INITIAL-VALUE PROBLEMS FOR NONSTATIONARY DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS: FUNCTION-SERIES EXPANSIONS OF SOLUTIONS

A.B. Muravnik, RUDN University, Moscow, Russia

The research was carried out
at the expense of a grant of the Russian Science Foundation
No. 24-11-00073, https://rscf.ru/en/project/24-11-00073/.

(joint results with c O.É. Yaremko and N.N. Yaremko)

0. Исторический обзор и рамки исследования

0.1 Нелокальные задачи и функционально-дифференциальные уравнения как единое направление исследований

(i) наличие принципиально новых эффектов

(ii) неприменимость ряда классических методов исследования

(iii) разнообразные области приложений, не покрываемые классической теорией

0.2 Специфика дифференциально-разностных уравнений

(i) оператор сдвига как мультипликатор Фурье

(ii) классическая классификация уравнений

0.3 Предпосылки: эллиптическая теория в ограниченных областях

- A. L. Skubachevskiĭ, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin (1997).

- А. Л. Скубачевский, "Неклассические краевые задачи. I," *СМФН*, **26**, 3–132 (2007).

- А. Л. Скубачевский, "Неклассические краевые задачи. II," *СМФН*, **33**, 3–179 (2009).

- А. Л. Скубачевский, "Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения," *УМН*, **71**, вып. 5 (431), 3–112 (2016).

1. Параболические уравнения

1.1 Интегральные представления решений

В полуплоскости $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ рассматривается задача Коши с ограниченной начальной функцией $u_0(x)$ для уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \sum_{k=1}^{m} a_k u(x+h_k,t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \sum_{k=1}^{m} a_k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x+h_k,t), \tag{2}$$

где $a_1,\dots,a_m, h_1,\dots,h_m$ — вещественные постоянные.
Эта задача однозначно разрешима(в естественных функциональных классах и при естественных ограничениях на $a_1,\dots,a_m$ и $h_1,\dots,h_m$), и решение выражается формулой

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(x-\xi,t)u_0(\xi)d\xi, \tag{3}$$

где Пуассоново ядро $\mathcal{E}(x,t)$ определено выражением

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-t\left(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi\right)}\cos\left(x\xi+t\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi\right)d\xi \tag{4}$$

или

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-t\xi^2\left(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi\right)}\cos\left(x\xi-t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi\right)d\xi. \tag{5}$$

для случая уравнения (1) или (2) соответственно.

- А. Б. Муравник, Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши, *СМФН*, **52**, 3–141 (2014).

Интегральное представление (3) удобно для исследования качественных (асимптотических) свойств решений (проиллюстрировать!), но практически бесполезно в задаче вычисления значения решения в заданной точке.

1.2 Разложения решений в ряды

Для задачи Коши с уравнением (1) справедливо разложение

$$u(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty}t^j\sum_{|\alpha|=j}\frac{\prod\limits_{k=1}^{m}a_k^{\alpha_k}}{\prod\limits_{k=1}^{m}\alpha_k!}\,v\left(x+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k h_k,t\right). \tag{6}$$

Для задачи Коши с уравнением (2) справедливо разложение

$$u(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty}t^j\sum_{|\alpha|=j}\frac{\prod\limits_{k=1}^{m}a_k^{\alpha_k}}{\prod\limits_{k=1}^{m}\alpha_k!}\,\frac{\partial^{2j}v}{\partial x^{2j}}\left(x+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k h_k,t\right). \tag{7}$$

В обоих случаях, $\alpha=(\alpha_1\ldots,\alpha_m)$ — мультииндекс длины m, а функция $v(x,t)$ — решение задачи Коши с той же самой начальной функцией u_0 для *классического уравнения теплопроводности*. Каждый из этих рядов абсолютно и равномерно сходится на любом компактном подмножестве полуплоскости $\{x\in\mathbb{R},t>0\}$.

1.3 Основные этапы доказательства

В подынтегральных функциях Пуассоновых ядер (4) и (5) выделяем экспоненциальный сомножитель $e^{t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k e^{ih_k\xi}}$ (соответственно $e^{-t\xi^2\sum\limits_{k=1}^{m} a_k e^{ih_k\xi}}$), заменяем его на его Маклореновское разложение и меняем порядок операций интегрирования и (бесконечного) суммирования. Получаем ряды, состоящий из слагаемых вида

$$\frac{1}{2}t^j\sum_{|\alpha|=j}\frac{\prod\limits_{k=1}^{m} a_k^{\alpha_k}}{\prod\limits_{k=1}^{m}\alpha_k!}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\xi^2+i\left(x+\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k h_k\right)\xi}d\xi$$

и

$$\frac{1}{2}(-1)^j t^j\sum_{|\alpha|=j}\frac{\prod\limits_{k=1}^{m} a_k^{\alpha_k}}{\prod\limits_{k=1}^{m}\alpha_k!}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^{2j}e^{-t\xi^2+i\left(x+\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k h_k\right)\xi}d\xi$$

соответственно.

