Точные решения спектральной задачи для системы Захарова-Шабата

Сергей Борисович Медведев

Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск

———

«Динамика в Сибири»

Новосибирск, 2-6 марта 2026 года

Мотивация

Быстрые численные алгоритмы решения нелинейного уравнения Шредингера основанные на методе обратной задачи рассеяния.

Необходимы точные решения спектральной задачи системы Захарова-Шабата для тестирования численных алгоритмов.

Прямая и обратная задачи рассеяния

Модель распространения сигнала – нелинейное уравнение Шредингера:

$$i\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \sigma|q|^2 q = 0$$

Эволюция по пространству

$$q(t, z = 0) \longrightarrow q(t, z = L)$$

Прямое нелинейное преобразование Фурье (спектральная задача Захарова-Шабата) $\downarrow$

$\uparrow$ Обратное нелинейное преобразование Фурье (уравненения Гельфанда-Левитана-Марченко)

Эволюция спектральных компонент

$$\Sigma(z = 0) \longrightarrow \Sigma(z = L)$$

Прямая и обратная задачи рассеяния

Спектральные компоненты эволюционируют тривиальным образом:

$$\begin{aligned} \zeta &= \xi + i\eta, \\ \Sigma &= \{r(\xi); \zeta_n, \rho_n = \frac{b_n}{a'_n}, n = 1, \ldots N\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_n(L) &= \zeta_n(0), \\ \rho_n(L) &= \rho_n(0) \exp^{-2i*\zeta_n^2 L}, \\ r(\xi, L) &= r(\xi, 0) \exp^{-2i\xi^2 L}. \end{aligned}$$

Начальная задача:

$$q(z, t)|_{z=0} = q_0(t), \tag{1}$$

Граничные условия:
1) быстроубывающий случай:

$$q(z,t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty. \tag{2}$$

2) случай одинаковой конечной плотноти:

$$q(z,t) \to \rho e^{i\alpha_\pm(z)} \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty, \tag{3}$$

где $\rho > 0$, а $0 \leq \alpha_\pm < 2\pi$ (см.Тахтаджян и Фаддеев). Важно, что $\alpha = \alpha_+(z) - \alpha_-(z)$ не зависит от z, но завязана с дискретным спектром системы ЗШ.
3) квазипериодические граничные условия:

$$q(z,t+2T) = e^{i\theta} q(z,t), \tag{4}$$

где $0 \leq \theta < 2\pi$ и θ не зависит от z.
4) случай разной конечной плотноти:

$$q(z,t) \to \rho_\pm e^{i\alpha_\pm(z)} \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty. \tag{5}$$

1) В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной самомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ – 1971. – Т. 61, № 1. – С. 118-134.
2) В. Е. Захаров, А. Б. Шабат, О взаимодействии солитонов в устойчивой среде // ЖЭТФ – 1973. – Т. 64, № 5. – С. 1627-1639.
3) А. Р. ИТс, В. П. Котляров, Об одном классе решений нелинейного уравнения Шредингера // ДАН УССР, серия А, 1976, № 11. С. 965-968.
4) Prinari, B., F. Vitale // Inverse scattering transform for the focusing nonlinear Schrödinger equation with one-sided nonzero boundary condition. Contem. Math. 651.157-194 (2015): 1.

Biondini, G., E. Fagerstrom, and B. Prinari // Inverse scattering transform for the defocusing nonlinear Schrödinger equation with fully asymmetric non-zero boundary conditions. Physica D: 333 (2016): 117-136.

Первые три случая описаны в книге: Тахтаджян, Л. А., Фаддеев, Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов, Наука, Главная редакция физико-математической литературы. 1986.

