Пространства типа Орлича, связанные с нелинейными нелокальными функционалами

Д. И. Борисов, А. Л. Пятницкий

Институт математики с вычислительным центром
Уфимский федеральный исследовательский центр

Динамика в Сибири – 2026

Уравнения переменного порядка

Пространства обобщённых решений для уравнений

$$-\operatorname{div} A(x)|\nabla v(x)|^{p(x)-2}\nabla v(x) + |v(x)|^{p(x)-2}v(x) = g,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} A(x)|\nabla v(x)|^{p(x)-2}\nabla v(x) - |v(x)|^{p(x)-2}v(x) + g$$

в d-мерных областях, где A — положительно определённая матрица,

Уравнения переменного порядка

Пространства обобщённых решений для уравнений

$$-\operatorname{div} A(x)|\nabla v(x)|^{p(x)-2}\nabla v(x) + |v(x)|^{p(x)-2}v(x) = g,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} A(x)|\nabla v(x)|^{p(x)-2}\nabla v(x) - |v(x)|^{p(x)-2}v(x) + g$$

в d-мерных областях, где A — положительно определённая матрица, — это пространства Соболева — Орлича с нормой Люксембурга

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) := \left\{ v(x) : \int\limits_{\Omega} \left(|\nabla v(x)|^{p(x)} + |v(x)|^{p(x)} \right) dx < +\infty \right\},$$

$$\|v\|_{W^{1,p(\cdot)}(\Omega)} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \; F\left(\frac{v}{\lambda}\right) \leqslant 1 \right\},$$

$$F(v) := \int\limits_{\Omega} \left(|\nabla v(x)|^{p(x)-2} A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla v(x) + |v(x)|^{p(x)} \right) dx.$$

Нелокальные уравнения

Модели популяционной динамики и реологии дают уравнения

$$\partial_t v(x,t) = \int\limits_{\Omega} a(x-y)b(x,y)\big(v(y,t)-v(x,t)\big)\big|v(y,t)-v(x,t)\big|^{p(x,y)-2}\,dy$$

Нелокальные уравнения

Модели популяционной динамики и реологии дают уравнения

$$\partial_t v(x,t) = \int\limits_{\Omega} a(x-y)b(x,y)\big(v(y,t)-v(x,t)\big)\big|v(y,t)-v(x,t)\big|^{p(x,y)-2}\,dy$$

Это требует введения пространства Орлича на основе функционала

$$F_{p(\cdot)}(u) = \int\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{a(x-y)b(x,y)}{p(x,y)}|u(x)-u(y)|^{p(x,y)}\,dxdy,$$

Нелокальные уравнения

Модели популяционной динамики и реологии дают уравнения

$$\partial_t v(x,t) = \int\limits_{\Omega} a(x-y)b(x,y)\big(v(y,t)-v(x,t)\big)\big|v(y,t)-v(x,t)\big|^{p(x,y)-2}\,dy$$

Это требует введения пространства Орлича на основе функционала

$$F_{p(\cdot)}(u) = \int\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{a(x-y)b(x,y)}{p(x,y)}|u(x)-u(y)|^{p(x,y)}\,dxdy,$$

который естественно обобщается до функционала

$$F(u) = \int\limits_{\Omega\times\Omega} a(x-y)\varphi(|u(x)-u(y)|,x,y)\,dxdy$$

с подходящей выпуклой по z функцией $\varphi(z,x,y)$.

Область и ядро свертки

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ – произвольное d–мерное открытое множество, $d \geqslant 1$,
$a = a(z)$, $z \in \mathbb{R}^d$, $a \in L_1(\mathbb{R}^d)$,

$$a(z) \geqslant c_0 > 0 \quad \text{п.в.} \quad B_0, \qquad a(z) \geqslant 0 \quad \text{п.в.} \quad \mathbb{R}^d,$$

B_0 – шар с центром в нуле.

