Степенные структуры на кольцах Гротендика многообразий

С. О. Горчинский

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Динамика в Сибири–2025

λ-структура

- R — коммутативное кольцо с 1.

λ-структура

- R — коммутативное кольцо с 1.
- $R[[t]] \ni \sum_{i \geqslant 0} a_i t^i$, где $a_i \in R$ — кольцо формальных рядов.

λ-структура

- R — коммутативное кольцо с 1.
- $R[[t]] \ni \sum_{i\geqslant 0} a_i t^i$, где $a_i \in R$ — кольцо формальных рядов.
- $1 + tR[[t]] \ni 1 + \sum_{i\geqslant 1} a_i t^i$ — группа по умножению.

λ-структура

- R — коммутативное кольцо с 1.
- $R[[t]] \ni \sum\limits_{i\geqslant 0} a_i t^i$, где $a_i \in R$ — кольцо формальных рядов.
- $1 + tR[[t]] \ni 1 + \sum\limits_{i\geqslant 1} a_i t^i$ — группа по умножению.
- Сюръективный гомоморфизм групп:

$$\pi \ : \ 1 + tR[[t]] \longrightarrow R\,, \qquad 1 + \sum_{i\geqslant 1} a_n t^n \longmapsto a_1\,.$$

λ-структура

- R — коммутативное кольцо с 1.
- $R[[t]] \ni \sum\limits_{i\geqslant 0} a_i t^i$, где $a_i \in R$ — кольцо формальных рядов.
- $1 + tR[[t]] \ni 1 + \sum\limits_{i\geqslant 1} a_i t^i$ — группа по умножению.
- Сюръективный гомоморфизм групп:

$$\pi \ : \ 1 + tR[[t]] \longrightarrow R\,, \qquad 1 + \sum_{i\geqslant 1} a_n t^n \longmapsto a_1\,.$$

Определение

λ-структура на R — это гомоморфизм групп $\lambda\colon R \to 1 + tR[[t]]$ т.ч. $\pi\lambda = \mathrm{id}_R$.

λ-структура

- R — коммутативное кольцо с 1.
- $R[[t]] \ni \sum_{i\geqslant 0} a_i t^i$, где $a_i \in R$ — кольцо формальных рядов.
- $1 + tR[[t]] \ni 1 + \sum_{i\geqslant 1} a_i t^i$ — группа по умножению.
- Сюръективный гомоморфизм групп:

$$\pi \ : \ 1 + tR[[t]] \longrightarrow R\,, \qquad 1 + \sum_{i\geqslant 1} a_n t^n \longmapsto a_1\,.$$

Определение

λ-структура на R — это гомоморфизм групп $\lambda\colon R \to 1 + tR[[t]]$ т.ч. $\pi\lambda = \mathrm{id}_R$.

- Явно: $\lambda(a) = 1 + \sum_{i\geqslant 1} \lambda_i(a) t^i$, где

$$\lambda_1 = \mathrm{id}_R, \quad \lambda_n(a+b) = \sum_{i+j=n} \lambda_i(a)\lambda_j(b) \text{ для всех } a, b \in R.$$

Примеры λ-структур

- $R \supset \mathbb{Q} \Rightarrow \lambda(a) = \exp(at)$, $\lambda_i(a) = \frac{a^i t^i}{i!}$.

Примеры λ-структур

- $R \supset \mathbb{Q} \Rightarrow \lambda(a) = \exp(at)$, $\lambda_i(a) = \frac{a^i t^i}{i!}$.
- $R = \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda(a) = g^a$, где $g \in 1 + t + t^2\mathbb{Z}[[t]]$.

Примеры λ-структур

- $R \supset \mathbb{Q} \Rightarrow \lambda(a) = \exp(at)$, $\lambda_i(a) = \frac{a^i t^i}{i!}$.
- $R = \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda(a) = g^a$, где $g \in 1 + t + t^2\mathbb{Z}[[t]]$.
- G конечная группа; $K_0(G) = \left\{ \sum_W k_W[W] \right\}$, где W — неприводимые комплексные представления G, $k_W \in \mathbb{Z}$.

Примеры λ-структур

- $R \supset \mathbb{Q} \Rightarrow \lambda(a) = \exp(at)$, $\lambda_i(a) = \frac{a^i t^i}{i!}$.
- $R = \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda(a) = g^a$, где $g \in 1 + t + t^2\mathbb{Z}[[t]]$.
- G конечная группа; $K_0(G) = \left\{ \sum_W k_W[W] \right\}$, где W — неприводимые комплексные представления G, $k_W \in \mathbb{Z}$. Конечномерное представление $V \simeq \bigoplus_W W^{\oplus k_W}$ группы G определяет класс $[V] = \sum_W k_W[W] \in K_0(G)$.

Примеры λ-структур

- $R \supset \mathbb{Q} \Rightarrow \lambda(a) = \exp(at)$, $\lambda_i(a) = \frac{a^i t^i}{i!}$.
- $R = \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda(a) = g^a$, где $g \in 1 + t + t^2\mathbb{Z}[[t]]$.
- G конечная группа; $K_0(G) = \left\{ \sum_W k_W [W] \right\}$, где W — неприводимые комплексные представления G, $k_W \in \mathbb{Z}$. Конечномерное представление $V \simeq \bigoplus_W W^{\oplus k_W}$ группы G определяет класс $[V] = \sum_W k_W [W] \in K_0(G)$.
  $[V] \cdot [U] = [V \otimes U]$.

Примеры λ-структур

- $R \supset \mathbb{Q} \Rightarrow \lambda(a) = \exp(at)$, $\lambda_i(a) = \frac{a^i t^i}{i!}$.
- $R = \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda(a) = g^a$, где $g \in 1 + t + t^2\mathbb{Z}[[t]]$.
- G конечная группа; $K_0(G) = \left\{ \sum_W k_W[W] \right\}$, где W — неприводимые комплексные представления G, $k_W \in \mathbb{Z}$. Конечномерное представление $V \simeq \bigoplus_W W^{\oplus k_W}$ группы G определяет класс $[V] = \sum_W k_W[W] \in K_0(G)$.
  $[V] \cdot [U] = [V \otimes U]$.

