

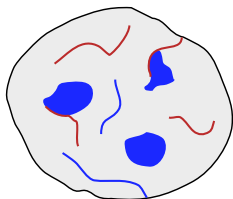
Задачи о равновесии нелинейно упругих тел с трещинами: теоремы существования и метод фиктивных областей¹

А.И. Фурцев

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

2 марта, 2026

¹Исследование поддержано РФФ, проект 25-71-00061



Красные – трещины

Синие – включения

Цель: исследовать задачи о трещинах и включениях в рамках моделей нелинейной упругости.

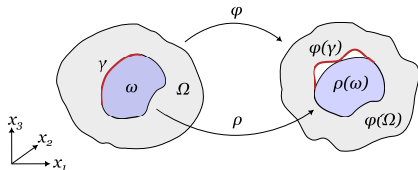
Задачи о трещинах в линейно упругих телах с условиями непроникания:

А.М. Хлуднев, Е.М. Рудой, В.А. Ковтуненко, Н.П. Лазарев, Т.С. Попова, И.В. Фанкина, А.И. Фурцев и другие

Задачи о трещинах в рамках нелинейной упругости:

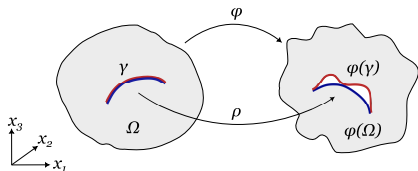
Knees D., Mielke A., Zanini C., Dal Maso G., Lazzaroni G., Almi S., Toader R., Negri M. and others

**Задача
равновесия I**



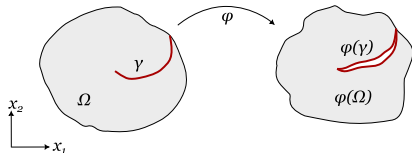
Тело с трещиной на границе объемного жесткого включения.

**Задача
равновесия II**

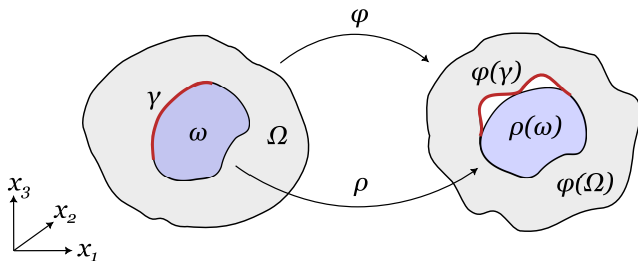


Тело с трещиной на границе тонкого жесткого включения.

**Задача
равновесия III**



Тело с трещиной, примыкающей к границе тела под нулевым углом.



Неизвестные в задаче величины:

φ — функция деформации: описывает положения материальных частиц после деформирования тела;

ρ — функция, описывающая положения точек включения после деформирования тела.

Модель гиперупругой среды

Пусть $F = \nabla\varphi \in M_+$, $(\nabla\varphi)_{ij} = \partial\varphi_i/\partial x_j$, $1 \leq i, j \leq 3$

– это тензор градиента деформации,

$M_+ = \{F \in \mathbb{M}^3 \mid \det F > 0\}$; $\operatorname{cof} F = \det F (F^{-1})^T$.

Пусть для функции плотности запасенной энергии $W = W(F)$ верно:

(H1) *поливывуклость*: существует W^* такая, что

$$W(F) = W^*(F, \operatorname{cof} F, \det F) \text{ для всех } F \in M_+$$

и W^* выпукла и непрерывна по каждому аргументу;

(H2) *коэрцитивность*:

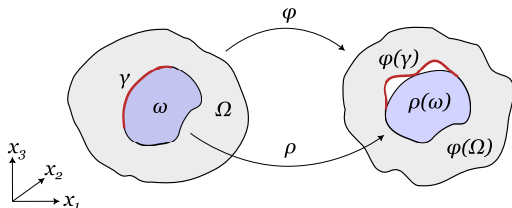
$$W(F) \geq \alpha (\|F\|^p + \|\operatorname{cof} F\|^q + (\det F)^r) + \beta \text{ для всех } F \in M_+,$$

