О классификации особых трехмерных многообразий Фано

Ю. Г. Прохоров

Математический институт им. В. А. Стеклова

Dynamics in Siberia
Новосибирск
28 февраля 2023 г

Многообразия Фано

Соглашение:

Основное поле $= \mathbb{C}$.

Определение

Многообразие Фано – проективное алгебраическое многообразие X с обильным (положительным) антиканоническим классом $-K_X = c_1(X)$.

Многообразия Фано

Соглашение:

Основное поле $= \mathbb{C}$.

Определение

Многообразие Фано – проективное алгебраическое многообразие X с обильным (положительным) антиканоническим классом $-K_X = \mathrm{c}_1(X)$.

Примеры

- проективные пространства,
- гиперповерхности $X_d \subset \mathbb{P}^n$ степени $d \leq n$,
- грассманианы $\mathrm{Gr}(k, n)$,
- однородные пространства G/P, G – полупростая линейная группа, P – параболическая подгруппа.

Свойства

Предложение

Пусть X – неособое многообразие Фано. Тогда

- $H^0(X, (\Omega_X)^{\otimes q}) = 0$ *для* $q > 0$;
- $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X) = \{1\}$;
- $\mathrm{Pic}(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$ — *к. п. свободная абелева группа;*
- $\mathrm{Aut}(X)$ — *линейная алгебраическая группа.*

Свойства

Предложение

Пусть X – неособое многообразие Фано. Тогда

- $H^0(X, (\Omega_X)^{\otimes q}) = 0$ *для* $q > 0$;
- $\pi_1^{\mathrm{alg}}(X) = \{1\}$;
- $\mathrm{Pic}(X) \simeq H^2(X, \mathbb{Z})$ — *к. п. свободная абелева группа;*
- $\mathrm{Aut}(X)$ — *линейная алгебраическая группа.*

Многообразия Фано очень близки к рациональным:

Теорема (Campana, Kollár–Miyaoka–Mori, Qi Zhang 2006)

Если X – многообразие Фано (возможно с логтерминальными особенностями), то оно рационально связно, т.е. любые две точки $P_1, P_2 \in X$ могут быть соединены рациональной кривой (образом $\mathbb{P}^1$).

Важный инвариант

$$\mathrm{b}_2(X) := \operatorname{rk} H^2(X, \mathbb{Z}) = \operatorname{rk} \operatorname{Pic}(X) \quad \text{(число Пикара).}$$

Наиболее интересны многообразия Фано с $\mathrm{b}_2(X) = 1$ (“примитивные”).

Важный инвариант

$$\mathrm{b}_2(X) := \operatorname{rk} H^2(X,\mathbb{Z}) = \operatorname{rk}\operatorname{Pic}(X) \quad \text{(число Пикара)}.$$

Наиболее интересны многообразия Фано с $\mathrm{b}_2(X) = 1$ (“примитивные”).

Пример

Существует ровно 10 семейств двумерных неособых многообразий Фано. Они называются *поверхностями дель Пеццо*.

- Если $\mathrm{b}_2(X) = 1$, то $X \simeq \mathbb{P}^2$.
- Если $\mathrm{b}_2(X) > 1$, то
  - $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ или
  - X получается из $\mathbb{P}^2$ раздутием $10 - \mathrm{b}_2(X)$ точек в общем положении.

Трехмерные неособые многообразия Фано

Теорема (В. А. Исковских)

Существует ровно 17 *семейств трехмерных неособых многообразий Фано с* $\mathrm{b}_2(X) = 1$*. Они различаются индексом*

$$\iota(X) := \max\{i \mid -K_X = iA\}$$

и степенью $(-K_X)^3$*. В частности,*

Трехмерные неособые многообразия Фано

Теорема (В. А. Исковских)

Существует ровно 17 семейств *трехмерных неособых многообразий Фано с* $\mathrm{b}_2(X) = 1$. *Они различаются индексом*

$$\iota(X) := \max\{i \mid -K_X = iA\}$$

и степенью $(-K_X)^3$. *В частности,*

- $\iota(X) \le 4$;
- *если* $\iota(X) = 4$, *то* $X \simeq \mathbb{P}^3$;
- *если* $\iota(X) = 3$, *то* $X \simeq Q \subset \mathbb{P}^4$ *– квадрика;*
- *если* $\iota(X) = 2$, *то* $(-K_X)^3 = 8d$, $1 \le d \le 5$;
- *если* $\iota(X) = 1$, *то* $(-K_X)^3 = 2g - 2$, $2 \le g \le 12$, $g \ne 11$.

