

Минимаксные решения наследственных уравнений Гамильтона — Якоби с измеримым по временной переменной гамильтонианом

М. И. Гомоюнов

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

«Dynamics in Siberia», 2–6 марта 2026 г., г. Новосибирск

Коинвариантная дифференцируемость функционалов

- Пусть $n \in \mathbb{N}$, $T > 0$ и $h \geq 0$.
- Пусть $C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ — банахово пространство непрерывных функций $x: [-h, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x(\cdot)\|_\infty := \max_{\tau \in [-h, T]} \|x(\tau)\|$.
- Для любой точки $(t, x(\cdot)) \in [0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ определим функцию $x(\cdot \wedge t) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ следующим образом:

$$x(\tau \wedge t) := \begin{cases} x(\tau), & \text{если } \tau \in [-h, t], \\ x(t), & \text{если } \tau \in (t, T]. \end{cases}$$

- Через $AC(t, x(\cdot))$ обозначим множество функций $y(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ таких, что $y(\cdot \wedge t) = x(\cdot \wedge t)$ и функция $y|_{[t, T]}(\cdot)$ абсолютно непрерывна.

Функционал $\varphi: [0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *ci*-дифференцируемым в точке $(t, x(\cdot)) \in [0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n)$, если существуют $\partial_t \varphi(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R}$ и $\nabla \varphi(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ со следующим свойством: для любой функции $y(\cdot) \in AC(t, x(\cdot))$ существует функция $o: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$\begin{aligned} & \varphi(\tau, y(\cdot)) - \varphi(t, x(\cdot)) \\ &= \partial_t \varphi(t, x(\cdot))(\tau - t) + \langle \nabla \varphi(t, x(\cdot)), y(\tau) - x(t) \rangle + o(\tau - t), \quad \tau \in (t, T], \end{aligned}$$

причем

$$\lim_{\tau \rightarrow t^+} \frac{o(\tau - t)}{\tau - t + \int_t^\tau \|\dot{y}(\xi)\| d\xi} = 0.$$

В этом случае $\partial_t \varphi(t, x(\cdot))$ и $\nabla \varphi(t, x(\cdot))$ — *ci*-производные φ в точке $(t, x(\cdot))$.

Задача Коши для наследственного уравнения Гамильтона — Якоби

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(t, x(\cdot)) + H(t, x(\cdot), \nabla \varphi(t, x(\cdot))) = 0, & (t, x(\cdot)) \in [0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n), \\ \varphi(T, x(\cdot)) = \sigma(x(\cdot)), & x(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

В этой задаче

- $\varphi: [0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ — искомый функционал,
- $\partial_t \varphi(t, x(\cdot))$ и $\nabla \varphi(t, x(\cdot))$ — коинвариантные производные искомого функционала φ в точке $(t, x(\cdot))$,
- гамильтониан $H: [0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и краевой функционал $\sigma: C([-h, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ заданы.

Цель работы — развитие теории минимаксных решений задачи Коши.



А. И. Субботин, Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби, Наука, Москва, 1991.



A. I. Subbotin, Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective, Birkhäuser, Basel, 1995.

(A.1) Для любых $x(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}^n$ функция $t \mapsto H(t, x(\cdot), s)$, $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, измерима.

(A.2) Существует множество полной меры $E \subset [0, T]$ такое, что для любого $t \in E$ отображение $(x(\cdot), s) \mapsto H(t, x(\cdot), s)$, $C([-h, T], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывно.

(A.3) Для любого компактного множества $D \subset C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ существует функция $\lambda_H(\cdot) := \lambda_H(\cdot; D) \in \mathcal{L}_1([0, T], \mathbb{R}_{\geq 0})$ со следующим свойством: для любых $x_1(\cdot), x_2(\cdot) \in D$, $s \in \mathbb{R}^n$ существует множество полной меры $E := E(D, x_1(\cdot), x_2(\cdot), s) \subset [0, T]$ такое, что для всех $t \in E$

$$|H(t, x_1(\cdot), s) - H(t, x_2(\cdot), s)| \leq \lambda_H(t)(1 + \|s\|)\|x_1(\cdot \wedge t) - x_2(\cdot \wedge t)\|_{\infty}.$$