  $\lambda_i[V] = [S^i V]$ — λ-структура на $K_0(G)$.

Примеры λ-структур

- $R \supset \mathbb{Q} \Rightarrow \lambda(a) = \exp(at)$, $\lambda_i(a) = \frac{a^i t^i}{i!}$.
- $R = \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda(a) = g^a$, где $g \in 1 + t + t^2\mathbb{Z}[[t]]$.
- G конечная группа; $K_0(G) = \left\{ \sum_W k_W[W] \right\}$, где W — неприводимые комплексные представления G, $k_W \in \mathbb{Z}$. Конечномерное представление $V \simeq \bigoplus_W W^{\oplus k_W}$ группы G определяет класс $[V] = \sum_W k_W[W] \in K_0(G)$. $[V] \cdot [U] = [V \otimes U]$.

  $\lambda_i[V] = [S^i V]$ — λ-структура на $K_0(G)$.

  $$S^n(U \oplus V) \simeq \bigoplus_{i+j=n} S^i(U) \otimes S^j(V).$$

Примеры λ-структур

- $R \supset \mathbb{Q} \Rightarrow \lambda(a) = \exp(at)$, $\lambda_i(a) = \frac{a^i t^i}{i!}$.
- $R = \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda(a) = g^a$, где $g \in 1 + t + t^2\mathbb{Z}[[t]]$.
- G конечная группа; $K_0(G) = \left\{ \sum_W k_W[W] \right\}$, где W — неприводимые комплексные представления G, $k_W \in \mathbb{Z}$.
  Конечномерное представление $V \simeq \bigoplus_W W^{\oplus k_W}$ группы G определяет класс $[V] = \sum_W k_W[W] \in K_0(G)$.
  $[V] \cdot [U] = [V \otimes U]$.

  $\lambda_i[V] = [S^i V]$ — λ-структура на $K_0(G)$.

  $$S^n(U \oplus V) \simeq \bigoplus_{i+j=n} S^i(U) \otimes S^j(V).$$
- Аналогично для векторных расслоений на многообразиях.

λ-экспонента и λ-логарифм

Лемма

λ-структура на R задает изоморфизм групп:

$$\exp_\lambda \; : \; tR[[t]] \xrightarrow{\sim} 1 + tR[[t]]\,,$$

$$\sum_{i\geqslant 1} b_i t^i \longmapsto \prod_{i\geqslant 1} \lambda(b_i)(t^i)\,.$$

λ-экспонента и λ-логарифм

Лемма

λ-структура на R задает изоморфизм групп:

$$\exp_\lambda \ : \ tR[[t]] \xrightarrow{\sim} 1 + tR[[t]] \,,$$

$$\sum_{i \geqslant 1} b_i t^i \longmapsto \prod_{i \geqslant 1} \lambda(b_i)(t^i) \,.$$

Обратный к $\exp_\lambda$ обозначается $\log_\lambda$.

λ-экспонента и λ-логарифм

Лемма

λ-структура на R задает изоморфизм групп:

$$\exp_\lambda \;:\; tR[[t]] \xrightarrow{\sim} 1 + tR[[t]]\,,$$

$$\sum_{i\geqslant 1} b_i t^i \longmapsto \prod_{i\geqslant 1} \lambda(b_i)(t^i)\,.$$

Обратный к $\exp_\lambda$ обозначается $\log_\lambda$.

- $R \supset \mathbb{Q}$, $\lambda(a) = \exp(at) \Rightarrow \exp_\lambda$ — экспонента рядов.

λ-экспонента и λ-логарифм

Лемма

λ-структура на R задает изоморфизм групп:

$$\exp_\lambda \ : \ tR[[t]] \xrightarrow{\sim} 1 + tR[[t]]\,,$$

$$\sum_{i \geqslant 1} b_i t^i \longmapsto \prod_{i \geqslant 1} \lambda(b_i)(t^i)\,.$$

Обратный к $\exp_\lambda$ обозначается $\log_\lambda$.

- $R \supset \mathbb{Q}$, $\lambda(a) = \exp(at) \Rightarrow \exp_\lambda$ — экспонента рядов.
- Явно:

$$\exp_\lambda \Big(\sum_{i \geqslant 1} b_i t^i \Big) = 1 + \sum_{n \geqslant 1} a_n t^n\,, \quad a_n = \sum_{\sigma \in P(n)} \prod_{i \geqslant 1} \lambda_{\sigma_i}(b_i)\,,$$

где $P(n) \ni \sigma$ — разбиения $n = \sum_{i \geqslant 1} \sigma_i \cdot i$, $\sigma_i \geqslant 0$ ($\lambda_0 \equiv 1$).

λ-экспонента и λ-логарифм

Лемма

λ-структура на R задает изоморфизм групп:

$$\exp_\lambda \ : \ tR[[t]] \xrightarrow{\sim} 1 + tR[[t]]\,,$$

$$\sum_{i\geqslant 1} b_i t^i \longmapsto \prod_{i\geqslant 1} \lambda(b_i)(t^i)\,.$$

Обратный к $\exp_\lambda$ обозначается $\log_\lambda$.

- $R \supset \mathbb{Q}$, $\lambda(a) = \exp(at) \Rightarrow \exp_\lambda$ — экспонента рядов.
- Явно:

$$\exp_\lambda\Big(\sum_{i\geqslant 1} b_i t^i\Big) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} a_n t^n\,, \quad a_n = \sum_{\sigma\in P(n)} \prod_{i\geqslant 1} \lambda_{\sigma_i}(b_i)\,,$$

где $P(n) \ni \sigma$ — разбиения $n = \sum_{i\geqslant 1} \sigma_i \cdot i$, $\sigma_i \geqslant 0$ ($\lambda_0 \equiv 1$).

$a_1 = b_1$,

λ-экспонента и λ-логарифм

Лемма

λ-структура на R задает изоморфизм групп:

$$\exp_\lambda \ : \ tR[[t]] \xrightarrow{\sim} 1 + tR[[t]] \, ,$$

$$\sum_{i \geqslant 1} b_i t^i \longmapsto \prod_{i \geqslant 1} \lambda(b_i)(t^i) \, .$$

Обратный к $\exp_\lambda$ обозначается $\log_\lambda$.

