Homogenization Approach to Linear Problems on High-Frequency Waves in Nonperiodic Media with Rapidly Varying Characteristics

V. E. Nazaikinskii
(joint work with S. Yu. Dobrokhotov et al.)

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

Dynamics in Siberia 2026

Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics RAS
and Novosibirsk State University, March 2–6, 2026

This work is financially supported by the Russian Science Foundation, project no. 24-11-00213.

План доклада

- Осреднение — широкий термин, охватывающий множество методов, позволяющих сводить решение уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами к решению уравнений с плавно меняющимися коэффициентами.
- Большинство этих методов разработано для уравнений с коэффициентами, периодическими по «быстрым» переменным (например, уравнений, описывающих периодические среды).
- В некоторых задачах, однако, предполагать такую периодичность нет особых оснований, и даже само выделение медленных и быстрых переменных не кажется естественным.
- Поэтому естественно попытаться разработать методы, применимые именно к таким задачам.

- Настоящий доклад посвящен одному из таких методов, разработанному совместно с Сергеем Доброхотовым при участии Брунелло Тироцци, а также Дарины и Александра Караевых.
- Я постараюсь уделить время как теоретическим основам этого метода, так и практическим аспектам его применения.

Одной из рассматриваемых задач является задача о распространении длинных волн (например, цунами) в океане, некоторые математические аспекты которой довольно подробно изучались в нашей научной группе. (Собственно, эта задача и послужила мотивировкой к разработке данного метода осреднения). Поэтому изложение в значительной части будем вести на примере этой задачи.

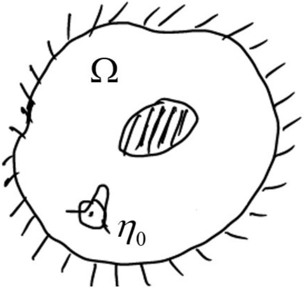
Математическая модель: уравнения мелкой воды

В линеаризованном приближении уравнений мелкой воды волны цунами описываются задачей Коши для волнового уравнения

$$\eta_{tt} - \nabla(c^2(x)\nabla\eta) = 0, \quad x \in \Omega, \qquad \eta|_{t=0} = \eta_0(x), \quad \eta_t|_{t=0} = \eta_1(x)$$

для возвышения свободной поверхности $\eta = \eta(x,t)$; здесь

- $\Omega \ni x = (x_1, x_2)$ — область, представляющая бассейн; t — время
- $c(x) = \sqrt{gD(x)}$, где $D(x)$ — глубина бассейна $\boxed{\text{далее } g = 1}$



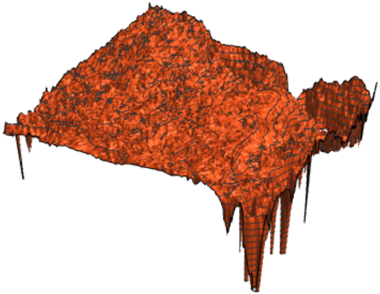
Естественный малый параметр:

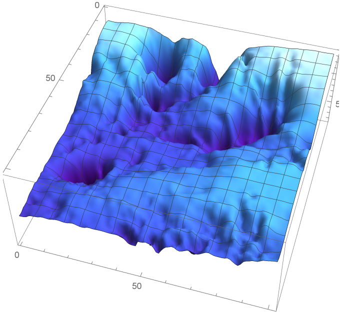
$$h = \frac{\text{размер источника}}{\text{размер бассейна}}, \quad \eta_j = V_j\left(\frac{x}{h}\right),$$

так что в задаче естественно использовать квазиклассическое приближение (канонический оператор Маслова).

Почему не применить канонический оператор сразу?

- Уравнение вырождается на $\partial\Omega$ ($D(x) = 0 \Rightarrow c(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$) Униформизация (Д, Н, и др. 2010–2022); об этом позже
- Глубина $D(x)$ может иметь быстрые колебания, горизонтальный размер которых намного меньше длины волны.





Я расскажу о том, как справиться со второй проблемой

Можно ли использовать осреднение?

Осреднение сводит уравнения с быстроосциллирующими коэффициентами к уравнениям с “хорошими” коэффициентами.