Область и ядро свертки

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ – произвольное d–мерное открытое множество, $d \geqslant 1$,
$a = a(z)$, $z \in \mathbb{R}^d$, $a \in L_1(\mathbb{R}^d)$,

$$a(z) \geqslant c_0 > 0 \quad \text{п.в.} \quad B_0, \qquad a(z) \geqslant 0 \quad \text{п.в.} \quad \mathbb{R}^d,$$

B_0 – шар с центром в нуле. Если $\Omega = \bigcup\limits_i \Omega_i$, $i = 1, 2, \ldots,$ то

$$\operatorname{dist}(\Omega_i, \Omega_{i+1}) < \operatorname{diam} B_0, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Выпуклая функция

Функция $\varphi = \varphi(z, x, y)$, $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяет условиям

Выпуклая функция

Функция $\varphi = \varphi(z, x, y)$, $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяет условиям

- C1 Для всех $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ функция $\varphi(|u(x) - u(y)|, x, y)$ измерима на $\Omega \times \Omega$.

Выпуклая функция

Функция $\varphi = \varphi(z, x, y)$, $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяет условиям

1. Для всех $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ функция $\varphi(|u(x) - u(y)|, x, y)$ измерима на $\Omega \times \Omega$.
2. Функция $\varphi(z, x, y)$ равномерно выпукла по z для почти всех (x, y), а именно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta \in (0, 1)$ такое, что
$$\varphi\left(\frac{s+t}{2}, x, y\right) \leqslant (1-\delta)\frac{\varphi(s, x, y) + \varphi(t, x, y)}{2}$$
для почти всех $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ и всех $s > 0$, $t > 0$ таких, что $|s - t| \geqslant \varepsilon \max\{s,\ t\}$.

Выпуклая функция

Функция $r = r(t)$, $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — почти возрастающей / почти убывающей, если для некоторого $\beta \geqslant 1$

$$r(s) \leqslant \beta r(t), \qquad \beta r(s) \geqslant r(t), \qquad 0 \leqslant s \leqslant t.$$

Выпуклая функция

Функция $r = r(t)$, $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — почти возрастающей / почти убывающей, если для некоторого $\beta \geqslant 1$

$$r(s) \leqslant \beta r(t), \qquad \beta r(s) \geqslant r(t), \qquad 0 \leqslant s \leqslant t.$$

- C3 Существуют две константы p_- и p_+, $1 < p_- \leqslant p_+$, и константа $\beta \geqslant 1$ такие, что функция $z \mapsto \frac{\varphi(z,x,y)}{z^{p_-}}$ почти возрастает с константой β для почти всех $(x,y) \in \Omega \times \Omega$, а функция $z \mapsto \frac{\varphi(z,x,y)}{z^{p_+}}$ почти убывает с константой β для почти всех $(x,y) \in \Omega \times \Omega$.
- C4 Функция φ удовлетворяет соотношениям

$$c_1^{-1} \leqslant \varphi(1,x,y) \leqslant c_1, \qquad \varphi(0,x,y) = 0, \qquad \varphi(z,x,y) > 0,$$

для почти всех $(x,y) \in \Omega \times \Omega$, где c_1 – положительная константа, не зависящая от x и y.

Выпуклая функция

C5 Функция $\varphi(z,x,y)$ дифференцируема по $z>0$ для почти всех $(x,y)\in\Omega\times\Omega$ и удовлетворяет оценке

$$0<z\varphi'(z,x,y)\leqslant c_2\varphi(z,x,y),\qquad z>0$$

для почти всех $(x,y)\in\Omega\times\Omega$ с константой $c_2>1$, не зависящей от z, x и y.

Выпуклая функция

- C5 Функция $\varphi(z,x,y)$ дифференцируема по $z>0$ для почти всех $(x,y)\in\Omega\times\Omega$ и удовлетворяет оценке

$$0 < z\varphi'(z,x,y) \leqslant c_2\varphi(z,x,y), \qquad z>0$$

для почти всех $(x,y)\in\Omega\times\Omega$ с константой $c_2>1$, не зависящей от z, x и y.

Следствия из условий:

$$\lim_{z\to+0}\varphi(z,x,y)=0, \qquad \lim_{z\to+\infty}\varphi(z,x,y)=+\infty$$

для почти всех $(x,y)\in\Omega\times\Omega$.