Теория минимальных моделей (теория Мори)

Теорема

Пусть Y – трехмерное неособое проективное алгебраическое многообразие. Следующие условия эквивалентны:

- $H^0(Y,(\omega_Y)^{\otimes m}) = 0$ *для* $m > 0$, *где* $\omega_Y := \Omega^3_Y$;

Теория минимальных моделей (теория Мори)

Теорема

Пусть Y – трехмерное неособое проективное алгебраическое многообразие. Следующие условия эквивалентны:

- $H^0(Y, (\omega_Y)^{\otimes m}) = 0$ *для* $m > 0$, *где* $\omega_Y := \Omega^3_Y$;
- Y *унилинейчато, т.е. покрывается рациональными кривыми;*

Теория минимальных моделей (теория Мори)

Теорема

Пусть Y – трехмерное неособое проективное алгебраическое многообразие. Следующие условия эквивалентны:

- $H^0(Y, (\omega_Y)^{\otimes m}) = 0$ *для* $m > 0$*, где* $\omega_Y := \Omega^3_Y$*;*
- Y *унилинейчато, т.е. покрывается рациональными кривыми;*
- *существует бирациональное преобразование* $Y \dashrightarrow X$*, где* X *– многообразие с терминальными* $\mathbb{Q}$*-факториальными особенностями и выполнено одно из следующих:*
  - *существует морфизм на поверхность* $\pi : X \to S$ *с общим слоем – коника;*
  - *существует морфизм на кривую* $\pi : X \to S$ *с общим слоем – поверхностью дель Пеццо;*
  - X *– многообразие* $\mathbb{Q}$*-Фано, т.е.* $-K_X$ *обилен и* $\mathrm{b}_2(X) = 1$*.*

Многообразия $\mathbb{Q}$-Фано

Определение

Многообразие $\mathbb{Q}$-Фано – это проективное алгебраическое многообразие X такое, что

- X имеет лишь терминальные особенности;
- $-K_X$ обилен;
- $\operatorname{rk} \mathrm{Cl}(X) = 1$, в частности $\mathrm{b}_2(X) = 1$.

Здесь $\mathrm{Cl}(X)$ – *группа классов дивизоров Вейля*:

$$\mathrm{Cl}(X) := (\text{дивизоры Вейля})/\text{линейная эквивалентность}$$

Имеет место

$$\mathrm{Cl}(X) \supset \mathrm{Pic}(X).$$

Терминальные особенности

Теорема (M. Reid)

Любая трехмерная терминальная особенность $(X \ni P)$ *принадлежит одному из двух классов:*

- $(X \ni P)$ – *изолированная гиперповерхностная особенность вида*

$$(*) \qquad f(x,y,z) + tg(x,y,z,t) = 0, \quad f \text{ – уравнение } A\text{-}D\text{-}E$$

Терминальные особенности

Теорема (M. Reid)

Любая трехмерная терминальная особенность $(X \ni P)$ *принадлежит одному из двух классов:*

- $(X \ni P)$ *– изолированная гиперповерхностная особенность вида*

  $$(*) \qquad f(x,y,z) + tg(x,y,z,t) = 0, \quad f \text{ – уравнение } A\text{-}D\text{-}E$$

- $(X \ni P)$ *– фактор*

  $$(X \ni P) = (X^\sharp \ni P^\sharp)/\boldsymbol{\mu}_m$$

  где $(X^\sharp \ni P^\sharp)$ *– особенность (*), а* $\boldsymbol{\mu}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ *действует свободно вне* $P^\sharp$.

m называется *индексом особенности*.