с константами $\alpha > 0$ и $\beta \in \mathbb{R}$;

(H3) *асимптотика по определителю градиента деформации*:

$$W(F) \rightarrow +\infty \text{ при } \det F \rightarrow 0+.$$

Задача I: Тело с трещиной на границе объемного жесткого включения



$$\varphi_0 \in W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)^3$$

– заданное перемещение края

$$f \in L^{p/(p-1)}(\Omega)^3$$

– заданная объемная сила

Множество допустимых деформаций:

$$\mathcal{A} = \left\{ \varphi \in V(\Omega \setminus \bar{\omega}) \mid \varphi = \varphi_0 \text{ на } \partial\Omega; \text{ для некоторого } \rho \in \mathcal{R} : \right.$$

$$\left. \varphi(x) \notin \rho(\omega) \text{ при } x \in \gamma \text{ и } \varphi(x) = \rho(x) \text{ при } x \in \partial\omega \setminus \gamma \right\},$$

где

$$V(\Omega) = \left\{ \psi \in W_p^1(\Omega)^3 \mid \text{cof } \nabla\psi \in L^q(\Omega)^{3 \times 3}, \det \nabla\psi \in L^r(\Omega), \det \nabla\psi > 0 \text{ в } \Omega \right\},$$

$$\mathcal{R} = \left\{ \rho \mid \rho(x) = Qx + d \text{ при } x \in \bar{\omega}; Q \in SO(3), d \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Функционал полной энергии:

$$\mathcal{E}(\varphi) = \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} W(\nabla\varphi(x)) dx - \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} f \cdot \varphi dx - \int_{\omega} f \cdot \rho dx, \quad \varphi \in \mathcal{A}.$$

Задача I: Тело с трещиной на границе объемного жесткого включения

Задача о равновесии формулируется следующим образом:

Задача минимизации энергии

$$\text{Найти } \varphi \in \mathcal{A}, \text{ такой что } \mathcal{E}(\varphi) = \min_{\psi \in \mathcal{A}} \mathcal{E}(\psi). \quad (1)$$

Theorem

Пусть функция W удовлетворяет (H1)-(H3) с показателями $p \geq 2$, $q \geq p/(p-1)$, $r > 1$, и пусть существует $\tilde{\psi} \in \mathcal{A}$, при котором энергия конечна: $\mathcal{E}(\tilde{\psi}) < +\infty$. Тогда задача минимизации энергии (1) имеет решение.

Задача I: ключевые идеи доказательства

Theorem

Пусть функция W удовлетворяет (H1)-(H3) с показателями $p \geq 2$, $q \geq p/(p-1)$, $r > 1$, и пусть существует $\tilde{\psi} \in \mathcal{A}$, при котором энергия конечна: $\mathcal{E}(\tilde{\psi}) < +\infty$. Тогда задача минимизации энергии (1) имеет решение.

Доказательство.

Рассмотрим минимизирующую последовательность:

$$\varphi_k \in \mathcal{A} : \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(\varphi_k) = \inf_{\psi \in \mathcal{A}} \mathcal{E}(\psi) < +\infty$$

и получим равномерные оценки.

Из гипотезы коэрцитивности (H2) и неравенства Пуанаре получаем для всех k :

$$\begin{aligned} \|\varphi_k\|_{W_p^1(\Omega \setminus \bar{\omega})^3} &\leq c, \\ \|\operatorname{cof} \nabla \varphi_k\|_{L^q(\Omega \setminus \bar{\omega})^{3 \times 3}} &\leq c, \\ \|\det \nabla \varphi_k\|_{L^r(\Omega \setminus \bar{\omega})} &\leq c, \end{aligned}$$

где константа $c > 0$ не зависит от k .

Отталкиваясь от этих оценок, получаем такую подпоследовательность (сохраняя прежнее обозначение $\{\varphi_k\}$), что верны сходимости:

$$\begin{aligned}\varphi_k &\rightarrow \varphi \text{ слабо в } W_p^1(\Omega \setminus \bar{\omega})^3, \\ \text{cof } \nabla \varphi_k &\rightarrow \text{cof } \nabla \varphi \text{ слабо в } L^q(\Omega \setminus \bar{\omega})^{3 \times 3}, \\ \det \nabla \varphi_k &\rightarrow \det \nabla \varphi \text{ слабо в } L^r(\Omega \setminus \bar{\omega}).\end{aligned}$$

Условие поливыпуклости (H1) дает

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{E}(\varphi_k) \geq \mathcal{E}(\varphi),$$

и таким образом слабый предел φ соответствует минимуму энергии.