Это хорошо разработанная теория: Жиков, Козлов, Олейник, Bensoussan, Lions, Papanicolaou, Sanchez-Palencia, Бахвалов, Панасенко, Марченко, Хруслов, Назаров, Пятницкий, Суслина, Пастухова, Борисов и многие другие.

В простейшем случае предполагается, что коэффициенты имеют вид

$$D(x) \equiv D(x,\mu) = f\left(\frac{x}{\mu}\right), \quad \mu \to 0, \quad f(y)\ 2\pi\text{-периодическая по } y, \quad (*)$$

и осреднение во многом сводится к усреднению коэффициентов:

$$D(x) \longmapsto \overline{D} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(y)\, dy_1 \cdots dy_n$$

подходит для периодических сред

В нашей задаче такой способ не работает (периодичности нет, да и бассейн постоянной глубины — явно плохая аппроксимация). Нужно как-то учесть непериодическую зависимость от x. Проще всего было бы позволить глубине $D(x)$ зависеть непериодическим образом от x как от медленной переменной, т.е. заменить $(*)$ на

$$D(x) = f\left(x, \frac{x}{\mu}\right) \quad \text{или} \quad f\left(x, \frac{S(x)}{\mu}\right), \quad f(x,y) \ \ 2\pi\text{-периодич. по } y \quad (**)$$

Процедура осреднения с вычислением квазиклассической асимптотики для уравнений с коэффициентами вида $(**)$ построена в работе

- Й. Брюнинг, В. В. Грушин, С. Ю. Доброхотов, Матем. заметки 92 (2), 163–180 (2012)

на основе адиабатического приближения (операторного разделения переменных)

- Л. В. Берлянд, С. Ю. Доброхотов, ДАН 296 (1), 80–84 (1987)
- В. С. Буслаев, УМН 42 (6), 77–98 (1987)
- С. Ю. Доброхотов, Матем. заметки 44 (3), 319–340 (1988)

Однако и предположение о представимости коэффициента $D(x)$ в виде $(**)$ имеет недостатки, не позволяющие эффективно использовать его в задаче о волнах цунами:

- Предположение о периодичности по быстрым переменным и здесь не имеет под собой разумного обоснования.
- Хуже того, формулы метода операторного разделения переменных используют именно функцию $f(x, y)$, а не функцию $D(x) = f(x, x/\mu)$. В практической задаче, однако, $D(x)$ задается данными батиметрии (т.е. известна не при всех μ, а, условно говоря, для одного фиксированного μ), и восстановить по ней участвующую в модели функцию $f(x, y)$ нельзя.

Мы опишем метод осреднения, который

- Не опирается на разделение переменных на медленные и быстрые.
- Дает вычислительные формулы, использующие только данные, известные из измерений (и тем самым применимые на практике).

Основная идея

Мы отказались от разделения независимых переменных на “быстрые” и “медленные”, но отделить быстрые осцилляции глубины от плавного изменения необходимо! Поэтому введем другое предположение:

Профиль дна $D(x)$ представляет собой возмущение плавно меняющегося “крупномасштабного” рельефа быстрыми осцилляциями, а именно,

$$D(x) = D_0(x) + D_1(x), \quad \text{где} \quad |D_1(x)| \ll D_0(x),$$

функция $D_0(x)$ — плавно меняющаяся,
функция $D_1(x)$ — быстро меняющаяся (быстроосциллирующая).

На практике такое разбиение функции $D(x)$ не задано (и, более того, не определено однозначно). Формулы метода позволят его построить.

Задача характеризуется тремя малыми безразмерными величинами:

$$h = \frac{\text{типичный горизонтальный размер источника}}{\text{типичный горизонтальный размер бассейна}}$$

$$\mu = \frac{\text{типичный горизонтальный размер осцилляций дна}}{\text{типичный горизонтальный размер бассейна}}$$

$$\delta = \frac{\text{типичный вертикальный размер осцилляций дна}}{\text{типичная глубина бассейна}}$$

В математическом исследовании задачи они превратятся в малые параметры $\mu, h, \delta \to 0$. В практической задаче это не конкретные числа, а скорее порядки величины, которые, однако, легко усмотреть, численно и графически анализируя данные батиметрии.

Вывод: значения этих характеристик могут лишь (в соответствии с математической моделью) диктовать вид практических вычислительных формул, но не входить в сами формулы.

