Construction of multidimensional quadrics using a thread and some generalizations of this

G. V. Belozerov

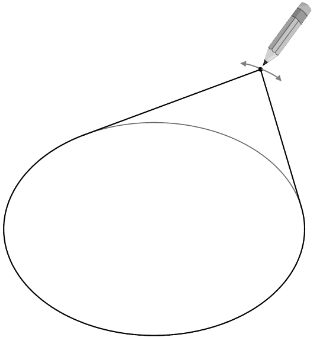
Lomonosov MSU, Faculty of Mechanics and Mathematics
Dynamics in Siberia - 2026

March 2, 2026

Задача о нити и эллипсе

Вопрос

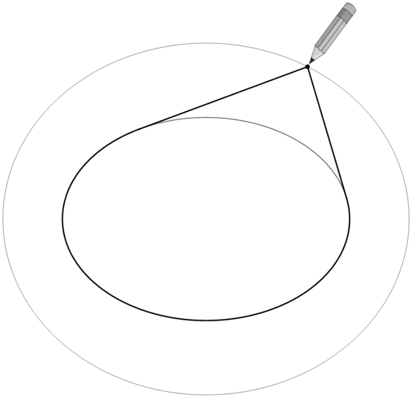
На эллипс длины l накинули петельку бо́льшей длины, поставили внутрь петли карандаш и, натянув его до предела, нарисовали кривую. Какая кривая получилась в результате?



Ответ к задаче

Теорема (Грейвс)

Если на эллипс длины l накинуть петельку бо́льшей длины, поставить внутрь петли грифиль карандаша и, натянув карандаш до предела, нарисовать кривую, то в результате получится эллипс, софокусный с заданным.



План доклада

1. *Интегрируемые гамильтоновы системы*
2. *Плоские софокусные биллиарды*
3. *Теорема Грейвса и фокальное свойство эллипса. Связь с переменными действия*
4. *Построение многомерных эллипсоидов с помощью нити*
5. *Другие обобщения*

Интегрируемые гамильтоновы системы. Базовые определения

Определение

Пара (M^{2n},ω), *где* M^{2n} *— гладкое многообразие, а* ω *— замкнутая невырожденная* 2*-форма на нем, называется* ***симплектическим многообразием***.

Рассмотрим на (M^{2n},ω) гладкую функцию H. Она порождает на M^{2n} гладкое векторное поле $v = \operatorname{sgrad} H$, компоненты которого в каждой локальной системе координат вычисляются по формуле:

$$(\operatorname{sgrad} H)^i = \omega^{ij}\frac{\partial H}{\partial x^j}.$$

Определение

Векторное поле $v = \operatorname{sgrad} H$ *называется* ***гамильтоновой системой***, *а функция* H *—* ***функцией Гамильтона*** *этого векторного поля.*

Интегрируемые гамильтоновы системы. Базовые определения

Форма ω определяет скобку Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ на пространстве $C^\infty(M^{2n})$. Эта скобка задается следующей формулой.

$$\{f,g\} = \omega(\operatorname{sgrad} f, \operatorname{sgrad} g) \qquad \forall f,g \in C^\infty(M^{2n}).$$

Определение

*Гамильтонова система $v = \operatorname{sgrad} H$ называется **вполне интегрируемой по Лиувиллю**, если существует набор гладких на M^{2n} функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$, таких, что:*

1. $f_1, \ldots, f_n$ *— функционально независимые первые интегралы поля v;*
2. $f_1, \ldots, f_n$ *попарно коммутируют, т.е. $\{f_i, f_j\} = 0$, $\forall i,j = 1,\ldots,n$;*
3. *потоки $\operatorname{sgrad} f_i$ полны, то есть параметр каждой интегральной кривой может принимать любое вещественное значение.*

Интегрируемые гамильтоновы системы. Теорема Лиувилля

Всякая вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система задает расслоение многообразия M^{2n} на связные компоненты поверхностей совместного уровня функций $f_1, \ldots, f_n$ — **слоение Лиувилля**.

