$ такое, что

$$|H(t, x(\cdot), s) - H(t, y(\cdot), s)| \leq \lambda(1 + \|s\|)\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{[-h,t]}$$

для любых $t \in [0, T]$, $x(\cdot)$, $y(\cdot) \in D$ и $s \in \mathbb{R}^n$.

Минимаксное решение

Функционал $\varphi : [0,T] \times C([-h,T],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ называется минимаксным решением задачи Коши, если он является неупреждающим, непрерывным, удовлетворяет краевому условию

$$\varphi(T, x(\cdot)) = \sigma(x(\cdot)), \quad x(\cdot) \in C([-h,T],\mathbb{R}^n),$$

и обладает следующим свойством: каковы бы ни были $(t, x(\cdot)) \in [0,T) \times C([-h,T],\mathbb{R}^n)$ и $s \in \mathbb{R}^n$, существует функция $y(\cdot) \in \mathrm{Lip}(t, x(\cdot))$ такая, что

$$\|\dot{y}(\tau)\| \le c(1 + \max_{\xi \in [-h,\tau]} \|y(\xi)\|) \text{ при п.в. } \tau \in [t,T]$$

$$\varphi(\tau, y(\cdot)) - \varphi(t, x(\cdot)) = \langle s, y(\tau) - x(t) \rangle - \int_t^\tau H(\xi, y(\cdot), s)\, \mathrm{d}\xi, \quad \tau \in [t,T].$$

Теорема (2021)

Пусть выполнены предположения $(B.1)$–$(B.3)$. Тогда минимаксное решение задачи Коши существует и единственно.

Частные случаи:
1. Только распределенные запаздывания (2003)

Предположения $(B.1)$, $(B.2)$ и следующее условие Липшица:

$(B.4)$ Для любого компакта $D \subset C([-h,T],\mathbb{R}^n)$ найдется $\lambda > 0$ такое, что

$$|H(t,x(\cdot),s) - H(t,y(\cdot),s)| \le \lambda(1+\|s\|)\left(\|x(t)-y(t)\| + \sqrt{\int_{-h}^{t}\|x(\tau)-y(\tau)\|^2\,\mathrm{d}\tau}\right)$$

для любых $t \in [0,T]$, $x(\cdot)$, $y(\cdot) \in D$ и $s \in \mathbb{R}^n$.

Подходящий функционал Ляпунова — Красовского

$$\nu_\varepsilon(t,x(\cdot)) = \frac{e^{-2\lambda t}-\varepsilon}{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon^4 + 2\lambda\int_{-h}^{t}\|x(\tau)\|^2\,\mathrm{d}\tau + \|x(t)\|^2},$$

$$(t,x(\cdot)) \in [0,T]\times C([-h,T],\mathbb{R}^n), \quad \varepsilon > 0,$$

2. Напрямую через функционал Ляпунова — Красовского (2006)

Для любого компакта $D \subset C([-h,T],\mathbb{R}^n)$ существует число $\varepsilon_0 > 0$ и функционал $\nu_\varepsilon : [0,T] \times C([-h,T],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, зависящий от параметра $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, для которого выполнены следующие утверждения:

(a) Функционал ν_ε является неотрицательным и ci-гладким.

(b) Для любого $t \in [0,T]$ выполнена оценка $\nu_\varepsilon(t,x(\cdot) \equiv 0) \leq \varepsilon$.

(c) Для любого $C > 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$ имеет место сходимость

$$\max\Big\{|\sigma(x(\cdot)) - \sigma(y(\cdot))| : x(\cdot), y(\cdot) \in D,\ \nu_\varepsilon(T, x(\cdot) - y(\cdot)) \leq C\Big\} \to 0.$$

(d) Для любых $t \in [0,T)$ и $x(\cdot)$, $y(\cdot) \in D$ выполнено неравенство

$$\partial_t \nu_\varepsilon(t,s(\cdot)) + H\big(t, x(\cdot), \nabla\nu_\varepsilon(t,s(\cdot))\big) - H\big(t, y(\cdot), \nabla\nu_\varepsilon(t,s(\cdot))\big) \leq 0,$$