Невырожденный случай (осреднение вдали от берега)

Приведем сначала практический алгоритм построения осредненного уравнения, а затем остановимся на строгом математическом анализе задачи. Рассмотрим сначала невырожденный случай (распространение волн вдали от берега); это означает, что $D(x) > C > 0$.

Считаем, что порядки малых величин μ, h, δ известны и $\mu \ll h$.

Практический алгоритм построения осредненного уравнения состоит из двух шагов:

1. Построить разбиение функции $D(x)$ на невозмущенную часть $D_0(x)$ и возмущение $D_1(x)$
2. Построить осредненное уравнение (вид которого зависит от соотношения между характеристиками μ, h, δ).

В задаче перейдем к безразмерным переменным, считая единицей длины типичный горизонтальный размер бассейна, а единицей времени — время, за которое единицу длины пройдет волна, распространяющаяся с типичной в задаче скоростью.

Выделение главного члена функции глубины

Вычислим $D_0(x)$, как усреднение функции $D(x)$ с помощью специального ядра усреднения $\varphi(x)$ и радиуса усреднения ε:

$$D_0(x) = \mathrm{E}[D](x) := \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\xi) D(x - \varepsilon\xi)\, d\xi, \quad D_1(x) = D(x) - D_0(x).$$

В теории: $\varepsilon = \mu^\gamma$, $\gamma \in (0,1)$ любое; $\varphi(x)$ из пространства Шварца,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) dx = 1, \quad M_\alpha(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^2} x^\alpha \varphi(x) dx = 0, \quad |\alpha| = 1, 2, \dots$$

Для практических вычислений: интеграл по кругу радиуса $1/\varepsilon$,

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{\pi} e^{-4x^2} \left(3 - 8x_1^2\right)\left(3 - 8x_2^2\right) \qquad (M_\alpha(\varphi) = 0, \quad |\alpha| = 1, 2, 3);$$

ε подбирается так, чтобы D_0 была плавно меняющейся и $|D_1| \ll D_0$, начальное приближение — $\varepsilon \simeq \mu^{1/2}$; если не удается подобрать, то делаем вывод, что для данного участка океана метод не годится.

Осредненное уравнение

Если принять в качестве гипотезы, что

- Горизонтальный размер бассейна $L \sim 1000$ км
- Горизонтальный размеры источника $l \sim 100$ км
- Средняя глубина океана $d \sim 4$ км
- Высота и горизонтальные размеры хаотических неровностей донного рельефа $d_1 \sim 0.5$ км, $l_1 \sim 10$ км соответственно

то для параметров получаются ориентировочные значения

$$h := l/L = 0.1, \quad \delta := d_1/d = 0.125, \quad \mu := l_1/L = 0.01,$$
$$\text{т. е.} \quad \mu, \delta, h \ll 1, \quad h \asymp \delta \asymp \sqrt{\mu}.$$

Малость отношения $d/l \approx 0.04$ здесь не требуется, но необходима для того, чтобы уравнения мелкой воды можно было использовать.

Осредненное уравнение

Предположим, что выполнены условия

$$h \sim \mu^{1/2}, \qquad \delta \sim \mu^{1/2}.$$

Тогда метод дает осредненное уравнение вида

$$\eta_{tt} - \nabla(D_0(x)\nabla\eta) = 0$$

— решения (в т.ч. асимптотические) исходной задачи Коши близки к соответствующим решениям задачи Коши для осредненного уравнения с теми же начальными данными (теорему сформулируем далее).

При других соотношениях между h, μ, δ в осредненном уравнении возникают дисперсионные члены (об этом также поговорим позже).

Математическая теория

Основное предположение запишем теперь в виде

$$\boxed{D(x,\mu) = D_0(x,\mu) + \delta D_1(x,\mu),}$$

явно выделяя параметр δ, где $D_0(x,\mu)$ — *медленно меняющаяся* (*неосциллирующая*), а $D_1(x,\mu)$ — *быстро меняющаяся* (μ-*осциллирующая*):

$$\left|\frac{\partial^\alpha D_0}{\partial x^\alpha}(x,\mu)\right| \le C_\alpha, \quad \left|\frac{\partial^\alpha D_1}{\partial x^\alpha}(x,\mu)\right| \le C_\alpha \mu^{-\alpha}, \qquad |\alpha| = 0, 1, 2, \ldots$$