Система Захарова-Шабата

Обобщенная система ЗШ (система AKNS) имеет вид

$$\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}_t = \begin{bmatrix}-i\zeta & q(z,t)\\ r(z,t) & i\zeta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}, \quad U(t,\zeta) = \begin{bmatrix}-i\zeta & q(z,t)\\ r(z,t) & i\zeta\end{bmatrix}, \qquad (6)$$

где для НУШ $r = -\sigma q^*$ и $\sigma = -1$ для нормальной и $\sigma = 1$ для аномальной дисперсии. Переменная z играет роль параметра в этой задаче.

Еще эта система называется системой Дирака.

$$\begin{bmatrix}id_t & -iq\\ ir & -id_t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} = \zeta\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}. \qquad (7)$$

А также возникает, как уравнение Шреднигера для двухуровневых систем.

Решения на бесконечности

Спектральное разложение $UT = T\Lambda$ для U с потенциалом $q = e^{i\theta}$ задается матрицами

$$T = \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i(\zeta - \mu) & i(\zeta + \mu) \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} -i\mu & 0 \\ 0 & i\mu \end{bmatrix}, \quad \mu = \sqrt{\zeta^2 + \sigma}. \tag{8}$$

Из этого разложения следует, что на $\pm\infty$ мы имеем одинаковые показатели при t в экспоненциальных предельных решениях. В след за [ЗШ] взяли первым собственное значение со знаком минус.

Асимптотики

При $\sigma = -1$ можно выписать асимптотики на бесконечности

$$\psi \underset{t\to+\infty}{\to} c_1^+ X_1^+ + c_2^+ X_2^+, \quad \varphi \underset{t\to-\infty}{\to} c_1^- X_1^- + c_2^- X_2^-, \tag{9}$$

$$X_1^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ i(\zeta-\mu) \end{bmatrix} e^{-i\mu t}, \quad X_2^+ = \begin{bmatrix} -i(\zeta-\mu) \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\mu t}, \tag{10}$$

$$X_1^- = \begin{bmatrix} 1 \\ i(\zeta-\mu)e^{-i\theta} \end{bmatrix} e^{-i\mu t}, \quad X_2^- = \begin{bmatrix} -i(\zeta-\mu)e^{i\theta} \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\mu t}, \tag{11}$$

где $\mu = \sqrt{\zeta^2-1}$.

Функции Йоста

Для действительных $\mu = \sqrt{\zeta^2 - 1}$ определим два набора функций Йоста $\psi_1(t,\zeta)$, $\psi_2(t,\zeta)$ и $\varphi_1(t,\zeta)$, $\varphi_2(t,\zeta)$, которые имеют соответствующие асимптотике на $+\infty$ и $-\infty$

$$\psi_1(t,\zeta) \to X_1^+, \quad \psi_2(t,\zeta) \to X_2^+ \text{ при } t \to +\infty, \tag{12}$$

$$\varphi_1(t,\zeta) \to X_1^-, \quad \varphi_2(t,\zeta) \to X_2^- \text{ при } t \to -\infty. \tag{13}$$

Матрица перехода T

Эти наборы полные являются фундаментальными решениями и выражаются друг через друга как линейные комбинации с постоянными коэффициентами, поэтому можно записать эту связь через матрицу перехода $T(\zeta)$

$$\begin{bmatrix} \psi_{11}(t,\zeta) & \psi_{12}(t,\zeta) \\ \psi_{21}(t,\zeta) & \psi_{22}(t,\zeta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11}(\zeta) & T_{12}(\zeta) \\ T_{21}(\zeta) & T_{22}(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t,\zeta) & \varphi_{12}(t,\zeta) \\ \varphi_{21}(t,\zeta) & \varphi_{22}(t,\zeta) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Или в векторном виде

$$\begin{matrix} \psi_1 T_{11} + \psi_2 T_{21} = \varphi_1 \\ \psi_1 T_{12} + \psi_2 T_{22} = \varphi_2 \end{matrix} . \quad (15)$$

Учет симметрии (инволюции)