где $s(\cdot) = x(\cdot) - y(\cdot)$

Частные случаи:
3. Распределенные и сосредоточенные запаздывания (2009)

Предположения $(B.1)$, $(B.2)$ и следующее условие Липшица:

$(B.5)$ Существуют $J \in \mathbb{N}$ и $\vartheta_j \in (0, h]$, $j \in \overline{1, J}$, такие, что для любого компакта $D \subset C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ найдется $\lambda > 0$, для которого

$$|H(t, x(\cdot), s) - H(t, y(\cdot), s)| \leq \lambda(1 + \|s\|)$$
$$\times \left(\|x(t) - y(t)\| + \sum_{j=1}^{J} \|x(t-\vartheta_j) - y(t-\vartheta_j)\| + \sqrt{\int_{-h}^{t} \|x(\tau) - y(\tau)\|^2 \, \mathrm{d}\tau} \right)$$

при всех $t \in [0, T]$, $x(\cdot)$, $y(\cdot) \in D$ и $s \in \mathbb{R}^n$.

Подходящий функционал Ляпунова — Красовского

$$\nu_\varepsilon\big(t, x(\cdot)\big) = \frac{\mathrm{e}^{-(J+3)\lambda(h+t)}}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon^4 + 2\lambda \sum_{j=1}^{J} \int_{t-\vartheta_j}^{t} \|x(\tau)\|^2 \mathrm{d}\tau + \|x(t)\|^2}$$
$$+ \frac{\mathrm{e}^{-(J+3)\lambda(h+t)} - \varepsilon}{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon^4 + 2\lambda \int_{-h}^{t} \|x(\tau)\|^2 \mathrm{d}\tau + \|x(t)\|^2}$$

Еще об одном условии Липшица

Bayraktar, E., Keller, C.: Path-dependent Hamilton–Jacobi equations in infinite dimensions. J. Funct. Anal. 275(8), 2096–2161 (2018)

$(B.6)$ Каковы бы ни были $L \geq 0$ и $(t, x(\cdot)) \in [0, T) \times C([-h, T], \mathbb{R}^n)$, найдется модуль непрерывности m, для которого

$$\begin{aligned}\Big|H\big(\tau, y(\cdot), (y(\tau) - z(\tau))\varepsilon^{-1}\big) - H\big(\tau, z(\cdot), (y(\tau) - z(\tau))\varepsilon^{-1}\big)\Big| \\ \leq m\Big(\|y(\tau) - z(\tau)\|^2\varepsilon^{-1} + \|y(\cdot) - z(\cdot)\|_{[-h,\tau]}\Big)\end{aligned}$$

при любых $\varepsilon > 0$, $\tau \in [t, T]$ и $y(\cdot)$, $z(\cdot) \in \mathrm{Lip}(t, x(\cdot))$ таких, что

$\|\dot{y}(\tau)\| \leq L(1+\|y(\cdot)\|_{[-h,\tau]}), \quad \|\dot{z}(\tau)\| \leq L(1+\|z(\cdot)\|_{[-h,\tau]})$ п.в. $\tau \in [t, T]$.

Заметим, что, например, гамильтонианы

$$H = \langle s, x(t-h)\rangle, \quad H = \langle s, x(t/2)\rangle, \quad H = \Big\langle s, \int_{-h}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big\rangle$$

удовлетворяют $(B.3)$, но не удовлетворяют $(B.6)$.

