# Слабая КАМ теория с негладким лагранжианом

Ю.В. Авербух

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН
ayv@imm.uran.ru

2 марта 2026

# Слабая KAM теория [Fathi, 2008, Sorrentino, 2015]

Цель: найти функцию $\varphi \in C(M)$ и константу $\overline{H}$ такие, что для любого $r > 0$ цена в задаче минимизации функционала

$$\int_0^r L(x(t), \dot{x}(t))dt + \varphi(x(r))$$

равна $\varphi - \overline{H}r$.

# Следствие слабой KAM теории

При больших $r$ решение задачи

$$\text{минимизировать } \frac{1}{r}\int_0^r L(x(t), \dot{x}(t))dt$$

сходится к константе $-\overline{H}$.

# Примеры

- механический лагранжиан:
$$L(x, v) = \frac{mv^2}{2} - \Pi(x);$$
- лагранжиан Мане:
$$L(x, v) = \frac{1}{2}|v - X(x)|^2.$$

# Развитие слабой КАМ теории

- S. Aubry (1983);
- J. Mather (1989, 1991,...);
- R. Mañé (1992, 1996);
- A. Fathi (1997, 1998,...);
- L.C. Evans (2000, 2003,...);
- D. Gomes (2002, 2003,...).

# Предположения слабой KAM теории

- $L(x, v)/|v| \to \infty$ при $|v| \to +\infty$;
- $L$ – $C^2$-функция;
- функция $v \mapsto L(x, v)$ строго выпуклая;
- ряд результатов требует компактности $M$.

# Методы слабой KAM теории

- уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} L_v(x(t), \dot{x}(t)) = L_x(x(t), \dot{x}(t));$$

- преобразование Лежандра:

$$\begin{aligned} p &= L_v(x, \dot{x}), \quad & H(x,p) &= p\dot{x} - L(x, \dot{x}), \\ \dot{x} &= H_p(x,p), \quad & L(x, \dot{x}) &= p\dot{x} - H(x,p); \end{aligned}$$

- уравнения Гамильтона:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= H_p(x(t), p(t)), \\ \dot{p}(t) &= -H_x(x(t), p(t)). \end{aligned}$$

# Слабое KAM уравнение

$$H(x, -\nabla\varphi) = \overline{H}.$$

Искомые объекты:

- $\varphi$ – непрерывная функция;
- $\overline{H} \in \mathbb{R}$.

$$H(x, p) \triangleq \max_{v\in\mathbb{R}^d} \Big[pv - L(x, v)\Big].$$

# Особенность слабой KAM теории

Для существования вязкостного решения уравнения

$$H(x, -\nabla\varphi) = \overline{H}$$

достаточно предположить (см. [Lions et al., 1986]), что

- $M$ – $d$-мерный тор;
- $L(x, v)/|v| \to \infty$ при $|v| \to +\infty$;
- $L$ непрерывно.

# Цель работы:

Развить слабую КАМ теорию в предположении о том, что

- $M = \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$;
- $L(x, v)/|v| \to \infty$ при $|v| \to +\infty$;
- $L$ непрерывно.

# Нестандартные лагранжианы

- $$L = U(x)(1 + |v|^2)^{\gamma/2};$$
- $$L = |v|^\gamma U(x);$$
- $$L = \frac{m|v|^\gamma}{2} - U(x);$$
- $$L = |v - X(x)| \ln(|v - X(x)|).$$

Предположение: $\gamma > 1$.

# План доклада

- допустимые траектории;
- слабое КАМ уравнение: определение решения и свойства;
- проксимальный сдвиг и конструкция позиционных стратегий;
- почти оптимальность конструкций, реализующих проксимальный сдвиг;
- характеризация константы $\overline{H}$.

# Обозначения

- $\mathbb{R}^d$ – множество $d$-мерных вектор-столбцов;
- $\mathbb{R}^{d,*}$ – множество $d$-мерных вектор-строк;
- $\mathbb{B}_\alpha$ – шар с центром 0 и радиусом $\alpha$.