Устанавливаем наконец, что предел φ действительно является допустимой деформацией. Гипотеза (H3) гарантирует справедливость условия сохранения ориентации для φ . Более того, с помощью теорем вложения и следа доказывается $\varphi|_{\partial\omega \setminus \gamma} \in \mathcal{R}$. Следовательно, $\varphi \in \mathcal{A}$.

Теорема доказана.

Соответствующая краевая задача

Найти функции φ и ρ такие, что:

$$-\operatorname{div} P(\nabla\varphi) = f \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad (2)$$

$$P(\nabla\varphi) = \frac{\partial W}{\partial F}(\nabla\varphi) \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad (3)$$

$$\det \nabla\varphi > 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad (4)$$

$$\varphi = \varphi_0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (5)$$

$$\varphi = \rho(x) = Qx + d \quad \text{на } \partial\omega \setminus \gamma, \quad (6)$$

$$\varphi(\gamma) \cap \rho(\omega) = \emptyset, \quad (7)$$

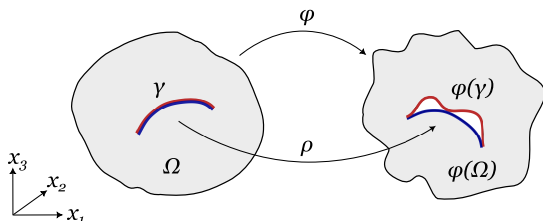
$$P(\nabla\varphi)\nu = \mathbb{1}_{cont} P_\nu(\nabla\varphi)\rho(\nu), \quad P_\nu(\nabla\varphi) \leq 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (8)$$

$$\int_{\partial\omega} P(\nabla\varphi)\nu \, d\Sigma - \int_{\omega} f \, dx = 0, \quad (9)$$

$$\int_{\partial\omega} \varphi \times P(\nabla\varphi)\nu \, d\Sigma - \int_{\omega} \rho \times f \, dx = 0, \quad (10)$$

где $P_\nu(\nabla\varphi) = P(\nabla\varphi)\nu \cdot \rho(\nu)$, а $\mathbb{1}_{cont}$ – индикаторная функция контактного множества.

Задача II: трещина, тонкое включение, условие глобальной инъективности деформаций



Множество допустимых деформаций:

$$\mathcal{A} = \left\{ \varphi \in V(\Omega \setminus \bar{\gamma}) \mid \varphi = \varphi_0 \text{ на } \partial\Omega; \text{ для некоторого } \rho \in \mathcal{R} : \right. \\ \left. \varphi^+ = \rho \text{ на } \gamma, \int_{\Omega \setminus \bar{\gamma}} \det \nabla \varphi \, dx \leq \text{meas } \varphi(\Omega \setminus \bar{\gamma}) \right\},$$

где множества $V(\Omega)$ и \mathcal{R} определены как и выше.

Главная особенность здесь – последнее условие интегрального типа, являющееся условием инъективности деформаций Сьярле – Нечаса.

Задача II: трещина, тонкое включение, условие глобальной инъективности деформаций

На \mathcal{A} определим функционал энергии:

$$\mathcal{E}(\varphi) = \int_{\Omega \setminus \bar{\gamma}} W(\nabla \varphi(x)) dx - \int_{\Omega \setminus \bar{\gamma}} f \cdot \varphi dx, \text{ где } f \in L^{p/(p-1)}(\Omega \setminus \bar{\gamma})^3.$$

Задача равновесия формулируется так:

Задача минимизации энергии

$$\text{Найти } \varphi \in \mathcal{A}, \text{ такой что } \mathcal{E}(\varphi) = \min_{\psi \in \mathcal{A}} \mathcal{E}(\psi). \quad (11)$$

Theorem

Пусть функция W удовлетворяет (H1)-(H3) с показателями $p > 3$, $q \geq p/(p-1)$, $r > 1$, и пусть существует $\tilde{\psi} \in \mathcal{A}$, при котором энергия конечна: $\mathcal{E}(\tilde{\psi}) < +\infty$. Тогда задача минимизации энергии (11) имеет решение.