Доказательство теоремы:
Построение функционала Ляпунова — Красовского, часть 1

Zhou, J.: Viscosity solutions to first order path-dependent HJB equations. ArXiv:2004.02095 (2020)

Определим функционал $V : [0,T] \times C([-h,T],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ по правилу

$$V(t,x(\cdot)) = \begin{cases} \dfrac{\left(\|x(\cdot)\|^2_{[-h,t]} - \|x(t)\|^2\right)^2}{\|x(\cdot)\|^2_{[-h,t]}} + \|x(t)\|^2, & \text{если } \|x(\cdot)\|_{[-h,t]} > 0, \\ 0, & \text{если } \|x(\cdot)\|_{[-h,t]} = 0. \end{cases}$$

Функционал V является ci-гладким, причем $\partial_t V(t,x(\cdot)) = 0$ и

$$\nabla V(t,x(\cdot)) = \begin{cases} \left(2 - \dfrac{4\left(\|x(\cdot)\|^2_{[-h,t]} - \|x(t)\|^2\right)}{\|x(\cdot)\|^2_{[-h,t]}}\right)x(t), & \text{если } \|x(\cdot)\|_{[-h,t]} > 0, \\ 0, & \text{если } \|x(\cdot)\|_{[-h,t]} = 0. \end{cases}$$

Имеют место неравенства

$$\varkappa\|x(\cdot)\|^2_{[-h,t]} \le V(t,x(\cdot)) \le 2\|x(\cdot)\|^2_{[-h,t]},$$

где $\varkappa = (3-\sqrt{5})/2$.

Доказательство теоремы: Построение функционала Ляпунова — Красовского, часть 2

По заданному компакту $D \subset C([-h,T],\mathbb{R}^n)$ выберем число λ в согласии с условием Липшица $(B.3)$ и положим $\varepsilon_0 = e^{-\lambda T/\varkappa}/\sqrt{\varkappa}$.

Для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ определим

$$\nu_\varepsilon(t, x(\cdot)) = \alpha_\varepsilon(t)\beta_\varepsilon(t, x(\cdot)), \quad (t, x(\cdot)) \in [0,T] \times C([-h,T],\mathbb{R}^n),$$

где обозначено

$$\alpha_\varepsilon(t) = (e^{-\lambda t/\varkappa} - \varepsilon\sqrt{\varkappa})\varepsilon^{-1}, \quad \beta_\varepsilon(t, x(\cdot)) = \sqrt{\varepsilon^4 + V(t, x(\cdot))}.$$

Функционал ν_ε удовлетворяет свойствам (a)–(d) при условиях $(B.1)$–$(B.3)$.

Неравенства для производных по многозначным направлениям

При условиях $(B.1)$–$(B.3)$ непрерывный неупреждающий функционал $\varphi : [0,T] \times C([-h,T],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условию $\varphi(T,x(\cdot)) = \sigma(x(\cdot))$, $x(\cdot) \in C([-h,T],\mathbb{R}^n)$, является минимаксным решением задачи Коши тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^-\Big\{\big[\varphi(t,x(\cdot)) - \langle s, x(t)\rangle\big] \,\Big|\, B(t,x(\cdot))\Big\} + H\big(t,x(\cdot),s\big) \quad &\leq \quad 0, \\ \mathrm{d}^+\Big\{\big[\varphi(t,x(\cdot)) - \langle s, x(t)\rangle\big] \,\Big|\, B(t,x(\cdot))\Big\} + H\big(t,x(\cdot),s\big) \quad &\geq \quad 0, \end{aligned}$$

$$t \in [0,T),\ \ x(\cdot) \in C([-h,T],\mathbb{R}^n),\ \ s \in \mathbb{R}^n$$

$$B\big(t,x(\cdot)\big) = \Big\{f \in \mathbb{R}^n :\ \|f\| \leq c\big(1 + \max_{\xi \in [-h,t]} \|x(\xi)\|\big)\Big\}$$

$$\mathrm{d}^-\big\{\varphi\big(t,x(\cdot)\big) \,\big|\, F\big\} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{y(\cdot) \in Y_\varepsilon} \liminf_{\delta \downarrow 0} \big[\varphi\big(t+\delta, y(\cdot)\big) - \varphi\big(t,x(\cdot)\big)\big]\delta^{-1}$$

$$\mathrm{d}^+\big\{\varphi\big(t,x(\cdot)\big) \,\big|\, F\big\} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{y(\cdot) \in Y_\varepsilon} \limsup_{\delta \downarrow 0} \big[\varphi\big(t+\delta, y(\cdot)\big) - \varphi\big(t,x(\cdot)\big)\big]\delta^{-1}$$

$$Y_\varepsilon = \Big\{y(\cdot) \in \mathrm{Lip}\big(t,x(\cdot)\big) :\ \dot{y}(\tau) \in [F]^\varepsilon \text{ при п.в. } \tau \in [t,T]\Big\}$$