# Фазовое пространство

$$\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d.$$

- элементы $\mathbb{T}^d$:
$$x = \left\{x' + n : \ n \in \mathbb{Z}^d\right\}, \, x' \in \mathbb{R}^d;$$
- если $x \in \mathbb{T}^d$, $v \in \mathbb{R}^d$,
$$x + v = \left\{x' + v : \ x' \in x\right\};$$
- расстояние на $\mathbb{T}^d$:
$$\begin{aligned} \rho_{\mathbb{T}^d}(x, y) &\triangleq \inf \left\{|y' - x'| : \ x' \in x, \ y' \in y\right\} \\ &= \inf \left\{|v| : \ v \in \mathbb{R}^d, \, x + v = y\right\}. \end{aligned}$$

# Допустимые траектории

Пусть $r > 0$. *Допустимая траектория:* $x(\cdot) \in \mathrm{AC}([0,r];\mathbb{T}^d)$.

# Допустимые траектории

Пусть $r > 0$. *Допустимая траектория:* $x(\cdot) \in \mathrm{AC}([0, r]; \mathbb{T}^d)$.

$(x(\cdot), v(\cdot))$ – *управляемый процесс*, если

- $v(\cdot) \in L^1([0, r]; \mathbb{R}^d)$;
- $x(\cdot) \in C([0, r], \mathbb{T}^d)$ и для всех $s \in [0, r]$

$$x(s) - x(0) = \int_0^s v(t)dt.$$

# Субдифференциал по Адамару

Пусть $\phi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{T}^d$.

$$\partial_D^- \phi(x) \triangleq \left\{ p \in \mathbb{R}^{d,*} : \text{для всех } w \in \mathbb{R}^d \liminf_{h \downarrow 0,\, w' \to w} \frac{\phi(x + hw') - \phi(x)}{h} \geq pw \right\}.$$

# Супердифференциал по Адамару

Пусть $\phi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{T}^d$.

$$\partial_D^+ \phi(x) \triangleq \left\{ p \in \mathbb{R}^{d,*} : \text{для всех } w \in \mathbb{R}^d \ \limsup_{h \downarrow 0,\, w' \to w} \frac{\phi(x + hw') - \phi(x)}{h} \leq pw \right\}.$$

# Проксимальный субдифференциал

Пусть $\phi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{T}^d$.

$\partial_P^- \phi(x)$ состоит из ковекторов $p \in \mathbb{R}^{d,*}$ удовлетворяющих условию: существуют числа $\alpha > 0$ и $\sigma \geq 0$ такие, что для всех $w \in \mathbb{B}_\alpha$

$$\phi(x + w) - \phi(x) \geq pw - \sigma |w|^2.$$

# Проксимальный супердифференциал

Пусть $\phi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{T}^d$.

$\partial_P^+ \phi(x)$ состоит из ковекторов $p \in \mathbb{R}^{d,*}$ удовлетворяющих условию: существуют числа $\alpha > 0$ и $\sigma \geq 0$ такие, что для всех $w \in \mathbb{B}_\alpha$

$$\phi(x + w) - \phi(x) \leq pw + \sigma |w|^2.$$

# Свойства

- $\partial_D^+ \phi(x) = -\partial_D^-(-\phi)(x)$;
- $\partial_P^+ \phi(x) = -\partial_P^-(-\phi)(x)$;
- $\partial_P^- \phi(x) \subset \partial_D^- \phi(x)$;
- $\partial_P^+ \phi(x) \subset \partial_D^+ \phi(x)$.

# Нижнее решение

*Слабое КАМ уравнение:*

$$H(x, -\nabla\varphi) = \overline{H}.$$

Полунепрерывная сверху функция $\varphi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ и константа $\overline{H} \in \mathbb{R}$ задают нижнее вязкостное решение слабого КАМ уравнения, если

$$H(x, -p) \leq \overline{H}$$

для всех $x \in \mathbb{T}^d$, $p \in \partial_D^+ \phi(x)$.

