



Conference
March 2 - March 6, 2026

Dynamics in Siberia 



Supercomputing Special Relativistic Hydrodynamics **Суперкомпьютерное моделирование в задачах** **специальной релятивистской гидродинамики**

Куликов Игорь Михайлович

д.ф.-м.н., в.н.с. лаборатории суперкомпьютерного моделирования

ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск

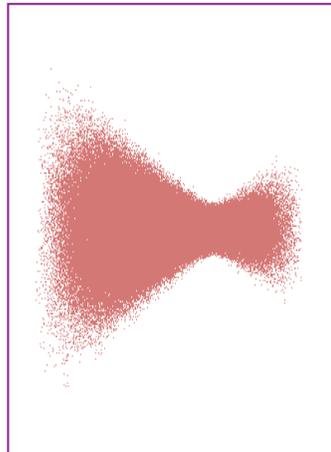
2 марта 2026 года

Новосибирск

Лаборатория суперкомпьютерного моделирования



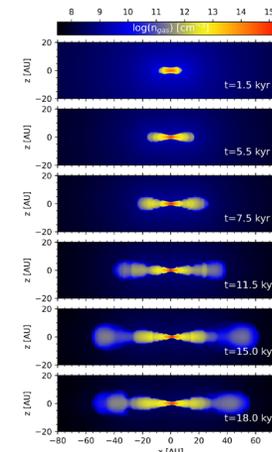
Дудникова Г.И.



Вшивков В.А.



Лазарева Г.Г.



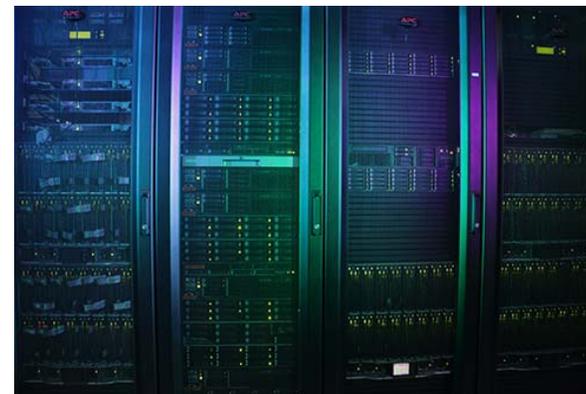
Куликов И.М.

Лабораторная плазма

Космическая плазма



Глинский Б.М.

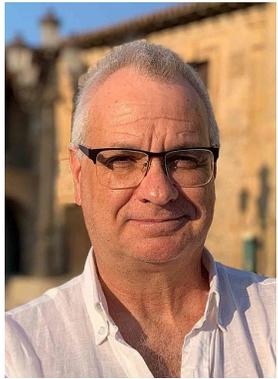


Сибирский суперкомпьютерный центр ИВМиМГ СО РАН



Черных И.Г.

Научный коллектив



Romero G.E.
IAR
Argentina



Тутуков А.В.
ИНАСАН
Москва



Vorobyov E.I.
Univ. Vienna
Austria



Куликов И.М.
ИВМиМГ
СО РАН



Черных И.Г.
ИВМиМГ
СО РАН



Güdel M.
Univ. Vienna
Austria



Элбакян В.Г.
ЮФУ
Ростов-на-Дону



McKevitt J.
UCL
England



Abaroa L.
IAR
Argentina



Сапетина А.Ф.
ИВМиМГ
СО РАН



Мисиллов В.Е.
УрФУ
Екатеринбург



Sarkar S.
HRI
India



Караваев Д.А.
ИВМиМГ
СО РАН



Ульяничев И.С.
ИВМиМГ
СО РАН

Вычислительные модели космической плазмы

Гидродинамические модели

Гравитационная
гидродинамика

Релятивистская
гидродинамика

Магнитная
гидродинамика

Уравнения
Больцмана

Подсеточные
процессы



Численные методы

Метод
Годунова

Разделение
операторов

Симметрическая
форма уравнений

Схемы Рунгута,
Рунге и HLLE/C/D

Матрица
вязкости



Кусочно-полиномиальные реконструкции для малой диссипации

Схема Колгана (линейная)

Параболическая

Кубическая



Расчетные сетки

Регулярные
сетки

Многоуровневые
вложенные сетки

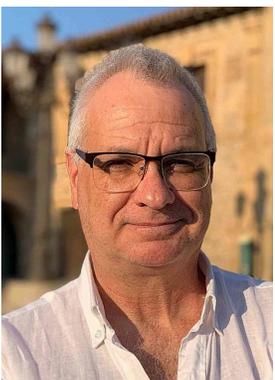
Адаптивные
сетки

Геодезические
подвижные сетки

Тетраэдральные
сетки

Релятивистские струи, ветер и молекулярные облака в широкополосной области активных ядер галактик

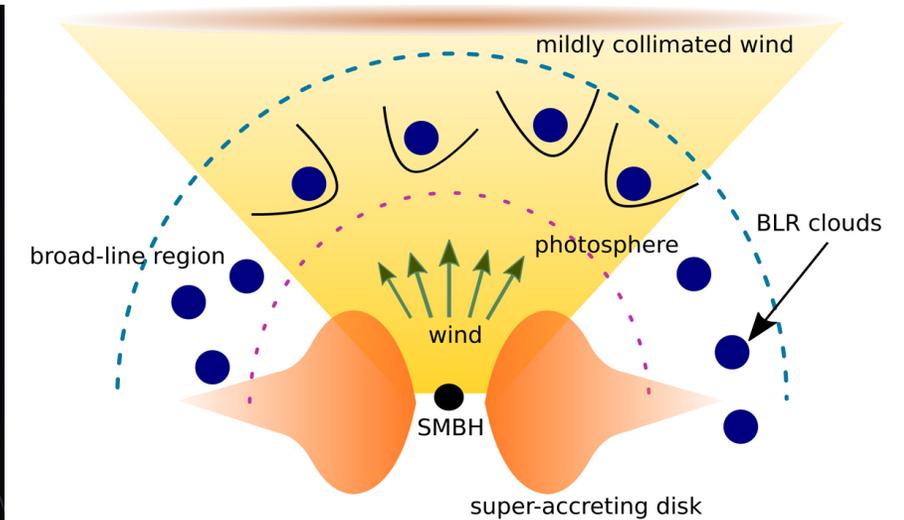
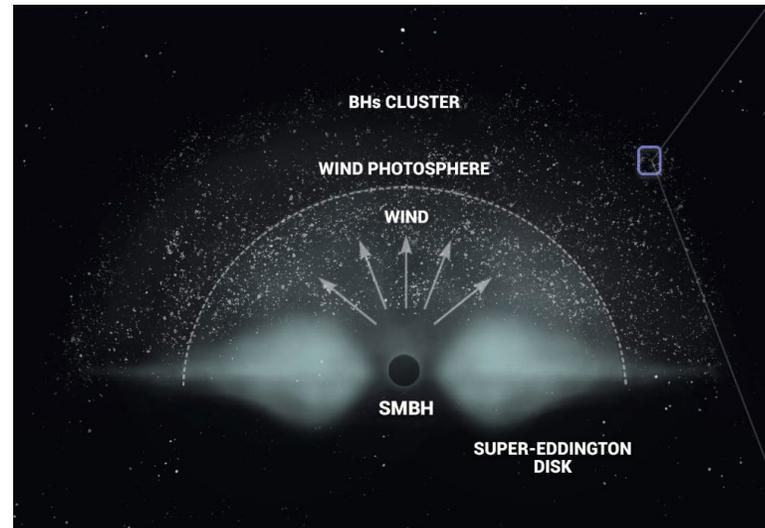
Институт радиоастрономии
(Буэнос Айрес, Аргентина)



G. Romero
(IAR, Argentina)



L. Abaroa



- **Mueller A.L., Romero G.E.** Radiation from the impact of broad-line region clouds onto AGN accretion disks // [Astronomy & Astrophysics. - 2020. - V. 636. - Article Number A92.](#)
- **Sotomayor P., Romero G.E.** Nonthermal radiation from the central region of super-accreting active galactic nuclei // [Astronomy & Astrophysics. - 2022. - V. 664. - Article Number A178.](#)
- **Abaroa L., Romero G.E.** Electromagnetic signatures of black hole clusters in the center of super-Eddington galaxies // [Astronomy & Astrophysics. - 2024. - V. 691. - Article Number A73.](#)