Замена усреднения по быстрым переменным

Определение

μ-осциллирующая функция f локально усреднима, если

$$[\varphi \underset{\gamma}{*} f](x,\mu) := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) f(x-\mu^\gamma \xi,\mu)\,d\xi$$

— неосциллирующая $\forall \gamma \in (0,1)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (пространство Шварца).
Локальное среднее функции f определяется как $\mathrm{E}[f] = \varphi \underset{\gamma}{*} f$, где

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1, \quad \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \varphi(x)\,dx = 0, \quad |\alpha| = 1,2,\dots$$

1. $\mathrm{E}[f]$ корректно определено $\bmod O(\mu^\infty)$ $\boxed{\text{далее } O(\mu^{\cdots}) \text{ не пишем}}$
2. $\mathrm{E}[f(x,x/\mu)] = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x,y)\,dy$ для f периодической по y
3. $\mathrm{E}[f] = f$, $\mathrm{E}[fg] = f\,\mathrm{E}[g]$ для неосциллирующих функций f
4. $\mathrm{E}[\nabla f] = \nabla \mathrm{E}[f]$

Основное уравнение процедуры осреднения

Проведем процедуру осреднения для оператора

$$\widehat{\mathcal{H}} = -\mu^2\langle\nabla, c^2(x)\nabla\rangle = -\mu^2\langle\nabla, D(x,\mu)\nabla\rangle$$
$$= \langle\widehat{p}, D_0(x,\mu)\widehat{p}\rangle + \delta\langle\widehat{p}, D_1(x,\mu)\widehat{p}\rangle =: \widehat{\mathcal{H}}_0 + \delta\widehat{\mathcal{H}}_1, \quad \widehat{p} = -i\mu\nabla$$

(пространственная часть волнового оператора, умноженная на μ^2)

Ключевое уравнение: $\boxed{g = 1}$

$$\boxed{\widehat{\mathcal{H}}\,\widehat{\chi} = \widehat{\chi}\,\widehat{\mathcal{L}} + \widehat{\mathcal{R}}} \qquad (\widehat{\mathcal{R}} = \text{остаток})$$

где $\widehat{\chi}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ — неизвестные μ-дифференциальные операторы, коэффициенты у $\widehat{\chi}$, $\widehat{\mathcal{R}}$ μ-осциллирующие, а у $\widehat{\mathcal{L}}$ — неосциллирующие.

- Эта процедура напоминает приведение к нормальной форме.
- После того, как $\widehat{\chi}$ и $\widehat{\mathcal{L}}$ найдены, задача для оператора $\mu^2\partial_t^2 - \widehat{\mathcal{H}}$ сводится к задаче для $\mu^2\partial_t^2 - \widehat{\mathcal{L}}$, к которой применим канонический оператор.

Рекурсивная система гомологических уравнений

Ищем $\widehat{\chi}$ и $\widehat{L}$ в виде μ-дифференциальных операторов

$$\hat{\chi} = \chi\Big(\overset{2}{x}, -i\mu\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}\Big), \qquad \widehat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}\Big(\overset{2}{x}, -i\mu\frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x}\Big)$$

с символами $\chi = 1 + \delta\chi_1(x,p,\mu) + \delta^2\chi_2(x,p,\mu) + \cdots,$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(x,p,\mu) + \delta\mathcal{L}_1(x,p,\mu) + \delta^2\mathcal{L}_2(x,p,\mu) + \cdots$$

Подставляем это в ключевое уравнение:

$$(\widehat{\mathcal{H}}_0 + \delta\widehat{\mathcal{H}}_1)(1 + \delta\widehat{\chi}_1 + \delta^2\widehat{\chi}_2 + \cdots) = (1 + \delta\widehat{\chi}_1 + \delta^2\widehat{\chi}_2 + \cdots)(\widehat{\mathcal{L}}_0 + \delta\widehat{\mathcal{L}}_1 + \delta^2\widehat{\mathcal{L}}_2 + \cdots)$$