Найти функции φ и ρ такие, что:

$$-\operatorname{div} P = f, \quad P = \frac{\partial W}{\partial F}(\nabla \varphi) \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\gamma}, \quad (12)$$

$$\det \nabla \varphi > 0, \quad \varphi \text{ инъективна в } \Omega \setminus \bar{\gamma}, \quad (13)$$

$$\varphi = \varphi_d \text{ на } \partial\Omega, \quad \varphi^+ = \rho \text{ на } \gamma, \quad (14)$$

$$\int_{\varphi^+(\gamma)} t_\varphi^+ d\Sigma_+^\varphi = \int_{\varphi^-(\gamma)} t_\varphi^- d\Sigma_-^\varphi, \quad (15)$$

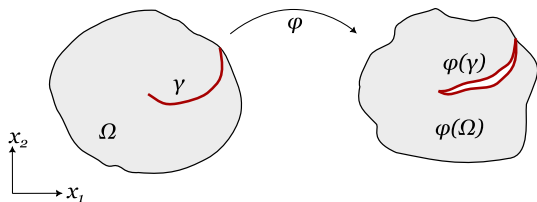
$$\int_{\varphi^+(\gamma)} \varphi^+ \times t_\varphi^+ d\Sigma_+^\varphi = \int_{\varphi^-(\gamma)} \varphi^- \times t_\varphi^- d\Sigma_-^\varphi, \quad (16)$$

$$\begin{cases} x_c \in \gamma, \\ y = \varphi^-(x_c) = \varphi^+(x_c), \end{cases} \implies \begin{cases} \nu_-^\varphi(y) = \nu_+^\varphi(y), \\ t_\varphi^-(y) \parallel \nu_-^\varphi(y), \quad t_\varphi^-(y) \cdot \nu_-^\varphi(y) \leq 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} x'_s, x''_s \in \gamma, \\ y' = \varphi^-(x'_s), \\ y'' = \varphi^-(x''_s), \\ y'' = y', \end{cases} \implies \begin{cases} \nu_-^\varphi(y') = -\nu_-^\varphi(y''), \\ t_\varphi^-(y') d\Sigma_-^\varphi(y') = t_\varphi^-(y'') d\Sigma_-^\varphi(y''), \\ t_\varphi^-(y') \parallel \nu_-^\varphi(y'), \quad t_\varphi^-(y') \cdot \nu_-^\varphi(y') \leq 0, \\ t_\varphi^-(y'') \parallel \nu_-^\varphi(y''), \quad t_\varphi^-(y'') \cdot \nu_-^\varphi(y'') \leq 0, \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} x_a \in \gamma \text{ единственный прообраз} \\ y = \varphi^-(x_a) \text{ и } y \notin \varphi^+(\gamma) \end{cases} \implies t_\varphi^-(y) = 0. \quad (19)$$

Задача III: тело с трещиной, примыкающей к границе под нулевым углом

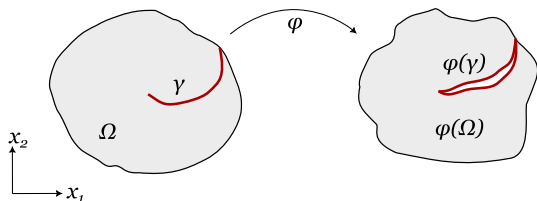


На данном этапе исследования мы рассматриваем **модельную** задачу.