(A.4) Существуют функция $c_H(\cdot) \in \mathcal{L}_1([0, T], \mathbb{R}_{\geq 0})$ и множество полной меры $E \subset [0, T]$: для всех $t \in E$, $x(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n)$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^n$

$$|H(t, x(\cdot), s_1) - H(t, x(\cdot), s_2)| \leq c_H(t)(1 + \|x(\cdot \wedge t)\|_{\infty})\|s_1 - s_2\|.$$

(A.5) Для любого компактного множества $D \subset C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ существует функция $m_H(\cdot) := m_H(\cdot; D) \in \mathcal{L}_1([0, T], \mathbb{R}_{\geq 0})$ со следующим свойством: для любого $x(\cdot) \in D$ существует множество полной меры $E := E(D, x(\cdot)) \subset [0, T]$ такое, что для всех $t \in E$

$$|H(t, x(\cdot), 0)| \leq m_H(t).$$

(A.6) Функционал σ непрерывен.

Предположение В

(В.1) Отображение $H: [0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно.

(В.2) Для любого компактного множества $D \subset C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ существует число $\lambda_H := \lambda_H(D) > 0$: для всех $t \in [0, T]$, $x_1(\cdot), x_2(\cdot) \in D$, $s \in \mathbb{R}^n$

$$|H(t, x_1(\cdot), s) - H(t, x_2(\cdot), s)| \leq \lambda_H(1 + \|s\|)\|x_1(\cdot \wedge t) - x_2(\cdot \wedge t)\|_\infty.$$

(В.3) Существует число $c_H > 0$: для всех $t \in [0, T]$, $x(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n)$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^n$

$$|H(t, x(\cdot), s_1) - H(t, x(\cdot), s_2)| \leq c_H(1 + \|x(\cdot \wedge t)\|_\infty)\|s_1 - s_2\|.$$

(В.4) Функционал $\sigma: C([-h, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывен.



M. I. Gomojunov, N. Yu. Lukoyanov, and A. R. Plaksin, Path-dependent Hamilton–Jacobi equations: the minimax solutions revised, *Appl. Math. Optim.*, 84(1) (2021), S1087–S1117.



М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов, Минимаксные решения уравнений Гамильтона–Якоби в задачах динамической оптимизации наследственных систем, *Успехи мат. наук*, 79:2(476) (2024), 43–144.



Е. Bandini and С. Keller, Path-dependent Hamilton–Jacobi equations with u -dependence and time-measurable Hamiltonians, Appl. Math. Optim., 91(2) (2025), art. 34.

Предположение С

(С.1) (= (A.1)) Для любых $x(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}^n$ функция $t \mapsto H(t, x(\cdot), s)$, $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, измерима.

(С.2) (= (A.2)) При п.в. $t \in [0, T]$ отображение $(x(\cdot), s) \mapsto H(t, x(\cdot), s)$, $C([-h, T], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывно.

(С.3) Для любого компактного множества $D \subset C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ существует число $\lambda_H := \lambda_H(D) > 0$: для любых $x_1(\cdot), x_2(\cdot) \in D$, $s \in \mathbb{R}^n$ при п.в. $t \in [0, T]$

$$|H(t, x_1(\cdot), s) - H(t, x_2(\cdot), s)| \leq \lambda_H(1 + \|s\|)\|x_1(\cdot \wedge t) - x_2(\cdot \wedge t)\|_\infty.$$

(С.4) Существует число $c_H > 0$: при п.в. $t \in [0, T]$ для любых $x(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n)$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^n$

$$|H(t, x(\cdot), s_1) - H(t, x(\cdot), s_2)| \leq c_H(1 + \|x(\cdot \wedge t)\|_\infty)\|s_1 - s_2\|.$$

(С.5) Существует число $m_H > 0$: при п.в. $t \in [0, T]$ для любого $x(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n)$

$$|H(t, x(\cdot), 0)| \leq m_H(1 + \|x(\cdot \wedge t)\|_\infty).$$

(С.6) (= (A.6)) Функционал $\sigma: C([-h, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывен.



