Solvability in the weak and strong senses of the initial-boundary value problem for the inhomogeneous incompressible Kelvin-Voigt model without the condition of separability from zero of the initial density value

Звягин В.Г., Турбин М.В.

Воронежский государственный университет
e-mail: mrmike@mail.ru

25 февраля 2025

Неоднородная несжимаемая жидкость

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n = 2, 3$ — ограниченная область с гладкой границей. Движение неоднородной несжимаемой жидкости, заполняющей область Ω на промежутке времени $[0, T]$ описывается следующей системой уравнений:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mathrm{Div}\sigma + \nabla p = \rho f, \quad (x, t) \in Q_T = \Omega \times [0, T]; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0; \quad \mathrm{div}\, v = 0, \quad (x, t) \in Q_T. \quad (2)$$

v — вектор скорости частиц жидкости,
ρ — плотность жидкости,
p — давление,
σ — девиатор тензора напряжений,
f — вектор плотности внешних сил.

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\Delta v + \nabla p = \rho f, \quad (x,t) \in Q_T = \Omega \times [0,T]; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0; \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (x,t) \in Q_T. \quad (4)$$

Здесь ν — вязкость жидкости, $\nu > 0$.

А. В. Кажихов, Разрешимость начально-краевой задачи для уравнений движения неоднородной вязкой несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР, 1974, Том 216, С. 1008–1010.

Антонцев С.Н., Кажихов А.В. Математические вопросы динамики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Изд. Новосиб. ун-та, 1973.

Условие на начальное значение плотности жидкости:

$$\rho(x,0) = \rho_0(x) \geqslant m > 0, \quad x \in \Omega, \quad \rho_0 \in L_\infty(\Omega).$$

О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для вязких несжимаемых неоднородных жидкостей // Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1975, Том 52, С. 52–109.

Условие на начальное значение плотности жидкости:

$$\rho(\mathrm{x}, 0) = \rho_0(\mathrm{x}) > 0, \quad \mathrm{x} \in \Omega, \quad \rho_0 \in \mathrm{C}^1(\Omega).$$

J. Simon, Nonhomogeneous Viscous Incompressible Fluids: Existence of Velocity, Density and Pressure // SIAM J. Math. Anal., 1990, Vol. 21, № 5, P. 1093–1117.

Условие на начальное значение плотности жидкости:

$$\rho(\mathrm{x},0)=\rho_0(\mathrm{x})\geqslant 0,\quad \mathrm{x}\in\Omega,\quad \rho_0\in \mathrm{L}_\infty(\Omega),\quad 1/\rho_0\in \mathrm{L}_{6/5}(\Omega).$$

Неоднородная несжимаемая система Навье-Стокса

- R.J. DiPerna, P.-L. Lions, Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Inventiones mathematicae, 1989, Vol. 98, P. 511-547.
- P.-L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Volume 1. Incompressible Models // Oxford, Clarendon Press, 1996.

Условия на начальное значение плотности:

$$\rho(x,0) = \rho_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \Omega, \quad \rho_0 \in L_\infty(\Omega).$$

$$\rho v(x,0) = m_0(x), \quad x \in \Omega, \quad m_0 \in L_2(\Omega)^n$$

$m_0 = 0$ при п.в. $x \in \Omega$, при которых $\rho_0(x) = 0$, и $|m_0|^2/\rho_0 \in L_1(\Omega)$.

Для случая слабого решения плотность ρ является непрерывной по t функцией со значениями в $L_p(\Omega), 1 \leqslant p < \infty$, то есть $\rho \in C([0,T], L_p(\Omega))$.