Основные релятивистские программные коды

Код	Численный метод	Регуляризация	Технологии
SAFE	WENO + HLLE + 3D	Нет	MPI
PLUTO	PPM + HLL + 3D	$E = mc^2$	MPI
RAM	WENO + HLL + AMR	Нет	MPI
RAMSES	PLM + MUSCL + AMR	$E = mc^2$	MPI
CRONOS	PLM + MUSCL + 3D	Энтропия	MPI
GENESIS	PLM + Roe + 3D	$E = mc^2$	MPI
TESS	HLLC + Voronoi 2D	Нет	MPI
Идеальный код	PPML + Robust + AMR	Энтропия & $E = mc^2$	Coarray Fortran

Симметризация гиперболических уравнений

Законы сохранения (**физика**)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(u)) = 0$$



Восстановление
примитивных переменных q
по консервативным u

$$q = \psi^{-1}(u)$$



Термодинамические потенциалы

$$L = L(q) \quad M = M(q)$$

Законы сохранения (**потенциалы**)

$$\frac{\partial L_q}{\partial t} + \frac{\partial M_q}{\partial x} = 0$$



Симметричная
гиперболическая система

$$L_{qq} \frac{\partial q}{\partial t} + M_{qq} \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$



Условие гиперболичности

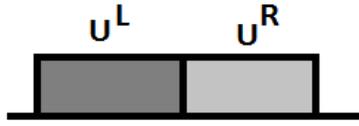
$$L_{qq} > 0$$

Численный метод решения уравнений

Законы сохранения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (f(u)) = 0$$

Линеаризация



$$A \frac{\partial q}{\partial t} + B \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

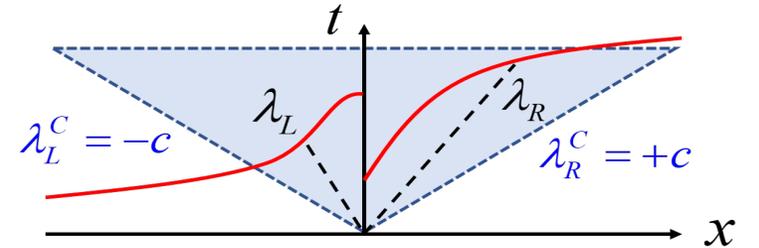
SVD декомпозиция

$$A^{1/2} A^{1/2} \frac{\partial q}{\partial t} + B \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

Метод Годунова

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^n}{\tau} + \frac{F_{i+1} - F_i}{h} = 0$$

PPML реконструкция



Решение задачи Римана

$$F = f \left(\psi \left(P^T A^{1/2} Q \right) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(P^T A^{1/2} q \right) + \Lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(P^T A^{1/2} q \right) = 0$$

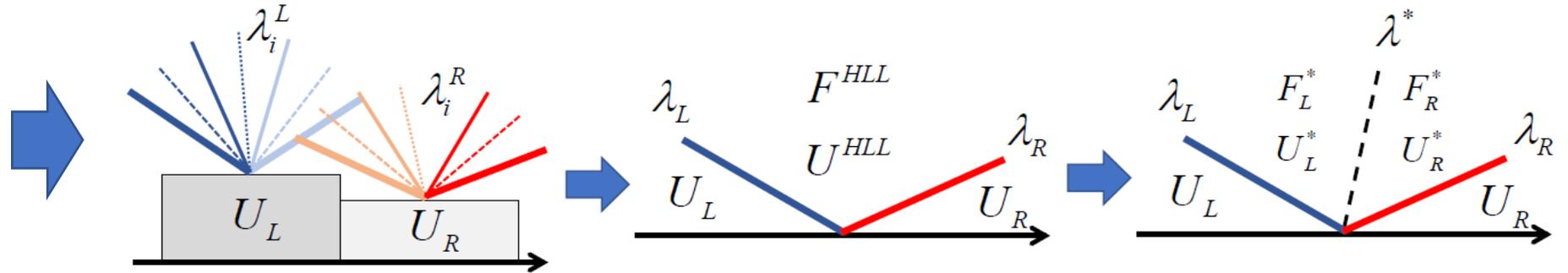
Спектральная декомпозиция

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(A^{1/2} q \right) + A^{-1/2} B A^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} \left(A^{1/2} q \right) = 0$$

HLLC схема для релятивистских МГД уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^n}{\tau} + \frac{F_{i+1}^{HLLC} - F_i^{HLLC}}{h} = 0$$

$$A \frac{\partial q}{\partial t} + B \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$



$$D = \rho \Gamma$$

$$\Sigma = \rho \sigma \Gamma$$

$$S_\xi = (\rho h \Gamma^2 + B^2) v_\xi - (\vec{v}, \vec{B}) B_\xi$$

$$U^{HLL} = \frac{\lambda_R U_R - \lambda_L U_L + F_L - F_R}{\lambda_R - \lambda_L}$$

$$E = \rho h \Gamma^2 - p + \frac{B^2}{2} + \frac{v^2 B^2}{2} - \frac{(\vec{v}, \vec{B})^2}{2}$$

$$F^{HLL} = \frac{\lambda_R F_L - \lambda_L F_R + \lambda_R \lambda_L (U_R - U_L)}{\lambda_R - \lambda_L}$$

$$P = p + \frac{B^2}{2\Gamma^2} + \frac{(\vec{v}, \vec{B})^2}{2}$$

$$\lambda^* = v_x^{HLL}$$

$$F_R^* - F_L^* = \lambda^* (U_R^* - U_L^*)$$

NLLS схема для релятивистских МГД уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} D \\ S_x \\ S_y \\ S_z \\ E \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ \Sigma \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} Dv_x \\ S_x v_x \\ S_y v_y \\ S_z v_z \\ 0 \\ 0 \\ B_y v_x \\ B_z v_x \\ \Sigma v_x \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ p + \frac{B^2}{2\Gamma^2} + \frac{(\vec{v}, \vec{B})^2}{2} - \left(\frac{B_x}{\Gamma^2} + (\vec{v}, \vec{B}) v_x \right) B_x \\ 0 \\ 0 \\ S_x \\ 0 \\ -v_y B_x \\ -v_z B_x \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

HLLC схема для релятивистских МГД уравнений

$$B_x = 0$$

$$B_x \neq 0$$

$$v_{xL}^* = v_{xR}^* = v_x^* = \lambda^* \quad P_L^* = P_R^* = P^* = F_{S_x}^{HLL} - F_E^{HLL} \lambda^*$$

$$\rho_L^* \neq \rho_R^*$$

$$[D, \Sigma]_L^* = [D, \Sigma]_L \frac{\lambda_L - v_L^x}{\lambda_L - \lambda^*}$$

$$[D, \Sigma]_R^* = [D, \Sigma]_R \frac{\lambda_R - v_R^x}{\lambda_R - \lambda^*}$$

$$\vec{v}_L^* = \vec{v}_R^* = \vec{v}^* = \vec{v}^{HLL}$$

$$\vec{B}_L^* = \vec{B}_R^* = \vec{B}^* = \vec{B}^{HLL}$$

$$[S, B]_L^{\{y,z\}*} = [S, B]_L^{\{y,z\}} \frac{\lambda_L - v_L^x}{\lambda_L - \lambda^*}$$

$$[S, B]_R^{\{y,z\}*} = [S, B]_R^{\{y,z\}} \frac{\lambda_R - v_R^x}{\lambda_R - \lambda^*}$$

