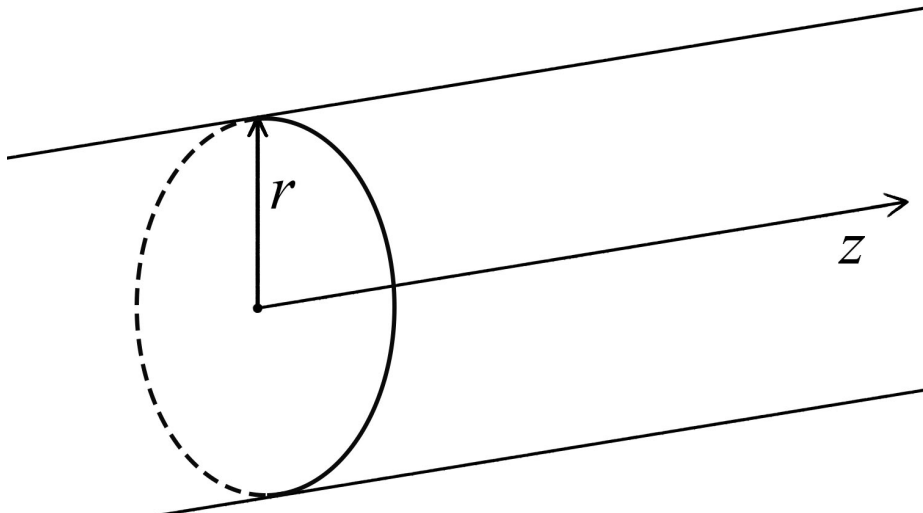


# Исследование спектральной задачи, описывающей возмущения состояния покоя полимерной жидкости в цилиндре (модель Виноградова-Покровского)

Бибердорф Э.А., Ткачев Д.Л.

# Течение полимерной жидкости



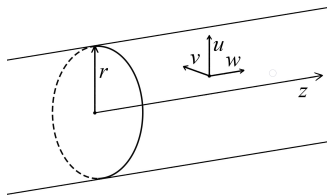
# Течение полимерной жидкости

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0,$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla P = \operatorname{div} \Pi,$$

$$\frac{1}{\operatorname{Wi}} \Pi + \overset{\nabla}{\Pi} = \frac{2}{\operatorname{Wi} \operatorname{Re}} D - \operatorname{Re} \left( \frac{k - \beta}{3} \Pi - \beta \Pi^2 \right)$$

$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)$  – материальная производная  
 $\overset{\nabla}{\Pi} = \frac{d\Pi}{dt} - [(\nabla \vec{u})^T \Pi + \Pi (\nabla \vec{u})]$  – производная Олдройда  
Олдройда



# Течение полимерной жидкости

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0,$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla P = \operatorname{div} \Pi,$$

$$\frac{1}{Wi} \Pi + \overset{\nabla}{\Pi} = \frac{2}{Wi Re} D - Re \left( \frac{k - \beta}{3} \Pi - \beta \Pi^2 \right)$$

$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)$  – материальная производная

$\overset{\nabla}{\Pi} = \frac{d\Pi}{dt} - [(\nabla \vec{u})^T \Pi + \Pi (\nabla \vec{u})]$  – производная Олдройда

$\vec{u}$  – вектор скорости

$P$  – полное давление

$\Pi$  – тензор анизотропии,

$I = \operatorname{tr} \Pi$

$D$  – симметризованный тензор градиента скорости

$k, \beta$  – феноменологические параметры

$Wi$  – число Вайсенберга

$Re$  – число Рейнольдса

# Сравнение моделей

Модель  
Виноградова-Покровского

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0,$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla P = \operatorname{div} \Pi,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{Wi}} \Pi + \overset{\nabla}{\Pi} &= \\ &= \frac{2}{\operatorname{Wi} \operatorname{Re}} D - \operatorname{Re} \left( \frac{k - \beta}{3} \Pi - \beta \Pi^2 \right) \end{aligned}$$

Система Навье-Стокса

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla P = \frac{1}{\operatorname{Re}} \Delta \vec{u}$$

Модель Олдройда

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0,$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla P = \operatorname{div} \Pi,$$

$$\frac{1}{\operatorname{Wi}} \Pi + \overset{\nabla}{\Pi} = \frac{2}{\operatorname{Wi} \operatorname{Re}} D + \frac{2}{\operatorname{Re}_s} \overset{\nabla}{D}$$

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0,$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \nabla P = \operatorname{div} \Pi,$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\operatorname{Wi}} \Pi + \overset{\nabla}{\Pi} = \\ & = \frac{2}{\operatorname{Wi} \operatorname{Re}} D - \operatorname{Re} \left( \frac{k - \beta}{3} \Pi - \beta \Pi^2 \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u' = -\frac{1}{r} u - inw, \\ w'' = -\frac{1}{r} w' + 2\lambda \hat{\lambda} w + 2in\hat{\lambda}\Omega + 2n^2 u, \\ \Omega' = -\frac{2\lambda \hat{\lambda} + n^2}{2\hat{\lambda}} u, \end{cases}$$

где  $\hat{\lambda} = (\lambda + \operatorname{Wi}^{-1})/2\kappa^2$ .

Линеаризация относительно возмущений вида  $u(r)e^{\lambda t + inz}$

## Упрощение и доп. вариант

$$\begin{cases} u' = -\frac{1}{r}u - inw, \\ w'' = -\frac{1}{r}w' + 2\lambda\hat{\lambda}w + 2in\hat{\lambda}\Omega + 2n^2u, \\ \Omega' = -\frac{2\lambda\hat{\lambda} + n^2}{2\hat{\lambda}}u, \end{cases}$$

Обозначим  $\hat{\Omega} = 2\hat{\lambda}\Omega$  и  $\mu = 2\lambda\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\lambda} = (\lambda + Wi^{-1})/2\kappa^2$ .

$$\begin{cases} u' = -\frac{1}{r}u - inw, \\ w'' = -\frac{1}{r}w' + \mu w + in\hat{\Omega} + 2n^2u, \\ \hat{\Omega}' = -(\mu + n^2)u, \end{cases}$$