# Верхнее решение

*Слабое КАМ уравнение:*

$$H(x, -\nabla\varphi) = \overline{H}.$$

Полунепрерывная снизу функция $\varphi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ и константа $\overline{H} \in \mathbb{R}$ задают верхнее вязкостное решение слабого КАМ уравнения, если

$$H(x, -p) \geq \overline{H}$$

для всех $x \in \mathbb{T}^d$, $p \in \partial_D^- \phi(x)$.

# Вязкостное решение

*Слабое KAM уравнение:*

$$H(x, -\nabla\varphi) = \overline{H}.$$

Пара $(\varphi, \overline{H})$, где $\phi \in C(\mathbb{T}^d)$, $\overline{H} \in \mathbb{R}$, является вязкостным решением слабого KAM уравнения, если она одновременно верхнее и нижнее решение.

# Свойства

- решение слабого KAM уравнения всегда существует [Lions et al., 1986];
- константа $\overline{H}$ единственным образом определяется слабым KAM уравнением;
- если $(\varphi, \overline{H})$ – вязкостное решение, то $\varphi$ – липшицева, причем константа Липшица определяется лишь гамильтонианом $H$ [Bardi and Capuzzo-Dolcetta, 2008].

# Преобразование Иосиды-Моро [Clarke et al., 1999]

Пусть $\phi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$, $\varkappa > 0$.

$$\phi_\varkappa(x) \triangleq \inf \left\{ \phi(x+v) + \frac{1}{2\varkappa^2}|v|^2 : \ v \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

# Преобразование Иосиды-Моро [Clarke et al., 1999]

Пусть $\phi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$, $\varkappa > 0$.

$$\phi_\varkappa(x) \triangleq \inf \left\{ \phi(x+v) + \frac{1}{2\varkappa^2}|v|^2 : \ v \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Минимизирующий элемент:
обозначим через $b_\varkappa[x]$ вектор такой, что

$$\phi(x + b_\varkappa[x]) + \frac{1}{2\varkappa^2}\left|b_\varkappa[x]\right|^2 = \phi_\varkappa(x).$$

# Свойства преобразования Иосиды-Моро. I

Пусть $\phi$ – липшицева

- $|b_\varkappa[x]| \leq C_1 \varkappa^2$;
- $|\phi(x) - \phi_\varkappa(x)| \leq C_2 \varkappa$;
- для любого $\varkappa > 0$, функция $\phi_\varkappa$ также липшицева с той же константой, что и $\phi$.

Выше $C_1$, $C_2$ – некоторые константы.

# Свойства преобразования Иосиды-Моро. II

Пусть

$$p_{\varkappa}[x] \triangleq \frac{1}{\varkappa^2}(-b_{\varkappa}[x])^{\top}.$$

Тогда,

- $p_{\varkappa}[x] \in \partial_P^- \phi(x + b_{\varkappa}[x])$;
- $|p_{\varkappa}[x]| \leq K$, где $K$ – константа Липшица для функции $\phi$;
- (разложение Тейлора) для всех $x \in \mathbb{T}^d$ и $w \in \mathbb{R}^d$,

$$\phi_{\varkappa}(x + w) \leq \phi_{\varkappa}(x) + p_{\varkappa}[x]w + \frac{1}{2\varkappa^2}|w|^2.$$

# Конструкция позиционных стратегий

Предположение:

- $(\varphi, \overline{H})$ – верхнее решение слабого КАМ уравнения

$$H(x, -\nabla\varphi) = \overline{H};$$

- $\varphi$ является липшицевой.