$$p_L^* = p_R^* = p^* = p^{HLL}$$

$$E_L^* = \frac{\lambda_L E_L - S_L^x + P^* \lambda^*}{\lambda_L - \lambda^*}$$

$$E_R^* = \frac{\lambda_R E_R - S_R^x + P^* \lambda^*}{\lambda_R - \lambda^*}$$

$$\rho_L^* \Gamma^* = D_L \frac{\lambda_L - v_L^x}{\lambda_L - \lambda^*}$$

$$\rho_R^* \Gamma^* = D_R \frac{\lambda_R - v_R^x}{\lambda_R - \lambda^*}$$

$$S_L^{\{x\}*} = (E_L^* + P^*) \lambda^*$$

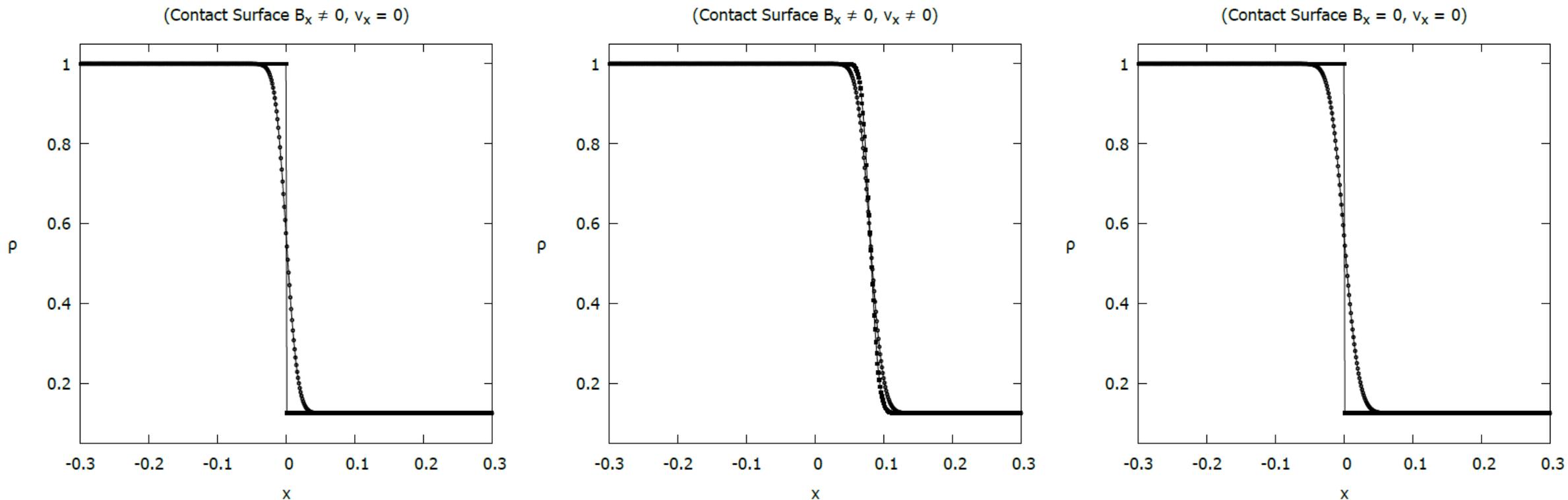
$$S_R^{\{x\}*} = (E_R^* + P^*) \lambda^*$$

$$\rho_L^* \sigma_L^* \Gamma^* = \Sigma_L \frac{\lambda_L - v_L^x}{\lambda_L - \lambda^*}$$

$$\rho_R^* \sigma_R^* \Gamma^* = \Sigma_R \frac{\lambda_R - v_R^x}{\lambda_R - \lambda^*}$$

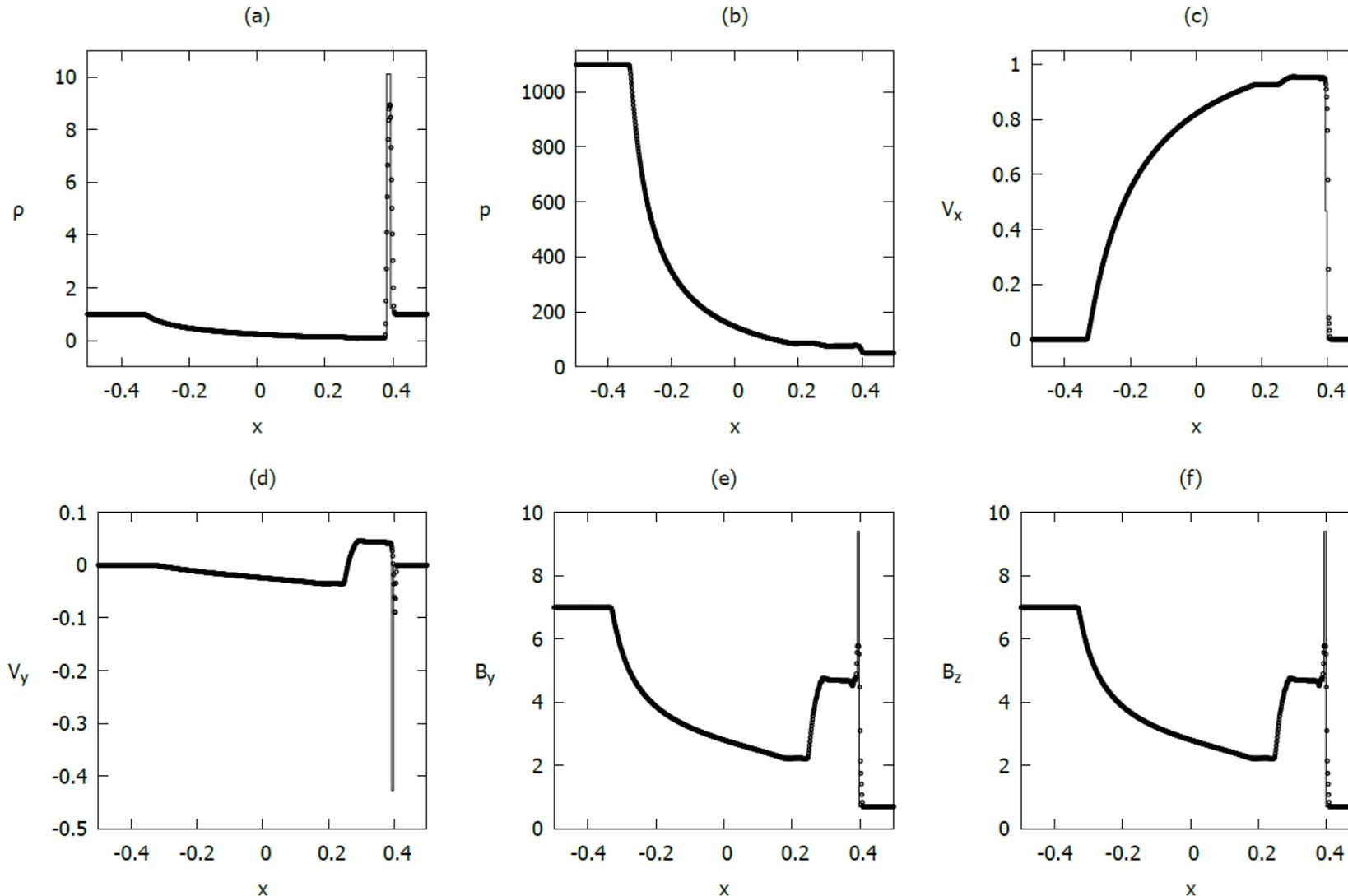
$$F^{HLLC} = \begin{cases} F_L, & \lambda_L > 0 \\ F_L + \lambda_L (U_L^* - U_L), & \lambda_L \leq 0 \leq \lambda^* \\ F_R + \lambda_R (U_R^* - U_R), & \lambda^* \leq 0 \leq \lambda_R \\ F_R, & \lambda_R < 0 \end{cases}$$

RMHD HLLC: **контактный разрыв**



В случае статичной волны HLLC метод позволяет точно воспроизвести контактный разрыв, при этом HLL метод дает чуть более сильную диссипацию при нулевой нормальной компоненте магнитного поля. При движущемся контактном разрыве HLLC метод менее диссипативен, чем HLL метод.