Обозначим  $\tilde{u} = ru$ ,  $\tilde{w} = rw$

$$\begin{cases} \tilde{u}' = -in\tilde{w}, \\ \tilde{w}'' = \frac{1}{r}\tilde{w}' + \left(\mu - \frac{1}{r^2}\right)\tilde{w} + inr\hat{\Omega} + 2n^2\tilde{u}, \\ r\hat{\Omega}' = -(\mu + n^2)\tilde{u}. \end{cases}$$

# Варианты системы

$$\begin{cases} u' = -\frac{1}{r}u - inw, \\ w'' = -\frac{1}{r}w' + \mu w + in\hat{\Omega} + 2n^2u, \\ \hat{\Omega}' = -(\mu + n^2)u, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{u}' = -in\tilde{w}, \\ \tilde{w}'' = \frac{1}{r}\tilde{w}' + \left(\mu - \frac{1}{r^2}\right)\tilde{w} + inr\hat{\Omega} + 2n^2\tilde{u}, \\ r\hat{\Omega}' = -(\mu + n^2)\tilde{u}. \end{cases}$$

Исключение переменных из этих систем позволяет получить уравнения

$$u^{IV} + \frac{2}{r}u''' + u'' \left( -\frac{3}{r^2} - \mu \right) + u' \left( \frac{3}{r^3} - \frac{\mu}{r} + 2in^3 \right) + \\ + u \left( -\frac{3}{r^4} + \frac{\mu}{r^2} + n^2(\mu + n^2) \right) = 0,$$

$$\tilde{u}^{IV} - \frac{2}{r}\tilde{u}''' + \tilde{u}'' \left( \frac{3}{r^2} - \mu \right) + \tilde{u}' \left( -\frac{3}{r^3} + \frac{\mu}{r} + 2in^3 \right) + \\ + \tilde{u} \left( n^2(n^2 + \mu) - \frac{2in^3}{r} \right) = 0$$

# Краевые условия

На поверхности цилиндра условие прилипания:

$$u(1) = w(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad u'(1) = 0$$

В центре цилиндра:

$$|u(0)| < \infty, \quad |w(0)| < \infty \quad \Rightarrow \quad |u'(0)| < \infty$$

---

Из построения функций  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{w}$  следует

$$\tilde{u}(1) = \tilde{w}(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}'(1) = 0$$

$$\tilde{u}(0) = \tilde{w}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}'(0) = 0$$

## Дополнительные краевые условия

Естественное условие ограниченности

$$|\Omega(0)| < \infty, \quad |\Omega(1)| < \infty.$$

$$|\hat{\Omega}(0)| < \infty, \quad |\hat{\Omega}(1)| < \infty.$$

Из уравнений систем следует

$$\Omega'(0) = 0, \quad \Omega'(1) = 0.$$

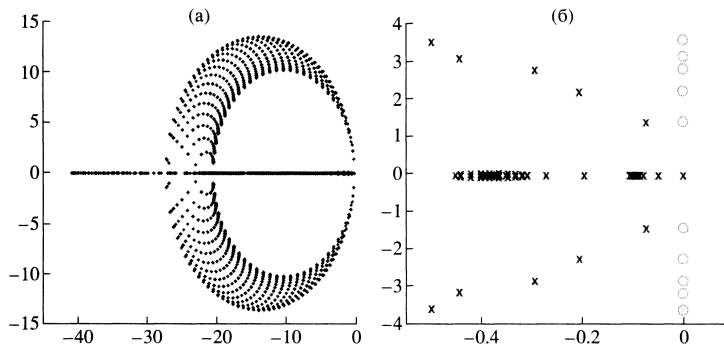
$$\hat{\Omega}'(0) = 0, \quad \hat{\Omega}'(1) = 0.$$

Эти условия с математической точки зрения являются избыточными, однако они не делают задачи переобусловленными, так как решения должны удовлетворять этим условиям.

# Спектральные задачи

$\begin{cases} u' = -\frac{1}{r}u - inw, \\ w'' = -\frac{1}{r}w' + \mu w + in\hat{\Omega} + 2n^2u, \\ \hat{\Omega}' = -(\mu + n^2)u, \end{cases}$	$\begin{aligned} u(1) = w(1) &= 0 \\  u(0) ,  w(0)  &< \infty \end{aligned}$	$ \hat{\Omega}(0)  < \infty, \quad  \hat{\Omega}(1)  < \infty.$
$\begin{cases} \tilde{u}' = -in\tilde{w}, \\ \tilde{w}'' = \frac{1}{r}\tilde{w}' + \left(\mu - \frac{1}{r^2}\right)\tilde{w} + inr\hat{\Omega} + 2n^2\tilde{u}, \\ r\hat{\Omega}' = -(\mu + n^2)\tilde{u}. \end{cases}$	$\begin{aligned} \tilde{u}(1) = \tilde{w}(1) &= 0 \\ \tilde{u}(0) = \tilde{w}(0) &= 0 \end{aligned}$	$ \hat{\Omega}(0)  < \infty, \quad  \hat{\Omega}(1)  < \infty.$
$\begin{aligned} u^{IV} + \frac{2}{r}u''' + u'' \left(-\frac{3}{r^2} - \mu\right) + \\ + u' \left(\frac{3}{r^3} - \frac{\mu}{r} + 2in^3\right) + \\ + u \left(-\frac{3}{r^4} + \frac{\mu}{r^2} + n^2(\mu + n^2)\right) = 0, \end{aligned}$	$\begin{aligned} u(1) = u'(1) &= 0 \\  u(0) ,  u'(0)  &< \infty \end{aligned}$	
$\begin{aligned} \tilde{u}^{IV} - \frac{2}{r}\tilde{u}''' + \tilde{u}'' \left(\frac{3}{r^2} - \mu\right) + \\ + \tilde{u}' \left(-\frac{3}{r^3} + \frac{\mu}{r} + 2in^3\right) + \\ + \tilde{u} \left(n^2(n^2 + \mu) - \frac{2in^3}{r}\right) = 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \tilde{u}(1) = \tilde{u}'(1) &= 0 \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}'(0) &= 0 \end{aligned}$	

## Проблемы: разные дискретизации – разный спектр



С. К. Годунов, В. Т. Жуков, О. Б. Феодоритова, “Метод расчета инвариантных подпространств для симметрических гиперболических уравнений”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 46:6 (2006), 1019–1031