Е. Bayraktar and С. Keller, Path-dependent Hamilton–Jacobi equations in infinite dimensions, J. Funct. Anal., 275(8) (2018), 2096–2161.

Классические (не наследственные) уравнения Гамильтона — Якоби с измеримым по временной переменной гамильтонианом

Теория минимаксных решений (при дополнительном условии положительной однородности гамильтониана H по третьей переменной s):



D. V. Tran, T. Mikio, and D. T. S. Nguyen, *The Characteristic Method and its Generalizations for First-Order Nonlinear Partial Differential Equations*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2000.



R. B. Vinter and P. Wolenski, Hamilton–Jacobi theory for optimal control problems with data measurable in time, *SIAM J. Control Optim.*, 28(6) (1990), 1404–1419.

Теория вязкостных решений:



H. Ishii, Hamilton–Jacobi equations with discontinuous Hamiltonians on arbitrary open sets, *Bull. Fac. Sci. Eng. Chuo Univ.*, 28 (1985), 33–77.



E. N. Barron and R. Jensen, Generalized viscosity solutions for Hamilton–Jacobi equations with time-measurable Hamiltonians, *J. Differential Equations*, 68(1) (1987), 10–21.



P.-L. Lions and B. Perthame, Remarks on Hamilton–Jacobi equations with measurable time-dependent Hamiltonians, *Nonlinear Anal.*, 11(5) (1987), 613–621.



A. Briani and F. Rampazzo, A density approach to Hamilton–Jacobi equations with t -measurable Hamiltonians, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 12(1) (2005), 71–91.

Функционал $\varphi: [0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ называется неупреждающим, если

$$\varphi(t, x(\cdot)) = \varphi(t, x(\cdot \wedge t)), \quad (t, x(\cdot)) \in [0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n).$$

Лемма 1

Предположим, что выполнены условия (A.1)–(A.5). Тогда для любого компактного множества $D \subset C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ существует множество полной меры $E := E(D) \subset [0, T]$: для всех $t \in E$, $x(\cdot) \in D$, $s \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{\tau \rightarrow t^+} \frac{1}{\tau - t} \int_t^\tau H(\xi, x(\cdot), s) \, d\xi = H(t, x(\cdot), s).$$

Следствие 1

Для любого компактного множества $D \subset C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ существует множество полной меры $E := E(D) \subset [0, T]$: для всех $t \in E$, $x(\cdot) \in D$, $s \in \mathbb{R}^n$

$$H(t, x(\cdot), s) = H(t, x(\cdot \wedge t), s).$$

Пусть $\varphi: [0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ — неупреждающий функционал.

Функционал φ называется верхним решением задачи Коши, если он полунепрерывен снизу, удовлетворяет краевому условию

$$\varphi(T, x(\cdot)) \geq \sigma(x(\cdot)), \quad x(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n),$$

и обладает следующим свойством: для любых $(t, x(\cdot)) \in [0, T) \times C([-h, T], \mathbb{R}^n)$, $\tau \in (t, T]$, $s \in \mathbb{R}^n$ существует функция $y(\cdot) \in Y(t, x(\cdot); c_H(\cdot))$ такая, что

$$\varphi(\tau, y(\cdot)) - \int_t^\tau (\langle s, \dot{y}(\xi) \rangle - H(\xi, y(\cdot), s)) d\xi \leq \varphi(t, x(\cdot)).$$

$$Y(t, x(\cdot); c_H(\cdot)) := \{y(\cdot) \in AC(t, x(\cdot)):$$

$$\|\dot{y}(\tau)\| \leq c_H(\tau)(1 + \|y(\cdot \wedge \tau)\|_\infty) \text{ при п.в. } \tau \in [t, T]\}.$$

Функционал φ называется нижним решением задачи Коши, если он полунепрерывен сверху, удовлетворяет краевому условию

$$\varphi(T, x(\cdot)) \leq \sigma(x(\cdot)), \quad x(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n),$$

и обладает следующим свойством: для любых $(t, x(\cdot)) \in [0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n)$, $\tau \in (t, T]$, $s \in \mathbb{R}^n$ существует функция $y(\cdot) \in Y(t, x(\cdot); c_H(\cdot))$ такая, что

$$\varphi(\tau, y(\cdot)) - \int_t^\tau (\langle s, \dot{y}(\xi) \rangle - H(\xi, y(\cdot), s)) \, d\xi \geq \varphi(t, x(\cdot)).$$

Функционал $\varphi: [0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ называется минимаксным решением задачи Коши, если он является одновременно верхним и нижним решением этой задачи.