Функционал и пространства

Для $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ определим функционал

$$F(u) := \int\limits_{\Omega\times\Omega} \varphi\big(|u(x) - u(y)|, x, y\big)\, a(x - y)\, dxdy \leqslant +\infty,$$

Функционал и пространства

Для $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ определим функционал

$$F(u) := \int\limits_{\Omega\times\Omega} \varphi\big(|u(x)-u(y)|, x, y\big)\, a(x-y)\, dxdy \leqslant +\infty,$$

и еще два функционала

$$f(u) := |u|_\Omega + \|u\|_{L_{p_-}(\Omega)}, \qquad |u|_\Omega := \inf\left\{\lambda > 0 : \; F\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leqslant 1\right\}.$$

Функционал и пространства

Для $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ определим функционал

$$F(u) := \int\limits_{\Omega\times\Omega} \varphi\big(|u(x)-u(y)|, x, y\big)\, a(x-y)\, dxdy \leqslant +\infty,$$

и еще два функционала

$$f(u) := |u|_\Omega + \|u\|_{L_{p_-}(\Omega)}, \qquad |u|_\Omega := \inf\left\{\lambda > 0 :\ F\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leqslant 1\right\}.$$

Первое пространство

$$\mathcal{L}(\Omega) := \big\{u \in L_{p_-,loc}(\Omega) :\ f(u) < +\infty\big\}.$$

Функционал и пространства

Для $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ определим функционал

$$F(u) := \int\limits_{\Omega\times\Omega} \varphi\big(|u(x) - u(y)|, x, y\big) a(x-y)\, dxdy \leqslant +\infty,$$

и еще два функционала

$$f(u) := |u|_\Omega + \|u\|_{L_{p_-}(\Omega)}, \qquad |u|_\Omega := \inf\left\{\lambda > 0 :\ F\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leqslant 1\right\}.$$

Первое пространство

$$\mathcal{L}(\Omega) := \big\{u \in L_{p_-,loc}(\Omega) :\ f(u) < +\infty\big\}.$$

Отношение эквивалентности $u \sim v$ если $u - v = const$ п.в. в Ω, классы смежности $\mathrm{U} := \{u \in L_{1,loc}(\Omega)\}$, $u_1, u_2 \in \mathrm{U} \Leftrightarrow u_1 \sim u_2$, второе пространство

$$\Lambda(\Omega) := \big\{\mathrm{U} :\ |u|_\Omega < +\infty,\ u \in \mathrm{U}\big\}, \qquad |\mathrm{U}|_\Omega := |u|_\Omega, \quad u \in \mathrm{U}.$$

Банаховые пространства

Теорема

Пусть выполнены условия (C1), (C2), (C3), (C4). Функционал $\|u\|_{\mathcal{L}(\Omega)} := f(u)$ является нормой, а пространство $\mathcal{L}(\Omega)$ с такой нормой банахово. Верны вложения

$$L_{p_+}(\Omega) \cap L_{p_-}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}(\Omega) \subseteq L_{p_-}(\Omega).$$

Эти вложения непрерывны.

Банаховые пространства

Теорема

Пусть выполнены условия (C1), (C2), (C3), (C4). Функционал $\|u\|_{\mathcal{L}(\Omega)} := f(u)$ является нормой, а пространство $\mathcal{L}(\Omega)$ с такой нормой банахово. Верны вложения

$$L_{p_+}(\Omega) \cap L_{p_-}(\Omega) \subseteq \mathcal{L}(\Omega) \subseteq L_{p_-}(\Omega).$$

Эти вложения непрерывны.

Теорема

Пусть выполнены условия (C1), (C2), (C3), (C4). Функционал $|\cdot|_\Omega$ – норма на пространстве $\Lambda(\Omega)$. Пространство $\Lambda(\Omega)$ с нормой $|\cdot|_\Omega$ является банаховым. Норма $|\cdot|_\Omega$ равномерно выпукла на $\Lambda(\Omega)$.