Используя правило Крамера и формулу Лиувилля для вронсиана получаем выражения:

$$wT_{11} = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \psi_{21}^* \\ \varphi_{21} & \psi_{11}^* \end{vmatrix}, \quad wT_{21} = \begin{vmatrix} \psi_{11} & \varphi_{11} \\ \psi_{21} & \varphi_{21} \end{vmatrix}, \tag{16}$$

$$wT_{12} = \begin{vmatrix} \varphi_{21}^* & \psi_{21}^* \\ \varphi_{11}^* & \psi_{11}^* \end{vmatrix}, \quad wT_{22} = \begin{vmatrix} \psi_{11} & \varphi_{21}^* \\ \psi_{21} & \varphi_{11}^* \end{vmatrix}, \tag{17}$$

где $w = 2\mu(\zeta - \mu)$.
Из симметрии системы ЗШ получаем симметрию для T

$$T_{11} = a, \quad T_{22} = a^*, \quad T_{12} = b, \quad T_{21} = b^*. \tag{18}$$

Учитывая, что $\det T = 1$, получаем $1 = |a|^2 - |b|^2$.

Методы решения

Известные методы нахождения точных решений для системы Захарова-Шабата:

1) кусочно-постоянные потенциалы (З. Флюгге, 1974));

2) безотражательные потенциалы Баргмана (Bargmann V., 1949, Лэм Дж. Л., 1980);

3) Метод Дарбу (Матвеев В.Б., Салль М.А., 1991, He, J., Zhang, L., Cheng, Y., Li, Y. (2006). Determinant representation of Darboux transformation for the AKNS system. Science in China Series A: Mathematics, 49(12), 1867-1878.)
4) Сведение к известному уравнению второго порядка (Беркович Л.М., 2002);

5) Решение уравнения Марченко (ГЛМ).

Пример 1: Разрыв фазы при постоянной амплитуде

Амплитуда равна 1, а фаза терпит разрыв в точке $t = 0$

$$q(t) = \begin{cases} e^{i\theta}, & t < 0 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases} \tag{19}$$

Для дискретного при $|\zeta| < 1$, для которого имеем $\mu = i\nu = i\sqrt{1-\zeta^2}$. Ограниченное решение на правой и левых полуосях будет иметь вид

$$\Psi_+(t) = X_2^+ = \begin{bmatrix} -\nu - i\zeta \\ 1 \end{bmatrix} e^{-\nu t}, \quad \Psi_-(t) = X_1^- = \begin{bmatrix} 1 \\ (\nu + i\zeta)e^{-i\theta} \end{bmatrix} e^{\nu t}. \tag{20}$$

Условие непрерывности при $t = 0$ дает линейную систему на коэффициенты

$$\Psi_-(0)c_- = \Psi_+(0)c_+, \tag{21}$$

которая имеет нетривиальное решение, если только определитель матрицы равен нулю

$$1 + (\nu + i\zeta)^2 e^{-i\theta} = 0. \tag{22}$$

Параметризацию $\zeta = \sin\varphi$ при $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$, поскольку по определению $\nu = \cos\varphi > 0$ позволяет переписать уравнение в виде

$$1 + e^{2i\varphi - i\theta} = 0. \tag{23}$$

Следовательно, имеем $2\varphi - \theta = (2n+1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \ldots$. С учетом ограничения на φ имеем решение

$$\varphi_d = \frac{\theta - \pi}{2} \text{ при } \theta \in (0, \pi), \quad \varphi_d = \frac{\theta + \pi}{2} \text{ при } \theta \in (-\pi, 0). \tag{24}$$

Константы c_- и c_+ на левой и правой полуосях связаны соотношением

$$e^{-i(\theta \mp \pi)/2} c_- = c_+. \tag{25}$$

Коэффициент $a(\zeta)$ для непрерывного спектра имеет вид

$$a(\zeta) = 1 + (-i\mu + i\zeta)^2 e^{-i\theta} = 1 - (\sqrt{\zeta^2 - 1} - \zeta)^2 e^{-i\theta}. \tag{26}$$