Модель Кельвина–Фойгта конечного порядка L

В докладе рассматривается модель движения жидкости Кельвина–Фойгта порядка L, $\mathrm{L} \in \mathbb{N}$, реологическое соотношение которой имеет вид:

$$\left(1 + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{L}} \lambda_{\mathrm{i}} \frac{\partial^{\mathrm{i}}}{\partial \mathrm{t}^{\mathrm{i}}}\right) \sigma = 2\left(\nu + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{L}+1} \kappa_{\mathrm{i}} \frac{\partial^{\mathrm{i}}}{\partial \mathrm{t}^{\mathrm{i}}}\right) \mathcal{E}, \quad \lambda_{\mathrm{L}} > 0, \kappa_{\mathrm{L}+1} > 0. \quad (5)$$

Здесь $\mathcal{E}$ — тензор скоростей деформаций,
$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathrm{v}) = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathrm{v} + (\nabla \mathrm{v})^{\mathrm{T}}\right)$.
$\lambda_{\mathrm{i}}, \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{L}}$ — времена релаксации,
$\kappa_{\mathrm{i}}, \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{L}+1}$ — времена ретардации.

Исходя из физического смысла задачи предполагается, что корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mathrm{L}}$ многочлена $\mathrm{Q}(\mathrm{p}) = 1 + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{L}} \lambda_{\mathrm{i}} \mathrm{p}^{\mathrm{i}}$, $\mathrm{p} \in \mathbb{R}$ вещественны, отрицательны и различны.

Тогда на основе преобразования Лапласа аналогично

В. Г. Звягин, М. В. Турбин, Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина–Фойгта // СМФН, 2009, Том 31, С. 3–144.

σ выражается из (5) следующим образом:

$$\sigma(x,t) = 2\mu_2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(x,t) + 2\mu_1 \mathcal{E}(x,t) + 2\int\limits_0^t h(s,t)\mathcal{E}(x,s)ds + \sigma_0(x,t), \tag{6}$$

$$\mu_2 = \frac{\kappa_{L+1}}{\lambda_L} > 0,$$

$$\mu_1 = \frac{\kappa_L}{\lambda_L} - \frac{\kappa_{L+1}\lambda_{L-1}}{\lambda_L^2},$$

$$h(s,t) = \sum_{k=1}^{L} \beta_k e^{\alpha_k (t-s)},$$

$$\beta_k = \frac{C(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)},\ k = \overline{1,L}, \qquad C(p) = \sum_{i=1}^{L-1} (\kappa_i - \mu_2\lambda_{i-1} - \mu_1\lambda_i)p^i - \mu_1 + \nu.$$

Функция σ_0 представляет собой выражение от начальных условий

$$\frac{\partial^i \sigma}{\partial t^i}(0), \quad i = \overline{0, L-1}, \quad \frac{\partial^j \mathcal{E}}{\partial t^j}(0), \quad j = \overline{0, L}. \tag{7}$$

Исходя из физического смысла задачи, эти начальные условия не могут быть произвольными и должны быть согласованы (заданным скоростям движения жидкости соответствуют определенные напряжения и наоборот). Для простоты будем предполагать, что начальные условия (7) выбраны таким образом, чтобы $\sigma_0 \equiv 0$.

$$\rho\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}} + \rho\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{v_i}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x_i}} - \mu_1\Delta \mathrm{v} - \mu_2\frac{\partial \Delta \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}} - \int\limits_0^{\mathrm{t}} \mathrm{h(s,t)}\Delta \mathrm{v(s)}\,\mathrm{ds} \tag{8}$$

$$+\nabla \mathrm{p} = \rho \mathrm{f};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{v_i}\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{x_i}} = 0; \quad \operatorname{div} \mathrm{v} = 0; \tag{9}$$

$$\mathrm{v}|_{\mathrm{t}=0}(\mathrm{x}) = \mathrm{a}(\mathrm{x}), \quad \rho|_{\mathrm{t}=0}(\mathrm{x}) = \rho_0(\mathrm{x}), \quad 0 \leqslant \rho_0(\mathrm{x}) \leqslant \mathrm{M},\ \mathrm{x} \in \Omega; \tag{10}$$

$$\mathrm{v}|_{\partial\Omega} = 0,\ \int\limits_{\Omega} \mathrm{p(x,t)dx} = 0 \text{ при п.в. } \mathrm{t} \in (0,\mathrm{T}). \tag{11}$$

где M — некоторая константа.