Эквивалентные нормы

На $L_{1,loc}(\Omega)$ определим функционалы

$$G(u) := F(u) + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p_-}\, dx,$$

$$g(u) := \inf\left\{\lambda > 0:\ G\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leqslant 1\right\}.$$

Эквивалентные нормы

На $L_{1,loc}(\Omega)$ определим функционалы

$$G(u) := F(u) + \int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p_-}\, dx,$$

$$g(u) := \inf \left\{ \lambda > 0 : \ G\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leqslant 1 \right\}.$$

Теорема

Пусть выполнены условия (C1), (C2), (C3), (C4). Функционал g – норма на пространстве $\mathcal{L}(\Omega)$. Эта норма эквивалентна норме $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(\Omega)}$:

$$\frac{1}{2}\|u\|_{\mathcal{L}(u)} \leqslant g(u) \leqslant \beta^{\frac{1}{p_-}} \|u\|_{\mathcal{L}(u)}.$$

Эквивалентные нормы

Теорема

Пусть выполнены условия (C1), (C2), (C3), (C4) а Ω – ограничена с липшицевой границей. Каждый $\mathrm{U} \in \Lambda(\Omega)$ *имеет единственного представителя* $u \in L_{p_-}(\Omega)$

$$\langle u\rangle_\Omega = 0, \qquad \langle u\rangle_\Omega := \frac{1}{\operatorname{mes}\Omega}\int\limits_\Omega u(x)\,dx.$$

В этом смысле мы говорим, что

$$\mathcal{L}(\Omega) = \Lambda(\Omega)\oplus\mathbb{C}, \qquad u = u_{\perp,\Omega} + \langle u\rangle_\Omega, \qquad \langle u_\perp\rangle_\Omega = 0,$$

где $u_{\perp,\Omega}, u \in \mathrm{U} \in \Lambda(\Omega)$, *и верны неравенства*

$$c_3\big(|u_{\perp,\Omega}|_\Omega + |\langle u\rangle_\Omega|\big) \leqslant \|u\|_{\mathcal{L}(\Omega)} \leqslant c_4\big(|u_{\perp,\Omega}|_\Omega + |\langle u\rangle_\Omega|\big).$$

Сепарабельность и плотные множества

Теорема

Пусть выполнены условия (C1), (C2), (C3), (C4). Пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций $C_0^\infty(\Omega)$ *является плотным множеством в* $\mathcal{L}(\Omega)$. *Пространство* $\mathcal{L}(\Omega)$ *сепарабельно.*

Сопряженная функция

Сопряженная функция

$$\varphi_*(t) := \sup_{s\geqslant 0}\big(st-\varphi(s)\big)$$

неотрицательна, выпукла, непрерывна, удовлетворяет (C1), (C3) и

$$\lim_{z\to+0}\varphi(z,x,y)=0,\qquad \lim_{z\to+\infty}\varphi(z,x,y)=+\infty,$$
$$st\leqslant\varphi_*(t)+\varphi(s),\qquad s\geqslant 0,\quad t\geqslant 0.$$

Вспомогательные пространства

На $L_{1,loc}(\Omega\times\Omega)$ определим функционалы

$$H_*(U) := \int\limits_{\Omega\times\Omega} \varphi_*(|U(x,y)|,x,y)a(x-y)\,dxdy,$$

$$h_*(U) := \inf\left\{\lambda>0:\ H_*\left(\frac{U}{\lambda}\right)\leqslant 1\right\},$$

которые могут принимать бесконечные значения, и линейные подмножества

$$\mathcal{H}_*(\Omega\times\Omega) := \{U\in L_{q_-,loc}(\Omega\times\Omega):\ h_*(U)<+\infty\},$$

$$\mathcal{M} := \Bigg\{W=W(x,y)\in\mathcal{H}_*(\Omega\times\Omega):$$

$$\int\limits_{\Omega}\big(W(x,y)a(x-y)-W(y,x)a(y-x)\big)\,dy=0 \text{ п.в. } x\in\Omega\Bigg\}.$$

Сопряженное пространство для $\Lambda(\Omega)$

Теорема

Пусть выполнены условия (C1), (C2), (C3), (C4), (C5). Существует взаимнооднозначное соответствие между сопряжённым пространством $(\Lambda(\Omega))^*$ *и* $\Lambda(\Omega)$, *а именно,* $\phi \in (\Lambda(\Omega))^* \leftrightarrow \mathrm{W} \in \Lambda(\Omega)$,

$$\phi(\mathrm{U}) = |\mathrm{W}|_\Omega \frac{\Phi\left(\mathrm{U}, \frac{\mathrm{W}}{|\mathrm{W}|_\Omega}\right)}{\Phi\left(\frac{\mathrm{W}}{|\mathrm{W}|_\Omega}, \frac{\mathrm{W}}{|\mathrm{W}|_\Omega}\right)},$$

$$\Phi(\mathrm{U},\mathrm{W}) := \int\limits_{\Omega\times\Omega} \big(u(x)-u(y)\big)\varphi'\big(|w(x)-w(y)|, x, y\big) \cdot \frac{\overline{w(x)}-\overline{w(y)}}{|w(x)-w(y)|} a(x-y)\,dxdy,$$

где $u \in \mathrm{U}$, $w \in \mathrm{W}$, *и определение* Φ *не зависит от выбора* u *и* w.