Позиционная стратегия:

$$\mathbb{v}_{\varkappa}[x] \in \operatorname*{Argmax}_{v\in\mathbb{R}^d}\Big[-p_{\varkappa}[x]v - L(x + b_{\varkappa}[x], v)\Big].$$

# Свойство

Существует константа $C_3$ такая, что для всех $\varkappa > 0$ и $x \in \mathbb{T}^d$,

$$\left|\mathbb{v}_{\varkappa}[x]\right| \le C_3.$$

# Пошаговые движения

Пусть

- $r$ – длина промежутка времени;
- $\Delta = \{t_i\}_{i=1}^{n}$ – разбиение отрезка $[0, r]$.

Управляемый процесс $(x_{y,\varkappa,r,\Delta}(\cdot), v_{y,\varkappa,r,\Delta}(\cdot))$ строится по правилу

- $x_{y,\varkappa,r,\Delta}(0) \triangleq y$;
- если движение уже построено до момента $t_i$, то для $t \in [t_i, t_{i+1})$

$$v_{y,\varkappa,r,\Delta}(t) \triangleq \mathbb{v}_{\varkappa}[x_{y,\varkappa,r,\Delta}(t_i)]$$

и для $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$x_{y,\varkappa,r,\Delta}(t) \triangleq x_{y,\varkappa,r,\Delta}(t_i) + (t - t_i)\mathbb{v}_{\varkappa}[x_{y,\varkappa,r,\Delta}(t_i)].$$

# Теорема 1 (верхняя оценка)

Пусть

- $(\varphi, \overline{H})$ – верхнее решение слабого KAM уравнения; $\varphi$ – липшицево;
- $\varepsilon > 0$.

Тогда, существуют $\varkappa_0 > 0$ и функция $\delta : (0, \varkappa_0] \to (0, +\infty)$ такие, что для всех

- $r > 0$,
- $\varkappa \in (0, \varkappa_0]$,
- разбиений $\Delta$ отрезка $[0, r]$, $d(\Delta) \leq \delta(\varkappa)$,
- $y \in \mathbb{T}^d$

выполнено неравенство

$$\varphi(x_{y,\varkappa,r,\Delta}(r)) + \int_0^r L(x_{y,\varkappa,r,\Delta}(t), v_{y,\varkappa,r,\Delta}(t))dt \leq \varphi(y) - \overline{H}r + (r+1)\varepsilon.$$

# Теорема 2 (нижняя оценка)

Пусть пара $(\varphi, \overline{H})$, где $\varphi : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$, $\overline{H} \in \mathbb{R}$ является нижним решением слабого KAM уравнения, причем $\varphi$ – липшицева. Тогда для любого $r > 0$ и любого управляемого процесса на $[0, r]$ $(x(\cdot), v(\cdot))$ выполнено неравенство

$$\varphi(x(r)) + \int_0^r L(x(t), v(t))dt \geq \varphi(x(0)) - \overline{H}r.$$

# Идея доказательства

Рассмотреть верхнее преобразование Иосиды-Моро

$$\phi^{\varkappa}(x) \triangleq \sup\left\{\phi(x+v) - \frac{1}{2\varkappa^2}|v|^2 : v \in \mathbb{R}^d\right\}.$$

и показать, что функция

$$r \mapsto \varphi^{\varkappa}(x(r)) - \varphi^{\varkappa}(x(0)) + \int_0^r L(x(t), v(t))dt + \overline{H}r$$

оценивается снизу величиной малой относительно $\varkappa$.

# Полугруппа Лакса-Олейник

$$T_r^+ \phi(y) \triangleq \inf \Big\{ \phi(x(r)) + \int_0^r L(x(t), v(t))dt :$$

$$(x(t), v(t)) \text{ – управляемый процесс}, \; x(0) = y \Big\}.$$

# Теорема 3 (слабая KAM теорема)

Пусть $(\varphi, \overline{H})$ – вязкостное решение слабого KAM уравнения

$$H(x, -\nabla\varphi) = \overline{H}.$$

Тогда, для всех $r > 0$

$$T_r^+\varphi = \varphi - r\overline{H}.$$

При этом для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\varkappa_0$ так, что, если $\varkappa \in (0, \varkappa_0]$, то

$$\limsup_{d(\Delta)\downarrow 0} \left[ \varphi(x_{y,\varkappa,r,\Delta}(r)) + \int_0^r L(x_{y,\varkappa,r,\Delta}(t), v_{y,\varkappa,r,\Delta}(t))dt \right] \leq \varphi(y) - \overline{H}r + (r+1)\varepsilon.$$