- S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh, Generalized Kelvin–Voigt equations for nonhomogeneous and incompressible fluids // Communications in Mathematical Sciences, 2019, Vol. 17, № 7, P. 1915–1948.
- S.N. Antontsev, H.B. de Oliveira, Kh. Khompysh, The classical Kelvin–Voigt problem for incompressible fluids with unknown non-constant density: existence, uniqueness and regularity // Nonlinearity, 2021, Vol. 34, № 5, P. 3083–3111.
- A. Giorgini, A. Ndongmo Ngana, T. Tachim Medjo and R. Temam, Existence and regularity of strong solutions to a nonhomogeneous Kelvin-Voigt-Cahn-Hilliard system // Journal of Differential Equations, Vol. 372 (2023), 612-656. doi: 10.1016/j.jde.2023.07.024.
- V.G. Zvyagin, M.V. Turbin, Weak solvability of the initial-boundary value problem for inhomogeneous incompressible Kelvin–Voigt fluid motion model of arbitrary finite order // J. Fixed Point Theory Appl., 2023, Vol. 25, № 3, Article 63.

Функциональные пространства

$C_0^\infty(\Omega)^n$ — множество C^∞ функций со значениями в $\mathbb{R}^n$ и компактным носителем, содержащимся в Ω.

$$\mathcal{V} = \{v(x) = (v_1, \dots, v_n) \in C_0^\infty(\Omega)^n : \operatorname{div} v = 0\},$$
$$V^0 = \text{ пополнение } \mathcal{V} \text{ по норме } L_2(\Omega)^n;$$
$$V^1 = \text{ пополнение } \mathcal{V} \text{ по норме } H^1(\Omega)^n;$$
$$V^2 = H^2(\Omega)^n \cap V^1.$$

$\pi : L_2(\Omega)^n \to V^0$ — проектор Лере. Рассмотрим в $\mathcal{V}$ оператор $A = -\pi\Delta$. Оператор A продолжается в пространстве V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с вполне непрерывным обратным. Область определения A совпадает с V^2. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0.

Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots$ — собственные значения оператора A. Обозначим через

$$E_\infty = \left\{ v = \sum_{j=1}^{N} v_j e_j : v_j \in \mathbb{R} \right\}, \quad N \in \mathbb{Z},$$

множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j, и определим пространство $V^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_{V^\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha |v_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Эта норма в $V^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}$, эквивалентна норме: $\|v\|_{V^\alpha} = \|A^{\alpha/2} v\|_{V^0}$.

Функциональные пространства

$$
\begin{gathered}
W_{\mathrm{weak}} = \left\{u : u \in C([0,T],V^1), u' \in L_2(0,T;V^1)\right\},\\
W_{\mathrm{strong}} = \left\{u : u \in C([0,T],V^2), u' \in L_2(0,T;V^2)\right\},\\
W_{\mathrm{appr}} = \left\{u : u \in C([0,T],V^3), u' \in L_2(0,T;V^3)\right\},\\
E_{\mathrm{weak}} = \left\{\varrho : \varrho \in L_\infty(Q_T), \varrho' \in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))\right\}.
\end{gathered}
$$

Определение слабого решения

Пусть $a \in V^1, \rho_0 \in L_\infty(\Omega), f \in L_2(0,T;L_2(\Omega)^n)$.

Определение 1

Пара функций $(v,\rho) \in W_{weak} \times E_{weak}$ называется слабым решением начально-краевой задачи (8)–(11) если они удовлетворяют для любой пробной функции $\varphi \in V^1$ при п.в. $t \in (0,T)$ равенству

$$\int\limits_\Omega \rho v'\varphi dx + \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega \rho v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\varphi_j dx + \mu_1 \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx$$

$$+ \mu_2 \int\limits_\Omega \nabla v' : \nabla\varphi dx + \int\limits_0^t h(t,s) \int\limits_\Omega \nabla v(s) : \nabla\varphi dx ds = \int\limits_\Omega \rho f\varphi dx, \qquad (12)$$

для любой $\psi \in H_0^1(\Omega)$ при п.в. $t \in (0,T)$ удовлетворяют равенству

$$\langle \rho', \psi\rangle - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \rho v_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i} dx = 0, \qquad (13)$$

и начальным условиям $v(0) = a$, $\rho(0) = \rho_0$.