Пусть выполнены условия $(B.1)$, $(B.2)$, $(B.5)$ и

$(B.7)$ Существуют $M \in \mathbb{N}$ и $t_m \in [0, T]$, $m \in \overline{1, M}$, такие, что для любого компакта $D \subset C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ найдется $\lambda > 0$, для которого при всех $t \in [0, T]$ и $x(\cdot)$, $y(\cdot) \in D$ имеем

$$\left|\sigma\big(y(\cdot)\big) - \sigma\big(x(\cdot)\big)\right| \leq \lambda \left(\sum_{m=1}^{M} \|y(t_m) - x(t_m)\| + \sqrt{\int_0^T \|y(\xi) - x(\xi)\|^2 d\xi} \right)$$

Минимаксное решение задачи Коши характеризуется неравенствами

$$\begin{array}{rcl} \min\limits_{f \in B(t, x(\cdot))} \Big[\partial^- \big\{\varphi\big(t, x(\cdot)\big) \mid f\big\} - \langle s, f \rangle\Big] + H\big(t, x(\cdot), s\big) & \leq & 0, \\ \max\limits_{f \in B(t, x(\cdot))} \Big[\partial^+ \big\{\varphi\big(t, x(\cdot)\big) \mid f\big\} - \langle s, f \rangle\Big] + H\big(t, x(\cdot), s\big) & \geq & 0, \end{array}$$

$$t \in [0, T),\ x(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n),\ s \in \mathbb{R}^n$$

$$\partial^- \big\{\varphi\big(t, x(\cdot)\big) \mid f\big\} = \liminf_{\delta \downarrow 0} \ \Big[\varphi\big(t + \delta, y_f(\cdot)\big) - \varphi\big(t, x(\cdot)\big)\Big]\delta^{-1}$$

$$\partial^+ \big\{\varphi\big(t, x(\cdot)\big) \mid f\big\} = \limsup_{\delta \downarrow 0} \ \Big[\varphi\big(t + \delta, y_f(\cdot)\big) - \varphi\big(t, x(\cdot)\big)\Big]\delta^{-1}$$

$$y_f(\tau) = \begin{cases} x(\tau) & \text{при } \tau \in [-h, t), \\ x(t) + (\tau - t) f & \text{при } \tau \in [t, T] \end{cases}$$

Вязкостное решение

Функционал $\varphi : [0,T] \times C([-h,T],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ называется вязкостным решением задачи Коши, если он является неупреждающим, непрерывным, удовлетворяет краевому условию $\varphi(T,x(\cdot)) = \sigma(x(\cdot))$, $x(\cdot) \in C([-h,T],\mathbb{R}^n)$, и обладает следующим свойством: для любого ci-гладкого (тестового) функционала $\psi : [0,T] \times C([-h,T],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$,

- $$\partial_t\psi\big(t^*,x^*(\cdot)\big) + H\Big(t^*,x^*(\cdot),\nabla\psi\big(t^*,x^*(\cdot)\big)\Big) \le 0,$$
  если $\varphi - \psi$ имеет в точке $\big(t^*,x^*(\cdot)\big) \in [0,T) \times \Omega$ минимум на $[0,T] \times \Omega$
- $$\partial_t\psi\big(t_*,x_*(\cdot)\big) + H\Big(t_*,x_*(\cdot),\nabla\psi\big(t_*,x_*(\cdot)\big)\Big) \ge 0,$$
  если $\varphi - \psi$ имеет в точке $\big(t_*,x_*(\cdot)\big) \in [t_0,T) \times \Omega$ максимум на $[0,T] \times \Omega$