## Проблемы: разные дискретизации – разный спектр

Спектр $D$	Спектр $D_2$	Кратность (число пар)	Число истинных пар
	$\pm 0.9984i$	4	0
$\pm 1.4142i$	$\pm 1.4119i$	4	1
	$\pm 1.9872i$	4	0
$\pm 2.2361i$	$\pm 2.2239i$	8	2
$\pm 2.8284i$	$\pm 2.8103i$	4	1
	$\pm 2.9568i$	4	0
$\pm 3.1623i$	$\pm 3.1208i$	8	2
$\pm 3.6056i$	$\pm 3.5625i$	8	2
	$\pm 3.8980i$	4	0

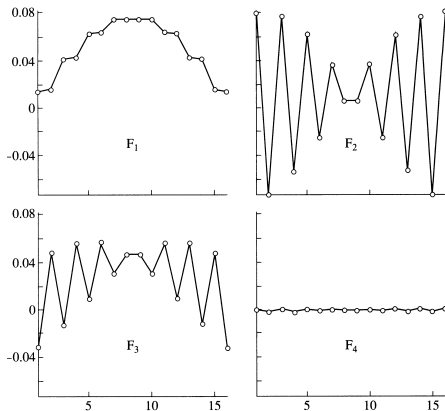
С. К. Годунов, В. Т. Жуков, О. Б. Феодоритова, “Метод расчета инвариантных подпространств для симметрических гиперболических уравнений”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 46:6 (2006), 1019–1031

## Проблемы: "паразитические" с.зн.

Спектр $D$	Спектр $D_2$	Кратность (число пар)	Число истинных пар
	$\pm 0.9984i$	4	0
$\pm 1.4142i$	$\pm 1.4119i$	4	1
	$\pm 1.9872i$	4	0
$\pm 2.2361i$	$\pm 2.2239i$	8	2
$\pm 2.8284i$	$\pm 2.8103i$	4	1
	$\pm 2.9568i$	4	0
$\pm 3.1623i$	$\pm 3.1208i$	8	2
$\pm 3.6056i$	$\pm 3.5625i$	8	2
	$\pm 3.8980i$	4	0

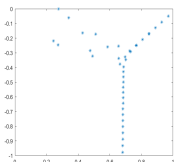
С. К. Годунов, В. Т. Жуков, О. Б. Феодоритова, "Метод расчета инвариантных подпространств для симметрических гиперболических уравнений", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 46:6 (2006), 1019–1031

# Проблемы: "паразитические" с.зн.



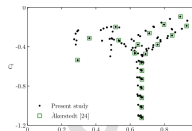
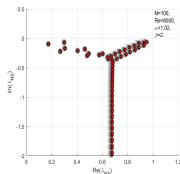
С. К. Годунов, В. Т. Жуков, О. Б. Феодоритова, “Метод расчета инвариантных подпространств для симметрических гиперболических уравнений”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 46:6 (2006), 1019–1031

# Проблемы: нехарактерный спектр



Течение Пуазейля вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале

Течение Пуазейля вязкой несжимаемой жидкости в кольцевых и цилиндрических каналах



Течение вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости в магнитном поле

Ye. Velizhanina, B. Knaepen  
On the instability of the magnetohydrodynamic pipe flow subject to a transverse magnetic field, Physics of Fluids, 2023

В модели Виноградова-Покровского спектр асимптотически приближается к прямой

$$\text{real}(\lambda) = -\frac{1}{2 \text{Wi}}$$

Оператор не секториальный

# Псевдоспектральный метод

Узлы коллокации – точки Гаусса-Лобатто

$$\xi_j = \cos \frac{\pi(N-j)}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N$$

$D \approx \frac{d}{d\xi}$  – коллокационная матрица, приближающая в точках  $\xi_k$  производную функции на интервале  $[-1, 1]$ .

$$D^k \approx \frac{d^k}{d\xi^k}$$

Переход на интервал  $[0, 1]$ :

$$r_j = \frac{\xi_j + 1}{2}$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} & \dots & d_{0N} \\ d_{10} & d_{11} & \dots & d_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N0} & d_{N1} & \dots & d_{NN} \end{pmatrix}$$

# Отображение граничных условий в структуре матриц

$$D = \begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} & \dots & d_{0N-1} & d_{0N} \\ d_{10} & d_{11} & \dots & d_{1N-1} & d_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{N-10} & d_{N-11} & \dots & d_{N-1N-1} & d_{N-1N} \\ d_{N0} & d_{N1} & \dots & d_{NN-1} & d_{NN} \end{pmatrix}$$

Самое простое

Однородные условия Дирихле  $u(0) = 0 \Rightarrow D^0 =$

$$\begin{pmatrix} d_{10} & d_{11} & \dots & d_{1N-1} & d_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{N-10} & d_{N-11} & \dots & d_{N-1N-1} & d_{N-1N} \\ d_{N0} & d_{N1} & \dots & d_{NN-1} & d_{NN} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1N-1} & d_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{N-11} & \dots & d_{N-1N-1} & d_{N-1N} \\ d_{N1} & \dots & d_{NN-1} & d_{NN} \end{pmatrix}$$

Однородные условия Дирихле  $u(1) = 0 \Rightarrow D_0 =$

$$\begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} & \dots & d_{0N-1} & d_{0N} \\ d_{10} & d_{11} & \dots & d_{1N-1} & d_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{N-10} & d_{N-11} & \dots & d_{N-1N-1} & d_{N-1N} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} & \dots & d_{0N-1} \\ d_{10} & d_{11} & \dots & d_{1N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N-10} & d_{N-11} & \dots & d_{N-1N-1} \end{pmatrix}$$

# Отображение граничных условий в структуре матриц

$$D = \begin{pmatrix} d_{00} & d_{01} & \dots & d_{0N-1} & d_{0N} \\ d_{10} & d_{11} & \dots & d_{1N-1} & d_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{N-10} & d_{N-11} & \dots & d_{N-1N-1} & d_{NN} \\ d_{N0} & d_{N1} & \dots & d_{NN-1} & d_{NN} \end{pmatrix}$$

Самое простое

Однородные условия Дирихле  $u(0) = u(1) = 0 \Rightarrow D_0^0 =$

$$\begin{pmatrix} d_{10} & d_{11} & \dots & d_{1N-1} & d_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{N-10} & d_{N-11} & \dots & d_{N-1N-1} & d_{NN} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N-11} & \dots & d_{N-1N-1} \end{pmatrix}$$