Теорема существования слабого решения

Первым основным результатом доклада является следующая теорема

Теорема 1

Существует хотя бы одно слабое решение начально-краевой задачи (8)–(11).

Пусть $\varepsilon > 0$.

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_1\Delta v - \mu_2\frac{\partial \Delta v}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial \Delta^2 v}{\partial t} - \int\limits_0^t h(t,s)\Delta v(s)ds + \nabla p = \rho f; \quad (14)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0; \quad \operatorname{div} v = 0; \quad (15)$$

$$v|_{t=0}(x) = b(x),\ \rho|_{t=0}(x) = \rho_0(x),\ x \in \Omega; \quad v|_{\partial\Omega} = \Delta v|_{\partial\Omega} = 0. \quad (16)$$

Будем предполагать, что $b \in V^3, \rho_0 \in L_\infty(\Omega), f \in L_2(0,T,L_2(\Omega)^n)$.

Определение 2

Решением аппроксимационной задачи (14)–(16) называется пара функций $(\mathrm{v}, \rho) \in W_{appr} \times E_{weak}$, которые удовлетворяют для любой $\varphi \in V^1$ при п.в. $t \in (0, T)$ равенству

$$\int\limits_\Omega \rho \mathrm{v}'\varphi dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_\Omega \rho \mathrm{v}_i \frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_i}\varphi_j dx + \mu_1 \int\limits_\Omega \nabla \mathrm{v} : \nabla \varphi dx + \mu_2 \int\limits_\Omega \nabla \mathrm{v}' : \nabla \varphi dx -$$

$$- \varepsilon \int\limits_\Omega \nabla (\Delta \mathrm{v}') : \nabla \varphi dx + \int\limits_0^t h(t, s) \int\limits_\Omega \nabla \mathrm{v}(s) : \nabla \varphi dx ds = \int\limits_\Omega \rho f \varphi dx, \tag{17}$$

для любой $\psi \in H_0^1(\Omega)$ при п.в. $t \in (0, T)$ удовлетворяют равенству

$$\langle \rho', \psi \rangle - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \rho \mathrm{v}_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0, \tag{18}$$

и начальным условиям: $\mathrm{v}(0) = b$, $\rho(0) = \rho_0$.

Теорема о разрешимости аппроксимационной задачи

Теорема 2

Существует хотя бы одно решение аппроксимационной задачи (14)–(16).

Для доказательства разрешимости аппроксимационной задачи мы будем пользоваться следующим вариантом теоремы Лере–Шаудера:

Теорема Лере–Шаудера

Пусть G — открытое ограниченное подмножество банахова пространства X, $0 \in G$ и $\Xi : [0,1] \times \overline{G} \to X$ — однопараметрическое семейство отображений, которое удовлетворяет свойствам:

- Отображение $\Xi : [0,1] \times \overline{G} \to X$ компактно по совокупности переменных.
- $\Xi(\tau, x) \neq x$ для всех $\tau \in [0,1]$ и $x \in \partial G$.
- $\Xi(0, \cdot) \equiv 0$.

Тогда отображение $\Xi(1, \cdot)$ имеет неподвижную точку $x_1 \in G$, то есть $x_1 = \Xi(1, x_1)$.

Схема доказательства разрешимости аппроксимационной задачи. Этап 1

На первом этапе для фиксированной функции $u \in L_\infty(0,T;V^2)$, $\|u\|_{L_\infty(0,T;V^2)} \le R$, доказывается, что существует единственная функция $\rho \in E_{weak}$, удовлетворяющая для любой $\psi \in H_0^1(\Omega)$ при п.в. $t \in (0,T)$ тождеству

$$\langle \rho', \psi \rangle - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \rho u_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0, \qquad (19)$$

и начальному условию $\rho(0) = \rho_0$.