Пример 2. Прямоугольная яма

Симметричная прямоугольная яма имеет вид

$$q(t) = \begin{cases} 1, & t < -T \\ A, & -T \leq t \leq T \\ 1, & t > T \end{cases} \tag{27}$$

При поиске дискретного спектра ($\zeta \in (-1, 1)$) для существования сшивки необходимо занулить определить матрицы 4-го порядка:

$$\tanh\left(2T\sqrt{A^2 - \zeta^2}\right) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{A^2-\zeta^2}}{\zeta^2 - A}. \tag{28}$$

Анализ показывает:
1) Если $A < -1$, то существуют у (28) два решения для любых T;
2) Если $-1 < A < 1$, тогда существуют решения для $A < |\zeta| < 1$ и задаются формулой

$$\tan\left(2T\sqrt{\zeta^2 - A^2}\right) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\sqrt{\zeta^2 - A^2}}{\zeta^2 - A}. \tag{29}$$

3) Если $A > 1$, то нет действительных решений уравнения;

$A < -1$

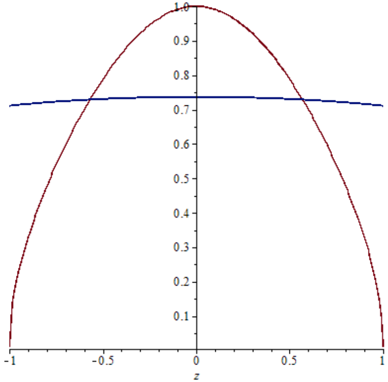

Рис.: Правая часть (красная линия) меняется от 0 до 1, а левая часть (синия линия) меньше 1 и меняется монотонно.

$-1 < A < 1$

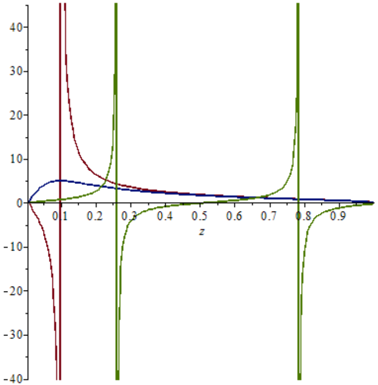

Рис.: синия линия – знаменатель не содержит сингулярности, красная линия – сингулярность при $z = \sqrt{A}$

Преобразование Куммара-Лиувилля

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{u} + a_1(t)\dot{u} + a_0(t)u = 0, \quad u = u(t) \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{30}$$

Преобразование КЛ

$$u(t) = A(t)v(x), \quad dx = \alpha(t)dt \tag{31}$$

переводит это уравнение в другое уравнение второго порядка

$$A\alpha^2 v'' + \left(2\dot{A}\alpha + A\dot{\alpha} + A\alpha a_1\right) v' + \left(\ddot{A} + \dot{A}a_1 + Aa_0\right) v = 0, \tag{32}$$

где штрих означает дифференцирование по x. Если удается выразить коэффициенты $a_1(t)$, $a_0(t)$ и элементы преобразования $A(t)$, $\alpha(t)$ через новую независимую переменную x, уравнение (32) примет вид

$$A\alpha^2 v'' + \left(2A'\alpha^2 + A\alpha'\alpha + A\alpha a_1\right) v' + \left(A''\alpha^2 + A'\alpha'\alpha + A'\alpha a_1 + Aa_0\right) v = 0. \tag{33}$$

Двучленный вид

Инвариант I относительно замен $v(x) = B(x)w(x)$ для уравнения $b_2(x)v'' + b_1(x)v' + b_0(x)v = 0$ имеет вид

$$I = \frac{b_0}{b_2} - \frac{1}{4}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)'. \qquad (34)$$

Уравнение (33) имеет инвариант I

$$I = \frac{4a_0 - a_1^2 - 2\alpha a_1' + \alpha'^2 - 2\alpha\alpha''}{4\alpha^2}. \qquad (35)$$