# Отображение граничных условий в структуре матриц

## Метод умножения на функцию

Однородные условия Дирихле и Неймана  $u(0) = u'(0) = 0 \Rightarrow$

$$u(r) = r \cdot v(r), \text{ где } v(0) = 0$$

$$u' = v + rv' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}^{00} = (\mathbf{I} + \text{diag}(r_j)\mathbf{D}^0)\text{diag}\left(\frac{1}{r_j}\right)$$

Условие ограниченности  $|u(0)| < \infty \Rightarrow$

$$u(r) = \frac{1}{r} \cdot v(r), \text{ где } v(0) = 0$$

$$u' = -\frac{1}{r^2}v + \frac{1}{r}v' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}^{<\infty} = \text{diag}\left(\frac{1}{r_j}\right) (-\mathbf{I} + \mathbf{D}^0 \text{diag}(r_j))$$

# Отображение граничных условий в структуре матриц

## Метод ассимптотики для уравнений

Пусть  $L_j(r, d/dr)$  – линейные дифференциальные операторы

$$(L_1 - \mu L_2)u = 0, \quad 0 \leq r \leq 1$$

Краевые условия:

$$|u(0)| < \infty, |u'(0)| < \infty, \quad u(1) = u'(1) = 0$$

Ассимптотика собственной функции в нуле:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{u(r)}{u_0(r)} = 1,$$

где

$$(L_3 - \mu L_4)u_0 = 0, \quad 0 \leq r \leq 1$$

Дискретизируем оба уравнения с учетом левого условия:

$$L_j(r, d/dr) \Rightarrow L_j(r, D_{00})$$

# Отображение граничных условий в структуре матриц

## Метод ассимптотики для уравнений

Дискретизируем оба уравнения с учетом левого условия:

$$L_j(r, d/dr) \Rightarrow L_j(r, D_{00})$$

Получаем алгебраические соотношения

$$(L_1(r, D_{00}) - \mu L_2(r, D_{00})) u = (A_1 - \mu B_1) u = 0$$

– выполняется на всем интервале  $[0, 1]$

$$(L_3(r, D_{00}) - \mu L_4(r, D_{00})) u = (A_0 - \mu B_0) u = 0$$

– выполняется в окрестности нуля

# Склейка пучков

На интервале  $[0, 1]$  выполнено соотношение  $(A_1 - \tau B_1)u = 0$

$$\left( \left( \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1N}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2N}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{N1}^{(1)} & a_{N2}^{(1)} & \cdots & a_{NN}^{(1)} \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} b_{11}^{(1)} & b_{12}^{(1)} & \cdots & b_{1N}^{(1)} \\ b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} & \cdots & b_{2N}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{N1}^{(1)} & b_{N2}^{(1)} & \cdots & b_{NN}^{(1)} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

В окрестности  $r = 0$  выполнено соотношение  $(A_0 - \tau B_0)u = 0$

$$\left( \left( \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1N}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \cdots & a_{2N}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{N1}^{(0)} & a_{N2}^{(0)} & \cdots & a_{NN}^{(0)} \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} b_{11}^{(0)} & b_{12}^{(0)} & \cdots & b_{1N}^{(0)} \\ b_{21}^{(0)} & b_{22}^{(0)} & \cdots & b_{2N}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{N1}^{(0)} & b_{N2}^{(0)} & \cdots & b_{NN}^{(0)} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Склейка пучков

На интервале  $[0, 1]$  выполнено соотношение  $(A_1 - \tau B_1)u = 0$

$$\left( \left( \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1N}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2N}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{N1}^{(1)} & a_{N2}^{(1)} & \cdots & a_{NN}^{(1)} \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} b_{11}^{(1)} & b_{12}^{(1)} & \cdots & b_{1N}^{(1)} \\ b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} & \cdots & b_{2N}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{N1}^{(1)} & b_{N2}^{(1)} & \cdots & b_{NN}^{(1)} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

В окрестности  $\tau = 0$  выполнено соотношение  $(A_0 - \tau B_0)u = 0$

$$\left( \left( \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1N}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \cdots & a_{2N}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{N1}^{(0)} & a_{N2}^{(0)} & \cdots & a_{NN}^{(0)} \end{pmatrix} - \tau \begin{pmatrix} b_{11}^{(0)} & b_{12}^{(0)} & \cdots & b_{1N}^{(0)} \\ b_{21}^{(0)} & b_{22}^{(0)} & \cdots & b_{2N}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{N1}^{(0)} & b_{N2}^{(0)} & \cdots & b_{NN}^{(0)} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Склейка пучков

На интервале  $[0, 1]$  выполнено соотношение  $(A_1 - \tau B_1)u = 0$

В окрестности  $r = 0$  выполнено соотношение  $(A_0 - \tau B_0)u = 0$

$$A^{\text{acc}} = \begin{pmatrix} \bar{A}_0 \\ \underline{A}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1N}^{(0)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2N}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{N1}^{(1)} & a_{N2}^{(1)} & \dots & a_{NN}^{(1)} \end{pmatrix}$$
$$B^{\text{acc}} = \begin{pmatrix} \bar{B}_0 \\ \underline{B}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}^{(0)} & b_{12}^{(0)} & \dots & b_{1N}^{(0)} \\ b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} & \dots & b_{2N}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{N1}^{(1)} & b_{N2}^{(1)} & \dots & b_{NN}^{(1)} \end{pmatrix}$$

$\bar{A}_0, \bar{B}_0$  – первые строки матриц  $A_0, B_0$ ,

$\underline{A}_1, \underline{B}_1$  – строки матриц  $A_1, B_1$ , начиная со второй

$$u^{IV} + \frac{2}{r}u''' + u'' \left( -\frac{3}{r^2} - \mu \right) + u' \left( \frac{3}{r^3} - \frac{\mu}{r} + 2in^3 \right) + \\ + u \left( -\frac{3}{r^4} + \frac{\mu}{r^2} + n^2(\mu + n^2) \right) = 0$$

$$L_1 = \frac{d^4}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3}{dr^3} - \frac{3}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} + \left( \frac{3}{r^3} + 2in^3 \right) \frac{d}{dr} + \left( -\frac{3}{r^4} + n^4 \right)$$

$$L_2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left( \frac{1}{r^2} - n^2 \right) = 0$$