Терминальные особенности (пример)

Тип cA/m (основная серия)

Фактор

$$\{xy + f(z^m, t) = 0\} / \boldsymbol{\mu}_m$$

– терминальная особенность, где особенность $xy + f = 0$ изолирована, а $\boldsymbol{\mu}_m$ действует диагонально

$$\boldsymbol{\mu}_m : (x, y, z, t) \longmapsto \left(\zeta x,\ \zeta^{-1} y,\ \zeta^a z,\ t\right)$$

где $\zeta^m = 1, \quad \mathrm{gcd}(m,\ a) = 1.$

Терминальные особенности (пример)

Тип cA/m (основная серия)

Фактор

$$\{xy + f(z^m, t) = 0\} / \boldsymbol{\mu}_m$$

– терминальная особенность, где особенность $xy + f = 0$ изолирована, а $\boldsymbol{\mu}_m$ действует диагонально

$$\boldsymbol{\mu}_m : (x, y, z, t) \longmapsto \left(\zeta x,\ \zeta^{-1} y,\ \zeta^a z,\ t\right)$$

где $\zeta^m = 1, \quad \gcd(m,\ a) = 1.$

Крайний случай $f = t$ не исключается.
Тогда $(X \ni P) \simeq \mathbb{C}^3/\boldsymbol{\mu}_m(1, -1, a)$ называется терминальной *циклической факторособенностью*.

Многообразия Фано с терминальными особенностями

Основные инварианты

- Множество особенностей

Многообразия Фано с терминальными особенностями

Основные инварианты

- Множество особенностей
- *Группа классов дивизоров Вейля*: $\mathrm{Cl}(X)$.
  Если X – многообразие $\mathbb{Q}$-Фано, то $\operatorname{rk}\mathrm{Cl}(X) = 1$,
  но возможно, что $\mathrm{Cl}(X)$ имеет кручения.

Многообразия Фано с терминальными особенностями

Основные инварианты

- Множество особенностей
- *Группа классов дивизоров Вейля*: $\mathrm{Cl}(X)$.
  Если X – многообразие $\mathbb{Q}$-Фано, то $\mathrm{rk}\,\mathrm{Cl}(X) = 1$,
  но возможно, что $\mathrm{Cl}(X)$ имеет кручения.
- *Степень*: $(-K_X)^3$ (рациональное число)

Многообразия Фано с терминальными особенностями

Основные инварианты

- Множество особенностей
- *Группа классов дивизоров Вейля*: $\mathrm{Cl}(X)$.
  Если X – многообразие $\mathbb{Q}$-Фано, то $\mathrm{rk}\,\mathrm{Cl}(X) = 1$,
  но возможно, что $\mathrm{Cl}(X)$ имеет кручения.
- *Степень*: $(-K_X)^3$ (рациональное число)
- *Индекс Фано*: $\mathrm{q}(X)$ – максимальное целое, на которое делится класс $-K_X$ в группе $\mathrm{Cl}(X)/\mathrm{Tors}$.

Многообразия Фано с терминальными особенностями

Основные инварианты

- Множество особенностей
- *Группа классов дивизоров Вейля*: $\mathrm{Cl}(X)$.
  Если X – многообразие $\mathbb{Q}$-Фано, то $\mathrm{rk}\,\mathrm{Cl}(X) = 1$,
  но возможно, что $\mathrm{Cl}(X)$ имеет кручения.
- *Степень*: $(-K_X)^3$ (рациональное число)
- *Индекс Фано*: $\mathrm{q}(X)$ – максимальное целое, на которое делится класс $-K_X$ в группе $\mathrm{Cl}(X)/\mathrm{Tors}$.
  При этом обильный дивизор Вейля A такой, что $-K_X = \mathrm{q}A$ (в группе $\mathrm{Cl}(X)/\mathrm{Tors}$) называется *фундаментальным дивизором*.