RMHD HLLC: третий тест Бальзары

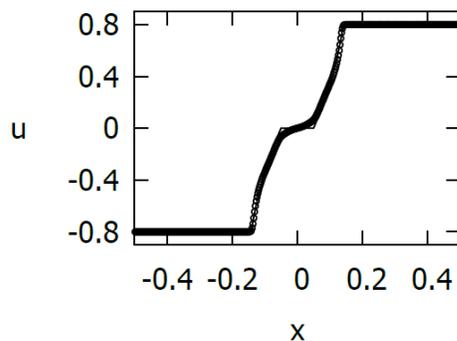
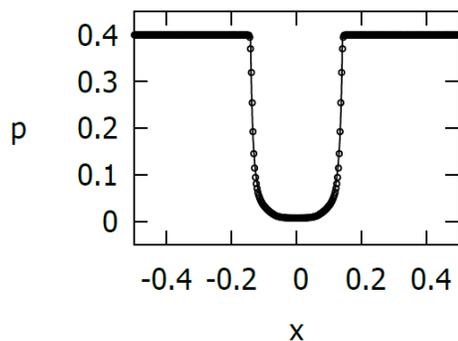
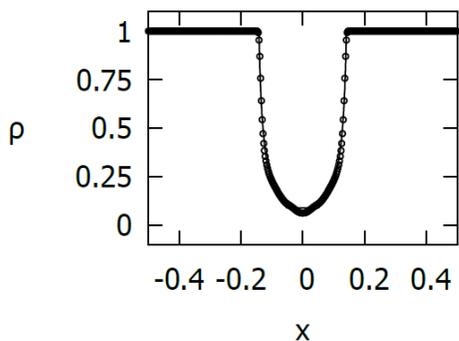


Особенностью теста является формирование сильной ударной волны из-за начального скачка давления. Разрыв в магнитном поле усложняет задачу тем, что быстрые и медленные ударные волны распространяются близко друг к другу создавая «тонкий» пик, воспроизводимый всего на пяти ячейках. Известно, что PPM методы не воспроизводят такое обратное течение даже при более подробной сетке. **Использование PPM для воспроизведения обратного поперечного течения требует минимум 3200 ячеек, что в четыре раза больше, чем используется в расчете.**

Условие гиперболичности уравнений



Релятивистский тест Эйнфельдта



**Нерелятивистский
холодный разреженный газ**



**Проблема в численной
процедуре восстановления
давления газа**



**(I) «E = mc²»
регуляризация**

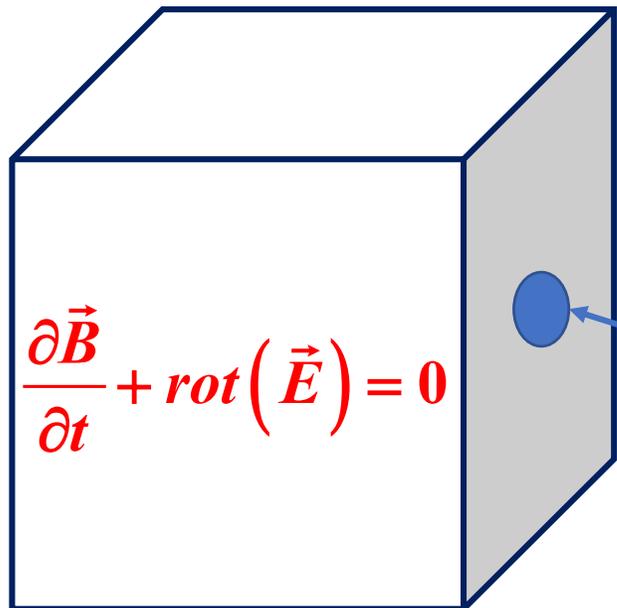
$$\frac{\partial}{\partial t}(E - D) + \frac{\partial}{\partial x}(S_x - Dv_x) = 0$$



**(II) Энтروпийная
регуляризация**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Gamma \sigma \rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma \sigma \rho v_x) = 0$$

Выполнение условия $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$



$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ v_x B_y - v_y B_x \\ v_x B_z - v_z B_x \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{R}_y \\ \mathbb{R}_z \end{pmatrix} = 0$$

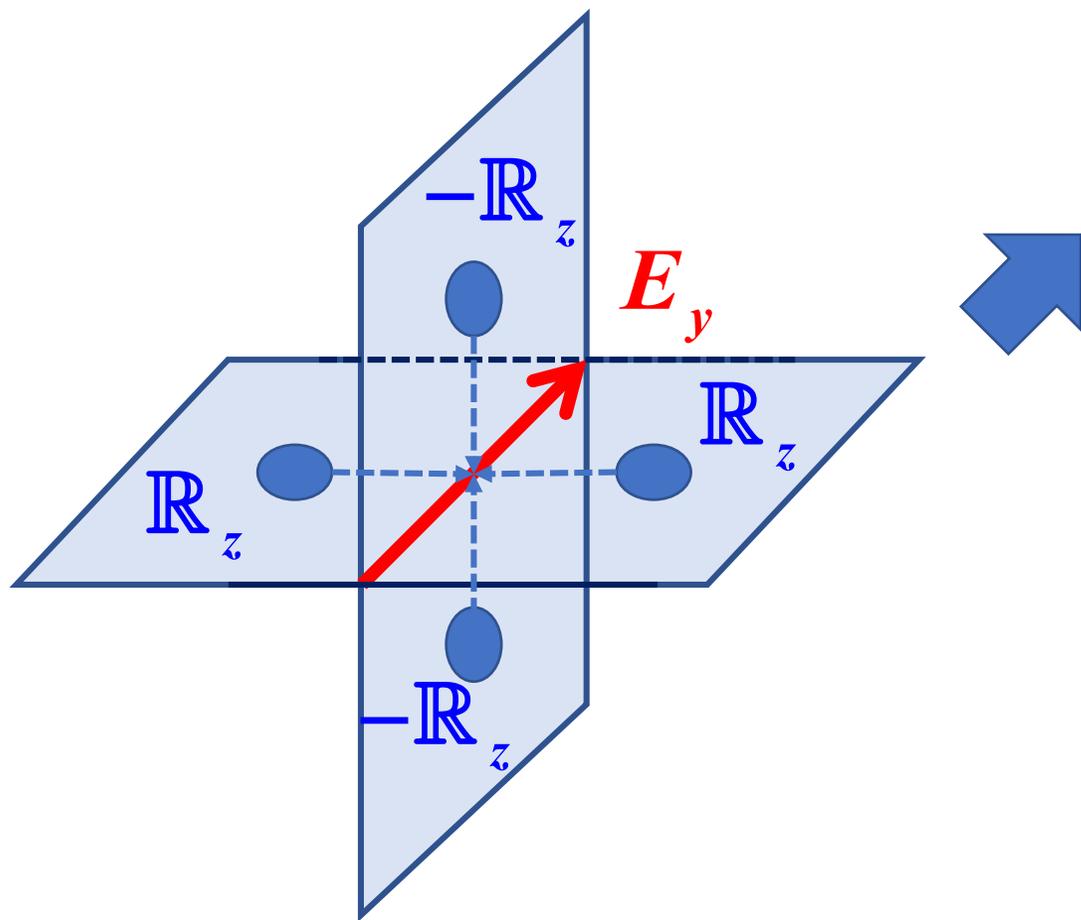
$$E_x = 0$$

$$E_y = \mathbb{R}_z$$

$$E_z = -\mathbb{R}_y$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = -\vec{v} \times \vec{B} = - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = - \begin{pmatrix} v_y B_z - v_z B_y \\ v_z B_x - v_x B_z \\ v_x B_y - v_y B_x \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbb{R}_z \\ \mathbb{R}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{R}_z \\ -\mathbb{R}_y \end{pmatrix}$$

Выполнение условия $\text{div}(\mathbf{B}) = 0$



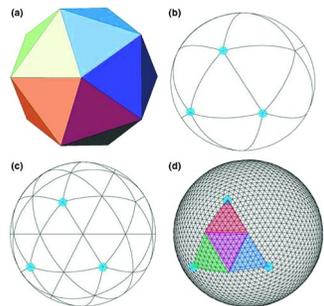
$$\text{rot}(\vec{E}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

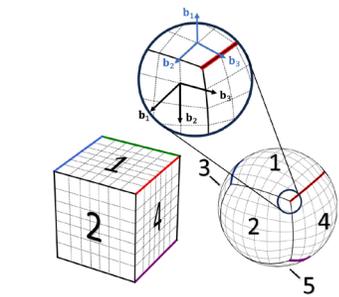
- 1) **Toth G.** The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ Constraint in Shock-Capturing Magnetohydrodynamics Codes // **Journal of Computational Physics.** - 2000. - V. 161. - P. 605-652.
- 2) **Бабий Д.П., Годунов С.К., Жуков В.Т., Феодоритова О.Б.** О разностных аппроксимациях переопределенных гиперболических уравнений классической математической физики // **Журнал вычислительной математики и математической физики.** - 2007.- Т. 47. - С. 445-459.