Решение, удовлетворяющее левому граничному условию:

$$u_0 = \alpha r + \beta r^3$$

$$\Downarrow$$

$$L_3 = r^2 \frac{d^2}{dr^2} - 3r \frac{d}{dr} + 3, \quad L_4 = 0$$

D. L. Tkachev, E. A. Biberdorf Spectrum of a problem about the flow of a polymeric viscoelastic fluid in a cylindrical channel (Vinogradov-Pokrovski model) Сибирские электронные математические известия, 2023, том

$\begin{cases} u' = -\frac{1}{r}u - inw, \\ w'' = -\frac{1}{r}w' + \mu w + in\hat{\Omega} + 2n^2u, \\ \hat{\Omega}' = -(\mu + n^2)u, \end{cases}$	$u(1) = w(1) = 0$ $ u(0) ,  w(0)  < \infty$	$ \hat{\Omega}(0)  < \infty, \quad  \hat{\Omega}(1)  < \infty.$
$\begin{cases} \tilde{u}' = -in\tilde{w}, \\ \tilde{w}'' = \frac{1}{r}\tilde{w}' + \left(\mu - \frac{1}{r^2}\right)\tilde{w} + inr\hat{\Omega} + 2n^2\tilde{u}, \\ r\hat{\Omega}' = -(\mu + n^2)\tilde{u}. \end{cases}$	$\tilde{u}(1) = \tilde{w}(1) = 0$ $\tilde{u}(0) = \tilde{w}(0) = 0$	$ \hat{\Omega}(0)  < \infty, \quad  \hat{\Omega}(1)  < \infty.$
$u^{IV} + \frac{2}{r}u''' + u'' \left(-\frac{3}{r^2} - \mu\right) + u' \left(\frac{3}{r^3} - \frac{\mu}{r} + 2in^3\right) + u \left(-\frac{3}{r^4} + \frac{\mu}{r^2} + n^2(\mu + n^2)\right) = 0,$	$u(1) = u'(1) = 0$ $ u(0) ,  u'(0)  < \infty$	
$\tilde{u}^{IV} - \frac{2}{r}\tilde{u}''' + \tilde{u}'' \left(\frac{3}{r^2} - \mu\right) + \tilde{u}' \left(-\frac{3}{r^3} + \frac{\mu}{r} + 2in^3\right) + \tilde{u} \left(n^2(n^2 + \mu) - \frac{2in^3}{r}\right) = 0$	$\tilde{u}(1) = \tilde{u}'(1) = 0$ $\tilde{u}(0) = \tilde{u}'(0) = 0$	

$\begin{cases} u' = -\frac{1}{r}u - inw, \\ w'' = -\frac{1}{r}w' + \mu w + in\hat{\Omega} + 2n^2u, \\ \hat{\Omega}' = -(\mu + n^2)u, \end{cases}$	$\begin{aligned} u(1) = w(1) &= 0 \\  u(0) ,  w(0)  &< \infty \\ D_{00}^{<\infty} & \quad (1) \end{aligned}$	$ \hat{\Omega}(0)  < \infty, \quad  \hat{\Omega}(1)  < \infty.$ $D_{<\infty}^{<\infty} \quad (2)$
$\begin{cases} \tilde{u}' = -in\tilde{w}, \\ \tilde{w}'' = \frac{1}{r}\tilde{w}' + \left(\mu - \frac{1}{r^2}\right)\tilde{w} + inr\hat{\Omega} + 2n^2\tilde{u}, \\ r\hat{\Omega}' = -(\mu + n^2)\tilde{u}. \end{cases}$	$\begin{aligned} \tilde{u}(1) = \tilde{w}(1) &= 0 \\ \tilde{u}(0) = \tilde{w}(0) &= 0 \\ D_{00}^{00} & \quad (3) \end{aligned}$	$ \hat{\Omega}(0)  < \infty, \quad  \hat{\Omega}(1)  < \infty.$ $D_{<\infty}^{<\infty} \quad (4)$
$\begin{aligned} u^{IV} + \frac{2}{r}u''' + u'' \left(-\frac{3}{r^2} - \mu\right) + \\ + u' \left(\frac{3}{r^3} - \frac{\mu}{r} + 2in^3\right) + \\ + u \left(-\frac{1}{r^4} + \frac{\mu}{r^2} + n^2(\mu + n^2)\right) = 0, \end{aligned}$	$\begin{aligned} u(1) = u'(1) &= 0 \\  u(0) ,  u'(0)  &< \infty \\ D_{00}^{<\infty} \quad (5), \quad A^{acc} - \mu B^{acc} & \quad (6) \end{aligned}$	
$\begin{aligned} \tilde{u}^{IV} - \frac{2}{r}\tilde{u}''' + \tilde{u}'' \left(\frac{3}{r^2} - \mu\right) + \\ + \tilde{u}' \left(-\frac{3}{r^3} + \frac{\mu}{r} + 2in^3\right) + \\ + \tilde{u} \left(n^2(n^2 + \mu) - \frac{2in^3}{r}\right) = 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \tilde{u}(1) = \tilde{u}'(1) &= 0 \\ \tilde{u}(0) = \tilde{u}'(0) &= 0 \\ D_{00}^{00} & \quad (7) \end{aligned}$	

# Системы и уравнения

## Системы

**Недостатки:** большой размер, вырожденные матричные пучки

**Преимущества:** меньше норма, более точное вычисление собственных значений

## Уравнения

**Недостатки:** большая норма, менее точное вычисление собственных значений

**Преимущества:** меньше размер, нет зависимости от выбора граничных условий для функции давления

# Выбор «истинных» собственных значений

Фиксируются размерности  $N_1 < N_2 < N_3$ .