При этом уравнение примет двучленный вид $w'' + Iw = 0$, где

$$w(x) = v(x)A\alpha^{1/2}\exp\left\{\int \frac{a_1}{2\alpha}\,dx\right\}. \qquad (36)$$

"Стандарные" уравнения второго порядка

Гипергеометрическое уравнение (уравнение Гаусса)

$$z(1-z)w'' + (c - (a+b+1)z)w' - abw = 0 \tag{37}$$

имеет инвариант

$$I = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z^2} + \frac{D}{(z-1)^2}, \tag{38}$$

где коэффициенты A, B, C, D выражены через a, b, c.

Уравнение Гойна (Heun's equation)

$$w'' + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\epsilon}{z-a}\right)w' + \frac{\alpha\beta z}{z(z-1)(z-a)}w = 0, \tag{39}$$

где $\alpha + \beta + 1 = \gamma + \delta + \epsilon$ имеет инвариант

$$I = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-a} + \frac{D}{z^2} + \frac{E}{(z-1)^2} + \frac{F}{(z-a)^2}, \quad A+B+C=0. \tag{40}$$

Уравнение для системы ЗШ

Применим преобразования к уравнению

$$\ddot{f} - \left(\frac{\dot{q}}{q} + 2i\zeta\right)\dot{f} - \sigma|q|^2 f = 0, \quad \sigma = \pm 1. \tag{41}$$

Здесь $q(t)$ – потенциал из системы ЗШ

$$a_1 = -\left(\frac{\dot{q}}{q} + 2i\zeta\right) = -\left(\frac{q'\alpha}{q} + 2i\zeta\right), \quad a_0 = -\sigma|q|^2. \tag{42}$$

Положив $A = 1$, получим

$$\alpha^2 v'' - \alpha\left(\frac{q'\alpha}{q} + 2i\zeta\right)v' - \sigma|q|^2 v = 0 \tag{43}$$

с инвариантом

$$I = \frac{-4\sigma|q|^2 - \left(\frac{q'\alpha}{q} + 2i\zeta\right)^2 - 2\alpha\left(\frac{q'\alpha}{q}\right)' + \alpha'^2 - 2\alpha\alpha''}{4\alpha^2}. \tag{44}$$

Быстробывающий случай

Нелинейное уравнение Шредингера имеет солитонное решение

$$q(t,z) = \eta \operatorname{sech}(\eta t) \exp\left(i\frac{\eta^2}{2}z + i\theta\right). \tag{45}$$

Satsuma J., Yajima N. (1974) решили начальную задачу для потенциала вида

$$q(t,z)|_{z=0} = A \operatorname{sech}(t), \quad A > 0. \tag{46}$$

Они свели прямую спектральную задачу к решению гипергеометрического уравнения.
F. A. Grunbaum (1989) решил спектральную задачу для

$$q(t,z)|_{z=0} = A \operatorname{sech}^{1+im}(t) = A \operatorname{sech}(t) e^{im \ln \operatorname{sech}(t)}. \tag{47}$$

Конечная плотность

Захаров В.Е. и Шабат А.Б. нашли солитонное решение

$$q(t,z) = \eta \frac{(\lambda + ia)^2 + \exp(F)}{1 + \exp(F)} \exp(i\eta^2 z), \tag{48}$$

где $F = 2a\eta(t + \lambda\eta z)$, $\lambda^2 = \sqrt{1 - a^2}$.
Введем параметризацию и новую переменную

$$\lambda = \cos\theta, \quad a = \sin\theta \quad G = \eta(t + \eta z\cos\theta)\sin\theta. \tag{49}$$

Тогда имеем

$$q(t,z) = \eta\left(\cos(\theta) - i\sin(\theta)\tanh(G)\right)\exp(i\eta^2 z + i\theta). \tag{50}$$

Анзац

По аналогии с быстроубывающим случаем можно рассмотреть потенциал вида

$$q(t,z)\big|_{z=0} = (A\tanh(t) + iB)e^{i\varphi(t)}, \quad A, B, \varphi(t) \in \mathbb{R}. \tag{51}$$