О трехмерных расчетных сетках

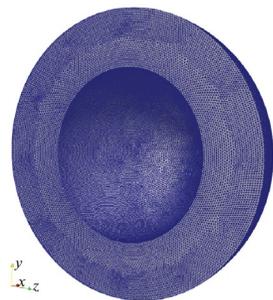
Специальные сетки



Geodesic Mesh
Balsara, 2019

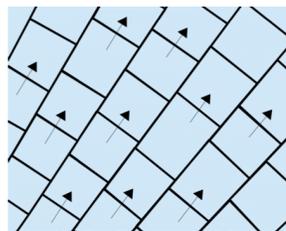


ExoCubed
Chen, ApJ, 2024

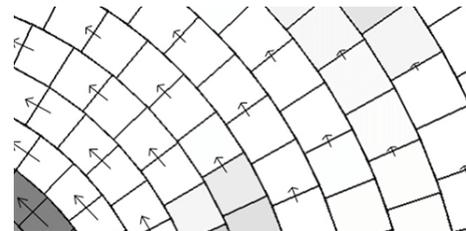


Lukin
MNRAS, 2017

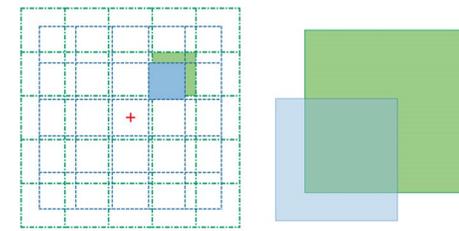
Группа Пола Дюффеля



JET
ApJS, 2013

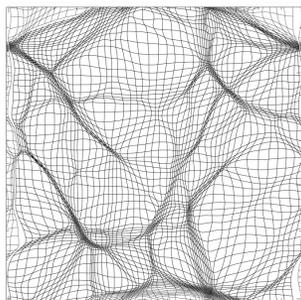


DISCO
ApJS, 2016

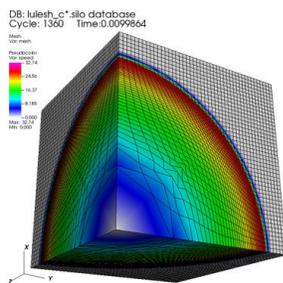


SPROUT
ApJS, 2023

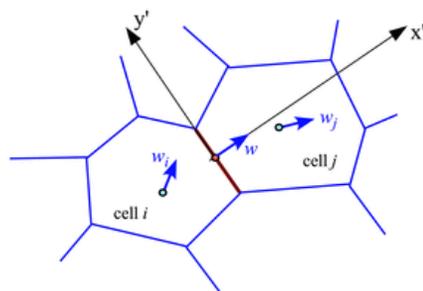
Подвижные сетки



Pen
ApJS, 1998

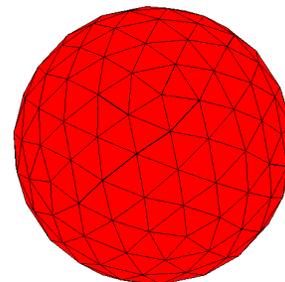


ALE3D
LLNL, 2007

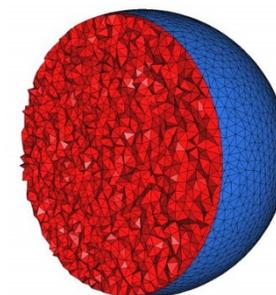
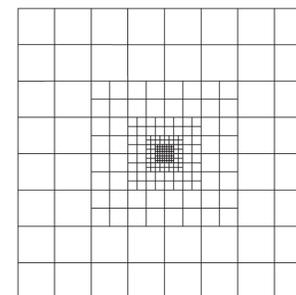


AREPO, Springel,
2010

Задача звездообразования

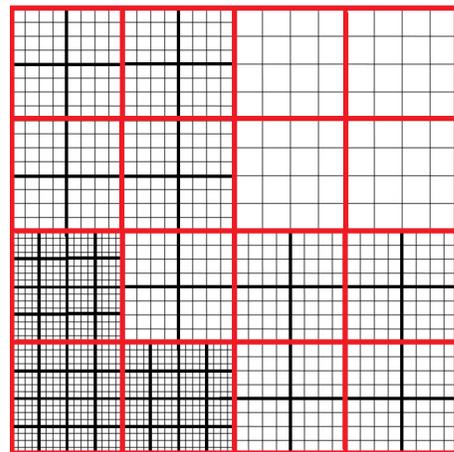
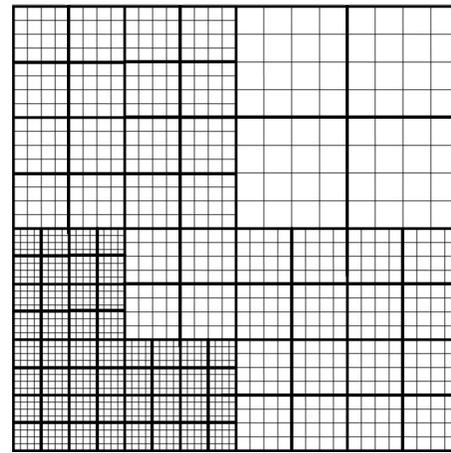
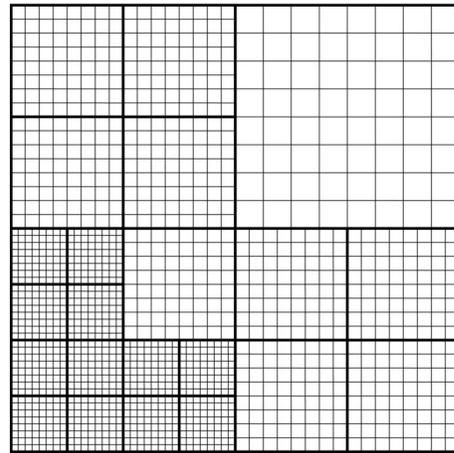
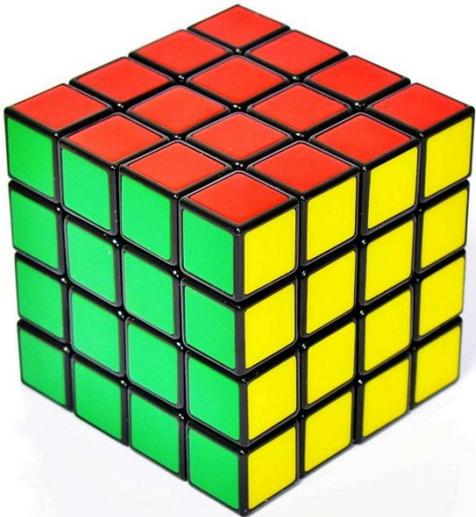