Сопряженное пространство для $\Lambda(\Omega)$

Теорема

Для $\phi \in (\Lambda(\Omega))^*$ существует функция $W = W(x,y) \in \mathcal{H}_*(\Omega \times \Omega)$ такая, что

$$\phi(u) = \int\limits_{\Omega\times\Omega} (u(x) - u(y))\, W(x,y) a(x-y)\, dxdy.$$

Две функции W_1, $W_2 \in \mathcal{H}_*(\Omega \times \Omega)$ порождают один и тот же функционал если и только если $W_1 - W_2 \in \mathcal{M}$.

Сопряженное пространство для $\mathcal{L}(\Omega)$

Теорема

Пусть выполнены условия (C1), (C2), (C3), (C4), (C5). Тогда любой функционал $\phi \in (\mathcal{L}(\Omega))^*$ *можно представить в виде*

$$\phi(u) = \phi_0(\mathrm{U}) + \int\limits_\Omega \psi(x)u(x)\,dx, \qquad u \in \mathcal{L}(\Omega),$$

где ϕ_0 *– некоторый функционал из* $(\Lambda(\Omega))^*$, *а* ψ *– некоторая функция из* $L_{q_-}(\Omega)$, *и* $\mathrm{U} \in \Lambda(\Omega)$ *– класс смежности, которому принадлежит функция* u. *И наоборот, каждая пара* (ϕ_0, ψ), $\phi_0 \in (\Lambda(\Omega))^*$, $\psi \in L_{q_-}(\Omega)$ *порождает ограниченный линейный функционал на* $(\mathcal{L}(\Omega))^*$ *по формуле выше.*

Сопряженное пространство для $\mathcal{L}(\Omega)$

Теорема

Пусть выполнены условия (C1), (C2), (C3), (C4), (C5) и предположим, что Ω – это ограниченная область с липшицевой границей. Каждый ограниченный линейный функционал $\phi \in (\mathcal{L}(\Omega))^*$ представляется в виде

$$\phi(u) = \phi_0(u) + k\langle u\rangle_\Omega,$$

где $\phi_0 \in (\Lambda(\Omega))^*$ – некоторый функционал, $k \in \mathbb{C}$ – некоторая константа. И наоборот, каждая пара (ϕ_0, k), $\phi_0 \in (\Lambda(\Omega))^*$, $k \in \mathbb{C}$, порождает линейный функционал по приведённой выше формуле.

Допустимые операции над φ

Теорема

Пусть для функций $\varphi(z,x,y)$ и $\psi(z,x,y)$ выполнены условия (C1)–(C5). Тогда следующие функции также удовлетворяют этим же условиям:

$$\theta(z,x,y) := \varphi(z,x,y) + \psi(z,x,y),$$
$$\theta(z,x,y) := \varphi(z,x,y)b(x,y),$$
$$\theta(z,x,y) := \varphi(z,x,y)\psi(z,x,y),$$
$$\theta(z,x,y) := \varphi(\psi(z,x,y),x,y),$$

где $b \in L_\infty(\Omega\times\Omega)$ – произвольная функция, удовлетворяющая оценке $0 < c_5 < b(x,y) < c_6$ с некоторыми константами c_5, c_6.

Условие (C2) о равномерной выпуклости сложно проверять. Достаточное условие его выполнения:

Лемма

Пусть для функции $\varphi(z,x,y)$ выполнены условия (C1) и (C3)–(C5). Предположим, что функция $\varphi(z,x,y)$ дважды непрерывно дифференцируемая по z для почти всех $(x,y)\in\Omega\times\Omega$ и удовлетворяет оценке

$$\varphi''(z,x,y)\geqslant c_7 z^{-2}\varphi(z,x,y),\qquad z>0,$$

с константой c_7, не зависящей от z, x, и y. Тогда для функции $\varphi(z,x,y)$ выполнено условие (C2).