Далее раскрываем скобки, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях δ, переходим к символам. Получаем систему:

$$\mathcal{H}_0 - \mathcal{L}_0 = 0, \qquad (\Longrightarrow \mathcal{L}_0 = \mathcal{H}_0)$$
$$\mathcal{H}_0 \diamond \chi_1 - \chi_1 \diamond \mathcal{H}_0 = \mathcal{L}_1 - \mathcal{H}_1,$$
$$\mathcal{H}_0 \diamond \chi_2 - \chi_2 \diamond \mathcal{H}_0 = \mathcal{L}_2 - \mathcal{H}_1 \diamond \chi_1 + \chi_1 \diamond \mathcal{L}_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Здесь $\diamond$ — это "скрученное произведение" символов: $\widehat{A \diamond B} = \widehat{A}\widehat{B}$,

$$(A \diamond B)(x,p,\mu) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{(-i\mu)^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha A}{\partial p^\alpha}(x,p,\mu) \frac{\partial^\alpha B}{\partial x^\alpha}(x,p,\mu)$$

В левой части уравнений системы (начиная со второго) стоит символ коммутатора $[\widehat{\mathcal{H}}_0, \widehat{\chi}_j]$, однако его главная часть не выражается через скобку Пуассона (так как символ χ_j быстроосциллирующий). В действительности

$$\mathcal{H}_0 \diamond \chi_k - \chi_k \diamond \mathcal{H}_0 = \widehat{P}\chi_k + \text{мл. члены}, \qquad \widehat{P} = -\mu^2 D_0(x)\Delta.$$

Итак, в старшем порядке по μ имеем

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_0 - \mathcal{L}_0 = 0, \qquad\qquad (\Longrightarrow \mathcal{L}_0 = \mathcal{H}_0) \\
&\widehat{P}\chi_1 = \mathcal{L}_1 - \mathcal{H}_1, \\
&\widehat{P}\chi_2 = \mathcal{L}_2 - \mathcal{H}_1 \diamond \chi_1 + \chi_1 \diamond \mathcal{L}_1 \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&\widehat{P} = -\mu^2 D_0(x)\Delta
\end{aligned}
$$

Усредняя второе уравнение, получаем $\mathcal{L}_1 = \mathrm{E}[\mathcal{H}_1]$ (опять же в старшем порядке по μ).

Решить рекурсивную систему можно, если

1. Условие $\mathrm{E}[v] = 0$ не только необходимо, но и достаточно для разрешимости уравнения $\widehat{P}u = v$
2. Встречающиеся произведения усреднимых функций усреднимы.

Алгебры локально усреднимых функций

Мы видим, что процедура осреднения включает в себя произведения локально усреднимых функций и требует, чтобы они снова были локально усреднимыми (что, как правило, не так). Таким образом, нам необходимо следующее определение:

Определение

Регулярная алгебра — это алгебра $\mathscr{A}$ локально усреднимых функций $f(x,\mu)$ (относительно поточечного умножения), содержащая все неосциллирующие функции и инвариантная относительно μ-дифференцирований, т.е. если $f \in \mathscr{A}$, то

$$\widehat{p}_j f \equiv -i\mu \frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathscr{A}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Примеры регулярных алгебр

1. **Тривиальный пример:** алгебра всех осциллирующих функций вида $f(x,\mu) = F(x, x/\mu)$, где F гладкая по (x,y) и 2π-периодическая по y.

2. **Почти периодические функции быстрых переменных.** Алгебра осциллирующих функций $f(x,\mu) = F(x, x/\mu)$, где F — почти периодическая по y с заданным диофантовым набором частот $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^n$ для некоторого $s > 0$ удовлетворяют условию

$$\|k \cdot b\| \geq C\|k\|^{-s}, \quad k \in \mathbb{Z}^m \backslash \{0\}, \quad \text{где} \quad k \cdot b := \sum_{j=1}^{m} k_j b_j$$

(справедливо для п.в. $b \in \mathbb{R}^{mn}$: теорема Хинчина–Грошева). Функции

$$f(x,\mu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} F_k(x) e^{\frac{i}{\mu}\langle k \cdot b, x\rangle}, \qquad \left|F_k^{(\alpha)}\right| \leq C_{N\alpha}(1 + \|k\|)^{-N} \;\; \forall |\alpha|, N,$$

образуют регулярную алгебру, и $\mathrm{E}(f) = F_0(x,\mu) + O(\mu^\infty)$.
Случай F_k, не зависящих от x, был рассмотрен С. М. Козловым (1978).