- $R \supset \mathbb{Q}$, $\lambda(a) = \exp(at) \Rightarrow \exp_\lambda$ — экспонента рядов.
- Явно:

$$\exp_\lambda \Big(\sum_{i \geqslant 1} b_i t^i \Big) = 1 + \sum_{n \geqslant 1} a_n t^n \, , \quad a_n = \sum_{\sigma \in P(n)} \prod_{i \geqslant 1} \lambda_{\sigma_i}(b_i) \, ,$$

где $P(n) \ni \sigma$ — разбиения $n = \sum_{i \geqslant 1} \sigma_i \cdot i$, $\sigma_i \geqslant 0$ ($\lambda_0 \equiv 1$).

$a_1 = b_1$, $a_2 = b_2 + \lambda_2(b_1)$,

λ-экспонента и λ-логарифм

Лемма

λ-структура на R задает изоморфизм групп:

$$\exp_\lambda \; : \; tR[[t]] \xrightarrow{\sim} 1 + tR[[t]]\,,$$

$$\sum_{i\geqslant 1} b_i t^i \longmapsto \prod_{i\geqslant 1} \lambda(b_i)(t^i)\,.$$

Обратный к $\exp_\lambda$ обозначается $\log_\lambda$.

- $R \supset \mathbb{Q}$, $\lambda(a) = \exp(at) \Rightarrow \exp_\lambda$ — экспонента рядов.
- Явно:

$$\exp_\lambda\Big(\sum_{i\geqslant 1} b_i t^i\Big) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} a_n t^n\,, \quad a_n = \sum_{\sigma\in P(n)} \prod_{i\geqslant 1} \lambda_{\sigma_i}(b_i)\,,$$

где $P(n) \ni \sigma$ — разбиения $n = \sum_{i\geqslant 1} \sigma_i \cdot i$, $\sigma_i \geqslant 0$ ($\lambda_0 \equiv 1$).

$a_1 = b_1$, $a_2 = b_2 + \lambda_2(b_1)$, $a_3 = b_3 + b_1 b_2 + \lambda_3(b_1)$,

λ-экспонента и λ-логарифм

Лемма

λ-структура на R задает изоморфизм групп:

$$\exp_\lambda \ : \ tR[[t]] \xrightarrow{\sim} 1 + tR[[t]]\,,$$

$$\sum_{i\geqslant 1} b_i t^i \longmapsto \prod_{i\geqslant 1} \lambda(b_i)(t^i)\,.$$

Обратный к $\exp_\lambda$ обозначается $\log_\lambda$.

- $R \supset \mathbb{Q}$, $\lambda(a) = \exp(at) \Rightarrow \exp_\lambda$ — экспонента рядов.
- Явно:

$$\exp_\lambda\Big(\sum_{i\geqslant 1} b_i t^i\Big) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} a_n t^n\,, \quad a_n = \sum_{\sigma\in P(n)} \prod_{i\geqslant 1} \lambda_{\sigma_i}(b_i)\,,$$

где $P(n) \ni \sigma$ — разбиения $n = \sum_{i\geqslant 1} \sigma_i \cdot i$, $\sigma_i \geqslant 0$ ($\lambda_0 \equiv 1$).

$a_1 = b_1$, $a_2 = b_2 + \lambda_2(b_1)$, $a_3 = b_3 + b_1 b_2 + \lambda_3(b_1)$, $a_n = b_n + \ldots$

Степенная структура

Конструкция

(i) Изоморфизм $\exp_\lambda \colon tR[[t]] \xrightarrow{\sim} 1 + tR[[t]]$ коммутирует с π, подстановками $t \mapsto t^n$, $n \geqslant 1$, и t-адически непрерывный.

Степенная структура

Конструкция

(i) Изоморфизм $\exp_\lambda \colon tR[[t]] \xrightarrow{\sim} 1 + tR[[t]]$ коммутирует с π, подстановками $t \mapsto t^n$, $n \geqslant 1$, и t-адически непрерывный.

(ii) На $tR[[t]]$ имеется естественная структура R-модуля: $a \cdot \sum\limits_{i \geqslant 1} b_i t^i = \sum\limits_{i \geqslant 1} ab_i t^i$, коммутирующая с π, подстановками $t \mapsto t^n$, $n \geqslant 1$, и t-адически непрерывная.

Степенная структура

Конструкция

(i) Изоморфизм $\exp_\lambda \colon tR[[t]] \xrightarrow{\sim} 1 + tR[[t]]$ коммутирует с π, подстановками $t \mapsto t^n$, $n \geqslant 1$, и t-адически непрерывный.

(ii) На $tR[[t]]$ имеется естественная структура R-модуля: $a \cdot \sum_{i\geqslant 1} b_i t^i = \sum_{i\geqslant 1} a b_i t^i$, коммутирующая с π, подстановками $t \mapsto t^n$, $n \geqslant 1$, и t-адически непрерывная.

(iii) Значит, $\exp_\lambda$ задает структуру R-модуля на $1 + tR[[t]]$, коммутирующую с π, подстановками $t \mapsto t^n$, $i \geqslant 1$, и t-адически непрерывную.

Степенная структура

Конструкция

(i) Изоморфизм $\exp_\lambda : tR[[t]] \xrightarrow{\sim} 1 + tR[[t]]$ коммутирует с π, подстановками $t \mapsto t^n$, $n \geqslant 1$, и t-адически непрерывный.

(ii) На $tR[[t]]$ имеется естественная структура R-модуля: $a \cdot \sum\limits_{i\geqslant 1} b_i t^i = \sum\limits_{i\geqslant 1} ab_i t^i$, коммутирующая с π, подстановками $t \mapsto t^n$, $n \geqslant 1$, и t-адически непрерывная.

(iii) Значит, $\exp_\lambda$ задает структуру R-модуля на $1 + tR[[t]]$, коммутирующую с π, подстановками $t \mapsto t^n$, $i \geqslant 1$, и t-адически непрерывную.

(iv) Явно: $a *_\lambda f = \exp_\lambda \big(a \log_\lambda(f)\big)$ для $f \in 1 + tR[[t]]$.