Сопоставляются собственные функции и собственные значения для всех трех размерностей ( $j = 1, \dots, N_1$ ):

$$\lambda_j^{[N_1]} \approx \lambda_j^{[N_2]} \approx \lambda_j^{[N_3]}$$

$$v_j^{[N_1]} \approx v_j^{[N_2]} \approx v_j^{[N_3]}$$

Критерии:

- \* близость собственных значений  $|\lambda_j^{[N_1]} - \lambda_j^{[N_2]}|, \quad |\lambda_j^{[N_2]} - \lambda_j^{[N_3]}|$
- \* близость собственных функций  $\|v_j^{[N_1]} - v_j^{[N_2]}\|, \quad \|v_j^{[N_2]} - v_j^{[N_3]}\|$
- \* вариации собственных функций  $\text{var } v_j^{[N_1]}, \quad \text{var } v_j^{[N_2]}, \quad \text{var } v_j^{[N_3]}$

$$\text{var } v^{[N_1]} = \sum_{k=1}^{N-1} |v_{k+1} - v_k|.$$

# Выбор «истинных» собственных значений

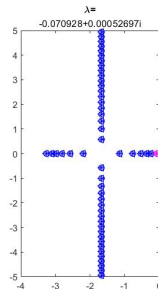
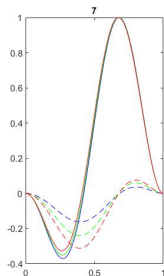
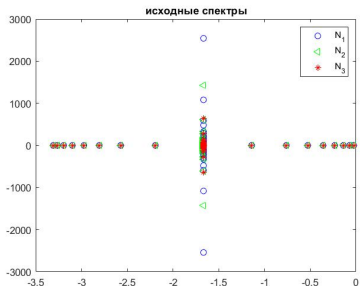
Критерии:

- \* близость собственных значений
- \* близость собственных функций
- \* вариации собственных функций

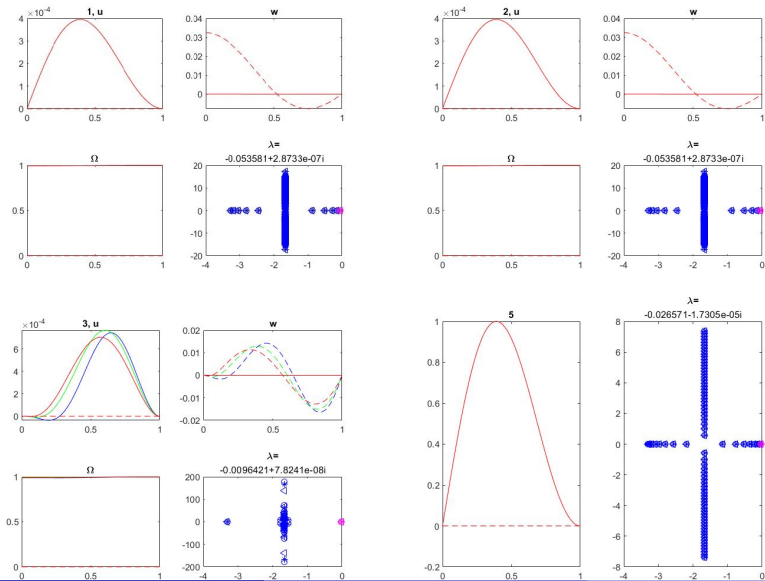
Значения каждого из критериев или их комбинаций сортируются по возрастанию. В полученных возрастающих последовательностях определяется максимальная для всех критериев относительная разница – «скачок» – между соседними значениями. Этот «скачок» разграничивает множество собственных значений, которые мы считаем «истинными», и множество тех точек, которые мы далее не рассматриваем.

Таким образом, мы отбрасываем те точки, для которых не наблюдается либо сходимости самих собственных значений, либо сходимости собственных функций, либо собственные функции имеют выраженную пилообразную структуру.

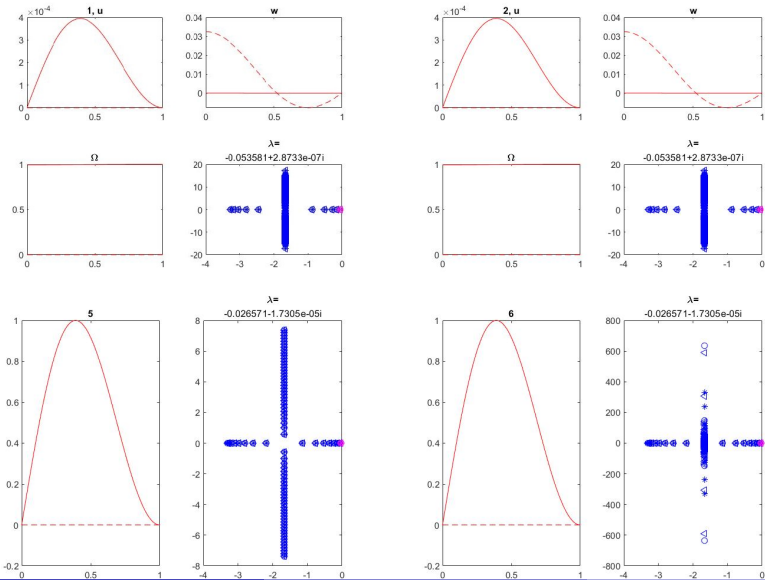
$Re=500$ ,  $Wi=0.3$ ,  $N_1 = 100$ ,  $N_2 = 150$ ,  $N_3 = 200$ ,  $n = 1$



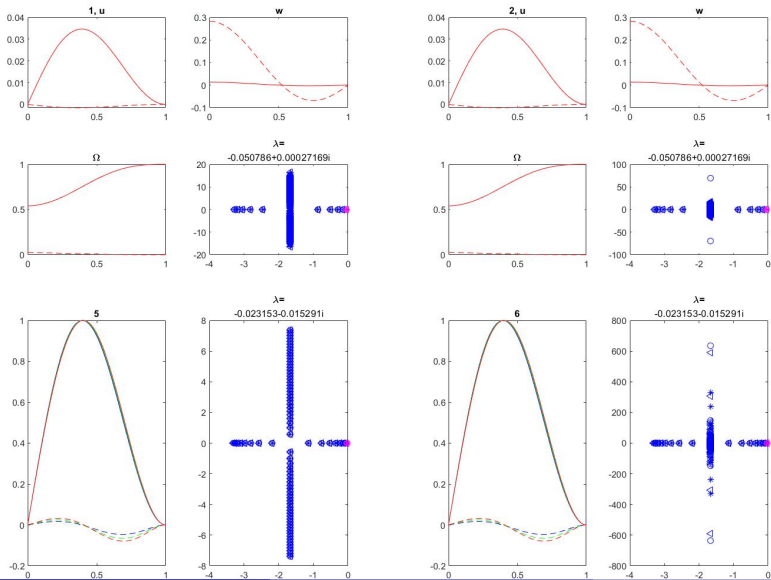
$Re=500$ ,  $Wi=0.3$ ,  $N_1 = 100$ ,  $N_2 = 150$ ,  $N_3 = 200$ ,  $n = 0.1$