Примеры многообразий $\mathbb{Q}$-Фано

Пусть X – торическое трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$-Фано.
Тогда X – одно из следующих:

Примеры многообразий $\mathbb{Q}$-Фано

Пусть X – торическое трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$-Фано.
Тогда X – одно из следующих:

X	$\mathrm{q}(X)$	A^3	$\mathrm{Cl}(X)$
$\mathbb{P}^3$	4	1	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{P}^3/\boldsymbol{\mu}_5(1,2,3,4)$	4	$1/5$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
$\mathbb{P}(1^3,2)$	5	$1/2$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{P}(1^2,2,3)$	7	$1/6$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{P}(1,2,3,5)$	11	$1/30$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{P}(1,3,4,5)$	13	$1/60$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{P}(2,3,5,7)$	17	$1/210$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{P}(3,4,5,7)$	19	$1/420$	$\mathbb{Z}$

Теорема Римана-Роха

Пусть X – трехмерное многообразие с терминальными особенностями, пусть $\mathrm{q} := \mathrm{q}(X)$ и A – фундаментальный дивизор.
Формула Римана–Роха (при $n \geq 0$):

$$\dim H^0(X, nA) = 1 + \frac{n(q+n)(q+2n)}{12} A^3 + \frac{nA \cdot c_2}{12} + \sum_{P \in \mathrm{B}} c_P(nA),$$

$$c_P(nA) = -i_{P,n} \frac{r_P^2 - 1}{12 r_P} + \sum_{j=1}^{i_{P,n}-1} \frac{\overline{b_P j}(r_P - \overline{b_P j}\,)}{2 r_P}\,.$$

где $i_{P,n}$ – целое такое, что $0 \leq i_{P,n} < r$ и $D \sim i_{P,n} K_X$ вблизи P.

Пусть X – трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$-Фано, A – фундаментальный дивизор.

Градуированная алгебра:

$$R(X) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, nA)$$

Многообразие X восстанавливается по алгебре $R(X)$: пусть $x_1, \ldots, x_m$ (однородные элементы) порождают $R(X)$, $\deg x_i = d_i$ и пусть $f_1, \ldots f_n$ – соотношения. Тогда

$$X \subset \mathbb{P}(d_1, \ldots, d_m)$$

задается уравнениями $f_1, \ldots f_n$.

Пусть X – трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$-Фано, A – фундаментальный дивизор.

Градуированная алгебра:

$$R(X) = \bigoplus_{n\geq 0} H^0(X,\ nA)$$

Многообразие X восстанавливается по алгебре $R(X)$: пусть $x_1, \ldots, x_m$ (однородные элементы) порождают $R(X)$, $\deg x_i = d_i$ и пусть $f_1, \ldots f_n$ – соотношения. Тогда

$$X \subset \mathbb{P}(d_1, \ldots, d_m)$$

задается уравнениями $f_1, \ldots f_n$.

Ряд Гильберта – Пуанкаре :

$$P_X(t) = \sum_{n\geq 0} \dim H^0(X, nA) \cdot t^n = (\text{рациональная функция})$$

Ограниченность

Теорема (Y. Kawamata ($\dim = 3$), C. Birkar ($\forall \dim$))

Множество всех многообразий Фано (фиксированной размерности) с терминальными особенностями ограничено.

Ограниченность

Теорема (Y. Kawamata ($\dim = 3$), C. Birkar ($\forall \dim$))

Множество всех многообразий Фано (фиксированной размерности) с терминальными особенностями ограничено.

Теорема (Kawamata)

Пусть X – трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$-Фано.

- $\sum \left(m_i - \frac{1}{m_i} \right) < 24$, *где m_i – индексы особых точек*

Ограниченность

Теорема (Y. Kawamata ($\dim = 3$), C. Birkar ($\forall \dim$))

Множество всех многообразий Фано (фиксированной размерности) с терминальными особенностями ограничено.

Теорема (Kawamata)

Пусть X – трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$-Фано.