Kulikov & Vorobyov, 2020-2025

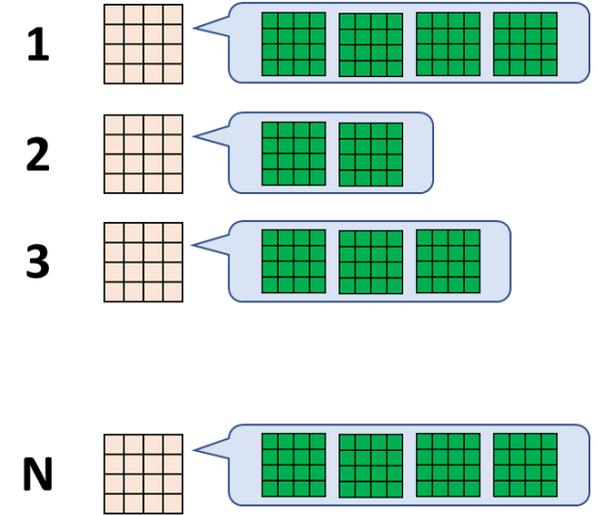


Оригинальная концепция адаптивных сеток

Использование
микросетки как
атомарной
структуры



2	2	1	1
2	2	1	1
4	2	2	2
4	4	2	2



Micro
Meshes

Neighboring
Meshes



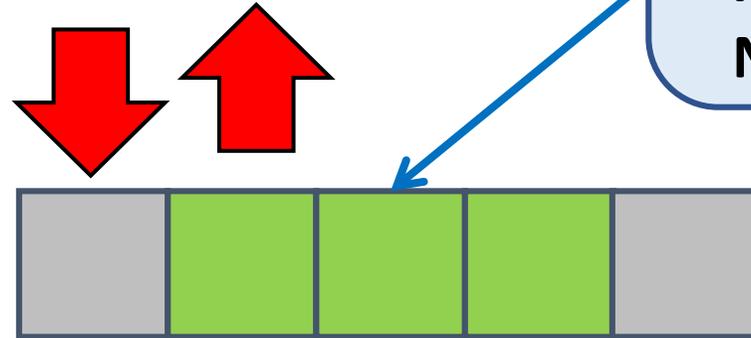
MAP/REDUCE
СИСТЕМЫ

Использование Coarray Fortran

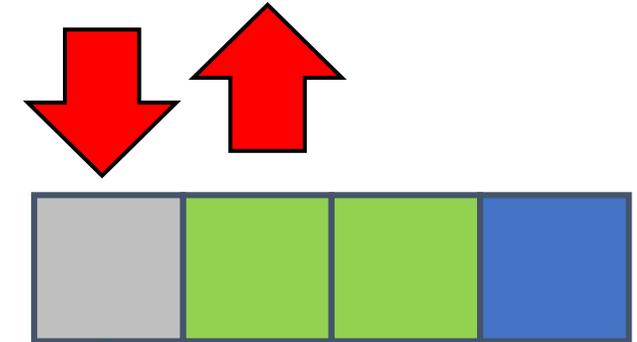
irank 1
isize 3
Nlocal 3



irank 2
isize 3
Nlocal 3



```
1: double precision, allocatable :: A(:)[:]  
2: irank = this_image()  
3: isize = num_images()  
4: Nlocal = N/isize  
5: if(irank-1 < mod(N,isize)) then  
6:   Nlocal = Nlocal + 1  
7: endif  
8: allocate(A(Nlocal+2)[*])  
9: if(irank < isize) then  
10:  A(1)[irank+1] = A(Nlocal+1)  
11:  A(Nlocal+2) = A(2)[irank+1]  
12: endif  
13: sync all  
14: deallocate(A)
```



irank 3
isize 3
Nlocal 2

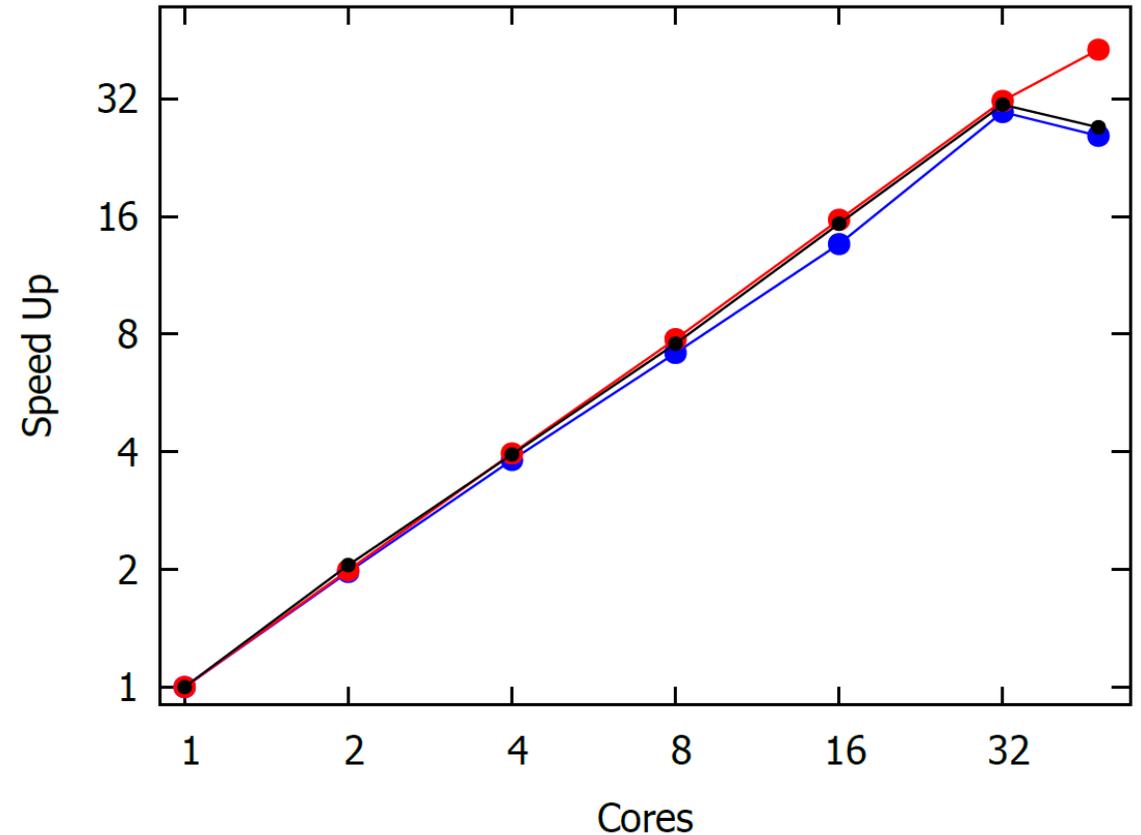
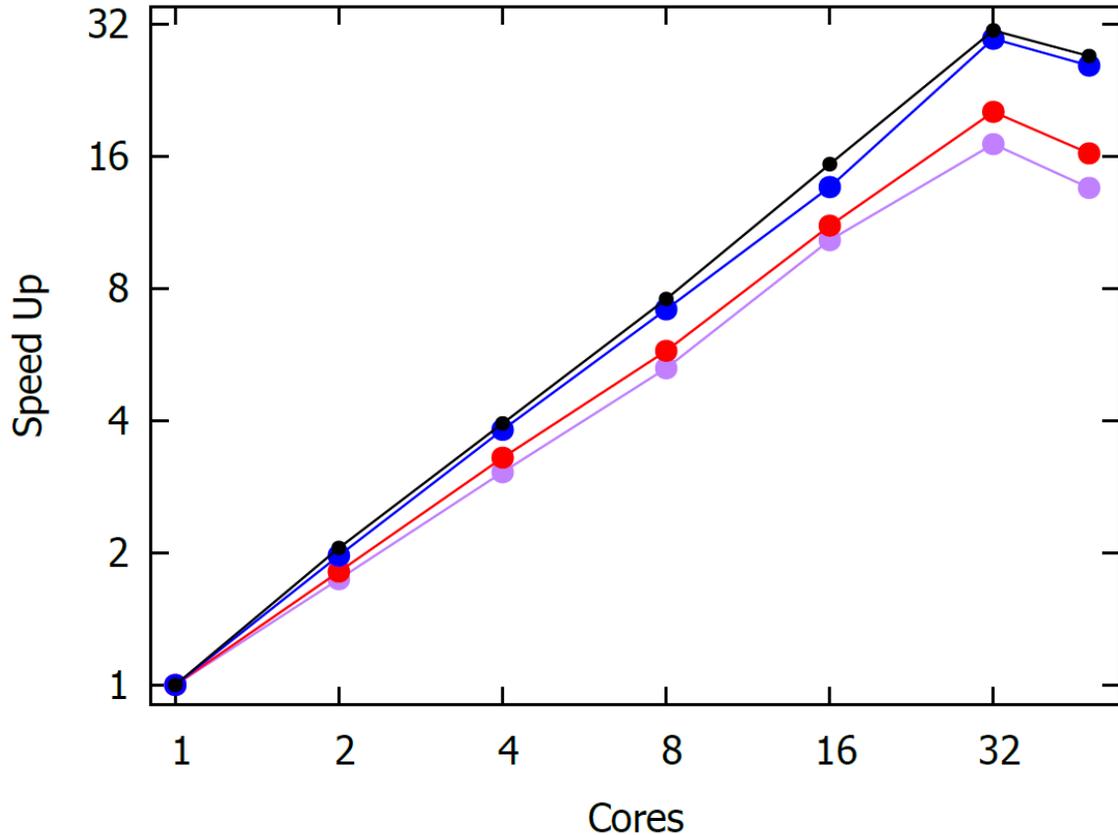
Обзор: Coarray Fortran vs MPI