Степенная структура

Конструкция

(i) Изоморфизм $\exp_\lambda \colon tR[[t]] \xrightarrow{\sim} 1 + tR[[t]]$ коммутирует с π, подстановками $t \mapsto t^n$, $n \geqslant 1$, и t-адически непрерывный.

(ii) На $tR[[t]]$ имеется естественная структура R-модуля: $a \cdot \sum\limits_{i \geqslant 1} b_i t^i = \sum\limits_{i \geqslant 1} a b_i t^i$, коммутирующая с π, подстановками $t \mapsto t^n$, $n \geqslant 1$, и t-адически непрерывная.

(iii) Значит, $\exp_\lambda$ задает структуру R-модуля на $1 + tR[[t]]$, коммутирующую с π, подстановками $t \mapsto t^n$, $i \geqslant 1$, и t-адически непрерывную.

(iv) Явно: $a *_\lambda f = \exp_\lambda \big(a \log_\lambda(f)\big)$ для $f \in 1 + tR[[t]]$.

- $R = \mathbb{Z}$, $\lambda(a) = g^a$, где $g \in 1 + t + t^2\mathbb{Z}[[t]] \Rightarrow a \cdot f = f^a$ степень ряда.

Степенная структура

Конструкция

(i) Изоморфизм $\exp_\lambda : tR[[t]] \xrightarrow{\sim} 1 + tR[[t]]$ коммутирует с π, подстановками $t \mapsto t^n$, $n \geqslant 1$, и t-адически непрерывный.

(ii) На $tR[[t]]$ имеется естественная структура R-модуля: $a \cdot \sum\limits_{i \geqslant 1} b_i t^i = \sum\limits_{i \geqslant 1} a b_i t^i$, коммутирующая с π, подстановками $t \mapsto t^n$, $n \geqslant 1$, и t-адически непрерывная.

(iii) Значит, $\exp_\lambda$ задает структуру R-модуля на $1 + tR[[t]]$, коммутирующую с π, подстановками $t \mapsto t^n$, $i \geqslant 1$, и t-адически непрерывную.

(iv) Явно: $a *_\lambda f = \exp_\lambda \big(a \log_\lambda(f)\big)$ для $f \in 1 + tR[[t]]$.

- $R = \mathbb{Z}$, $\lambda(a) = g^a$, где $g \in 1 + t + t^2\mathbb{Z}[[t]] \Rightarrow a \cdot f = f^a$ степень ряда. Различные g задают одинаковую (единственную) структуру $\mathbb{Z}$-модуля на $1 + t\mathbb{Z}[[t]]$.

Степенная структура

Определение (С. М. Гусейн-Заде, I. Luengo, A. Melle-Hernández)

(Конечно определенная) степенная структура на R — это структура R-модуля на $1 + tR[[t]]$, $(a, f) \mapsto a * f$, коммутирующая с π, подстановками $t \mapsto t^n$, $n \geqslant 1$, и t-адически непрерывная.

Степенная структура

Определение (С. М. Гусейн-Заде, I. Luengo, A. Melle-Hernández)

(Конечно определенная) степенная структура на R — это структура R-модуля на $1+tR[[t]]$, $(a,f)\mapsto a*f$, коммутирующая с π, подстановками $t\mapsto t^n$, $n\geqslant 1$, и t-адически непрерывная.

- Биекция множеств:

$$\{\lambda\text{-структуры}\} \leftrightarrow \{\text{степенные структуры}\}\times\{1+t+O(t^2)\},$$

$$\lambda \longmapsto \big(*_\lambda, \lambda(1)\big), \qquad (*, g) \longmapsto \big(\lambda(a) = a*g\big).$$

Степенная структура

Определение (С. М. Гусейн-Заде, I. Luengo, A. Melle-Hernández)

(Конечно определенная) степенная структура на R — это структура R-модуля на $1 + tR[[t]]$, $(a, f) \mapsto a * f$, коммутирующая с π, подстановками $t \mapsto t^n$, $n \geqslant 1$, и t-адически непрерывная.

- Биекция множеств:

$$\{\lambda\text{-структуры}\} \leftrightarrow \{\text{степенные структуры}\} \times \{1 + t + O(t^2)\},$$

$$\lambda \longmapsto (*_\lambda, \lambda(1)), \qquad (*, g) \longmapsto (\lambda(a) = a * g).$$

- λ и λ' задают одинаковую степенную структуру $\Leftrightarrow$ $\lambda'(a) = a *_\lambda \lambda'(1)$ для всех $a \in R$.

Степенная структура

Определение (С. М. Гусейн-Заде, I. Luengo, A. Melle-Hernández)

(Конечно определенная) степенная структура на R — это структура R-модуля на $1+tR[[t]]$, $(a,f)\mapsto a*f$, коммутирующая с π, подстановками $t\mapsto t^n$, $n\geqslant 1$, и t-адически непрерывная.

- Биекция множеств:

$$\left\{\lambda\text{-структуры}\right\}\leftrightarrow\left\{\text{степенные структуры}\right\}\times\left\{1+t+O(t^2)\right\},$$

$$\lambda\longmapsto\big(*_\lambda,\lambda(1)\big)\,,\qquad (*,g)\longmapsto\big(\lambda(a)=a*g\big)\,.$$

- λ и λ' задают одинаковую степенную структуру $\Leftrightarrow$ $\lambda'(a)=a*_\lambda\lambda'(1)$ для всех $a\in R$.

- **Проблема**: для заданной λ-структуры найти явные формулы для $\log_\lambda$ и $*_\lambda$.

Свободное λ-кольцо

- λ-мономы от u, $u \in U$ — выражения, содержащие все u и замкнутые относительно произведений и λ_i, $i \geqslant 1$.

Свободное λ-кольцо

- λ-мономы от u, $u \in U$ — выражения, содержащие все u и замкнутые относительно произведений и λ_i, $i \geqslant 1$.
- Например, uv, $\lambda_5(\lambda_3(u)v)$, $\lambda_2(\lambda_2(v)), \ldots$

Свободное λ-кольцо

- λ-мономы от u, $u \in U$ — выражения, содержащие все u и замкнутые относительно произведений и λ_i, $i \geqslant 1$.
- Например, uv, $\lambda_5(\lambda_3(u)v)$, $\lambda_2(\lambda_2(v)), \ldots$
- Свободное λ-кольцо $\mathbb{Z}_\lambda[u;\, u \in U]$ — $\mathbb{Z}$-линейные комбинации λ-мономов от u.