# Следствие (почти оптимальность)

Пусть $(\varphi, \overline{H})$ – вязкостное решение слабого KAM уравнения. Тогда для всех $y \in \mathbb{T}^d$

$$\lim_{r\to+\infty} \inf \left\{ \frac{1}{r}\int_0^r L(x(t), v(t))dt : \right.$$

$$\left. (x(t), v(t)) \text{ – управляемый процесс, } x(0) = y \right\} = -\overline{H}.$$

При этом для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\varkappa_0$ со свойством: если $\varkappa \in (0, \varkappa_0]$, $y \in \mathbb{T}^d$, то

$$\lim_{r\to+\infty} \limsup_{d(\Delta)\downarrow 0} \frac{1}{r}\int_0^r L(x_{y,\varkappa,r,\Delta}(t), v_{y,\varkappa,r,\Delta}(t))dt \leq -\overline{H} + \varepsilon.$$

# Мера Мазера. Голономные меры

Вероятностная мера $\nu$ на $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$ называется *голономной*, если для любой функции $\phi \in C^1(\mathbb{T}^d)$ выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \left(\nabla\phi(x) \cdot v\right) \nu(d(x, v)) = 0.$$

# Мера Мазера

*Мерой Мазера* называется голономная мера $\mu$, для которой

$$\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} L(x, v)\mu(d(x, v)) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} L(x, v)\nu(d(x, v)) : \ \nu \text{ – голономная мера} \right\}.$$

# Мера Мазера

*Пространство конечных мер:* $\mathcal{M}(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$.

*Ограничения:*

- неотрицательность: $\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \psi(x, v)\nu(d(x, v)) \geq 0$ для всех $\psi \in C_b(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$;
- нормировка: $\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \nu(d(x, v)) = 1$;
- голономность: $\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} \nabla\phi(x) \cdot v\nu(d(x, v)) = 0$ для всех $\phi \in C^1(\mathbb{T}^d)$.

*Задача минимизации:*

$$\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} L(x, v)\nu(d(x, v)) \to \min .$$

# Теорема 4 (о мере Мазера)

Мера Мазера существует. При этом, если $\mu$ – мера Мазера, то выполнено равенство

$$\int_{\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d} L(x, v)\mu(d(x, v)) = -\overline{H},$$

где $(\varphi, \overline{H})$ – решение слабого KAM уравнения.

# Перспективы

- характеризация всех неподвижных точек оператора Лакса-Олейник;
- стратегии для задачи с интегральным показателем качества;
- перенос слабой КАМ теории на случай невыпуклого и негладкого гамильтониана.

# Библиография I


Bardi, M. and Capuzzo-Dolcetta, I. (2008).
Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations.
Mod. Birkhäuser Class. Birkhäuser, Basel, Switzerland, reprint of the 1997 original edition.

Clarke, F., Ledyaev, Y. S., and Subbotin, A. I. (1999).
Universal feedback control via proximal aiming in problems of control under disturbance and differential games.
In Algebra. Topology. Differential equations and their applications, Collection of papers dedicated to the 90th anniversary of academician Lev Semenovich Pontryagin, pages 165–186. Moskva: Nauka, Maik Nauka/ Interperiodika.

Fathi, A. (2008).
The weak KAM theorem in Lagrangian dynamics.
Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

# Библиография II


Lions, P., Papanicolau, G., and Varadhan, R. (1986).
Homogenization of Hamilton-Jacobi equations.
Preprint.

Sorrentino, A. (2015).
Action-minimizing methods in Hamiltonian dynamics: an introduction to Aubry-Mather theory.
Princeton University Press, Pinceton, NJ, USA.

Спасибо за внимание!