Разрешимость гомологического уравнения

Теорема

Пусть $\mathscr{A}$ *— одна из регулярных алгебр, приведённых в предыдущих примерах, и пусть* $\widehat{P}$ *— равномерно эллиптический оператор с неосциллирующими коэффициентами. Тогда для* $v \in \mathscr{A}$ *условие* $\mathrm{E}[v] = O(\mu^\infty)$ *необходимо и достаточно для разрешимости уравнения* $\widehat{P}u = v \bmod O(\mu^\infty)$ *в классе функций* $u \in \mathscr{A}$ *с* $\mathrm{E}[u] = O(\mu^\infty)$.

Эта теорема применима к бассейну без берегов. Если

$$D_0(x,\mu) \geq C > 0,$$

то оператор

$$\widehat{P} = -\mu^2 D_0(x,\mu)\Delta$$

равномерно эллиптичен, и цепочка гомологических уравнений оказывается разрешимой.

Результаты для уравнений мелкой воды

Предположим, что три малых параметра удовлетворяют условиям

$$h \sim \mu^{1/2}, \qquad \delta \sim \mu^{1/2}.$$

Пусть η — решение исходной задачи Коши, а v — решение усредненной задачи (с теми же начальными данными)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mathrm{E}[D](x,\mu)\operatorname{grad} v) = 0, \quad v|_{t=0} = V_0\Big(\frac{x}{h}\Big), \quad v_t|_{t=0} = \frac{1}{h} V_1\Big(\frac{x}{h}\Big),$$

где $\mathrm{E}[D](x,\mu) = D_0(x,\mu) + \delta\mathrm{E}[D_1](x,\mu)$. Тогда

Теорема

$$\sup_{t\in[0,T]} \big(\|\eta - v\|_1 + \|\eta_t - v_t\|_0\big) = O(\delta).$$

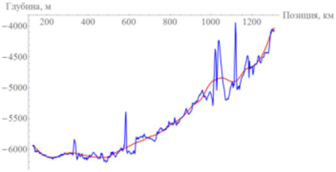
($\|\cdot\|_s$ — норма в пространстве Соболева $W_2^s(\mathbb{R}^2)$.)

Примеры вычислений

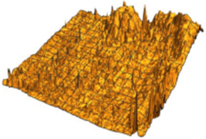
Усреднение участков дна мирового океана

Регион вблизи побережья Японии (землетрясение 2011 года магнитудой 9.0)

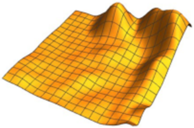
(a) Рассматриваемый участок. Прямая для 1D, квадрат для 2D



(a) Профиль дна 1D: исходный (синий) и усредненный(красный) при ϵ= 0.09

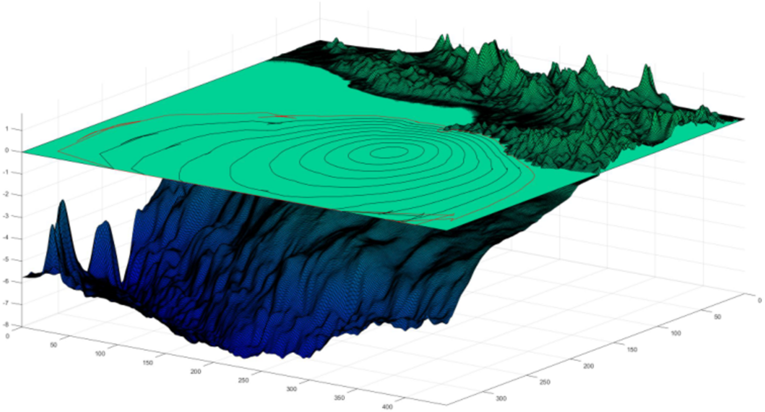


(b) Профиль дна 2D: исходный

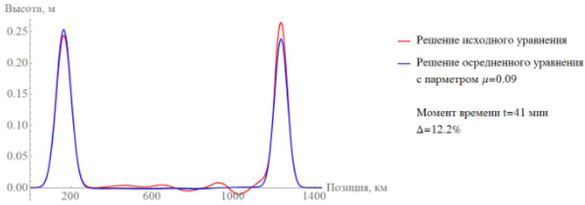


(b) Профиль дна 2D: усреднённый при $\epsilon = 0.09$

Фронты волн


1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
0
50
100
150
200
250
300
350
400
0
50
100
150
200
250
300