Через Φ обозначим множество функционалов $\varphi: [0, T] \times C([-h, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, обладающих следующими свойствами.

(Ф.1) Функционал φ непрерывен. Для любых $(t, x(\cdot)) \in [0, T) \times C([-h, T], \mathbb{R}^n)$, $y(\cdot) \in AC(t, x(\cdot))$ и $\vartheta \in (t, T)$ функция $\tau \mapsto \varphi(\tau, y(\cdot))$, $[t, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}$, абсолютно непрерывна.

(Ф.2) Существует множество полной меры $E_\varphi \subset [0, T)$: функционал φ si -дифференцируем в каждой точке $(t, x(\cdot)) \in E_\varphi \times C([-h, T], \mathbb{R}^n)$.

(Ф.3) Для любого $x(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ функция $t \mapsto (\partial_t \varphi(t, x(\cdot)), \nabla \varphi(t, x(\cdot)))$, $E_\varphi \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, измерима. Для любого $t \in E_\varphi$ отображение $x(\cdot) \mapsto (\partial_t \varphi(t, x(\cdot)), \nabla \varphi(t, x(\cdot)))$, $C([-h, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, непрерывно.

(Ф.4) Для любого компактного множества $D \subset C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ и любого $\vartheta \in [0, T)$ существует функция $m_\varphi(\cdot) := m_\varphi(\cdot; D, \vartheta) \in \mathcal{L}_1([0, \vartheta], \mathbb{R}_{\geq 0})$ и число $\ell_\varphi := \ell_\varphi(D, \vartheta) > 0$: для всех $t \in E_\varphi \cap [0, \vartheta]$, $x(\cdot) \in D$

$$|\partial_t \varphi(t, x(\cdot))| \leq m_\varphi(t), \quad \|\nabla \varphi(t, x(\cdot))\| \leq \ell_\varphi.$$

Лемма 2

Пусть $\varphi \in \Phi$, $(t, x(\cdot)) \in [0, T) \times C([-h, T], \mathbb{R}^n)$, $y(\cdot) \in AC(t, x(\cdot))$. Тогда для всех $\tau \in [t, T)$

$$\varphi(\tau, y(\cdot)) = \varphi(t, x(\cdot)) + \int_t^\tau (\partial_t \varphi(\xi, y(\cdot)) + \langle \nabla \varphi(\xi, y(\cdot)), \dot{y}(\xi) \rangle) d\xi.$$

Полуклассические решения и свойства согласованности минимаксных решений

Функционал $\varphi \in \Phi$ называется полуклассическим решением задачи Коши, если он удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$\partial_t \varphi(t, x(\cdot)) + H(t, x(\cdot), \nabla \varphi(t, x(\cdot))) = 0, \quad (t, x(\cdot)) \in E_\varphi \times C([-h, T], \mathbb{R}^n),$$

и краевому условию

$$\varphi(T, x(\cdot)) = \sigma(x(\cdot)), \quad x(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n).$$

Теорема 1

Пусть выполнено предположение **A**. Тогда всякое полуклассическое решение φ задач и Коши является минимаксным решением этой задачи.

Теорема 2

Пусть выполнено предположение **A** и пусть множество S есть объединение компактных множеств $D_k \subset C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ по $k \in \mathbb{N}$. Тогда существует множество полной меры $E := E(S) \subset [0, T)$ такое, что минимаксное решение φ задачи Коши удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби во всех точках $(t, x(\cdot)) \in E \times S$, в которых оно ci -дифференцируемо.