Свободное λ-кольцо

- λ-мономы от u, $u \in U$ — выражения, содержащие все u и замкнутые относительно произведений и λ_i, $i \geqslant 1$.
- Например, uv, $\lambda_5(\lambda_3(u)v)$, $\lambda_2(\lambda_2(v)), \ldots$
- Свободное λ-кольцо $\mathbb{Z}_\lambda[u;\, u \in U]$ — $\mathbb{Z}$-линейные комбинации λ-мономов от u.
- Хотим найти универсальный $\log_\lambda$-ряд $\log_\lambda \left(1 + \sum_{i \geqslant 1} a_i t^i\right) \in t\mathbb{Z}_\lambda[a_i;\, i \geqslant 1][[t]]$,

Свободное λ-кольцо

- λ-мономы от u, $u \in U$ — выражения, содержащие все u и замкнутые относительно произведений и λ_i, $i \geqslant 1$.
- Например, uv, $\lambda_5(\lambda_3(u)v)$, $\lambda_2(\lambda_2(v)), \dots$
- Свободное λ-кольцо $\mathbb{Z}_\lambda[u;\, u \in U]$ — $\mathbb{Z}$-линейные комбинации λ-мономов от u.
- Хотим найти универсальный $\log_\lambda$-ряд
$$\log_\lambda \Big(1 + \sum_{i \geqslant 1} a_i t^i\Big) \in t\mathbb{Z}_\lambda[a_i;\, i \geqslant 1][[t]],$$
и универсальное степенное произведение
$$m *_\lambda \Big(1 + \sum_{i \geqslant 1} a_i t^i\Big) \in 1 + t\mathbb{Z}_\lambda[m, a_i;\, i \geqslant 1][[t]],$$

Свободное λ-кольцо

- λ-мономы от u, $u \in U$ — выражения, содержащие все u и замкнутые относительно произведений и λ_i, $i \geqslant 1$.
- Например, uv, $\lambda_5(\lambda_3(u)v)$, $\lambda_2(\lambda_2(v)), \dots$
- Свободное λ-кольцо $\mathbb{Z}_\lambda[u;\, u \in U]$ — $\mathbb{Z}$-линейные комбинации λ-мономов от u.
- Хотим найти универсальный $\log_\lambda$-ряд
$$\log_\lambda \Big(1 + \sum_{i \geqslant 1} a_i t^i\Big) \in t\mathbb{Z}_\lambda[a_i;\, i \geqslant 1][[t]],$$
и универсальное степенное произведение
$$m *_\lambda \Big(1 + \sum_{i \geqslant 1} a_i t^i\Big) \in 1 + t\mathbb{Z}_\lambda[m, a_i;\, i \geqslant 1][[t]],$$
т.е. $\mathbb{Z}$-коэффициенты при всех λ-мономах в этих рядах.

Деревья

- $\mathcal{F} = \left\{\text{лес } F = \coprod_i T_i,\ v_i \in T_i,\ w_i\colon L(T_i) \to \mathbb{N}_{\geqslant 1} \mid (*)\right\}$,
  где T_i — деревья, $L(T_i)$ — множество листьев,

Деревья

- $\mathcal{F} = \big\{$лес $F = \coprod_i T_i,\ v_i \in T_i,\ w_i \colon L(T_i) \to \mathbb{N}_{\geqslant 1} \mid (*)\big\}$,

  где T_i — деревья, $L(T_i)$ — множество листьев,

  $(*) = \big($все листья в F имеют одинаковую высоту $h(F)$;
  в F нет поколений, в которых у каждой вершины
  ровно один потомок$\big)$.

Деревья

- $\mathcal{F} = \Big\{$лес $F = \coprod_i T_i,\ v_i \in T_i,\ w_i\colon L(T_i) \to \mathbb{N}_{\geqslant 1} \mid (*)\Big\}$,

  где T_i — деревья, $L(T_i)$ — множество листьев,

  $(*) = \Big($все листья в F имеют одинаковую высоту $h(F)$;
  в F нет поколений, в которых у каждой вершины
  ровно один потомок$\Big)$.

- Для $F = \coprod_i T_i \in \mathcal{F}$ вес $w(F) = \displaystyle\sum_{i,\, x \in L(T_i)} w_i(x)$ — сумма весов по листьям.

Деревья

- $\mathcal{F} = \big\{$лес $F = \coprod_i T_i,\ v_i \in T_i,\ w_i \colon L(T_i) \to \mathbb{N}_{\geqslant 1} \mid (*)\big\}$,

  где T_i — деревья, $L(T_i)$ — множество листьев,

  $(*) = \big($все листья в F имеют одинаковую высоту $h(F)$;
  в F нет поколений, в которых у каждой вершины
  ровно один потомок$\big)$.

- Для $F = \coprod_i T_i \in \mathcal{F}$ вес $w(F) = \sum\limits_{i,\, x \in L(T_i)} w_i(x)$ — сумма весов по листьям.

- $\mathcal{F}_n = \{F \in \mathcal{F} \mid w(F) = n\}$,
  $\mathcal{T} = \{$деревья $T \in \mathcal{F}\}$, $\mathcal{T}_n = \{T \in \mathcal{T} \mid w(T) = n\}$.

Деревья

- $\mathcal{F} = \big\{$лес $F = \coprod_i T_i,\ v_i \in T_i,\ w_i\colon L(T_i) \to \mathbb{N}_{\geqslant 1} \mid (*)\big\}$,

  где T_i — деревья, $L(T_i)$ — множество листьев,

  $(*) = \big($все листья в F имеют одинаковую высоту $h(F)$;
  в F нет поколений, в которых у каждой вершины
  ровно один потомок$\big)$.

- Для $F = \coprod_i T_i \in \mathcal{F}$ вес $w(F) = \sum\limits_{i,\, x \in L(T_i)} w_i(x)$ — сумма весов по листьям.