Результаты решения задачи Коши



Двумерный случай: пример решения при $t = 17$ минут ($\epsilon = 0.09$, $\Delta = 13.1\%$)

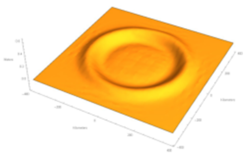


Рис. 3:
Исходное решение

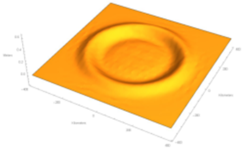


Рис. 4:
Сглаженное решение

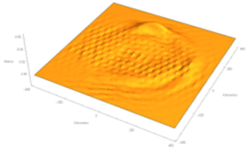


Рис. 5:
Модуль разности
(масштаб увеличен в 10 раз)

Приближения более высокого порядка

При других соотношениях между μ, δ и h осреднённое уравнение будет включать члены более высокого порядка. Например, при $h \sim \mu^{8/9}$, $\delta \sim \mu^{2/3}$ осреднённое уравнение второго приближения имеет вид (предполагая, что $E[D_1] = 0$)

$$\mu^2 \eta_{tt} - \mu^2 \langle \nabla, D_0 \nabla \rangle \eta + \delta^2 L\left(\overset{2}{x}, -i\mu \overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right)\eta = 0, \quad \text{где}$$

$$L(x,p) = -\frac{1}{D_0}\mathrm{E}\Big[D_1 \cdot \frac{\langle p, \widehat{p}\rangle^2}{\widehat{p}^2} D_1 - \\ - \left(p^2 - \frac{2\langle p, \widehat{p}\rangle^2}{\widehat{p}^2}\right) D_1 \cdot \frac{1}{\widehat{p}^2} \left(p^2 - \frac{2\langle p, \widehat{p}\rangle^2}{\widehat{p}^2}\right) D_1 \Big],$$

и $\widehat{p}^{-2} v$ — решение уравнения

$$\widehat{p}^2 u = v \in \mathscr{A}, \qquad \mathrm{E}[v] = 0.$$

- Точные значения малых параметров μ и δ не имеют физического смысла, не могут быть определены по $D(x)$ и не используются в реализации метода осреднения.
- Для выполнения расчётов необходим лишь радиус усреднения ε, который можно подобрать следующим образом: в интервале малых значений ε отыскивается подынтервал, в котором усреднённая функция плавно меняется и не зависит от ε, и середина этого подынтервала принимается за значение радиуса осреднения. Отсутствие такого интервала говорит о том, что рассматриваемая функция не усреднима.
- Требование принадлежности коэффициентов алгебре усреднимых функций удобно в теории, но непроверяемо на практике. В действительности в каждом конкретном случае достаточно проверить усреднимость произведений, входящих в формулы.

О решении уравнения $\widehat{p}^2\psi = u$, где $\mathrm{E}[u] = 0$.

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2+\varepsilon^2-\varepsilon^2} = \frac{1}{p^2+\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\varepsilon^2}{p^2+\varepsilon^2}}$$

$$= \frac{1}{p^2+\varepsilon^2}\left(1+\varepsilon^2\frac{1}{p^2+\varepsilon^2}+\varepsilon^4\frac{1}{(p^2+\varepsilon^2)^2}+\dots\right)$$

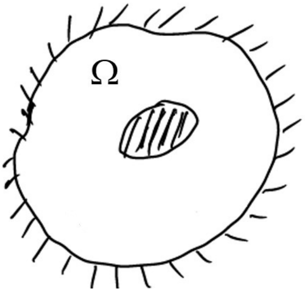
$$\left[\frac{1}{\hat{p}^2+\varepsilon^2}u\right](x) = \mu^{-2}\int_{\mathbb{R}^2} K\left(\frac{x-y}{\mu}\right)u(y)dy, \quad K(\xi) = \frac{1}{2\pi}K_0(\varepsilon|\xi|),$$

K_0 — модифицированная функция Бесселя второго рода. Итак,

$$\left[\frac{1}{\hat{p}^2+\varepsilon^2}u\right](x) = \frac{1}{2\pi\varepsilon^2}\int_0^\infty \rho K_0(\rho)\left(\int_0^{2\pi} u\left(x-\frac{\mu}{\varepsilon}\rho\mathbf{n}(\phi)\right)d\phi\right)d\rho,$$

где $\qquad \mathbf{n}(\phi) = \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}.$

Вырождение на границе: квазиклассическая асимптотика



Если рассматриваются волны в ограниченном бассейне, то $D(x) = 0$ на границе, и уравнение вырождается.