DiPerna R.J., Lions P.L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Invent. Math. 98, 511–547 (1989)

Схема доказательства разрешимости аппроксимационной задачи. Этап 2

На втором этапе для исходной функции $u \in L_\infty(0,T;V^2)$ и найденной по ней функции $\rho \in E_{weak}$ доказывается существование единственной функции $v \in W_{appr}$, удовлетворяющей для любой пробной функции $\varphi \in V^1$ при п.в. $t \in (0,T)$ равенству

$$\tau \int\limits_\Omega \rho v' \varphi dx + \tau \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \rho u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \varphi_j dx + \tau\mu_1 \int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx$$
$$+ \mu_2 \int_\Omega \nabla v' : \nabla\varphi dx - \varepsilon \int_\Omega \nabla\left(\Delta v'\right) : \nabla\varphi dx$$
$$+ \tau \int\limits_0^t h(t,s) \int\limits_\Omega \nabla v(s) : \nabla\varphi dx ds = \tau \int_\Omega \rho f \varphi dx \quad (20)$$

и начальному условию

$$v(0) = \tau b, \quad \tau \in [0,1]. \quad (21)$$

Схема доказательства разрешимости аппроксимационной задачи. Этап 3

Таким образом определено однопараметрическое семейство отображений, которое переводит функцию $u \in L_\infty(0, T; V^2)$ из замкнутого шара $B_R \subset L_\infty(0, T; V^2)$ в функцию $v \in W_{appr}$.
Затем непосредственно проверяется, что это семейство отображений является непрерывным.
Далее, по теореме Обена-Дубинского-Симона

J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$ // Ann. Mat. Pura Appl., 1987, Vol. 146, P. 65–96.

имеет место компактное вложение $W_{appr} \subset L_\infty(0, T; V^2)$. Таким образом, в итоге получаем отображение
$\Psi : [0, 1] \times B_R \to L_\infty(0, T; V^2)$, которое является компактным.
Таким образом выполнено первое условие теоремы Лере-Шаудера.

Схема доказательства разрешимости аппроксимационной задачи. Этап 4

После этого доказывается, что всякая функция w такая, что $w = \Psi(\tau, w)$ при некотором $\tau \in [0,1]$, удовлетворяет следующим оценкам:

$$\|w\|_{W_{weak}} = \|w\|_{C([0,T],V^1)} + \|w'\|_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant C_1, \qquad (22)$$

$$\|w\|_{W_{appr}} = \|w\|_{C([0,T],V^3)} + \|w'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant C_2 + \frac{C_3}{\varepsilon}, \qquad (23)$$

где константы C_1, C_2, C_3 не зависят от w, τ и $1/\varepsilon$.

Определим значение R, а именно положим

$$R = C_4(C_2 + C_3/\varepsilon) + 1,$$

где C_4 — константа из неравенства $\|h\|_{L_\infty(0,T;V^2)} \leqslant C_4\|h\|_{W_{appr}}$, которое имеет место в силу вложения $W_{appr} \subset L_\infty(0,T;V^2)$. Тогда на границе шара B_R нет неподвижных точек семейства $\Psi(\tau,\cdot)$. Таким образом выполнено второе условие теоремы Лере-Шаудера.

Схема доказательства разрешимости аппроксимационной задачи. Этап 5

Далее, $\Psi(0,\cdot)\equiv 0$, поскольку задача

$$(\mu_2 \mathrm{A} + \varepsilon \mathrm{A}^2)\mathrm{w}' = 0,$$
$$\mathrm{w}|_{t=0} = 0,$$

имеет единственное решение $\mathrm{w}\equiv 0$.
Таким образом, выполнено последнее из условий теоремы Лере–Шаудера. Поэтому существует функция $\mathrm{w}\in \mathrm{L}_\infty(0,\mathrm{T};\mathrm{V}^2)$, для которой $\Psi(1,\mathrm{w})=\mathrm{w}$. Следовательно, по построению существует решение $(\mathrm{w},\rho)\in \mathrm{W}_{\mathrm{appr}}\times \mathrm{E}_{\mathrm{weak}}$ аппроксимационной задачи (14)–(16).