Сложение с невыпуклой функцией

Теорема

Пусть $\varphi(z,x,y)$ *выполнены условия (C1)–(C5) и*

$$\varphi''(z,x,y) \geqslant c_7 z^{-2}\varphi(z,x,y), \qquad z>0.$$

Пусть $\psi(z,x,y)$ *дважды непрерывно дифференцируема по* z *для п.в.* $(x,y)\in\Omega\times\Omega$, *удовлетворяет (C1) и*

$$\psi(0,x,y)=0, \qquad \psi'(0,x,y)=0,$$
$$\left|\psi''(z,x,y)\right| \leqslant c_8\varphi''(z,x,y)$$

для п.в. $(x,y)\in\Omega\times\Omega$ *и всех* $z>0$, *где* $c_8<1$ *– некоторая константа, не зависящая от* z, x, *и* y. *Тогда для* $\varphi(z,x,y)+\psi(z,x,y)$ *выполнены (C1)–(C5).*

Умножение на невыпуклую функцию

Теорема

Пусть для $\varphi(z,x,y)$ *выполнены (C1)–(C5) и*

$$\varphi''(z,x,y) \geqslant c_7 z^{-2}\varphi(z,x,y), \qquad z>0.$$

Пусть $\psi(z,x,y)\geqslant 0$ *— невозрастающая и дважды непрерывно дифференцируема по* z *для п.в.* $(x,y)\in\Omega\times\Omega$ *и удовлетворяет условиям (C1), (C4), (C5) и*

$$\psi''(z,x,y)\geqslant -c_9 z^{-1}\psi'(z,x,y)-c_{10}z^{-2}\psi(z,x,y)$$

для п.в. $(x,y)\in\Omega\times\Omega$*, где* $c_9<2$*,* $c_{10}<c_7$ *не зависят от* z*,* x*,* y*, а функция* $z\mapsto\frac{\psi(z,x,y)}{z^q}$ *невозрастает для почти всех* $(x,y)\in\Omega\times\Omega$ *с некоторым фиксированным* $q\geqslant 0$*. Тогда для* $\psi(z,x,y)\varphi(z,x,y)$ *выполнены условия (C1)–(C5).*

Примеры подходящих выпуклых функций

Модельный пример

$$\varphi(z, x, y) = \sum_{i=1}^{m} z^{p_i(x,y)} b_i(x, y), \qquad p_- \leqslant p_i \leqslant p_+, \qquad 0 < c_1 \leqslant b_i \leqslant c_2.$$

Примеры подходящих выпуклых функций

Модельный пример

$$\varphi(z,x,y) = \sum_{i=1}^{m} z^{p_i(x,y)} b_i(x,y), \qquad p_- \leqslant p_i \leqslant p_+, \qquad 0 < c_1 \leqslant b_i \leqslant c_2.$$

Сложение с невыпуклой функцией

$$\varphi(z,x,y) := 10B(x,y)z^2 + B(x,y)\sin^3 z, \quad 0 < B_- \leqslant B(x,y) \leqslant B_+.$$

Примеры подходящих выпуклых функций

Модельный пример

$$\varphi(z,x,y)=\sum_{i=1}^{m} z^{p_i(x,y)} b_i(x,y),\qquad p_- \leqslant p_i \leqslant p_+,\qquad 0<c_1\leqslant b_i\leqslant c_2.$$

Сложение с невыпуклой функцией

$$\varphi(z,x,y):=10B(x,y)z^2+B(x,y)\sin^3 z,\quad 0<B_-\leqslant B(x,y)\leqslant B_+.$$

Можно два первых примера умножать на невыпуклую функцию

$$\psi(z,x,y):=\ln^{\gamma(x,y)}(1+\Upsilon(x,y)z),\qquad \gamma,\Upsilon\in L_\infty(\Omega\times\Omega),$$
$$1\leqslant\gamma_-\leqslant\gamma(x,y)\leqslant\gamma_+,\qquad 0<\Upsilon_-\leqslant\Upsilon(x,y)\leqslant\Upsilon_+.$$