- $\mathcal{F}_n = \{F \in \mathcal{F} \mid w(F) = n\}$,
  $\mathcal{T} = \{$деревья $T \in \mathcal{F}\}$, $\quad \mathcal{T}_n = \{T \in \mathcal{T} \mid w(T) = n\}$.

- Множество $\mathcal{F}_n$ конечно.

Деревья

- $\mathcal{F} = \big\{$лес $F = \coprod_i T_i,\ v_i \in T_i,\ w_i\colon L(T_i) \to \mathbb{N}_{\geqslant 1} \mid (*)\big\}$,
  где T_i — деревья, $L(T_i)$ — множество листьев,
  $(*) = \big($все листья в F имеют одинаковую высоту $h(F)$;
  в F нет поколений, в которых у каждой вершины
  ровно один потомок$\big)$.
- Для $F = \coprod_i T_i \in \mathcal{F}$ вес $w(F) = \sum\limits_{i,\, x \in L(T_i)} w_i(x)$ — сумма весов по листьям.
- $\mathcal{F}_n = \{F \in \mathcal{F} \mid w(F) = n\}$,
  $\mathcal{T} = \{$деревья $T \in \mathcal{F}\}$, $\quad \mathcal{T}_n = \{T \in \mathcal{T} \mid w(T) = n\}$.
- Множество $\mathcal{F}_n$ конечно.
- Деревья в $F \in \mathcal{F}$ могут не принадлежать $\mathcal{T}$.

- Определим $\mathcal{F} \to \mathbb{Z}_\lambda[\,p_T;\ T \in \mathcal{T}\,]$:

  для $F = \coprod_i T_i^{\sqcup n_i} \in \mathcal{T}$, $T_i \neq T_j$ при $i \neq j$

$$p_F = \prod_i \lambda_{n_i}(p_{\widetilde{T}_i})\,,$$

  где $\widetilde{T}_i$ — сжатие T_i до $\widetilde{T}_i \in \mathcal{T}$.

λ-мономы от деревьев

- Определим $\mathcal{F} \to \mathbb{Z}_\lambda[\,p_T;\ T \in \mathcal{T}\,]$:

  для $F = \coprod_i T_i^{\sqcup n_i} \in \mathcal{T}$, $T_i \neq T_j$ при $i \neq j$

$$p_F = \prod_i \lambda_{n_i}(p_{\widetilde{T}_i})\,,$$

  где $\widetilde{T}_i$ — сжатие T_i до $\widetilde{T}_i \in \mathcal{T}$.

Ключевое утверждение (С. Г., Д. Демин)

$$\exp_\lambda\Big(\sum_{n\geqslant 1}\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_n}(-1)^{h(T)}p_T\Big)\Big) = 1 + \sum_{n\geqslant 1}\Big(\sum_{F\in\mathcal{F}_n}(-1)^{h(F)}p_F\Big)\,.$$

Основные результаты

Определим $\mathbb{Z}_\lambda[\,p_T;\, T \in \mathcal{T}\,] \to \mathbb{Z}_\lambda[a_i;\, i \geqslant 1]$, $p_T \mapsto \lambda_T$, $p_F \mapsto \lambda_F$:

$$\lambda_T = \lambda_{T \setminus \{\text{корень}\}}\,, \qquad \lambda_{\bullet_i} = a_i\,.$$

Основные результаты

Определим $\mathbb{Z}_\lambda[\,p_T;\,T\in\mathcal{T}\,]\to\mathbb{Z}_\lambda[a_i;\,i\geqslant 1]$, $p_T\mapsto\lambda_T$, $p_F\mapsto\lambda_F$:

$$\lambda_T=\lambda_{T\smallsetminus\{\text{корень}\}}\,,\qquad \lambda_{\bullet_i}=a_i\,.$$

Теорема 1 (С. Г., Д. Демин)

$$\exp_\lambda\Big(\sum_{n\geqslant 1}\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_n}(-1)^{h(T)}\lambda_T\Big)t^n\Big)=1+\sum_{n\geqslant 1}a_nt^n\,.$$

Основные результаты

Определим $\mathbb{Z}_\lambda[\,p_T;\, T \in \mathcal{T}\,] \to \mathbb{Z}_\lambda[a_i;\, i \geqslant 1]$, $p_T \mapsto \lambda_T$, $p_F \mapsto \lambda_F$:

$$\lambda_T = \lambda_{T \setminus \{\text{корень}\}}\,, \qquad \lambda_{\bullet_i} = a_i\,.$$

Теорема 1 (С. Г., Д. Демин)

$$\exp_\lambda\Big(\sum_{n\geqslant 1}\Big(\sum_{T\in\mathcal{T}_n}(-1)^{h(T)}\lambda_T\Big)t^n\Big) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} a_n t^n\,.$$

Определим $\mathbb{Z}_\lambda[\,p_T;\, T \in \mathcal{T}\,] \to \mathbb{Z}_\lambda[m, a_i;\, i \geqslant 1]$, $p_T \mapsto \mu_T$, $p_F \mapsto \mu_F$:

$$\mu_T = m\lambda_T\,.$$

Основные результаты

Определим $\mathbb{Z}_\lambda[\,p_T;\, T\in\mathcal{T}\,]\to\mathbb{Z}_\lambda[a_i;\, i\geqslant 1]$, $p_T\mapsto\lambda_T$, $p_F\mapsto\lambda_F$:

$$\lambda_T=\lambda_{T\smallsetminus\{\text{корень}\}}\,,\qquad \lambda_{\bullet_i}=a_i\,.$$

Теорема 1 (С. Г., Д. Демин)

$$\exp_\lambda\Big(\sum_{n\geqslant 1}\big(\sum_{T\in\mathcal{T}_n}(-1)^{h(T)}\lambda_T\big)t^n\Big)=1+\sum_{n\geqslant 1}a_nt^n\,.$$

Определим $\mathbb{Z}_\lambda[\,p_T;\, T\in\mathcal{T}\,]\to\mathbb{Z}_\lambda[m,a_i;\, i\geqslant 1]$, $p_T\mapsto\mu_T$, $p_F\mapsto\mu_F$:

$$\mu_T=m\lambda_T\,.$$

Теорема 2 (С. Г., Д. Демин)

$$m*_\lambda\big(1+\sum_{i\geqslant 1}a_it^i\big)=1+\sum_{n\geqslant 1}\big(\sum_{F\in\mathcal{F}_n}(-1)^{h(F)}\mu_F\big)t^n\,.$$

Аффинные алгебраические многообразия

- Пусть k — поле (например, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_p, \ldots$).