Вычисляя эти интегралы, получаем Пуассоново ядро уравнения теплопроводности и его производные четного порядка, вычисленные в точках $\left(x+\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k h_k, t\right)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\xi^2}\,(\cos y\xi + i\sin y\xi)\,d\xi = 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t\xi^2}\cos y\xi d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{y^2}{4t}},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi^{2j}e^{-t\xi^2}\,(\cos y\xi + i\sin y\xi)\,d\xi = 2\int\limits_{0}^{\infty} \xi^{2j}e^{-t\xi^2}\cos y\xi d\xi =$$

$$= (-1)^j\sqrt{\pi}\,2^{-2j}t^{-j-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y^2}{4t}}H_{2j}\left(\frac{y}{2\sqrt{t}}\right).$$

Затем используем следующее представление полиномов Эрмита: $H_l(s) = (-1)^l e^{s^2}(e^{-s^2})^{(l)}$.

Сворачивая полученные ядра (и их производные соответственно) с начальной функцией $u_0(x)$, приходим к формулам (6) и (7) соответственно.

Теперь, для обоснования законности всех приведенных выше операций, надо доказать абсолютную и равномерную сходимость полученных рядов. Для этого с использованием принципа максимума для уравнения теплопроводности строятся сходящиеся мажорирующие *числовые* ряды. Типичный пример подобной оценки:

$$(j-1)\frac{a^j}{\left[\left(\frac{j-1}{2}\right)!\right]^2} = 2\frac{j-1}{2}\frac{a^j}{\left[\left(\frac{j-1}{2}\right)!\right]^2} = 2\frac{a^j}{\left(\frac{j-1}{2}\right)!\left(\frac{j-1}{2}-1\right)!} \leq$$

$$\leq 2a\frac{a^{j-1}}{\left(\frac{j-1}{2}\right)!} = 2a\frac{(a^2)^{\frac{j-1}{2}}}{\left(\frac{j-1}{2}\right)!}$$

при нечетных j, а ряд, составленный из таких слагаемых, абсолютно и равномерно сходится к $2ae^{a^2}$.

- А. Б. Муравник, О. Э. Яремко, Н. Н. Яремко, Разложения решений дифференциально-разностных параболических уравнений в ряды, *Матем. заметки*, **117** (2025), 928–942.

2. Гиперболические уравнения

2.1 Глобальные решения

- A. B. Muravnik, On hyperbolic equations with arbitrarily directed translations of potentials, *Math. Notes*, **115** (2024), 772–778.

- A. B. Muravnik, Nonclassical dynamical behavior of solutions of partial differential-difference equations, *AIMS Math.*, **10** (2025), 1842–1858.

2.2 Рассматриваемая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{k=1}^{m} a_k u(x+h_k,t),\ x \in (-\infty,\infty),\ t>0, \qquad (8)$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x),\ x \in (-\infty,\infty), \qquad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x),\ x \in (-\infty,\infty), \qquad (10)$$

где $a_1,\ldots,a_m,h_1,\ldots,h_m$ — произвольные вещественные постоянные, $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$.

2.3 Полученный результат

Определим функциональные последовательности $\{u_{1,n}(x,t)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{u_{2,n}(x,t)\}_{n=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$\begin{cases} u_{1,0}(x,t) := \dfrac{\varphi(x+t)+\varphi(x-t)}{2}, \\ u_{1,n}(x,t) := \dfrac{t}{2n}\displaystyle\int_0^t u_{1,n-1}(x,\tau)d\tau, n \geq 1, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} u_{2,0}(x,t) := \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t} \psi(z)dz, \\ u_{2,n}(x,t) := \dfrac{1}{2n}\displaystyle\int_0^t \tau u_{2,n-1}(x,\tau)d\tau, n \geq 1. \end{cases} \tag{12}$$

Определим оператор $Lf := \sum\limits_{k=1}^{m} a_k f(x+h_k)$.

Тогда ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} L^n u_{1,n}(x,t)$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} L^n u_{2,n}(x,t)$ корректно определяют дважды непрерывно дифференцируемые в $\mathbb{R}^2$ функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ (соответственно), а функция $u_1(x,t)+u_2(x,t) =: u(x,t)$ является классическим решением задачи (8)–(10).