Предельный переход

В силу теоремы о разрешимости аппроксимационной задачи для любого $\varepsilon > 0$, существует решение задачи (14)–(16). Выберем последовательность ε_k, сходящуюся к нулю. Из оценок имеют место сходимости

$$v_k \rightharpoonup v_* \quad \text{слабо в } L_p(0,T;V^1) \quad \text{для любого } p: 1 < p < \infty;$$
$$v_k \rightharpoonup v_* \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;V^1);$$
$$v'_k \rightharpoonup v'_* \quad \text{слабо в } L_2(0,T;V^1);$$
$$\varepsilon_k v'_k \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в } L_2(0,T;V^3);$$
$$v_k \to v_* \quad \text{сильно в } C([0,T],L_4(\Omega)^n);$$
$$\rho_k \to \rho_* \quad \text{сильно в } C([0,T],L_p(\Omega)) \quad \text{для любого } p: 1 \leqslant p < \infty$$
$$\rho'_k \rightharpoonup \rho'_* \quad \text{слабо в } L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

Предельный переход

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в аппроксимационной задаче (14)–(16), получаем, что предельная пара функций $(v_*, \rho_*) \in W_{weak} \times E_{weak}$ является слабым решением начально-краевой задачи (8)–(11).

Определение сильного решения и теорема существования и единственности сильного решения

Будем предполагать, что $a \in V^2, \rho_0 \in C^1(\overline{\Omega})$, а $f \in L_2(0, T, L_2(\Omega)^n)$.

Определение 3

Сильным решением начально-краевой задачи (8)–(11) называется тройка функций $\rho \in C^1(\overline{Q_T}), v \in W_{strong}$, $p \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$, которые удовлетворяют при почти всех $(x, t) \in Q_T$ уравнениям (8),(9) и начальным условиям (10).

Вторым основным результатом доклада является следующая теорема

Теорема 3

Существует единственное сильное решение начально-краевой задачи (8)–(11).

Схема доказательства

В силу Теоремы 2 существует пара функций $(v, \rho) \in W_{appr} \times E_{weak}$, которые удовлетворяют для любой $\varphi \in V^1$ при п.в. $t \in (0, T)$ равенству (17):

$$\int\limits_\Omega \rho v' \varphi dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_\Omega \rho v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \varphi_j dx + \mu_1 \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi dx + \mu_2 \int\limits_\Omega \nabla v' : \nabla \varphi dx -$$

$$- \varepsilon \int\limits_\Omega \nabla (\Delta v') : \nabla \varphi dx + \int\limits_0^t h(t, s) \int\limits_\Omega \nabla v(s) : \nabla \varphi dx ds = \int\limits_\Omega \rho f \varphi dx,$$

для любой $\psi \in H_0^1(\Omega)$ при п.в. $t \in (0, T)$ удовлетворяют равенству (18)

$$\langle \rho', \psi \rangle - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \rho v_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0,$$

и начальным условиям: $v(0) = b$, $\rho(0) = \rho_0$.

Теорема 4

Если пара $(\mathrm{v}, \rho) \in \mathrm{W}_{\mathrm{appr}} \times \mathrm{E}_{\mathrm{weak}}$ — решение задачи (14)–(16), то имеет место неравенство:

$$\|\mathrm{v}\|_{\mathrm{W}_{\mathrm{strong}}} = \|\mathrm{v}\|_{\mathrm{C}([0,\mathrm{T}],\mathrm{V}^2)} + \|\mathrm{v}'\|_{\mathrm{L}_2(0,\mathrm{T};\mathrm{V}^2)} \leq \mathrm{C}_5. \tag{24}$$

Здесь константа C_5 не зависит от $1/\varepsilon$.