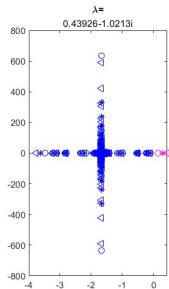
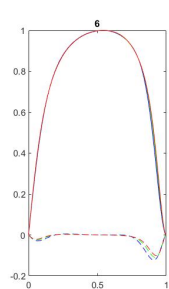
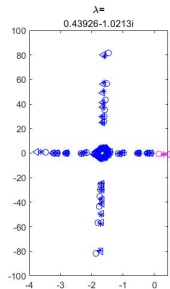
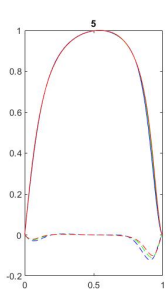
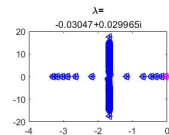
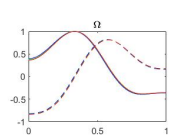
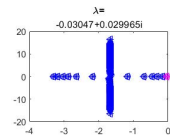
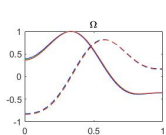
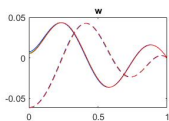
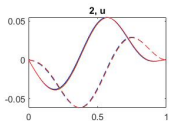
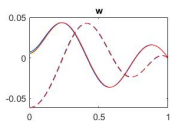
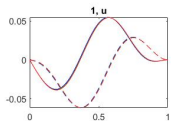
$Re=500$ ,  $Wi=0.3$ ,  $N_1 = 100$ ,  $N_2 = 150$ ,  $N_3 = 200$ ,  $n = 0.1$



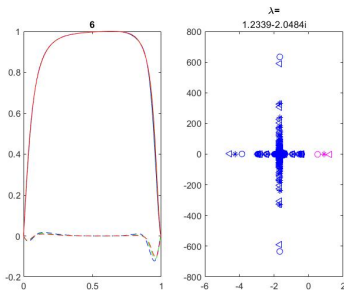
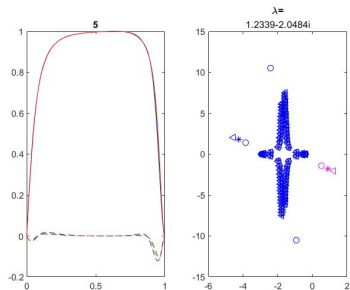
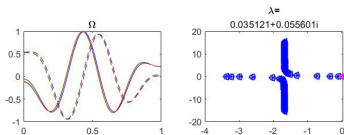
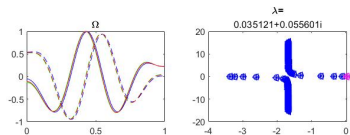
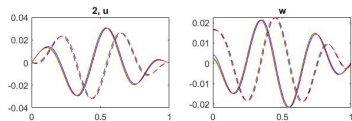
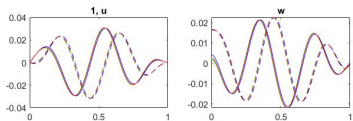
$Re=500$ ,  $Wi=0.3$ ,  $N_1 = 100$ ,  $N_2 = 150$ ,  $N_3 = 200$ ,  $n = 1$



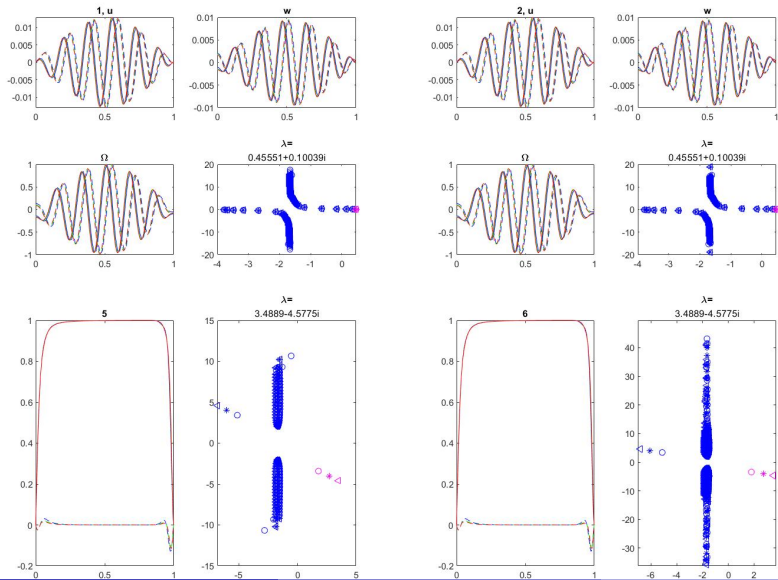
$Re=500$ ,  $Wi=0.3$ ,  $N_1 = 100$ ,  $N_2 = 150$ ,  $N_3 = 200$ ,  $n = 10$

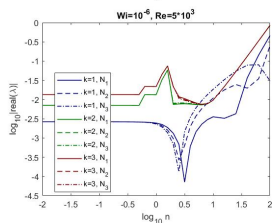
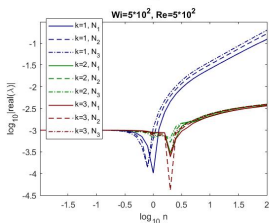
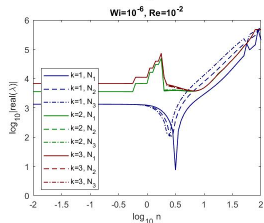
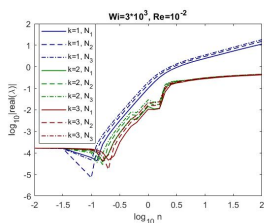
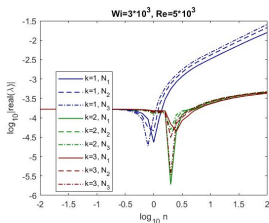
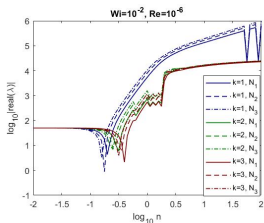