Теорема (Лиувилль)

Пусть $v = \operatorname{sgrad} H$ — вполне интегрируемая по Лиувиллю гамильтонова система на M^{2n} и T_ξ — связная компонента регулярной поверхности уровня интегралов $f_1, \ldots, f_n$. Тогда:

1. *T_ξ является гладким лагранжевым подмногообразием размерности n, диффеоморфным $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^m$. В частности, если T_ξ компактна, она диффеоморфна n-мерному тору.*
2. *Слоение Лиувилля в малой окрестности U тора T^n тривиально, то есть диффеоморфно прямому произведению T^n и n-мерного диска D^n.*

Интегрируемые гамильтоновы системы. Теорема Лиувилля

Теорема (Лиувилль)

3. *В окрестности $U = T^n \times D^n$ определены гладкие координаты — переменные действие-угол $(s_1, \dots, s_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ такие, что*
   - *$s_1, \dots, s_n$ — координаты на D^n, а $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — 2π-периодические координаты на T^n*
   - *$s_1, \dots, s_n$ — функции от первых интегралов $f_1, \dots, f_n$;*
   - *$\omega = ds_i \wedge d\varphi_i$;*
   - *интегральные кривые векторного поля v в этих координатах задаются системой дифференциальных уравнений*

   $$\dot{s}_i = 0, \quad \dot{\varphi}_i = h_i(s_1, \dots, s_n) \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

   где h_i — некоторые гладкие функции.

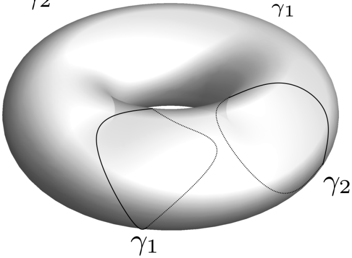
Как вычислить переменные действия?

Переменные действия

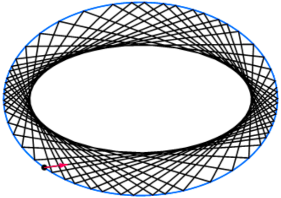
На каждом торе Лиувилля x из малой окрестности U выберем цикл $\gamma(x)$, непрерывно зависящий от тора. Хорошо известно, что в U форма ω точна, т.е. $\omega = d\alpha$. В таком случае

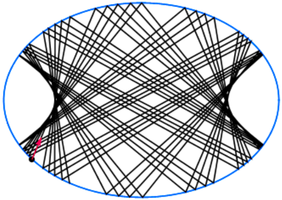
$$s(x) = \int\limits_{\gamma(x)} \alpha \text{ — переменная действия.}$$

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \qquad \int\limits_{\gamma_1} \alpha = \int\limits_{\gamma_2} \alpha$$



Биллиард внутри эллипса





Теорема (Биркгоф)

Биллиард внутри эллипса интегрируем. Все прямолинейные участки (или их продолжения) произвольной траектории-ломаной касаются одной общей квадрики, софокусной с границей.

Семейство софокусных квадрик на плоскости

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} = 1, \quad a > b$$

Биллиард внутри эллипса

Фазовое пространство системы, симплектическая структура, интегралы

Пусть D — область, ограниченная эллипсом, тогда

$$M^4 = \{(x, v) | x \in D, v \in T_x\mathbb{R}^2\} / \sim,$$

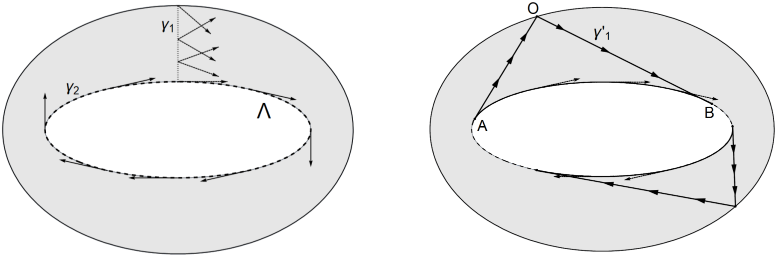
где $\sim$ — отношение эквивалентности, отвечающее биллиардному закону.

$$\alpha = p_1 d\lambda_1 + p_2 d\lambda_2$$
$$\omega = dp_1 \wedge d\lambda_1 + dp_2 \wedge d\lambda_2$$

В декартовых координатах дополонительный интеграл Λ (*параметр каустики*) записывается в виде

$$\Lambda = \frac{b\dot{x}^2 + a\dot{y}^2 - (\dot{x}y - \dot{y}x)^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Переменные действия биллиарда внутри эллипса