- **Garain, Balsara & Reid, Journal of Computational Physics 2015**
 - CAF гидродинамические коды равны по производительности MPI 3.0 кодам
- **Shterenlikht & Cebamanos, Parallel Computing 2019**
 - Coarray Fortran Lattice-Boltzmann коды масштабируемы до 100 000 ядер
- **Reshetova, Cheverda & Khachkova, LNCS 2019**
 - Coarray Fortran код равен по производительности MPI + OpenMP кодам
- **Kulikov, Chernykh, Karavaev et al., Mathematics 2022**
 - Coarray Fortran релятивистский код равен по производительности MPI коду
- **Kulikov, Chernykh, Akimova, Misilov, LNCS 2023**
 - Энергоэффективность CAF кода равна MPI 3.0 + OpenMP коду
- **Vorobyov, Kulikov, Elbakyan, McKevitt, Guedel, A&A 2024**
 - CAF код на вложенных сетках равен по производительности MPI + OpenMP коду
- **McKevitt, Vorobyov, Kulikov, Journal of Parallel and Distributed Computing 2025**
 - Предложена универсальная методика разработки CAF + OpenMP + CUDA кодов

Coarray Fortran код равен по эффективности лучшим MPI кодам 20

Исследование ускорения кода

Кластер НКС-1П ССКЦ с узлами: 2 x 24-ядерных Intel Xeon 6248R с Hyper-Threading



OpenMP код все микросетки
Coarray Fortran код микросетка 16³
Coarray Fortran код микросетка 8³
Coarray Fortran код микросетка 4³

OpenMP код все микросетки
Coarray Fortran код микросетка 16³
CAF + OpenMP код микросетка 16³

Стратегии реализации адаптивных сеток AMR

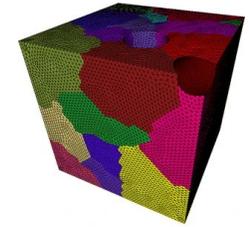
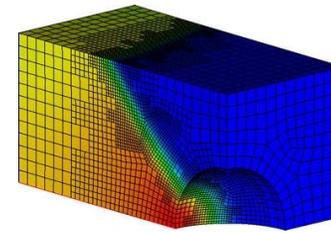
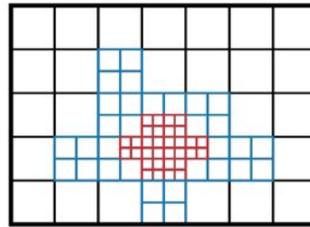
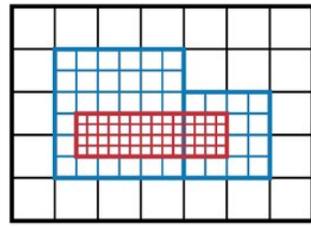
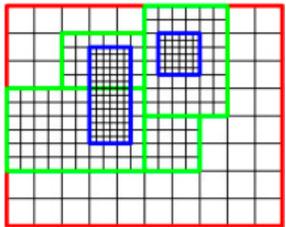
Динамические адаптивные сетки

Заплата
Patch-based

Блочные
Block-based

Листовые
Tree-based

Неструктурированные сетки
Unstructured mesh



Chombo

PARAMESH

p4est

t8code

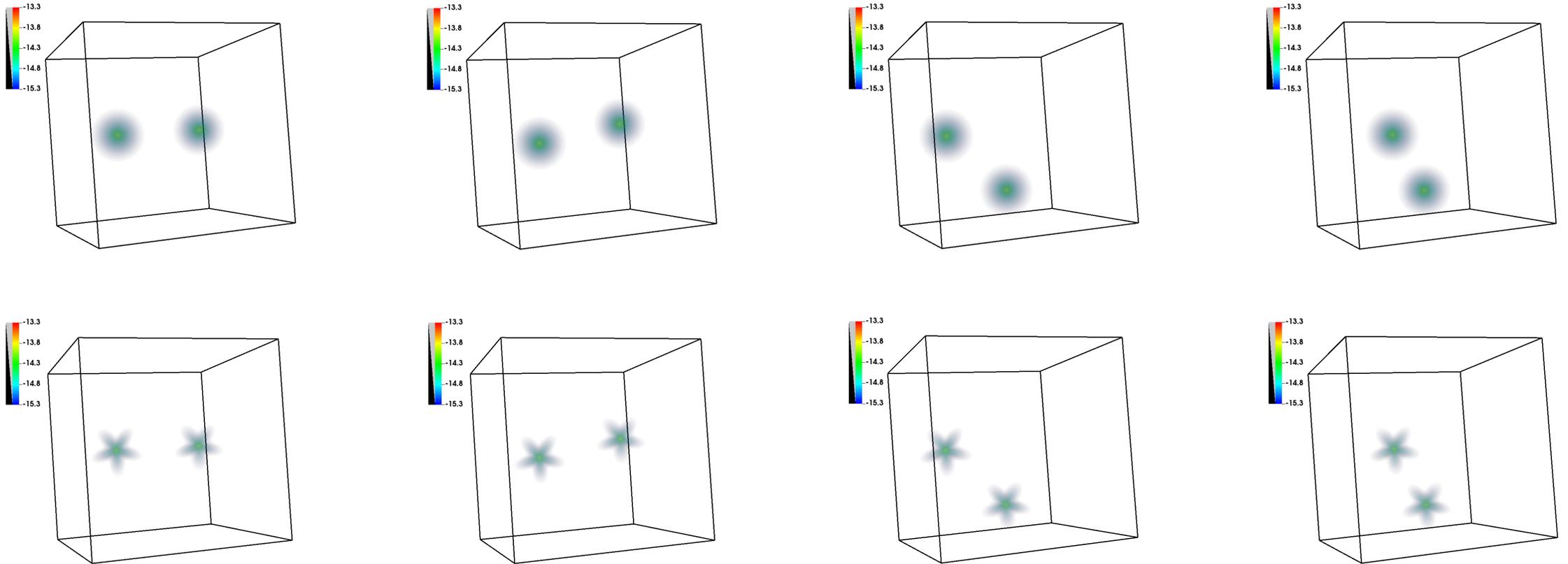
libMesh

Авторский подход
(микросетки)