Основные предположения:

- ▶ тело «двумерное»
- ▶ ограничения на деформации: условие Дирихле на внешней границе, условие сохранения ориентации в области

Задача III: тело с трещиной, примыкающей к границе под нулевым углом



Функционал энергии:

$$\mathcal{E}(\varphi) = \int_{\Omega \setminus \bar{\gamma}} W(\nabla \varphi(x)) dx - \int_{\Omega \setminus \bar{\gamma}} f \cdot \varphi dx, \text{ где } f \in L^{p/(p-1)}(\Omega \setminus \bar{\gamma})^2.$$

Здесь $(\nabla \varphi)_{ij} = \partial \varphi_i / \partial x_j$, $1 \leq i, j \leq 2$, $M_+ = \{F \in \mathbb{M}^2 \mid \det F > 0\}$.

(H1) поливыпуклость: на M_+ – множестве 2×2 -матриц с положительным определителем;

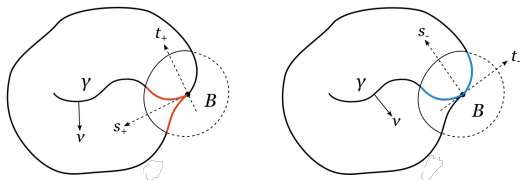
(H2) коэрцитивность:

$$W(F) \geq \alpha(\|F\|^p + (\det F)^r) + \beta \text{ для всех } F \in M_+,$$

с константами $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, показателями $p > 2$, $r > 1$;

(H3) $W(F) \rightarrow +\infty$ при $\det F \rightarrow 0+$.

Задача III: тело с трещиной, примыкающей к границе под нулевым углом



Пусть $\partial\Omega$ и γ являются липшицевыми кривыми. Пусть $(0, 0)$ – точка касания конца γ и $\partial\Omega$. Здесь и далее $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$, $\Gamma_0 = \partial\Omega \setminus \{(0, 0)\}$. Пусть ζ_\pm – возрастающие липшицевы функции, с помощью которых вблизи $(0, 0)$ описывается граница области с разрезом:

$$\zeta_\pm : [0, \infty) \mapsto [0, \infty), \quad \zeta_\pm(0) = 0, \quad \Omega_\gamma \cap B = (C^+ \cap B) \sqcup (C^- \cap B),$$

$$C^\pm = \{(s^\pm, t^\pm) \in \mathbb{R}^2 : s^\pm > 0, \quad |t^\pm| < \zeta_\pm(s^\pm)\},$$

$$\zeta_-(s^-) \rightarrow k > 0 \text{ при } s^- \rightarrow 0, \quad \zeta_+(s^+) \rightarrow 0 \text{ при } s^+ \rightarrow 0.$$

Рассмотрены два случая:

1. Пик между γ и $\partial\Omega$ **регулярный**.
2. Пик между γ и $\partial\Omega$ **нерегулярный**.

Для них применены разные подходы.

Задача III: тело с трещиной, примыкающей к границе под нулевым углом. Случай регулярного пика

Условия регулярности пика*: с некоторым числом $q \geq p$ выполнены условия:

$$\int_0^1 s^{p/(p-1)} \zeta_+(s)^{-1/(p-1)} ds < \infty,$$
$$\left(\int_0^z \zeta_+(s) ds \right)^{1/q} \left(\int_z^1 \zeta_+(s)^{-1/(p-1)} ds \right)^{(p-1)/p} \xrightarrow{z \rightarrow 0+} 0.$$

Указанные условия *необходимы и достаточны* для того, чтобы:

оператор следа $W_p^1(\Omega \setminus \bar{\gamma}) \mapsto L_1(\Gamma_0)$ непрерывный,
вложение $W_p^1(\Omega \setminus \bar{\gamma}) \hookrightarrow L_q(\Omega \setminus \bar{\gamma})$ компактное,

Пример. Степенной пик $\zeta_+(s) = s^3$ и показатель $p = 2$.

Тогда вложение $W_p^1(\Omega \setminus \bar{\gamma}) \hookrightarrow L_q(\Omega \setminus \bar{\gamma})$ верно с любым $q \in [2, 4)$ и нарушается при $q \geq 4$, а в то же время непрерывный оператор следа $W_p^1(\Omega \setminus \bar{\gamma}) \mapsto L_1(\Gamma_0)$ не существует.

* Мазья В.Г., Поборчий С.В. Теоремы вложения пространств Соболева в области с пиком и в гёльдеровской области // Алгебра и анализ. 2006. Т. 18, № 4. С. 95–126.