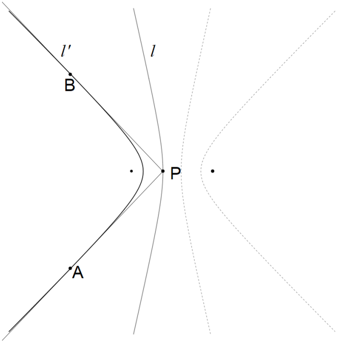


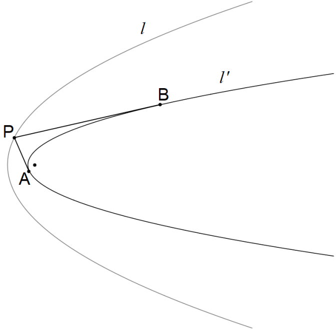
Геометрический смысл переменных действия

$$s_1 = \int\limits_{\gamma_1} \alpha = h(|OA| + |OB| - \operatorname{arc} AB) \Rightarrow \text{теорема Грейвса}$$

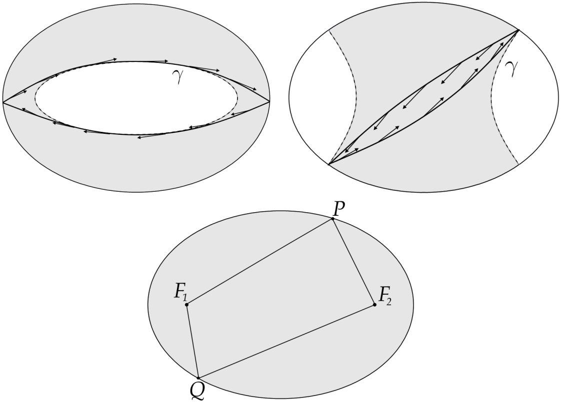
$$s_2 = \int\limits_{\gamma_2} \alpha \text{ — длина каустического эллипса, умноженная на } h$$

Теорема Грейвса для других плоских квадрик





Фокальное свойство эллипса как предел Грейвса



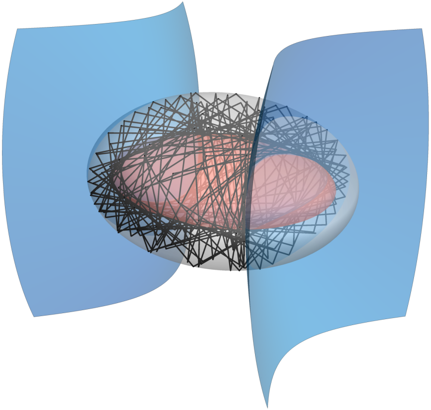
Вывод

Фокальное свойство эллипса реализует интеграл $\int\limits_{\gamma/2} \alpha$, в котором цикл γ берется гомологичным критической окружности.

Биллиард внутри эллипсоида произвольной размерности

Теорема (Якоби, Шаль, Биркгоф и др.)

Биллиард внутри n-осного эллипсоида в $\mathbb{R}^n$ интегрируем. Более того, все звенья (или их продолжения) произвольной траектории-ломаной касаются $n-1$ квадрики-каустики, софокусной с эллипсоидом.



Биллиард внутри эллипсоида произвольной размерности

Семейство софокусных квадрик в $\mathbb{R}^n$

$$\frac{x_1^2}{a_1-\lambda}+\cdots+\frac{x_n^2}{a_n-\lambda}=1, \quad a_1>\cdots>a_n>0$$

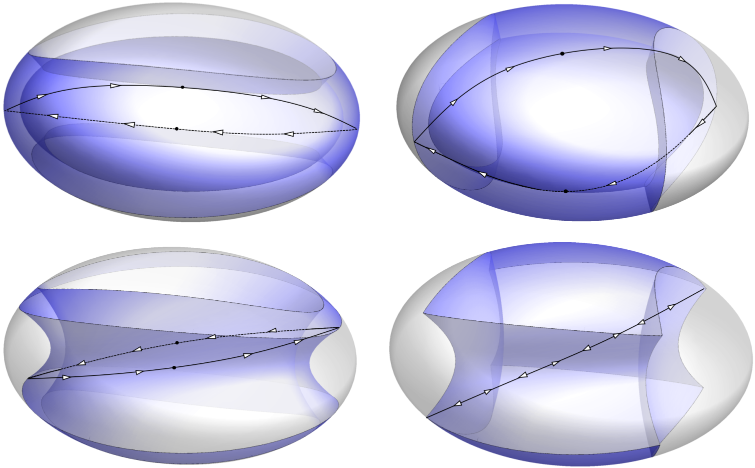
Максимальный седловой слой

Пусть $\Lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \Lambda_{n-1}$ — параметры софокусных квадрик-каустик. Тогда минимальный ранг седлового слоя равен 0. Он отвечает уровню