Аффинные алгебраические многообразия

- Пусть k — поле (например, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_p, \ldots$).
- *Аффинное алгебраическое многообразие* над k в $\mathbb{A}^n$:

$$X = \{f_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0\},$$

где f_i — многочлены от $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из k.

Аффинные алгебраические многообразия

- Пусть k — поле (например, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_p, \ldots$).
- *Аффинное алгебраическое многообразие* над k в $\mathbb{A}^n$:

$$X = \{f_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0\}\,,$$

  где f_i — многочлены от $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами из k.
- f — алгебраическая функция на $X \Rightarrow$ аффинные алгебраические многообразия $D_f = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$, $U_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \subset X$:

$$U_f = \{f \cdot x_{n+1} - 1 = 0\} \subset X \times \mathbb{A}^1\,.$$

Кольцо Гротендика многообразий

Определение

Кольцо Гротендика многообразий над k — это фактор-кольцо

$$K_0(\mathrm{Var}_k) = \frac{\Big(\text{свободная абелева группа, порожденная } [X]\Big)}{\Big(\text{подгруппа, порожденная } [X] - [D_f] - [U_f]\Big)},$$

где X — аффинные многообразия, f — алгебраические функции на X.

Кольцо Гротендика многообразий

Определение

Кольцо Гротендика многообразий над k — это фактор-кольцо

$$K_0(\mathrm{Var}_k) = \frac{\Big(\text{свободная абелева группа, порожденная } [X]\Big)}{\Big(\text{подгруппа, порожденная } [X]-[D_f]-[U_f]\Big)},$$

где X — аффинные многообразия, f — алгебраические функции на X.

- Произведение по формуле $[X]\cdot[Y]=[X\times Y]$.

Кольцо Гротендика многообразий

Определение

Кольцо Гротендика многообразий над k — это фактор-кольцо

$$K_0(\mathrm{Var}_k) = \frac{\big(\text{свободная абелева группа, порожденная } [X]\big)}{\big(\text{подгруппа, порожденная } [X]-[D_f]-[U_f]\big)},$$

где X — аффинные многообразия, f — алгебраические функции на X.

- Произведение по формуле $[X]\cdot[Y]=[X\times Y]$.
- Имеется равенство $[\mathbb{A}^1]-[\mathrm{pt}]=[\mathbb{A}^2]-[x_1x_2-1\neq 0]$, так как $\mathbb{A}^1\smallsetminus\{0\}\simeq\{x_1x_2-1=0\}\subset\mathbb{A}^2$, $x\mapsto(x,x^{-1})$.

Инварианты равносоставленности

Мотивная мера — это гомоморфизм колец $\mu\colon K_0(\mathrm{Var}_k) \to A$ в некоторое (коммутативное) кольцо A (т.е. $\mu(X) = \mu(D_f) + \mu(U_f)$).

Инварианты равносоставленности

Мотивная мера — это гомоморфизм колец $\mu\colon K_0(\mathrm{Var}_k) \to A$ в некоторое (коммутативное) кольцо A (т.е. $\mu(X) = \mu(D_f) + \mu(U_f)$).

Пример

Для $k = \mathbb{C}$ имеется мотивная мера

$$\mu_\chi \;:\; K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathbb{Z}\,, \qquad [X] \longmapsto \chi_c(X)\,,$$

где $\chi_c(X)$ — эйлерова характеристика X с компактным носителем.

Инварианты равносоставленности

Мотивная мера — это гомоморфизм колец $\mu\colon K_0(\mathrm{Var}_k) \to A$ в некоторое (коммутативное) кольцо A (т.е. $\mu(X) = \mu(D_f) + \mu(U_f)$).

Пример

Для $k = \mathbb{C}$ имеется мотивная мера

$$\mu_\chi \; : \; K_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{Z}\,, \qquad [X] \longmapsto \chi_c(X)\,,$$

где $\chi_c(X)$ — эйлерова характеристика X с компактным носителем.

Пример

Для $k = \mathbb{F}_p$ имеется мотивная мера

$$\mu_\sharp \; : \; K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{F}_p}) \longrightarrow \mathbb{Z}\,, \qquad [X] \longmapsto \sharp X(\mathbb{F}_p)\,,$$

где $X(\mathbb{F}_p) = \{$точки в X с координатами из $\mathbb{F}_p\}$.

- *Дзета-функция Вейля для* X над $\mathbb{F}_p$ — это формальный ряд

$$Z(X,t) := \exp\left(\sum_{r\geqslant 0} \frac{\sharp X(\mathbb{F}_{p^r})}{r}\, t^r\right) \in \mathbb{Z}[[t]]\,.$$

Симметрическая λ-структура на $K_0(\mathrm{Var}_k)$

- *Дзета-функция Вейля для* X над $\mathbb{F}_p$ — это формальный ряд
$$Z(X,t) := \exp\left(\sum_{r\geqslant 0} \frac{\sharp X(\mathbb{F}_{p^r})}{r}\, t^r\right) \in \mathbb{Z}[[t]]\,.$$

- При этом
$$Z(X,t) = \mu_\sharp\big(\sum_{i\geqslant 0} S^n(X)\, t^i\big)\,,$$
где $S^i(X) := X^i/\Sigma_i$, Σ_i — группа перестановок i элементов.

Симметрическая λ-структура на $K_0(\mathrm{Var}_k)$

- *Дзета-функция Вейля для* X над $\mathbb{F}_p$ — это формальный ряд

$$Z(X,t) := \exp\left(\sum_{r\geqslant 0} \frac{\sharp X(\mathbb{F}_{p^r})}{r}\, t^r\right) \in \mathbb{Z}[[t]]\,.$$

- При этом

$$Z(X,t) = \mu_\sharp\Big(\sum_{i\geqslant 0} S^n(X)\, t^i\Big)\,,$$

  где $S^i(X) := X^i/\Sigma_i$, Σ_i — группа перестановок i элементов.