- $\sum \left(m_i - \frac{1}{m_i}\right) < 24$, *где m_i – индексы особых точек*
- $(-K_X)^3 \leq b$, *где b – вычислимая (но большая) константа.*

База данных

M. Reid, A. Fletcher, G. Brown, ...

теорема Римана-Роха
+
теорема Кавамата

$\xrightarrow[\text{перебор}]{\text{компьютерный}}$

конечный набор рядов Гильберта ~ 55000

База данных

M. Reid, A. Fletcher, G. Brown, ...

теорема Римана-Роха
+
теорема Каваматы

$\xrightarrow[\text{перебор}]{\text{компьютерный}}$

конечный набор
рядов Гильберта
~ 55000

Примеры (A. Fletcher, M. Reid, G. Brown, ...)

- Существует 130 семейств многообразий $\mathbb{Q}$-Фано коразмерности 1
- Существует 125 семейств многообразий $\mathbb{Q}$-Фано коразмерности 2
- Существует 74 семейств многообразий $\mathbb{Q}$-Фано коразмерности 3

База данных

M. Reid, A. Fletcher, G. Brown, ...

теорема Римана-Роха
+
теорема Кавамaты $\xrightarrow[\text{перебор}]{\text{компьютерный}}$ конечный набор рядов Гильберта ~ 55000

Примеры (A. Fletcher, M. Reid, G. Brown, ...)

- Существует 130 семейств многообразий $\mathbb{Q}$-Фано коразмерности 1
- Существует 125 семейств многообразий $\mathbb{Q}$-Фано коразмерности 2
- Существует 74 семейств многообразий $\mathbb{Q}$-Фано коразмерности 3

Замечание

Ряд Гильберта $P_X(t)$ не определяет кольцо $R(X)$ и многообразие X.

Эффективная ограниченность многообразий $\mathbb{Q}$-Фано

Теорема (Прохоров)

Пусть X – особое трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$-Фано. Тогда $(-K_X)^3 \leq 125/2$.

Эффективная ограниченность многообразий $\mathbb{Q}$-Фано

Теорема (Прохоров)

Пусть X – особое трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$-Фано. Тогда $(-K_X)^3 \le 125/2$.
Если $(-K_X)^3 = 125/2$, *то* $X \simeq \mathbb{P}(1,1,1,2)$.

Эффективная ограниченность многообразий $\mathbb{Q}$-Фано

Теорема (Прохоров)

Пусть X – особое трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$-Фано. Тогда $(-K_X)^3 \leq 125/2$.
Если $(-K_X)^3 = 125/2$, *то* $X \simeq \mathbb{P}(1,1,1,2)$.

Теорема (J. A. Chen & M. Chen)

Пусть X – многообразие трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$-Фано. Тогда $(-K_X)^3 \geq 1/330$.

Эффективная ограниченность многообразий $\mathbb{Q}$-Фано

Теорема (Прохоров)

Пусть X – особое трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$-Фано. Тогда $(-K_X)^3 \le 125/2$.
Если $(-K_X)^3 = 125/2$, то $X \simeq \mathbb{P}(1,1,1,2)$.

Теорема (J. A. Chen & M. Chen)

Пусть X – многообразие трехмерное многообразие $\mathbb{Q}$-Фано. Тогда $(-K_X)^3 \ge 1/330$.

Теорема (Chen Jiang)

Если $(-K_X)^3 = 1/330$, то $X \simeq X_{66} \subset \mathbb{P}(1,5,6,22,33)$.

Индекс Фано

Теорема (K. Suzuki)

- $\mathrm{q}(X) \leq 19$.
- $\mathrm{q}(X) \in \{1, \dots, 11, 13, 17, 19\}$.

Индекс Фано

Теорема (K. Suzuki)

- $\mathrm{q}(X) \leq 19$.
- $\mathrm{q}(X) \in \{1, \dots, 11, 13, 17, 19\}$.

Теорема

- $\mathrm{q}(X) \neq 10$.
- *Если* $\mathrm{q}(X) = 19$, *то* $\mathbb{P}(3, 4, 5, 7)$.
- *Если* $\mathrm{q}(X) = 17$, *то* $\mathbb{P}(2, 3, 5, 7)$.
- *Если* $\mathrm{q}(X) = 13$, *то*
  - $\mathbb{P}(1, 3, 4, 5)$ *или*
  - $X = X_{12} \subset \mathbb{P}(3, 4, 5, 6, 7)$

Индекс Фано

Теорема (K. Suzuki)

- $\mathrm{q}(X) \leq 19$.
- $\mathrm{q}(X) \in \{1, \dots, 11, 13, 17, 19\}$.