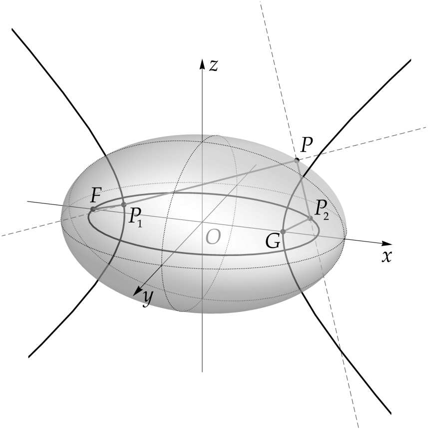
$$\Lambda_1=a_2, \Lambda_2=a_3, \ldots, \Lambda_{n-1}=a_n.$$

Соответствующая критическая окружность в слое реализуется движением вдоль наибольшей полуоси (вдоль Ox_1). **Оказывается, на каждой слое, близком к данному, можно выделить цикл γ, гомологичный критической окружности, и отвечающая ему функция действия будет гладкой в окрестности слоя.**

Цикл γ для эллипсоида в $\mathbb{R}^3$



Конструкция Штауде



Эллипсоид $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$

Нить длины $2\sqrt{a}$

$F : \dfrac{x^2}{a-c} = 1;\ y, z = 0$

$P_1 : \dfrac{x^2}{a-b} + \dfrac{z^2}{c-b} = 1; y = 0$

P — точка натяжения нити

$P_2 : \dfrac{x^2}{a-c} + \dfrac{y^2}{b-c} = 1; z = 0$

$G : \dfrac{x^2}{a-b} = 1;\ y, z = 0$

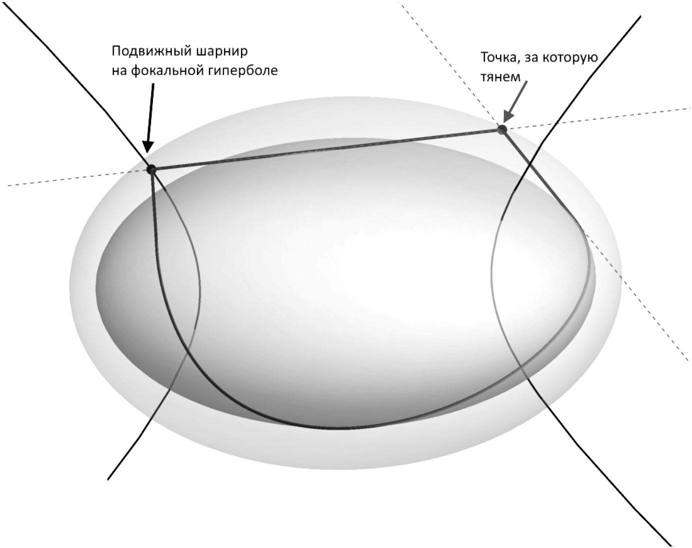
Общий алгоритм

Схема алгоритма

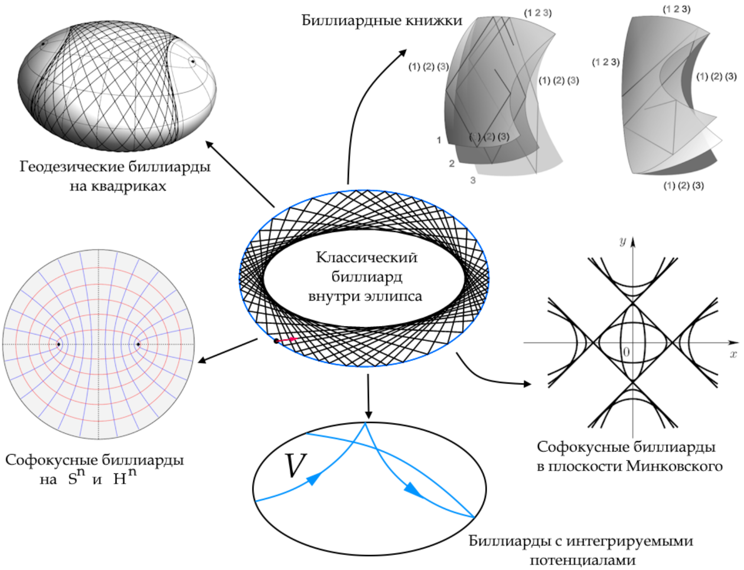
Чтобы построить эллипсоид $\dfrac{x_1^2}{a_1} + \dots + \dfrac{x_n^2}{a_n} = 1$, рассмотрим нерастяжимую нить длины $2\sqrt{a_1}$. Пусть F_0 и G_0 — ее концы. Закрепим последовательно ее точки в локациях, указанных в таблице.

<table>
<tr><th colspan="2">Начало нити</th><th colspan="2">Конец нити</th></tr>