- Л. (2007) $\Omega = D_k$, $k \in \mathbb{N}$, — компактные множества абсолютно непрерывных функций $x(\cdot) \in C([-h,T],\mathbb{R}^n)$ таких, что
  $$\|x(-h)\| \le k, \quad \|\dot{x}(t)\| \le ck\big(1 + \max_{\xi\in[-h,t]} \|x(\xi)\|\big) \text{ при п.в. } t \in [-h,T]$$
- Zhou J. (2018) $\Omega = \mathcal{D}([-h,T],\mathbb{R}^n)$;
  Плаксин А.Р. (2021) $\Omega = \mathbb{R}^n \times PC([-h,T],\mathbb{R}^n)$
- Cosso A., Russo F. (2019), Zhou (2020) $\Omega = C([-h,T],\mathbb{R}^n)$

Неравенства для коинвариантных суб- и супердифференциалов

Гомоюнов М.И., Плаксин А.Р. (2022):

При условиях $(B.1)$, $(B.2)$, $(B.5)$ и $(B.7)$ минимаксное решение задачи Коши характеризуется неравенствами

$$\begin{aligned} p_0 + H(t, x(\cdot), p) &\leq 0, \quad (p_0, p) \in \mathrm{D}^-\varphi(t, x(\cdot)), \\ q_0 + H(t, x(\cdot), q) &\geq 0, \quad (q_0, q) \in \mathrm{D}^+\varphi(t, x(\cdot)), \end{aligned}$$

$$t \in [0, T), \;\; x(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n)$$

$$(p_0, p) \in \mathrm{D}^-\varphi(t, x(\cdot)) \;\Leftrightarrow\; \varphi(\tau, y(\cdot)) - \varphi(t, x(\cdot)) \geq p_0(\tau - t) + \langle p, y(\tau) - x(t)\rangle + o(\tau - t)$$

$$(q_0, q) \in \mathrm{D}^+\varphi(t, x(\cdot)) \;\Leftrightarrow\; \varphi(\tau, y(\cdot)) - \varphi(t, x(\cdot)) \leq q_0(\tau - t) + \langle q, y(\tau) - x(t)\rangle + o(\tau - t)$$

$$\tau \in (t, T], \;\; y(\cdot) \in \mathrm{Lip}(t, x(\cdot))$$

Свойство коинвариантного субдифференциала

- $F \subset \mathbb{R}^n$ — непустой выпуклый компакт
- функционал $\varphi\colon [0,T] \times C([-h,T],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ полунепрерывен сверху относительно псевдометрики

$$\rho\big((t,x(\cdot)),(\tau,y(\cdot))\big) = |t-\tau| + \|x(t)-y(\tau)\| + \int_{-h}^{T} \|x(\xi\wedge t) - y(\xi\wedge\tau)\|\,\mathrm{d}\xi$$

- $(t_*,x_*(\cdot)) \in [0,T) \times C([-h,T],\mathbb{R}^n)$: $\mathrm{d}_*^-\{\varphi(t_*,x_*(\cdot)) \mid F\} > 0$

$$\Downarrow$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $(t,x(\cdot)) \in [0,T) \times C([-h,T],\mathbb{R}^n)$ и $(p_0,p) \in \mathrm{D}^-\varphi(t,x(\cdot))$ такие, что

- $|t-t_*| + \|x(\cdot\wedge t) - x_*(\cdot\wedge t_*)\|_{[-h,T]} \le \varepsilon$
- $p_0 + \langle f,p\rangle > 0$ для всех $f \in F$

$$\mathrm{d}_*^-\{\varphi(t,x(\cdot)) \mid F\} = \lim_{\delta\downarrow 0} \inf_{\tau\in(t,t+\delta]} \inf_{y(\cdot)\in Y_\delta} \big[\varphi(\tau,y(\cdot)) - \varphi(t,x(\cdot))\big](\tau-t)^{-1}$$

$$Y_\delta = \Big\{y(\cdot) \in \mathrm{Lip}\big(t,x(\cdot)\big) : \ \dot{y}(\tau) \in [F]^\delta \text{ при п.в. } \tau \in [t,T]\Big\}$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !