О проблеме итерированной денадстройки в стабильных гомотопических группах сфер

П.М.Ахметьев, ИЗМИРАН, МИЭМ

Dynamics in Siberia 2 марта 2026

Гомотопическая $n+k$-группа k-мерной сферы

Пусть

$$f : (S^{n+k}, x_0) \to (S^k, y_0)$$

пунктированное непрерывное отображение $n+k$-мерной сферы на k-мерную, где $n \geq 0$, $k \geq 1$ – натуральные параметры. Множество гомотопических классов таких отображений образуют абелеву группу относительно операции букетной суммы отображений, которая обозначается через

$$\pi_{n+k}(S^k).$$

Случай $n < 0$ не интересен, поскольку гомотопическая группа окажется нулевой. Если $n = 0$, то гомотопическая группа $\pi_k(S^k)$ естественно изоморфна группе целых чисел и вычисляющий гомоморфизм $\pi_k(S^k) \to \mathbb{Z}$ определяется степенью отображения регулярного прообраза, отличного от прообраза отмеченной точки y_0.

Гомоморфизм надстройки; гомоморфизм итерированной надстройки

Определен естественный гомоморфизм:

$$\Sigma : \pi_{n+k}(S^k) \to \pi_{n+k+1}(S^{k+1}),$$

который называется гомоморфизмом надстройки, следующим способом:

$$[f : S^{n+k} \to S^k] \mapsto [\Sigma f : \Sigma S^{n+k} = S^{n+k+1} \to \Sigma S^k = S^{k+1}].$$

Определен естественный гомоморфизм:

$$\Sigma^q : \pi_{n+k}(S^k) \to \pi_{n+k+q}(S^{k+q}),$$

который называется гомоморфизмом итерированной q-кратной надстройки, как композицией q последовательных гомоморфизмов надстройки.

Теорема Фрейденталя; Стабильная гомотопическая группа n-мерной сферы

Гомоморфизм надстройки

$$\Sigma : \pi_{n+k}(S^k) \to \pi_{n+k+1}(S^{k+1})$$

является изоморфизмом, при $k \geq n+2$, и является эпиморфизмом, при $k = n+1$.

Corollary

Гомотопическая группа $\pi_{n+k}(S^k)$ не зависит от k, если $k \geq n+2$. Эта группа обозначается через Π_n и называется стабильной гомотопической группой n-мерной сферы.

Проблема итерированной денадстройки; Теорема о двойной денадстройке

Пусть $k = n + 2$ и группа $\pi_{n+k}(S^k) \cong \Pi_n$–стабильная. При каком максимальном значении параметра $q(n)$ гомоморфизм итерированной надстройки:

$$\Sigma^q : \pi_{n+k-q}(S^{k-q}) \to \pi_{n+k}(S^k),$$

является эпиморфизмом?

Theorem

Гомоморфизм двухкратной надстройки

$$\Sigma^2 : \pi_{n+k-2}(S^{k-2}) \to \pi_{n+k}(S^k)$$

является эпиморфизмом, если и только если $n \neq 1, 3, 7$.

Известные результаты об итерированной денадстройке

- Стабильная гомотопическая группа сфер Π_{2^k}, $k \geq 4$ не допускает денадстройку порядка $3+2=5$ [Маховальд, 70-е].

- Стабильная гомотопическая группа сфер Π_{2^k-2} не денадстраивается $2k+2$ раза $(+\dots)$ [Баррат-Джонс-Маховальд-Коэн (80-е) + Хилл-Хопкинс-Равенел (2018)].

Вспомогательная Теорема I о денадстройке [ПА.(1999)]; Основной результат: Теорема II о денадстройке

Theorem

Всякий элемент в стабильной гомотопической группе сфер размерности $n = 2^{d'} - 2d$, $d' \geq 3d$, допускает денадстройку порядка $d+2$, т.е. лежит в образе

$$\Sigma^{d+2} : \pi_{2n-d}(S^{n-d}) \to \pi_{2n+2}(S^{n+2}).$$

Theorem

Для произвольного натурального числа d, найдется такое натуральное l_d, зависящее от d, что при произвольном $l \geq l_d$ всякий элемент в стабильной гомотопической группе сфер размерности $n = 2^l - 2$ допускает денадстройку порядка $d+2$.

Замечание о доказательстве Теорем I,II; Теорема Коэна о погружении

Теорема I и Теорема II доказываются на основании Теоремы Коэна о погружении.

Пусть M^n–произвольное замкнутое компактное многообразие размерности $dim(M) = n$. Через $\alpha(n)$ обозначают натуральное число, равное числу единиц в двоичной записи числа n.

Theorem

Существует гладкое погружение $f : M^n \looparrowright \mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$.

Цель доклада: доказать Теорему Коэна о погружении, в той формулировке (более слабой), как она используется для доказательства Теоремы II. Вычислим верхнюю оценку значения l_6 порогового значения параметра размерности, начиная с которого денадстройка порядка $6 + 2 = 8$ возможна.

Definition

Группа кобордизма $Imm^{sf}(m-k;k)$ представлена тройкой (f,Ψ_M,κ_M), где:

• $f: N^{m-k} \looparrowright \mathbb{R}^m$–погружение замкнутого $(m-k)$-мерного многообразия в Евклидово пространство,

• $\kappa_M: M^{m-k} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ – представляющее отображение для 1-класса когомологий $\pmod 2$,

• Ψ_M– скоснащение погружения f, т.е. изоморфизм нормального расслоения погружения f с расслоением $\kappa_M^*(k\gamma)=k\kappa_M^*(\gamma)$, где $k\gamma$–сумма Уитни k экземпляров линейного канонического расслоения над $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$.

Отношение эквивалентности на представителях стандартно, оно задано регулярной кобордантностью, а групповая операция на классах регулярной кобордантности задана, как обычно, дизъюнктным объединением представляющих троек. Этим способом группа $Imm^{sf}(n-k;k)$ определена.

Группа скоснащенного в коразмерности k кобордизма с обобщением

Предположим дополнительно, что занкнутое многообразие M^{n-k} снабжено семейством 1-мерных когомологических классов modulo 2:

$$A_j = \{\kappa_i\}, \quad \kappa_i \in H^1(M;\mathbb{Z}/2), \quad 0 \le i \le j, \quad \kappa_0 = \kappa_M. \qquad (1)$$

Это семейство представлено семейством классифицирующих отображений:

$$A_j = \{\kappa_i : M^{n-k} \to \mathbb{RP}^\infty\}, \quad i = 0, 1, \dots, j, \quad \kappa_0 = \kappa_M. \qquad (2)$$

Определим группу кобордизма $Imm^{sf;A_j}(n-k;k)$, обобщающую вышеопределенную группу $Imm^{sf}(n-k,k)$, дополнительно потребовав, чтобы представляющие многообразия были снабжены набором классов A_j и при кобордизмах представителей набор классов сохранялся.

Обозначения

Рассмотрим группу $Imm^{sf;A_j}(2^k-1,2^k-1)$, где j–произвольный натуральный параметр (случай $j=0$ возможен). Пусть $f: M^m \looparrowright \mathbb{R}^{2m}$, $m=2^k-1$, погружение со скоснащением Ψ_M, снабженное набором A_j, тройка представляет элемент $[(f,\Xi_M,A_j)]$. Обозначим через $M_0^{m-1}=\kappa_M^{-1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty-1})\subset M^m$ подмногообразие коразмерности 1, полученное как полный прообраз

$$\kappa_M : M^m \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty} \supset \mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty-1}.$$

при регулярном представляющем отображении, через $D(M_0)\subset M^m$–регулярную окрестность этого подмногоораязия.

Формулировка Теоремы А (цель доклада); замечание

Theorem

В классе кобордизма элемента $[(f, \Psi_M, A_j)]$ *найдется представитель, что погружение* $f : D(M_0) \looparrowright \mathbb{R}^{2m}$ *допускает регулярный набор* Ξ_f $(2k+1)$ *попарно ортогональных сечений нормального расслоения* $\nu_{D(M_0)} = (m-1)\kappa^*_M(\gamma)$*.*

Если набор $(2k+1)$ сечения заменить на набор k сечений, то утверждение является следствием Теоремы Коэна, поскольку расслоение $\nu_{D(M_0)}$ над M_0 имеет стабильную размерность и $\alpha(m) = k$, следовательно, условие существование набора сечений Ξ_f эквивалентно тому, что $D(M_0)$ погружается в $\mathbb{R}^{2m-k}$.

Необходимые сведения из терии Кошорке

Конструкция Кошорке описывает полное препятствие послойной гомотопии морфизма векторных расслоений над многообразием к послойному мономорфизму.
Пусть $\alpha \to Q^q$, $\beta \to Q^q$ – пара векторных расслоений над гладким многообразием Q^q (мы не предполагаем, что многообразие Q^q замкнуто) $dim(\alpha) = a$, $dim(\beta) = b$, $dim(Q^q) = q$, $2(b - a + 1) < q$. Пусть $u : \alpha \to \beta$ морфизм общего положения векторных расслоений. Обозначим через $\Sigma \subset Q^q$ подмногообразие, заданное формулой:

$$\Sigma = \{x \in Q^q | Ker(u_x : \alpha_x \to \beta_x) \neq 0\}. \tag{3}$$

Это многообразие Σ является многообразием особенности морфизма расслоений u. Заметим, что в представлеом размерностном ограничении для морфизма общего положения u получится $rk(u) \geq a - 1$. Коразмерность подмногообразия $\Sigma \subset Q^q$ составит $b - a + 1$.

Необходимые сведения из терии Кошорке

Опишем нормальное расслоение подмногообразия (3), это векторное расслоение обозначим через ν_Σ. Обозначим через $\lambda : E(\lambda) \to \Sigma$ линейное подрасслоение, определенное как подрасслоение ядер морфизма u над подмногообразием особенностей $\Sigma \subset Q^q$. Следовательно, следующее включение расслоений: $\varepsilon : \lambda \subset \alpha$ над Σ корректно определено. Обозначим через Λ_α расслоение над Σ, это расслоение является ортогональным дополнением к подмногообразию $\varepsilon(\lambda) \subset \alpha$. Естественный морфизм векторных расслоений над Σ (послойный изоморфизм) $v : \Lambda_\alpha \subset \beta$ корректно определен. Определим расслоение Λ_β над Σ как послойное ортогональное дополнение к $v(\Lambda_\alpha)$ в расслоении $\alpha|_\Sigma$. Нормальное расслоение $\nu(\Sigma)$ определено следующей формулой:

$$\nu(\Sigma) = \lambda \otimes \Lambda_\beta. \qquad (4)$$

Предварительные обозначения

Пусть $\hat{\nu} : E(\hat{\nu}) \to \mathbb{RP}^{2k-1}$ векторное расслоение, $\dim(\hat{\nu}) = 2^k - 1$, $k \equiv 0 \pmod 4$, которое изоморфно следующей сумме Уитни:

$$\hat{\nu} = (2^k - 1)\gamma, \tag{5}$$

где γ является каноническим линейным расслоением над $\mathbb{RP}^{2k-1}$. Обозначим сумму Уитни $\hat{\nu} \oplus \gamma$ через ν, получим:

$$\nu = (2^k)\gamma. \tag{6}$$

Стандартная проекция

$$\pi : \nu \to \hat{\nu} \tag{7}$$

с ядром γ корректно определена.

Определение допустимого семейства сечений

Скажем, что семейство общего положения s-сечений, $s = 2k + 1$

$$\hat{\psi} = \{\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_s\}, \quad \hat{\psi} : s\varepsilon \to \hat{\nu}_{\mathbb{RP}}$$

расслоения $\hat{\nu}$ является допустимым, если существует регулярное s–семейство (без особенности)

$$\psi = \{\psi_1, \dots, \psi_s\}, \quad \psi : s\varepsilon \to \nu$$

сечений расслоения, которое удовлетворяет условию: $\pi \circ \psi = \hat{\psi}$, т.е. является распроектированием семейства ψ в расслоении (7).

Нормальное расслоение особенности допустимого семейства сечений

Применив теорему Кошорке, легко получить, что особенность $s = 2k + 1$-семейства сечений расслоения $\hat{\nu} \mapsto \mathbb{R}\mathrm{P}^{2^k - 1}$ нормальное расслоение естественно изоморфно расслоению $(2^k - 1 - 2k)\gamma$. Действительно, расслоение Λ_β над особенностью имеет размерность $2^k - 1 - 2k$ и стабильно изоморфно тривиальному расслоению, поэтому $\lambda \otimes \Lambda_\beta$, с учетом $\lambda = \gamma$, как описано.

Без предположения о допустимости семейства сечений структура нормального расслоения включена в более широкий класс и имеет сложный вид.

Лемма об особенности допустимого семейства сечений

Lemma

1. Расслоение $\hat{\nu}_{\mathbb{R}P^{2k-1}}$, $k \equiv 0 \pmod 4$, *обладает допустимым* $s = 2k+1$*-семейством сечений* $\hat{\psi}$.

2. Особенность Σ^{2k} *допустимого семейства* $\hat{\psi}$ *представляет регулярный класс подмногообразия* $\mathbb{R}P^{2k} \subset \mathbb{R}P^{2^k-1}$ *со стандартным скоснащением коразмерности* $2^k - 1 - k$.

п. 1. является следствием Теоремы Адамса о регулярных семействах векторных полей на $T(\mathbb{R}P^n)$, если $n = 2^k - 1$. Эквивалентно, расслоение $2^k\gamma \mapsto \mathbb{R}P^{2^k-1}$, допускает $2k+1$ регулярное сечение. Дейсвительно, $T(\mathbb{R}P^{2^k-1}) \oplus \varepsilon = 2^k\gamma$.

Доказательство Теоремы А

Пусть (M^{2^k-1}, Ψ_M) – скоснащенное многообразие в коразмерности 2^q-1, представляющее элемент $x \in Imm^{sf;A_j}(2^k-1, 2^k-1)$. Начнем с допустимого семейства $\Xi_f = \{\psi_1, \dots, \psi_{2k+1}\}$ сечений нормального расслоения $\nu_f \equiv (2^k-1)\kappa_M$ погружения $f : M^{2^k-1} \looparrowright \mathbb{R}^{2^{k+1}-2}$. Семейство, вообще говоря, имеет особенность, обозначенную через $N^{2k} \subset M^{2^k-1}$. Коцикл поля λ ядер особенности обозначим через κ_0.

Доказательство Теоремы А

Рассмотрим мультикоцикл на особенности

$$\lambda_M : M^{2^k-1} \to \mathbb{RP}^{\infty}_0 \times \prod_{i=1}^{j} \mathbb{RP}^{\infty}(i), \tag{8}$$

которое построено по набору $A_j = \{\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_j\}$ коциклов.
Определим расширенный мультикоцикл

$$\lambda^{\circ}_N : N^{2q} \to \mathbb{RP}^{\infty}_{-1} \times \mathbb{RP}^{\infty}_0 \times \prod_{i=1}^{j} \mathbb{RP}^{\infty}(i), \tag{9}$$

где проекция на сомножитель $\mathbb{RP}^{\infty}_{-1}$ соответствует ограничению ориентирующего коцикла κ_M, а проекция на $\mathbb{RP}^{\infty}_0$ соответствует коциклу $\kappa_0 + \kappa_M$, т.е. сумме коциклов поля ядер семейства сечений и коцикла скоснащения. Поскольку семейство Ξ_f было допустимым, то коцикл $\kappa_0 + \kappa_M$ (номер 0) нулевой и расширенный мультикоцикл (9) определяется по мультикоциклу (8) формальным способом.

Доказательство Теоремы А

Прообраз каждого страта коразмерности $2q$ в диаграмме (8) и в формально расширенной диаграмме (9) состоит из четного числа точек. Знаки точек, правильно определенные, вообще говоря, не сокращаются. (Точки сокращались лишь при трансфере). Если не предполагать допустимость семейства сечений, то точки можно перестроить по 1-ручкам попарно. При этом после перестройки расширенная диаграмма (9) перестает быть формальной. Более того, на $2q-1$-мерных сферических образующих ручек возникают страты коразмерности 1 для коцикла с номером 0, которые наследуют полную стратификацию окрестностей нульмерных стратов до перестройки. Рассмотрим такую сферу и обозначим ее через S.

Доказательство Теоремы А

Размерность каждого сферического страта S нечетна. Докажем, что нульмерные антиподальные пары нульмерных стратов наследственной стратификации на S сокращаются дополнительной перестройкой по 1-ручке. Действительно, на двулистном накрытии, построенному по коциклу κ_M, эквивариантная структура переставляет две нечетномерные сферы. Поскольку локальная система коэффициентов, построенная по коциклу κ_M, изменяет ориентацию такой сферы при инволюции, прообразы каждого страта коразмерности $2^k - 2$ на разных сферах имеют противоположные знаки. Поэтому перестройка по 1-ручке с тривиальным коциклом κ_M и тривиальным коциклом поля ядер κ_0 сокращает каждую пару нульмерных стратов на S. Перестройки проводим для всех антиподальных пар. Получаем особенность, снабженную отображением (9), для которой 0-мерные страты расширенной стратификации пусты.

Доказательство Теоремы А: любое оснащенное многообразие ограничивает, как скоснащенное

В работе P.J. Eccles и автора
"The relationship between framed bordism and skew-framed bordism"Bull. London Math. Soc. **vol**39 2007 473-481
доказано, что любое оснащенное многообразие до размерности $2k-1$ включительно, является скоснащенной 2^k-1 границей.

Example

Пусть $(S^1;\Psi_{SO})$ окружность, оснащенная в коразмерности 3 образующим элементом $\Psi_{SO}\in\pi_1(SO(3))$. Оснащенное многообразие представляет по Понтрягину образующий элемент Π_1. Рассмотрим произвольную перестройку, которая оснащена как скоснащенная перестройка, но не сохраняет оснащение и оставляет окружность связной. Тогда в результате скоснащенной в коразмерности 3 перестройки снова получится оснащенная окружность, которая ограничивает и представляет нулевой элемент в Π_1.

Доказательство Теоремы А: убивание стратов особенности положительной размерности

Определим последовательность регулярных перестроек скоснащенного погруженного многообразия $f(M^{2^k-1})$ по обобщенным ручкам размерностей $i = 2, \dots, 2k$, при перестройке соответствующий страт размерности $i = 1, \dots, 2k-1$ полной стратификации особенности N^{2k} становится пустыми.

Доказательство Теоремы A

Пусть V^i–оснащенное подмногообразие в M^{2^k-1}, определенное как регулярный прообраз страта α коразмерности 2^k-1-i при отображении λ_M, в предположении, что прообразы всех стратов большей коразмерности пусты. Рассмотрим кобордизм W^{i+1} с границей $\partial W = V^i$, снабженный скоснащением Ψ_W с харклассом κ_W в коразмерности 2^k-1 с нулевым характеристическим коциклом на границе: $\kappa_W|_V = 0$, определяющий границу оснащенного многообразия $V^i, \Psi_W|_V$, $1 \le i \le 2k-1$. Стабилизируем скоснащение Ψ_W посредством оснащения в коразмерности 2^k-1-i: $\Psi_W \oplus \Upsilon_W$. Определим боковую поверхность обобщенной ручки как сферизованное расслоение, построенное по первым 2^k-1-i векторам скоснащения Ψ_W.

Доказательство Теоремы А

Боковая поверхность обобщенной ручки является оснащенным многообразием, обозначим это многообразие через K^{2^k-1}, с краем, причем край ∂K диффеоморфен как оснащенное многообразие (с учетом вектора внутрь многообразия на границе коразмерность оснащения границы повысится на 1) оснащенной границе регулярной окрестности подмногообразия $V^i \subset M^{2^k-1}$. Перестроим скоснащенное погружение

$$f \mapsto f'$$

по поверхности боковой ручки, в результате получится многообразие с двумя компонентами края. Внутренняя стороны ручки с подошвой представляет оснащенное многообразие в коразмерности 2^k-1, обозначим погружение через $f_1(M_1)$. Боковая внешняя сторона обобщенной ручки представляет собой скоснащенное погруженное многообразие в коразмерности 2^k-1, совпадающее с $f(M)$ вне ручки. Обозначим это погружение через $f_2(M_2)$, $f' = f_1 \cup f_2$.

На боковой поверхности ручки определим стратифицированную оснащенную границу, край которой совпадает со стратифицированной оснащенной границей подошвы. Стратификацию поля ядер над особенностью на боковой стороне ручки согласуем с системой координат, соответствующую векторам скоснащения центра ручки. Итерацией конструкции Понтрягина стратифицированная граница отображается в страты коразмерности не более $i-1$ в образе λ_M, которые примыкают к страту α.

Погружение f_1 оснащенное, поэтому допускает поле регулярных $2k$ сечений без особенности. Погружение f_2 допускает поле сечений с особенностью, многообразие снабжено набором харклассов Ξ_{f_2}, при этом прообраз страта α для отображения на особенности поля Ξ_{f_2} пуст. Погружения f, $f_1 \cup f_2$ скоснащены и представляют равные элементы в $Imm^{sf;A_j}(2^k-1, 2^k-1)$.

Доказательство Теоремы А

Рассуждение проводим по индукции, перестраивая f_2 на следующем шаге, убивая текущий страт в прообразе λ_{M_2}. На последнем шаге при $i = 2k$ проводить перестройку не требуется. Переобозначим многообразие, несвязное, вообще говоря, полученное в результате последовательности перестроек, через M^{2^k-1}. При этом $M_0^{2^k-2} \subset M^{2^k-1}$ ни с остаточной оснащенной особенностью, ни с оснащеными добавленными многообразиями $M_1 \cup \dots$ не пересекается. Теорема А доказана. $\square$

Приложение к проблеме Кервера

Пусть Π_{2^l-2} стабильная гомотопическая группа сфер. В неопубликованном препринте автора доказано, что если элемент $x \in \Pi_{2^l-2}$, $l \geq 8$ допускает $6+2=8$–кратную денадстройку, то $Arf(x)=0$. Из Теоремы II вытекает, что существует такое натуральное l, что при любом $l' \geq l$ Арф-инвариант оснащенного многообразия, представляющего элемент $x \in \Pi_{2^{l'}-2}$, равен нулю.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!