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим, что предельная пара функций $(\mathrm{u}, \rho) \in \mathrm{W}_{\mathrm{strong}} \times \mathrm{E}_{\mathrm{weak}}$ удовлетворяет для любой пробной функции $\varphi \in \mathrm{V}^1$ и почти всех $\mathrm{t} \in (0, \mathrm{T})$ равенству

$$\int\limits_\Omega \rho \mathrm{u}' \varphi \mathrm{dx} + \sum_{\mathrm{i,j}=1}^{\mathrm{n}} \int_\Omega \rho \mathrm{u_i} \frac{\partial \mathrm{u_j}}{\partial \mathrm{x_i}} \varphi_{\mathrm{j}} \mathrm{dx} + \mu_1 \int_\Omega \nabla \mathrm{u} : \nabla \varphi \mathrm{dx} +$$

$$+ \mu_2 \int_\Omega \nabla \mathrm{u}' : \nabla \varphi \mathrm{dx} + \int\limits_0^{\mathrm{t}} \mathrm{h}(\mathrm{t}, \mathrm{s}) \int\limits_\Omega \nabla \mathrm{u}(\mathrm{s}) : \nabla \varphi \mathrm{dxds} = \int_\Omega \rho \mathrm{f} \varphi \mathrm{dx}, \quad (25)$$

для любой пробной функции $\psi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ и почти всех $\mathrm{t} \in (0, \mathrm{T})$ равенству

$$\langle \rho', \psi \rangle - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \int_\Omega \rho \mathrm{u_i} \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{x_i}} \mathrm{dx} = 0, \quad (26)$$

и начальным условиям $\mathrm{u}(0) = \mathrm{a}$, $\rho(0) = \rho_0$.

Схема доказательства

В тождестве (25) функция φ принадлежит V^1. Так как функция u принадлежит W_{strong}, то при помощи формулы Грина получаем, что имеет место равенство

$$\int\limits_{\Omega} \rho u' \varphi dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \varphi_j dx - \mu_1 \int_{\Omega} \Delta u \varphi dx -$$

$$- \mu_2 \int_{\Omega} \Delta u' \varphi dx - \int\limits_{0}^{t} h(t,s) \int\limits_{\Omega} \Delta u(s) \varphi dx ds = \int_{\Omega} \rho f \varphi dx.$$

Последнее равенство по непрерывности имеет место для $\varphi \in V^0$.

Схема доказательства

В силу произвольности φ при почти всех $(x,t) \in Q_T$ имеет место равенство

$$\pi(\rho u') + \pi\left(\rho \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \mu_1 A u + \mu_2 A u' + \int\limits_0^t h(t,s) A u(s) ds = \pi(\rho f).$$

Следовательно, существует единственная функция $p \in L_2(0,T;H^1(\Omega))$ (с $\int_\Omega p(x,t)dx = 0$ при почти всех $t \in (0,T)$) что при почти всех $(x,t) \in Q_T$ имеет место равенство:

$$\rho u' + \rho \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - \mu_1 \Delta u - \mu_2 \Delta u' - \int\limits_0^t h(t,s) \Delta u(s) ds + \nabla p = \rho f.$$

Схема доказательства

Функция $\rho \in \mathrm{E}_{\mathrm{weak}}$ — слабое решение (26):

$$\langle \rho', \psi \rangle - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \int_{\Omega} \rho \mathrm{u}_{\mathrm{i}} \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{i}}} \mathrm{dx} = 0.$$

О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для вязких несжимаемых неоднородных жидкостей // Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1975, Том 52, С. 52–109.

Уравнение неразрывности имеет единственное решение $\rho_* \in \mathrm{C}^1(\overline{\mathrm{Q}_{\mathrm{T}}})$.

Единственность сильного решения доказывается при помощи неравенства Гронуолла-Беллмана.

Публикации по теме доклада

- В.Г. Звягин, М.В. Турбин, Теорема существования слабых решений начально-краевой задачи для неоднородной несжимаемой модели Кельвина–Фойгта без ограничения снизу на начальное значение плотности // Матем. заметки, 2023, Том 114, № 4, С. 628–632.
- V. Zvyagin, M. Turbin, Weak solvability of the initial-boundary value problem for a finite-order model of the inhomogeneous incompressible Kelvin-Voigt fluid without a positive lower bound on the initial condition of fluid density. Evolution Equations and Control Theory. doi: 10.3934/eect.2024074

Спасибо за внимание!