2.4 Схема доказательства

Шаг 1

Доказывается, что каждая функция $u_{1,n}(x,t)$, $n \geq 1$, и каждая функция $u_{2,n}(x,t)$, $n \geq 1$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u_{1,n}}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u_{1,n}}{\partial x^2}(x,t) = u_{1,n-1}(x,t) \qquad (13)$$

и

$$\frac{\partial^2 u_{2,n}}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u_{2,n}}{\partial x^2}(x,t) = u_{2,n-1}(x,t) \qquad (14)$$

(соответственно) и *однородным* (нулевым) начальным условиям. Для $n = 1$ это доказывается непосредственной подстановкой. Далее — по индукции.

Кроме того, замечаем, что каждая из функций $u_{1,0}(x,t)$ и $u_{2,0}(x,t)$ удовлетворяет однородному *волновому уравнению* и начальному условию (9) или (10) (соответственно); для каждой из этих двух функций второе начальное условие — однородное.

Шаг 2

Доказывается абсолютная и равномерная сходимость обоих рядов в каждой полосе вида $\{t_0 \le t \le T\}$. Для этого рекуррентно оценивается общее слагаемое ряда — чтобы построить подходящий мажорирующий ряд. Например, $|u_{1,n}(x,t)|$ оценивается сверху величиной $\dfrac{t^{2n}}{2^n\, n!}\|\varphi\|$, что дает мажорирующий ряд

$$\|\varphi\| \sum_{j=0}^{\infty} a^n \frac{t^{2n}}{2^n\, n!} = \|\varphi\| e^{\frac{at^2}{2}}$$

для ряда, определяющего функцию $u_1(x,t)$ (здесь и далее a обозначает $|a_1| + ... + |a_m|$).

Как только указанная абсолютная и равномерная сходимость установлена, эти ряды можно (формально) дважды почленно продифференцировать по каждому аргументу, а затем построить подходящий мажорирующий ряд для ряда, полученного в результате этого почленного дифференцирования. Например, модуль нулевого слагаемого ряда для функции $\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(x,t)$ оценивается сверху нормой $\|\varphi''\|$, а остаток этого ряда мажорируется тейлоровским (точнее — маклореновским) разложением функции $\|\varphi'\| + \dfrac{\|\varphi\|}{2} e^{\frac{at^2}{2}} + a\|\varphi\| e^{\frac{at^2}{2}}$.

Шаг 3

Поскольку функции $u_j(x,t)$, $j=1,2$, корректно определены, а их ряды можно почленно дифференцировать достаточное количество раз, их можно подставить в уравнение (8):

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_{n=0}^{\infty} L^n u_{j,n}(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=0}^{\infty} L^n u_{j,n}(x,t) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}L^n u_{j,n}(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}L^n(x,t)u_{j,n}\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[L^n\frac{\partial^2 u_{j,n}}{\partial t^2}(x,t) - L^n\frac{\partial^2 u_{j,n}}{\partial x^2}(x,t)\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 u_{j,0}}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u_{j,0}}{\partial x^2}(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} L^n\left[\frac{\partial^2 u_{j,n}}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u_{j,n}}{\partial x^2}(x,t)\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} L^n u_{j,n-1}(x,t),\ j=1,2,$$

потому что функции $u_{j,0}(x,t)$, $j=1,2$, удовлетворяют однородному волновому уравнению, а к содержимому квадратных скобок можно применить результат, полученный на Шаге 1.

Последний ряд можно представить в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} LL^{n-1}u_{j,n-1}(x,t) = L\sum_{n=1}^{\infty} L^{n-1}u_{j,n-1}(x,t) =$$
$$= L\sum_{n=0}^{\infty} L^{n}u_{j,n}(x,t) = Lu_j(x,t),\ j=1,2,$$

т. е., обе функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ удовлетворяют уравнению (8), а значит, функция $u(x,t)$ тоже удовлетворяет ему.

Остается подставить построенную функцию $u(x,t)$ в начальные условия, используя абсолютную и равномерную сходимость рядов, установленную на Шаге 2, а также тот факт, что только нулевые слагаемые этих рядов имеют ненулевые следы на начальной оси.

2.5. Замечание

Для натуральных степеней оператора L справедлива формула

$$L^m f(x) = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_m!} a^\alpha f(x + \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \cdots + \alpha_m h_m),$$

где $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)$ — мультииндекс размерности m (доказывается по индукции).

Поэтому построенное выше решение можно представить и в следующем виде:

$$u(x,t) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} a^\alpha \left[u_{1,n}\left(x + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k h_k, t\right) + u_{2,n}\left(x + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k h_k, t\right) \right].$$

2.6. Пример

Уравнение Клейна—Гордона(—Фока) есть частный случай уравнения (8) при $m = 1$ (соответственно, коэффициент a является не вектором, а скалярной константой) и $h = 0$. В этом случае действие оператора L^n эквивалентно умножению на a^n, что дает следующее представление решения задачи Коши для уравнения Клейна—Гордона(—Фока):

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \Big[u_{1,n}(x,t) + u_{2,n}(x,t) \Big].$$