$Re=500$ ,  $Wi=0.3$ ,  $N_1 = 100$ ,  $N_2 = 150$ ,  $N_3 = 200$ ,  $n = 20$

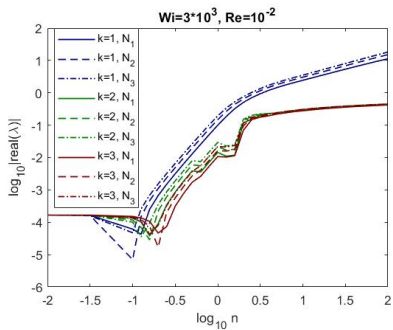
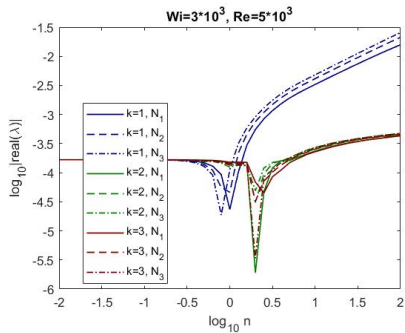


$Re=500$ ,  $Wi=0.3$ ,  $N_1 = 100$ ,  $N_2 = 150$ ,  $N_3 = 200$ ,  $n = 50$

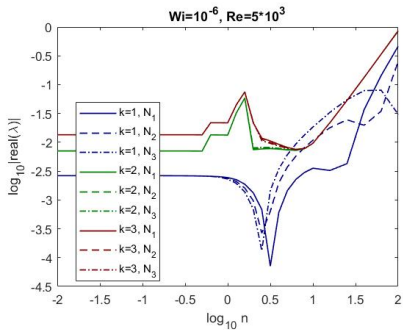
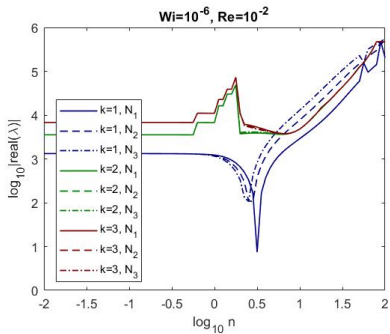




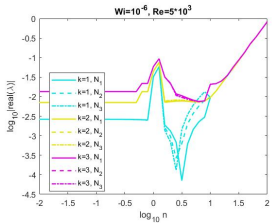
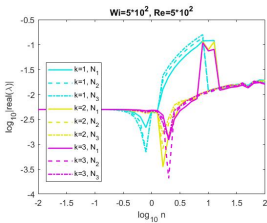
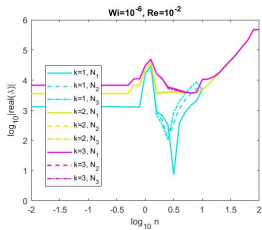
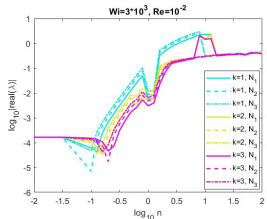
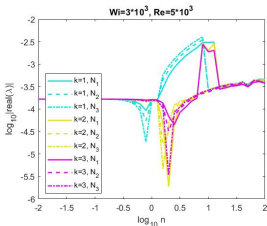
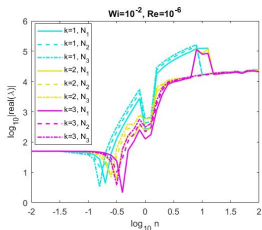
Графики вещественной части собственных значений задачи (6).  
 Дискретизация методом ассимптотики.



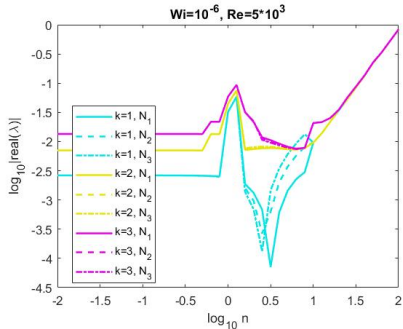
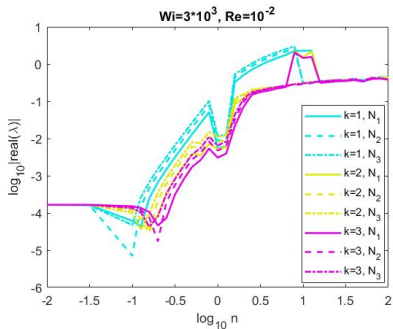
Графики вещественной части собственных значений задачи (6).  
 Дискретизация методом ассимптотики.



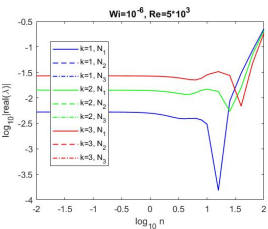
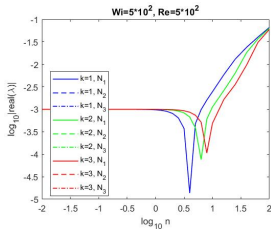
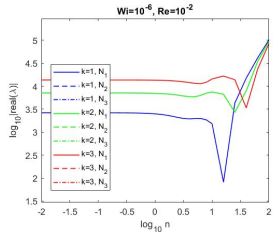
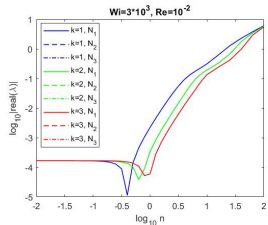
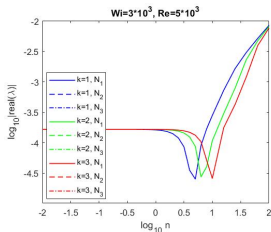
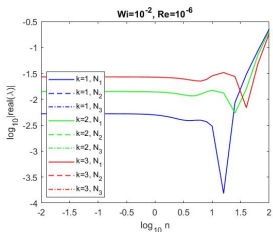
Графики вещественной части собственных значений задачи (6).  
 Дискретизация методом асимптотики.



Графики вещественной части собственных значений задачи (5).  
 Дискретизация методом умножения на функцию.



Графики вещественной части собственных значений задачи (6).  
 Дискретизация методом умножения на функцию.



Графики вещественной части собственных значений задачи (1).  
 Дискретизация методом умножения на функцию.

Спасибо за внимание!