Теорема 3

- Пусть гамильтонианы H_1 и H_2 удовлетворяют условиям (A.1)–(A.5), а краевой функционал σ — условию (A.6).
- Рассмотрим нижнее решение φ_1 задачи Коши с гамильтонианом H_1 и верхнее решение φ_2 задачи Коши с гамильтонианом H_2 .
- Зафиксируем точку $(t, x(\cdot)) \in [0, T) \times C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ и рассмотрим множество $Y(t, x(\cdot); c_{H_1}(\cdot))$, где $c_{H_1}(\cdot)$ — функция из условия (A.4) для H_1 .
- Предположим, что для любой функции $y(\cdot) \in Y(t, x(\cdot); c_{H_1}(\cdot))$ существует множество полной меры $E := E(y(\cdot)) \subset [t, T]$: для всех $\tau \in E$, $s \in \mathbb{R}^n$

$$H_1(\tau, y(\cdot), s) \leq H_2(\tau, y(\cdot), s).$$

Тогда имеет место неравенство

$$\varphi_1(t, x(\cdot)) \leq \varphi_2(t, x(\cdot)).$$

Теорема 4

Пусть гамильтониан H и краевой функционал σ удовлетворяют предположению **A**. Тогда минимаксное решение φ задачи Коши единственно.

Замечание 1

В определении минимаксного решения задачи Коши участвует функция $s_H(\cdot)$, которая может быть выбрана из условия (A.4) неоднозначным образом. Из теоремы 4 следует, что при выполнении предположения **A** минимаксное решение не зависит от этого выбора.

Теорема 5

- Пусть гамильтонианы $H, H_k, k \in \mathbb{N}$, и краевые функционалы $\sigma, \sigma_k, k \in \mathbb{N}$, удовлетворяют предположению А.
- Предположим, что для любого компактного множества $D \subset C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ и любого $s \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{y(\cdot) \in D} \int_0^T |H_k(t, y(\cdot), s) - H(t, y(\cdot), s)| dt = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{y(\cdot) \in D} |\sigma_k(y(\cdot)) - \sigma(y(\cdot))| = 0.$$

- Пусть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T |c_{H_k}(t) - c_H(t)| dt = 0,$$

где $c_H(\cdot), c_{H_k}(\cdot), k \in \mathbb{N}$, — соответствующие функции из условия (А.4).

- Предположим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ минимаксное решение φ_k задачи Коши с гамильтонианом H_k и краевым функционалом σ_k существует.

Тогда существует минимаксное решение φ задачи Коши с гамильтонианом H и краевым функционалом σ . Кроме того, для любого компактного множества $D \subset C([-h, T], \mathbb{R}^n)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{(t, x(\cdot)) \in [0, T] \times D} |\varphi_k(t, x(\cdot)) - \varphi(t, x(\cdot))| = 0.$$

Преобразование Стеклова гамильтониана H по временной переменной

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим гамильтониан

$$H_k(t, x(\cdot), s) := \frac{k}{2} \int_{t-1/k}^{t+1/k} H(\tau, x(\cdot \wedge t), s) d\tau,$$

где $t \in [0, T]$, $x(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}^n$. При $\tau \in [-1, 0) \cup (T, T+1]$ полагаем $H(\tau, x(\cdot), s) := 0$ для всех $x(\cdot) \in C([-h, T], \mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}^n$.

Лемма 3

Для любого $k \in \mathbb{N}$ гамильтониан H_k удовлетворяет условиям (B.1)–(B.3) и условию (A.4) с функцией

$$c_{H_k}(t) := \frac{k}{2} \int_{t-1/k}^{t+1/k} c_H(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T],$$

где $c_H(\cdot)$ — функция из условия (A.4) для гамильтониана H и $c_H(\tau) := 0$ для всех $\tau \in [-1, 0) \cup (T, T+1]$.

Заметим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T |c_{H_k}(t) - c_H(t)| dt = 0.$$

Лемма 4

Для любого компактного множества $D \subset C([-h, T], \mathbb{R}^n)$ и любого $s \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{y(\cdot) \in D} \int_0^T |H_k(t, y(\cdot), s) - H(t, y(\cdot), s)| dt = 0.$$

Теорема 6

Предположим, что гамильтониан H и краевой функционал σ удовлетворяют предположению А. Тогда минимаксное решение задачи Коши существует.

Спасибо за внимание!