- **Основная трудность**: траектории гамильтоновой системы достигают границы за конечное время и уходят на бесконечность по импульсам
- **Униформизация**: переход к «менее вырожденному» уравнению на трехмерном многообразии без края
- Возможна, если $D(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $D(x) > 0$ в Ω, $D(x) = 0$, $\nabla D(x) \neq 0$ на $\partial\Omega$ (“пологий берег”)

Пример подъема

Рассмотрим вырожденное волновое уравнение ($D(x) = x_1$)

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1\frac{\partial\eta}{\partial x_1}\right) - x_1\frac{\partial^2\eta}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2_+ = \{(x_1, x_2) \colon x_1 \geq 0\}.$$

Тогда $N(y_1, y_2, y_3, t) = \eta((y_1^2 + y_2^2)/4, y_3, t)$ — инвариантное относительно поворотов решение уравнения

$$\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 N}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 N}{\partial y_2^2} - (y_1^2 + y_2^2)\frac{\partial^2 N}{\partial y_3^2} = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \ni y.$$

Уравнение все еще вырождено, но

- Пространственная часть волнового оператора является гипоэллиптической по Хёрмандеру, что обеспечивает единственность и подходящие оценки решения.
- Траектории гамильтониана $H_0(y, p) = p_1^2 + p_2^2 + (y_1^2 + y_2^2)p_3^2$ вне нулевого уровня $\{H_0 = 0\}$ бесконечно продолжимы, что позволяет строить асимптотические решения задачи Коши.

Осреднение в случае вырождения на границе

Предположим, что $\boxed{D(x,\mu) = D_0(x,\mu) + \delta D_1(x,\mu)}$ причем

- D_0 неосциллирующая и удовлетворяет условию пологости берега
- $D_1(x,\mu) = D_0(x,\mu) \times$ (μ-осциллирующая функция)

Процедура подъема даёт оператор $\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{\mathcal{H}}_0 + \delta\widehat{\mathcal{H}}_1$, где $\widehat{\mathcal{H}}_0$ — гипоэллиптический по Хёрмандеру оператор. В гомологическом уравнении оператор $\widehat{P}$ не является эллиптическим (он имеет тот же главный символ H_0, что и $\widehat{\mathcal{H}}_0$), но всё равно можно гарантировать, что

$$\widehat{\mathcal{H}}\,\widehat{\chi} = \widehat{\chi}\,\widehat{\mathcal{L}} + \widehat{\mathcal{R}},$$

где символ $R(x,p,\mu)$ оператора $\widehat{\mathcal{R}}$ удовлетворяет условию

$$R(x,p,\mu) = 0 \text{ вне окрестности множества } \operatorname{char}\widehat{\mathcal{H}}_0 = \{H_0(x,p) = 0\}.$$

Если ψ является квазиклассическим асимптотическим решением уравнения $(-\mu^2\partial_t^2 + \widehat{\mathcal{L}})\psi = 0$, соответствующим лагранжеву многообразию, которое не пересекается с $\operatorname{char}\widehat{\mathcal{H}}_0$, то $\widehat{\chi}\psi$ является асимптотическим решением исходной задачи.

Некоторые публикации

- С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, Б. Тироцци, Доклады академии наук, **461** (5), 516–520 (2015).
- Д. А. Караева, А. Д. Караев, В. Е. Назайкинский, Дифф. уравн., **54** (8), 1075–1089 (2018).
- S. Yu. Dobrokhotov and V. E. Nazaikinskii, in: Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics, Birkhäuser, Cham (2022), pp. 77–102.
- S. Yu. Dobrokhotov and V. E. Nazaikinskii, J. Math. Sci. **286** (1), 46–67 (2024).
- С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, готовится к печати (2026).

Спасибо за внимание!