Асимптотики равны

$$|q(t)| \to \sqrt{A^2+B^2} \quad \text{при} \quad t \to \pm\infty. \tag{52}$$

Замена $x = \tanh(t)$

Эта замена переводит действительную ось $[-\infty, \infty]$ в отрезок $[-1, 1]$ и обладает свойством

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x^2 = \frac{1}{\cosh^2(t)} = \alpha(t), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -2x(1 - x^2). \tag{53}$$

Кроме того, для первой и второй производных имеем

$$\frac{df}{dt} = (1 - x^2)\frac{df}{dx}, \quad \frac{d^2f}{dt^2} = \left(1 - x^2\right)^2 \frac{d^2f}{dx^2} - 2x(1 - x^2)\frac{df}{dx}. \tag{54}$$

Наша **первая задача** – найти $q(t)$, при котором получается уравнение зависящее только от x. Выполнив замену в уравнении (41) получим

$$\left(1 - x^2\right)^2 \frac{d^2f}{dx^2} - \left(\frac{\dot{q}}{q} + 2(y + i\zeta)\right)(1 - x^2)\frac{df}{dx} - \sigma|q|^2 f = 0. \tag{55}$$

Коэффициент $|q|^2$ при f должен зависеть только от x.

Поэтому имеем соотношения

$$q(t) = Q(\tanh(t))e^{i\varphi(t)} = Q(x)e^{i\varphi(t)}, \tag{56}$$

$$\frac{\dot{q}}{q} = \frac{\dot{Q}}{Q} + i\dot{\varphi} = \frac{Q'}{Q}(1 - x^2) + iF(x), \tag{57}$$

где штрих означает дифференцирование по x, $F(x)$ – действительная функция и $Q(x)$ – комплексная функция.
В итоге получим уравнение зависящее только x

$$(1 - x^2)^2 f'' - \left(\frac{Q'}{Q}(1 - x^2) + iF + 2(x + i\zeta)\right)(1 - x^2)f' - \sigma|Q|^2 f = 0. \tag{58}$$

Если $q(t) = \operatorname{sech}(t)$, то $|q|^2 = \operatorname{sech}^2(t) = 1 - x^2$ и можно сократить на $1 - x^2$.

Темное решение

Возьмем в качестве потенциала

$$Q = Ax. \tag{59}$$

Если $A = 1$, то получим темный солитон.

Тогда для

$$F = F_0 + F_1 x + \frac{G_0 + G_1 x + G_2 x^2}{x} \tag{60}$$

инвариант I уравнения (58) разлагается по обратным степеням $x-1$, x, $x+1$ и это уравнение будет эквивалентно уравнению Гойна.

Фазовая множитель будет равен

$$e^{i\varphi(x)} = (x+1)^{\frac{i}{2}(F_0 - F_1 - G_0 + G_1 - G_2)}(x-1)^{-\frac{i}{2}(F_0 + F_1 + G_0 + G_1 + G_2)} x^{iG_0}. \tag{61}$$

Серое решение

Возьмем в качестве потенциала

$$Q = Ax + iB. \tag{62}$$

При подходящих константах A и $B \neq 0$ получим серые солитоны. Тогда для

$$F = F_0 + F_1 x + \frac{G_2 x^2 + G_1 x + G_0}{Ax + iB} \tag{63}$$

инвариант I уравнения (58) разлагается по обратным степеням $x - 1$, $x + 1$, $Ax + iB$ и это уравнение будет эквивалентно уравнению Гойна.

1. Рассмотреть вырожденные случаи (конфлюэнтные уравнения) для гипергеометрического уравнения и уравнения Гойна.

2. Рассмотреть сведение к другим известным уравнениям.

3. Применить для двухуровневых систем, для которых спектральный параметр ζ заменяется на функцию от t.

Спасибо за внимание!