Теорема

- $\mathrm{q}(X) \neq 10$.
- *Если* $\mathrm{q}(X) = 19$, *то* $\mathbb{P}(3,4,5,7)$.
- *Если* $\mathrm{q}(X) = 17$, *то* $\mathbb{P}(2,3,5,7)$.
- *Если* $\mathrm{q}(X) = 13$, *то*
  - $\mathbb{P}(1,3,4,5)$ *или*
  - $X = X_{12} \subset \mathbb{P}(3,4,5,6,7)$

Теорема

Торические многообразия $\mathbb{Q}$*-Фано полностью определяются своим рядом Гильберта* $P_X(t)$.

Многообразия Фано с особенностями индекса 1

Теорема (Y. Namikawa)

Пусть X – трехмерное многообразие Фано с терминальными (горенштейновыми) особенностями. Тогда X сглаживаемо, т.е. существует семейство

$$\mathfrak{X} \to B \ni o$$

такое, что центральный слой $\mathfrak{X}_o$ изоморфен X, а общий слой $\mathfrak{X}_b$ является неособым многообразием Фано.

Многообразия Фано с особенностями индекса 1

Теорема (Y. Namikawa)

Пусть X *– трехмерное многообразие Фано с терминальными (горенштейновыми) особенностями. Тогда* X *сглаживаемо, т.е. существует семейство*

$$\mathfrak{X} \to B \ni o$$

такое, что центральный слой $\mathfrak{X}_o$ *изоморфен* X*, а общий слой* $\mathfrak{X}_b$ *является неособым многообразием Фано.*
При этом основные инварианты;

$$(-K_X)^3, \qquad \mathrm{b}_2(X), \qquad \iota(X)$$

постоянны в семействе.

Многообразия Фано с особенностями индекса 1

Теорема (А. Кузнецов, Прохоров)

Существует ровно 17 *семейств трехмерных многообразий Фано с* $\mathrm{b}_2(X) = 1$*, особое множество которых состоит ровно из одной нефакториальной обыкновенной двойной точки.*

Многообразия Фано с особенностями индекса 1

Теорема (А. Кузнецов, Прохоров)

Существует ровно **17 *семейств*** *трехмерных многообразий Фано с* $\mathrm{b}_2(X) = 1$, *особое множество которых состоит ровно из одной нефакториальной обыкновенной двойной точки.*

Пример

$X^\lambda \subset \mathbb{P}(1,1,1,1,2,3)$ – пересечение 2 гиперповерхностей

$$\lambda y_2 + f_2(x_1^{(1)} x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, x_1^{(4)}) = 0,$$
$$z_3^2 + f_6(y_2, x_1^{(1)} x_1^{(2)}, x_1^{(3)}, x_1^{(4)}) = 0$$

- $\lambda \neq 0$: X^λ неособо;
- $\lambda = 0$: X^λ имеет единственную особую точку - обыкновенную двойную.

Многообразия Фано с особенностями. Пример

Пример

Пусть $B \subset \mathbb{P}^3$ – неособая рациональная кривая-квинтика, которая не содержится в квадрике. Существует следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "\pi"] \arrow[rr, dashed, "\chi"] & & Y^+ \arrow[dl, "\pi^+"'] \arrow[dr, "f^+"] & \\ \mathbb{P}^3 & & X & & \mathbb{P}^3 \end{tikzcd}$$

где f – раздутие B, f^+ – раздутие рациональной кривой-квинтики $B^+ \subset \mathbb{P}^3$, морфизм π (соотв. π^+) стягивает рациональную кривую L (соотв. L^+) – прообраз 4-секущей кривой B (соотв. кривой B^+) в обыкновенную двойную особую точку $P = \pi(L) = \pi^+(L^+)$, X – многообразие Фано с одной особой точкой P.

Спасибо за внимание!