Перспектива
2026-2027 + M1

Перспектива
2028-2030 + M1

Столкновение молекулярных облаков

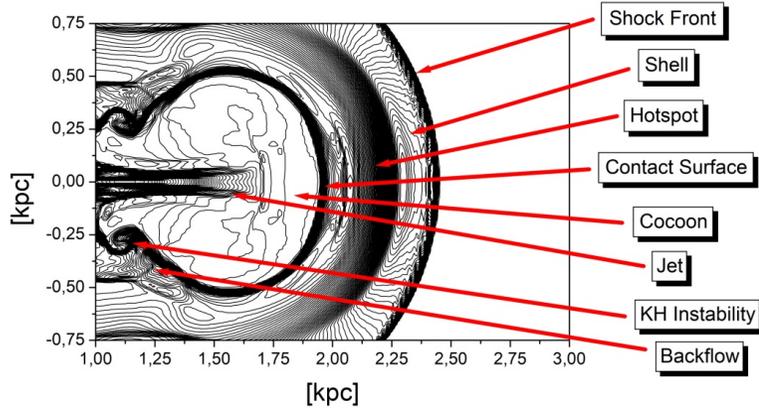
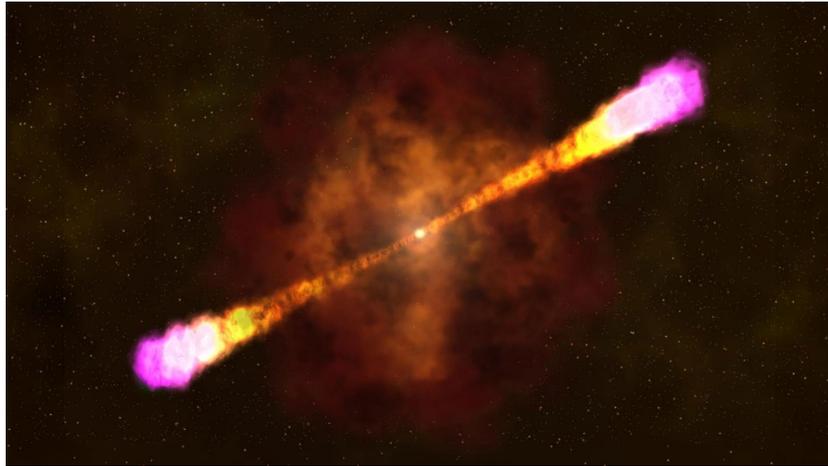


Kulikov I., Chernykh I., Karavaev D., Elbakyan V., Abaroa L., Romero G. The Partitioned Global Address Space Parallel Code for Numerical Modeling in Special Relativistic Hydrodynamics // [Lobachevskii Journal of Mathematics](#). – 2025 – V. 46. – P. 4356-4392.

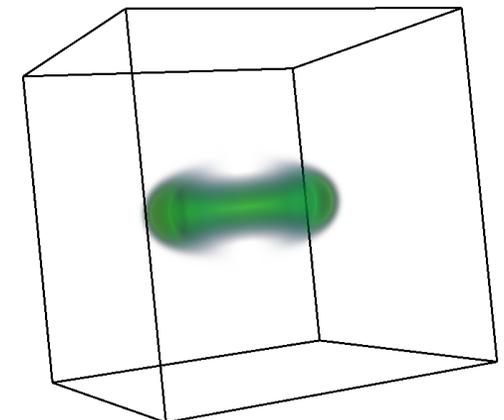
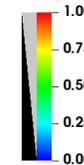
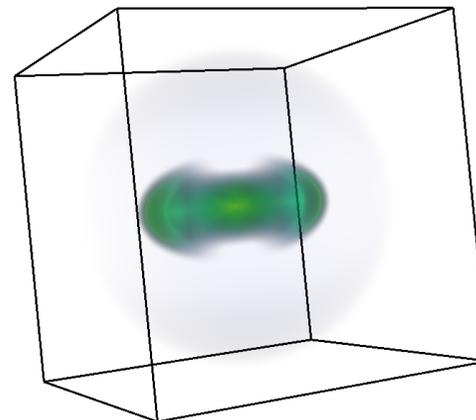
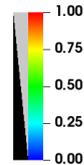
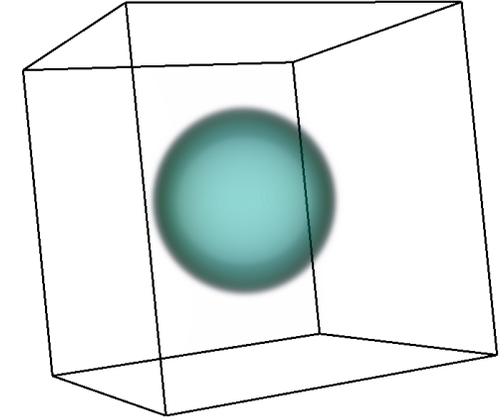
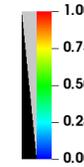
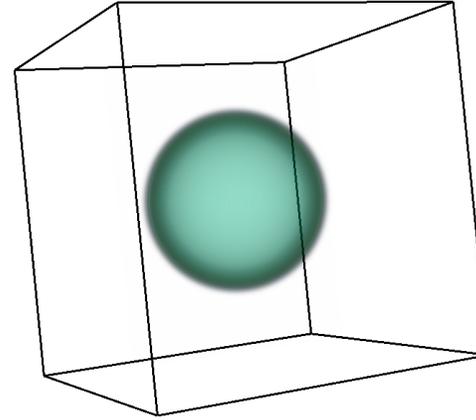
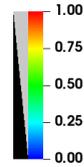
Стоимость результатов на слайде

8 расчетов * 120 часов * 4 узла * 48 рублей/час/узел ~ 200 тысяч рублей

Гамма-всплески: точечный взрыв в магнитном поле



Kulikov I. A new code for the numerical simulation of relativistic flows on supercomputers by means of a low-dissipation scheme // [Computer Physics Communications](#). - 2020. - V. 257. - Article Number 107532



Дискуссия: об использовании машинного обучения



«Компьютер в основе двух подходов»

д.ф.-м.н., профессор Лев Николаевич Щур

Из доклада на «Суперкомпьютерные дни в России 2023»

25 сентября 2023 года

Вычисления имеют
потенциально
бесконечную
точность

Теорема Лакса

AI/ML сходятся к
нормальному
распределению точного
решения

**Центральная
предельная теорема**

Snytnikov A.V., Ezrokh Yu.S. Solving Vlasov Equation with Neural Networks
// Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2024. - V. 45. - P. 3416-3423.

AI-accelerated CFD

Закон сохранения



Консервативная схема



Реконструкция величин



Решение задачи Римана

Gyrya V., Shashkov M., Skurikhin A., Tokareva S.
Machine Learning Approaches for the Solution of the
Riemann Problem in Fluid Dynamics: a Case Study
// Communications on Applied Mathematics and
Computation. - 2024. - V. 6. - P. 1832-1859. **25**

Дискуссия: об использовании машинного обучения

AI-accelerated CFD



Gyrya V., Shashkov M., Skurikhin A., Tokareva S.
Machine Learning Approaches for the Solution of the Riemann Problem in Fluid Dynamics: a Case Study // **Communications on Applied Mathematics and Computation.** - 2024. - V. 6. - P. 1832-1859.

- ✓ **Функция давления на контактном разрыве**
 - Gyrya et al, *CommAppMathComp*, 2024
 - Patsatzis et al, *JCompPhys*, 2025
 - Ruggeri et al, *Physics of Fluids*, 2022
- ✓ **Определение вектора потока на разрыве**
 - Ferrer et al, *CompMethAppMechEng*, 2024
 - Dieselhorst et al, *Symmetry*, 2021
- ✓ **Использование матрицы вязкости**
 - Tong et al, *NumMethEng*, 2023

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$F = \frac{f_L + f_R}{2} + \frac{\mathfrak{J}(q_L, q_R)}{2} (q_L - q_R)$$

Kulikov I.M. Using a Viscosity Matrix to Construct a Riemann Solver for the Equations of Special Relativistic Hydrodynamics // **Numerical Analysis and Applications.** - 2025. - V. 18. - P. 67-77

Заключение

- Предложена оригинальная схема HLLC для решения уравнений релятивистской магнитной гидродинамики на адаптивных сетках.
- На основе предложенной численной методики разработан эффективный параллельный код для массивно-параллельных суперЭВМ на основе Coarray Fortran и OpenMP.
- С помощью разработанного кода смоделированы сценарии взаимодействия молекулярных облаков и образование струй в ходе гамма всплесков.

Спасибо за внимание!