Задача III: тело с трещиной, примыкающей к границе под нулевым углом. Случай регулярного пика

Множество допустимых деформаций:

$$\mathcal{A} = \{\varphi \in W_p^1(\Omega_\gamma)^2 : \varphi \in \Phi, \varphi \in V\},$$

где

$$\Phi = \left\{ \varphi \in W_p^1(\Omega_\gamma)^2 : \det \nabla \varphi \in L_r(\Omega_\gamma), \det \nabla \varphi > 0 \text{ в } \Omega_\gamma \right\},$$

$$V = \left\{ \varphi \in W_p^1(\Omega_\gamma)^2 : \varphi = \varphi_0 \text{ на } \Gamma_0 \right\}.$$

Функция $\varphi_0 \in L_1(\Gamma_0)^2$ задана.

Задача минимизации энергии

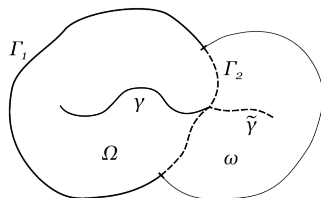
$$\text{Найти } \varphi \in \mathcal{A}, \text{ такой что } \mathcal{E}(\varphi) = \min_{\psi \in \mathcal{A}} \mathcal{E}(\psi). \quad (20)$$

Для задачи минимизации (20) доказана теорема о существовании решения.

Задача III: тело с трещиной, примыкающей к границе под нулевым углом. Случай нерегулярного пика

Если для области с разрезом нарушается приведенное выше условие регулярности пика, то мы имеем случай **нерегулярного пика**.

Для этого случая предлагается метод фиктивных областей.



Предполагается, что существует $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ – расширение области Ω вспомогательной фиктивной областью $\omega \subset \mathbb{R}^2$ и $\tilde{\gamma}$ – расширение кривой γ во внешность Ω , такие что области с разрезами $\tilde{\Omega}_\gamma = \tilde{\Omega} \setminus cl(\tilde{\gamma})$ и $\omega_\gamma = \tilde{\Omega}_\gamma \setminus cl(\Omega)$ разбивается на две ограниченных липшицевых подобласти некоторым продолжением разреза $\tilde{\gamma}$. Пусть также $\Gamma_1 = \Gamma_0 \setminus cl(\omega)$ и $\Gamma_2 = \Gamma_0 \cap cl(\omega)$, причем $\text{meas } \Gamma_2 > 0$.

Задача III: тело с трещиной, примыкающей к границе под нулевым углом. Случай нерегулярного пика

Новое множество допустимых деформаций:

$$\mathcal{A}_* = \{ \varphi \in W_p^1(\Omega_\gamma)^2 : \varphi \in \Phi, \varphi \in V_* \},$$

где $V_* \subset W_p^1(\Omega_\gamma)^2$ – это подмножество всевозможных сужений функций из множества

$$\tilde{V} = \{ \tilde{\varphi} \in W_p^1(\tilde{\Omega}_\gamma)^2 : \tilde{\varphi} = \varphi_0 \text{ на } \Gamma_1, \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_0 \text{ в } \omega_\gamma \},$$

заданного с помощью вспомогательной функции

$$\tilde{\varphi}_0 \in W_p^1(\omega_\gamma)^2, \quad \tilde{\varphi}_0 = \varphi_0 \text{ на } \Gamma_2.$$

Задача минимизации энергии

$$\text{Найти } \varphi \in \mathcal{A}_*, \text{ такой что } \mathcal{E}(\varphi) = \min_{\psi \in \mathcal{A}_*} \mathcal{E}(\psi). \quad (21)$$

Для задачи минимизации (21) тоже **доказана** теорема о существовании решения.

*Исследование поддержано Российским научным фондом,
номер проекта 25-71-00061, <https://rscf.ru/en/project/25-71-00061/>*

Контактные данные

А. И. Фурцев, к.ф.-м.н.,
науч. сотр. лаборатории краевых задач
механики сплошных сред ИГиЛ СО РАН
e-mail: al.furtsev@mail.ru, furtsev@hydro.nsc.ru

Спасибо за внимание!