<tr><td rowspan="4">$\Downarrow$</td><td>$F_0 : \dfrac{x_1^2}{a_1 - a_n} = 1$</td><td>$G_0 : \dfrac{x_1^2}{a_1 - a_2} = 1$</td><td rowspan="4">$\Uparrow$</td></tr>
<tr><td>$F_1 : \dfrac{x_1^2}{a_1 - a_{n-1}} + \dfrac{x_n^2}{a_n - a_{n-1}} = 1$</td><td>$G_1 : \dfrac{x_1^2}{a_1 - a_3} + \dfrac{x_2^2}{a_2 - a_3} = 1$</td></tr>
<tr><td>$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$</td><td>$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$</td></tr>
<tr><td>$F_{n-2} : \dfrac{x_1^2}{a_1 - a_2} + \dots + \dfrac{x_n^2}{a_n - a_2} = 1$</td><td>$G_{n-2} : \dfrac{x_1^2}{a_1 - a_n} + \dots + \dfrac{x_{n-1}^2}{a_{n-1} - a_n} = 1$</td></tr>
<tr><td colspan="4">P — точка натяжения нити</td></tr>
</table>

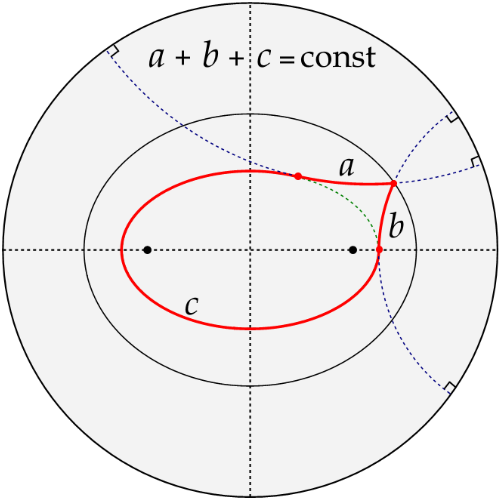
Обобщенная теорема Грейвса в $\mathbb{R}^3$



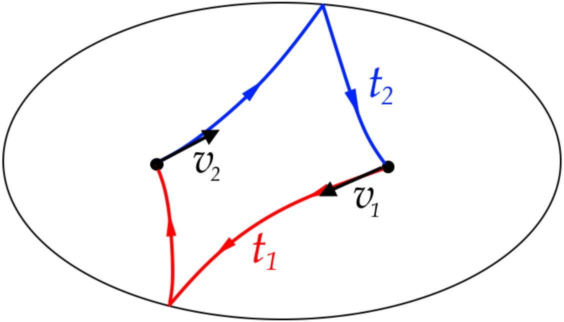
Интегрируемые обобщения биллиарда в эллипсе



Фокальное свойство на плоскости Лобачевского



Пусть V - потенциал, удовлетворяющий условию В.В. Козлова



$$|v_1| = |v_2| \Rightarrow t_1 = t_2$$

Спасибо за внимание!

Работа выполнена в МГУ имени М.В. Ломоносова при поддержке гранта РНФ № 25-71-10087.