- Имеется изоморфизм $S^i(\mathbb{A}^1) \simeq \mathbb{A}^i$: задать неупорядоченный набор $\lambda_1,\ldots,\lambda_i \in k$ — это то же самое, что задать $\sigma_1 = \lambda_1 + \ldots + \lambda_i, \ldots, \sigma_i = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_i$.

Симметрическая λ-структура на $K_0(\mathrm{Var}_k)$

- *Дзета-функция Вейля для* X над $\mathbb{F}_p$ — это формальный ряд

$$Z(X,t) := \exp\left(\sum_{r\geqslant 0} \frac{\sharp X(\mathbb{F}_{p^r})}{r}\, t^r\right) \in \mathbb{Z}[[t]]\,.$$

- При этом

$$Z(X,t) = \mu_\sharp\Big(\sum_{i\geqslant 0} S^n(X)\, t^i\Big)\,,$$

где $S^i(X) := X^i/\Sigma_i$, Σ_i — группа перестановок i элементов.

- Имеется изоморфизм $S^i(\mathbb{A}^1) \simeq \mathbb{A}^i$: задать неупорядоченный набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_i \in k$ — это то же самое, что задать $\sigma_1 = \lambda_1 + \ldots + \lambda_i, \ldots, \sigma_i = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_i$.
- $\lambda_i[X] = [S^i(X)]$ — λ-структура на $K_0(\mathrm{Var}_k)$.

Эквивариантное кольцо Гротендика многообразий

Определение

(i) Для конечной группы G:

$$K_0(\mathrm{Var}_k^G) = \frac{\Big(\text{свободная абелева группа, порожденная } [X]^G\Big)}{\Big(\text{подгруппа, порожденная } [X]^G - [D_f]^G - [U_f]^G\Big)},$$

где X — аффиные многообразия с действием группы G, f — G-инвариантные алгебраические функции на X.

Эквивариантное кольцо Гротендика многообразий

Определение

(i) Для конечной группы G:

$$K_0(\mathrm{Var}_k^G) = \frac{\left(\text{свободная абелева группа, порожденная } [X]^G\right)}{\left(\text{подгруппа, порожденная } [X]^G - [D_f]^G - [U_f]^G\right)},$$

где X — аффиные многообразия с действием группы G, f — G-инвариантные алгебраические функции на X.

(ii) $K_0(\mathrm{Var}_k^{\mathrm{eq}}) = \bigoplus\limits_G K_0(\mathrm{Var}_k^G)/\sim$, где для $H \times G \curvearrowright X$ с свободным действием H: $[X]^{H\times G} \sim [X/H]^G$.

Эквивариантное кольцо Гротендика многообразий

Определение

(i) Для конечной группы G:

$$K_0(\mathrm{Var}_k^G) = \frac{\big(\text{свободная абелева группа, порожденная } [X]^G\big)}{\big(\text{подгруппа, порожденная } [X]^G - [D_f]^G - [U_f]^G\big)},$$

где X — аффиные многообразия с действием группы G, f — G-инвариантные алгебраические функции на X.

(ii) $K_0(\mathrm{Var}_k^{\mathrm{eq}}) = \bigoplus\limits_G K_0(\mathrm{Var}_k^G)/\sim$, где для $H \times G \curvearrowright X$ с свободным действием H: $[X]^{H\times G} \sim [X/H]^G$.

- Произведение по формуле $[X]^G \cdot [Y]^H = [X \times Y]^{G\times H}$.

Теорема о сравнениии λ-структур

- $\lambda_i\big([X]^G\big) = [X^i]^{G^i \rtimes \Sigma_i}$ — λ-структура на $K_0(\mathrm{Var}_k^{\mathrm{eq}})$.

Теорема о сравнениии λ-структур

- $\lambda_i\big([X]^G\big) = [X^i]^{G^i \rtimes \Sigma_i}$ — λ-структура на $K_0(\mathrm{Var}_k^{\mathrm{eq}})$.
- Естественный гомоморфизм

$$\mu \ : \ K_0(\mathrm{Var}_k) \longrightarrow K_0(\mathrm{Var}_k^{\mathrm{eq}})\,, \qquad [X] \longmapsto [X]^{\{e\}}\,,$$

НЕ коммутирует с λ-структурами: $[S^i(X)] \neq [X]^{\Sigma_i}$.

Теорема о сравнениии λ-структур

- $\lambda_i\big([X]^G\big) = [X^i]^{G^i \rtimes \Sigma_i}$ — λ-структура на $K_0(\mathrm{Var}_k^{\mathrm{eq}})$.
- Естественный гомоморфизм

$$\mu \;:\; K_0(\mathrm{Var}_k) \longrightarrow K_0(\mathrm{Var}_k^{\mathrm{eq}})\,, \qquad [X] \longmapsto [X]^{\{e\}}\,,$$

НЕ коммутирует с λ-структурами: $[S^i(X)] \neq [X]^{\Sigma_i}$.

Теорема (С. Г., Д. Демин)

Гомоморфизм μ коммутирует с степенными структурами.

Теорема о сравнениии λ-структур

- $\lambda_i\big([X]^G\big) = [X^i]^{G^i \rtimes \Sigma_i}$ — λ-структура на $K_0(\mathrm{Var}_k^{\mathrm{eq}})$.
- Естественный гомоморфизм

$$\mu \ : \ K_0(\mathrm{Var}_k) \longrightarrow K_0(\mathrm{Var}_k^{\mathrm{eq}})\,, \qquad [X] \longmapsto [X]^{\{e\}}\,,$$

НЕ коммутирует с λ-структурами: $[S^i(X)] \neq [X]^{\Sigma_i}$.

Теорема (С. Г., Д. Демин)

Гомоморфизм μ коммутирует с степенными структурами.

- Приложения: явные формулы для λ-структур на кольцах Гротендика, обобщенная гипотеза Галкина–Шиндера.

Спасибо за внимание!